К расчету термических напряжений при конвективном нагреве пластины

ГОРБУНОВ А.Д.

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве плоских тел. Ключевые слова: аналитический расчет, нагрев, термическое напряжение, пластина.

Розроблено інженерну методику аналітичного розрахунку термічних напружень при конвективному нагріванні плоских тіл. Ключові слова: аналітичний розрахунок, термічні напруження, нагрівання, пластина

The article represents the developed engineering technique of thermal tension during convective heating of flat bodies. Key words: analytical calculations, heating, thermal tension, flat.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Без знания температурных полей и термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить рациональные энерго- и материалосберегающие тепловые и температурные режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, сушильных установок, химических реакторов и т. п. При значительных скоростях нагрева в пластине могут возникать термические напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_c

$$\tilde{\sigma}(X,\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta(X,\mathrm{Fo}), \tag{1}$$

на поверхности при X=1

$$\tilde{\sigma}_n(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_n(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \tag{2}$$

и в центре пластины при X=0

$$\tilde{\sigma}_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) - \theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \tag{3}$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \le \tilde{\sigma} \le 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0/(1-\nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры:

в любой точке $X = x/R_0$

$$\theta(X,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot (\cos\mu_n X / \cos\mu_n) e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}}, \tag{4}$$

на поверхности

$$\theta_{\text{п}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot \mathrm{e}^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}}, \tag{5}$$

в центре

$$\theta_{\text{ц}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot \mathrm{e}^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}} \tag{6}$$

и среднемассовая

$$\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot \mathrm{e}^{-\mu_n^2 \cdot \mathrm{Fo}}, \tag{7}$$

где $\theta(\mathrm{Fo}) = (t(\tau) - t_c)/\Delta t_0$; $\Delta t_0 = t_0 - t_c$; t_0 — начальная температура тела, °C; Fo= $a\tau/R_0^2$- число Фурье; Bi=$\alpha R_0/\lambda$ – число Био; $P_n(\mu_n) = 2\mathrm{Bi}/\left[\mathrm{Bi}(\mathrm{Bi}+1) + \mu_n^2\right]$ – тепловая амплитуда; $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n)/\cos\mu_n$; $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot \mathrm{Bi}/\mu_n^2$; $C_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$; $D_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - P_n(\mu_n)$; μ_n – собственные числа, определяемые характеристическим уравнением:

$$\mathrm{ctg}\mu_n = \mu_n/\mathrm{Bi}. \tag{8}$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), можно получить формулу связи между термонапряжениями в центре и на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(\mathrm{Fo}) = -\Delta\theta(\mathrm{Fo}) + \tilde{\sigma}_{\text{ц}}(F_0), \tag{9}$$

где относительный перепад температур получается путем вычитания из (5) уравнения (6)

$$\Delta\theta(\mathrm{Fo}) = \theta_{\text{п}} - \theta_{\text{ц}} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 \mathrm{Fo}} \tag{10}$$

в котором $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$.

Из анализа уравнений (2), (3), (9) и (10) следует, что динамика изменения напряжений во времени аналогична изменению температурной разности, т.е. резко возрастают, достигая максимального значения при числах Фурье $\mathrm{Fo}_{\max}$=0,05…0,50, а затем постепенно падают, т.е. носят колоколообразный характер.

На практике иногда важнее знать не всю динамику изменений напряжений во времени, а только их максимально возможные характерные величины. Целью данной работы является аналитическое определение указанных величин.

Изложение материалов исследования. Дифференцируя уравнения (2), (3) и (10) по времени, приравнивая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулы для расчёта максимальных времен Фурье:

для максимального термического напряжения на поверхности

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.п}} = (1/a)\ln(1/b_n), \tag{11}$$

перепада температур

$$\mathrm{Fo}_{\max} = \frac{1}{a}\ln\frac{1}{b} \tag{12}$$

и термонапряжения в центре

$$\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}} = (1/a)\ln(1/b_{\text{ц}}), \tag{13}$$

где $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$; $b_n = -\delta D_1/D_2$; $b_{\text{ц}} = -\delta C_1/C_2$; $b = -\delta E_1(\mu_1)/E_2(\mu_2)$; $\delta = (\mu_1/\mu_2)^2$.

Здесь и далее под E_i понимается амплитуда $E_i(\mu_i)$.

Подставляя Fo_{max} из (12) в уравнение (10), получим максимальный перепад температур с учётом двух членов ряда:

$$\Delta\theta_m = E_1 e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}_{max}}\left(1 + E_1/E_2 \cdot e^{-a\mathrm{Fo}_{max}}\right) = (1-\delta)E_1(\mu_1) e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}_{max}}. \tag{14}$$

При выводе (14) было учтено, что согласно уравнению (12) $\exp(-a\mathrm{Fo}_{max}) = b$.

По аналогии подставляя $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}$ в уравнение (2), получим максимальное термическое напряжение на поверхности

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.п}} = (1-\delta)D_1 \cdot e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}_{\text{м.п}}} \qquad (15)$$

и после подстановки (13) в (3) — максимальное напряжение в центре пластины

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.ц}} = (1-\delta)C_1 e^{-\mu_1^2 \mathrm{Fo}_{\text{м.ц}}}. \qquad (16)$$

Анализ полученных решений. Формулы (11)…(13) однотипны и могут быть описаны одним уравнением

$$\mathrm{Fo}_{m.j} = (1/a)\ln(1/b_j). \qquad (17)$$

При $j = 1, 3$ имеем расчет напряжений на поверхности и в центре, а при $j = 2$ — перепада температур. После определения максимальных времен можно найти соответствующие температуры при этих числах Фурье с учетом двух членов ряда.

Подставляя $\mathrm{Fo}_{m.j}$ в уравнение (5), получим температуру поверхности

$$\theta_{\text{п}.j} = (P_1 + b_j P_2)\exp\left(-\mu_1^2 \cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \qquad (18)$$

в (6) — температуру центра

$$\theta_{\text{ц}.j} = (C_1 + b_j C_2)\exp\left(-\mu_1^2 \cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \qquad (19)$$

в соотношение (7) — среднемассовую

$$\theta_{\text{ср}.j} = (M_1 + b_j M_2)\exp\left(-\mu_1^2 \cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right), \qquad (20)$$

и в (10) перепад температур

$$\Delta\theta_j = (E_1 + b_j E_2)\exp\left(-\mu_1^2 \cdot \mathrm{Fo}_{m.j}\right). \qquad (21)$$

Наибольшую и основную трудность при практических расчётах по уравнениям (1)…(21) представляет определение по соотношению (8) бесчисленного множества корней. В работе [2] приведена общая формула для расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}, \qquad (22)$$

где $D = k\mathrm{Bi}/m$; $m = 1 + \mathrm{Bi}/(k+2)$ — коэффициент термической массивности; $\gamma = \left(1 + \sqrt{1+4\rho}\right)/2$; $\rho = D^2/\left[k(k+2)^2(k+4)\right]$; k — коэффициент геометрической формы, равный 1 – для пластины, 2 – цилиндра и 3 – шара.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева – при больших и малых числах Био [3].

При малых числах Био ($\mathrm{Bi} < 3$)

$$\mu_n = b_{n-1} + z_n, \qquad (23)$$

где $z_n = G_1/\gamma$; $G_1 = \mathrm{Bi}/b_n$; $\rho_1 = G_1^2/D$; $b_n = n \cdot \pi$; $n = 1,2,3,...$

При больших числах Био ($\mathrm{Bi} \geq 3$)

$$\mu_n = a_n - G_2/\gamma \approx a_n\left(1 - \beta(1-\beta)\right), \qquad (24)$$

где $G_2 = a_n/(1+\mathrm{Bi})$; $\rho_2 = G_2^2/3$; γ — см. уравнение (22); $a_n = (2n-1)\pi/2$; $\beta = 1/\mathrm{Bi}$.

При выводе (24) было учтено, что при малых аргументах $1/(1+x) \approx 1 - x$.

В двух предельных случаях — малые и большие числа Био, полученные решения значительно упрощаются. Предварительно упростим расчет тепловой амплитуды $A(\mu_n)$. Используя тригонометрическое тождество $1/\cos x = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x}$ и характеристическое уравнение (8), можно записать

$$1/\cos\mu_n = (-1)^{n+1} \cdot \sqrt{1 + m_n \cdot \mathrm{Bi}}, \qquad (25)$$

где $m_n = \mathrm{Bi}/\mu_n^2$ — n-ный коэффициент термической массивности. С учетом последнего выражения тепловая амплитуда, входящая в уравнение (6) определения температуры центра пластины станет

$$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n)(-1)^{n+1}\sqrt{1 + m_n \mathrm{Bi}}. \qquad (26)$$

Теперь получим упрощенные выражения для других амплитуд в двух предельных случаях.

Асимптотика при малых числах Био. Первый корень уравнения (8) вычисляем по соотношению (22) при $\gamma \cong 1$ и $m_1 = 1 + \mathrm{Bi}/3$, а второй — по (23). Тогда отношение собственных чисел или коэффициентов термической массивности

$$\delta = (\mu_1/\mu_2)^2 = m_2/m_1 = x/[(1+2x) \cdot m_1] \approx x(1 - \mathrm{Bi}/3), \qquad (27)$$

где $x = \mathrm{Bi}/\pi^2$.

Разность квадратов корней $a = \mu_2^2 - \mu_1^2 = \pi^2 - \mathrm{Bi}(1 - 2/\pi) \approx \pi^2$.

Первая амплитуда, входящая в уравнение (5) температуры поверхности

$$P_1 = 2/(1 + \mathrm{Bi} + 1/m_1) \approx 1/m_1 \approx 1 - \mathrm{Bi}/3. \qquad (28)$$

По аналогии вторая $P_2 = 2/(1 + \mathrm{Bi} + 1/m_2) \approx 2m_2 = 2\delta m_1$ и

$$P_n(\mu_n) = 2/(1 + \mathrm{Bi} + 1/m_n). \qquad (29)$$

Амплитуда A_1 согласно уравнению (26) и с учетом того, что при малых аргументах $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$:

$$A_1 = P_1\sqrt{1 + m_1\mathrm{Bi}} \approx P_1(1 + m_1\mathrm{Bi}/2) \approx 1 + \mathrm{Bi}/6. \qquad (30)$$

Амплитуда $A_2 = -P_2\sqrt{1 + m_2\mathrm{Bi}} \approx -P_2(1 + \delta m_1\mathrm{Bi}/2) \approx -P_2$.

Для среднемассовой температуры:

$$M_1 = P_1 \cdot m_1 \approx 1 - \mathrm{Bi}^2/9 \text{ и } M_2 = P_2 \cdot m_2 = P_2 \cdot \delta m_1. \qquad (31)$$

Для перепада температур по уравнению (10)

$$\begin{gathered} E_1 = P_1 - A_1 = P_1\left(1 - \sqrt{1 + m_1\mathrm{Bi}}\right) \approx \\ = -P_1 m_1 \mathrm{Bi}/2 \approx -\mathrm{Bi}\left(1 - \mathrm{Bi}^2/9\right)/2 \approx -\mathrm{Bi}/2, \end{gathered} \qquad (32)$$

$$E_2 = P_2\left(1 + \sqrt{1 + m_2\mathrm{Bi}}\right) \approx 2P_2(1 + \delta m_1\mathrm{Bi}/4) \cong 2P_2.$$

Для термических напряжений в центре пластины по (3)

$$\begin{gathered} C_1 = M_1 - A_1 = P_1\left(m_1 - \sqrt{1 + m_1\mathrm{Bi}}\right) \approx -P_1 \cdot \mathrm{Bi}/6, \\ C_2 = P_2\left(m_2 + \sqrt{1 + m_2\mathrm{Bi}}\right) \approx P_2\left(1 + \delta m_1(1 + \mathrm{Bi}/2)\right). \end{gathered} \qquad (33)$$

Для термонапряжений на поверхности

$$\begin{gathered} D_1 = M_1 - P_1 = \mathrm{Bi}(3 - P_1)/6 \approx \mathrm{Bi}(1 + \mathrm{Bi}/6)/3, \\ D_2 = -P_2\left(1 - \delta m_1(1 - \mathrm{Bi})\right). \end{gathered} \qquad (34)$$

С целью проверки амплитуды D можно использовать равенство $D = C - E$.

Выражения для расчета максимальных времен по уравнению (17) также упростятся.

Коэффициент поверхности $(j=1)$

$$b_{\text{п}} = -\delta D_1/D_2 = \text{Bi}(1-\text{Bi}/6)/6 \approx \text{Bi}/6,$$

для перепада температур $(j=2)$

$$b = -\delta E_1/E_2 = \text{Bi}(1-\text{Bi}/3)/8 \approx \text{Bi}/8 \qquad (35)$$

и центра $(j=3)$

$$b_{\text{ц}} = -\delta C_1/C_2 = \text{Bi}(1-2\text{Bi}/3)/12 \approx \text{Bi}/12.$$

Анализ уравнений (17) и (35) позволяет сделать вывод о том, что максимум величин наступает в последовательности $j=1,2,3$ и с ростом числа Био эти времена уменьшаются.

Для оценки различия максимальных времен составим их разности:

$$\begin{aligned}\Delta\text{Fo}_1 &= \text{Fo}_{max} - \text{Fo}_{\text{м.п}} = (1/a)\ln(4(1+\text{Bi}/6)/3) \approx \\ &\approx \left(1/\pi^2\right)\ln 4/3 = 0{,}029148;\\ \Delta\text{Fo}_2 &= \text{Fo}_{\text{м.ц}} - \text{Fo}_{max} = (1/a)\ln(3(1+\text{Bi}/3)/2) \approx \\ &\approx \left(1/\pi^2\right)\ln 3/2 = 0{,}04108\end{aligned} \qquad (36)$$

и

$$\begin{aligned}\Delta\text{Fo}_3 &= \text{Fo}_{\text{м.ц}} - \text{Fo}_{\text{м.п}} \equiv \Delta\text{Fo}_1 + \Delta\text{Fo}_2 = \\ &= (1/a)\ln(2(1+\text{Bi}/2)) \approx \left(1/\pi^2\right)\ln 2 = 0{,}0702.\end{aligned}$$

Из (36) следует, что с ростом числа Био различия максимальных времен увеличиваются, вплоть до $\Delta\text{Fo}_3 = 0{,}117$ – см. уравнение (44).

На практике технологов интересует вопрос — насколько термические напряжения на поверхности тела больше, чем в его середине. Обозначим их отношение $R = \sigma_{\text{п}}/\sigma_{\text{ц}}$. Наиболее просто R можно найти в стадии регулярного режима нагрева (РРН), который наступает при числах Фурье $\text{Fo} > 0{,}3$ и когда вместо бесконечных сумм в уравнениях (2)…(10) можно ограничиться одним членом ряда. Тогда, деля уравнение (2) на (3) и учитывая упрощенные соотношения (33) и (34), получим

$$\begin{aligned}R &= \tilde{\sigma}_{\text{п}}/\tilde{\sigma}_{\text{ц}} = D_1/C_1 = -2(1+\text{Bi}/6)/P_1 \approx \\ &\approx -2(1+Bi/2) \approx -2.\end{aligned} \qquad (37)$$

Асимптотика при больших числах Био. Теперь корни μ_n находим по уравнению (24). Тогда отношение

$$\delta = \left(1-4\pi^2\beta^3/3\right)/9 \approx 1/9. \qquad (38)$$

Разность квадратов корней

$$a = 2\pi^2(1-B)^2, \qquad (39)$$

где $\beta = 1/\text{Bi}$; $B = \beta(1-\beta)$.

Амплитуды:

$$P_1 = 2\beta/\left(1+\beta+z^2\right) \approx 2\beta\left(1-\beta-z^2\right) \approx 2B;$$

$$P_2 = 2\beta\left(1-\beta-9z^2\right) \approx 2B \cong P_1,$$

где $z = \mu_1/\text{Bi} = a_1 \cdot B$; $a_1 = \pi/2$.

$$A_1 = A_{1.\infty}\cdot\sqrt{1-z^2} \approx A_{1.\infty}\cdot\left(1-z^2/2\right);$$

$$A_2 = A_{2.\infty}\cdot\sqrt{1-9z^2} \approx A_{2.\infty}\cdot\left(1-9z^2/2\right),$$

где $A_{1.\infty} = 2/a_1 = 4/\pi = 1{,}273240$ и $A_{2.\infty} = -A_{1.\infty}/3 = -0{,}424413$ — амплитуды при $\text{Bi} = \infty$.

$M_1 = M_{1.\infty}(1+\beta)$; $M_2 = M_{2.\infty}(1+\beta)$, где $M_{1.\infty} = 2/a_1^2 = 8/\pi^2 = 0{,}810569$; $M_{2.\infty} = M_{1.\infty}/9$.

$$C_1 = M_{1.\infty}(1+\beta) - A_{1.\infty}\cdot\sqrt{1-z^2};$$

$$C_{1.\infty} = M_{1.\infty} - A_{1.\infty} = 2(1-a_1)/a_1^2 = -0{,}462670;$$

$$C_2 = M_{2.\infty}(1+\beta) - A_{2.\infty}\cdot\sqrt{1-9z^2};$$

$$C_{2.\infty} = M_{2.\infty} - A_{2.\infty} = 2(3a_1+1)/\left(9a_1^2\right) = 0{,}514476.$$

$$E_1 = 2B - A_{1.\infty}\sqrt{1-z^2}; \quad E_{1.\infty} = -A_{1.\infty};$$

$$E_2 = 2B - A_{2.\infty}\sqrt{1-9z^2}; \quad E_{2.\infty} = -A_{2.\infty} = A_{1.\infty}/3.$$

$$D_1 = M_1 - P_1 = M_{1.\infty}(1+\beta) - 2B; \quad D_{1.\infty} = M_{1.\infty};$$

$$D_2 = M_{2.\infty}(1+\beta) - 2B;$$

$$D_{2.\infty} = \delta\cdot M_{1.\infty} = M_{1.\infty}/9 = 0{,}0900633$$

Теперь коэффициенты для расчета максимальных времен примут вид:

$$b_{\text{п}} = \frac{\delta\left[M_{1.\infty}(1+\beta) - 2B\right]}{-\text{M}_{2.\infty}(1+\beta) + 2B}; \qquad (40)$$

$$b = \frac{\delta\left[A_{1.\infty}\sqrt{1-z^2} - 2B\right]}{-\text{A}_{2.\infty}\sqrt{1-9z^2} + 2B}; \qquad (41)$$

$$b_{\text{ц}} = \frac{\delta\left[A_{1.\infty}\sqrt{1-z^2} - M_{1.\infty}(1+\beta)\right]}{-\text{A}_{2.\infty}\sqrt{1-9z^2} + M_{2.\infty}(1+\beta)}; \qquad (42)$$

В предельном случае при $\text{Bi} = \infty$:

$$b_{\text{п}.\infty} = -\delta_\infty D_{1.\infty}/D_{2.\infty} = -M_{1.\infty}/(9M_{2.\infty}) = -1;$$

$$b_\infty = -\delta_\infty A_{1.\infty}/A_{2.\infty} = 1/3;$$

$$b_{\text{ц}.\infty} = -\delta_\infty C_{1.\infty}/C_{2.\infty} = (a_1-1)/(3a_1+1) = 0{,}0999225 \approx 0{,}1. \qquad (43)$$

Так как $b_{\text{п}.\infty} = -1$ лишено физического смысла, следует взять $b_{\text{п}.\infty} = |1|$.

Тогда наименьшие максимальные времена согласно (17) при $a_\infty = 2\pi^2$ будут:

$$\text{Fo}_{\text{м.п}.\infty} = 0, \quad \text{Fo}_{max.\infty} = \left(1/2\pi^2\right)\ln 3 = 0{,}0556563$$

и

$$\text{Fo}_{\text{м.ц}.\infty} = \left(1/2\pi^2\right)\ln\left(1/b_{ц.\infty}\right) = 0{,}116690. \qquad (44)$$

Подставляя (44) в уравнение (3), получим максимально возможное термическое напряжение в центре пластины

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.ц}.\infty} = (1-\delta_\infty)C_{1.\infty}\cdot exp\left(-a_1^2\text{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}\right) = -0{,}308373. \qquad (45)$$

Термонапряжение на поверхности при времени $\text{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\text{п.м}.\infty} &= D_{1.\infty}\,exp\left(-a_1^2\text{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}\right) + \\ &+ D_{2.\infty}\,exp\left(-9a_1^2\text{Fo}_{\text{м.ц}.\infty}\right) = 0{,}614530,\end{aligned}$$

перепад температур

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{\text{ì}.\infty} &\equiv \theta_{\text{ö}.\infty} = E_{1.\infty}\exp\left(-a_1^2\text{Fo}_{\text{ì}.\text{ö}.\infty}\right) + \\ &+ E_{2.\infty}\exp\left(-9a_1^2\text{Fo}_{\text{ì}.\text{ö}.\infty}\right) = -0{,}922904\end{aligned}$$

и отношение напряжений в этот момент времени

$$R = \sigma_{\text{п}}/\sigma_{\text{ц}} = 0{,}6145/(-0{,}3084) = -1{,}9928.$$

Последняя несколько больше, чем отношение $R_\infty = D_{1.\infty}/C_{1.\infty} = (1-\beta\mu_1)/(1-\mu_1) \approx 1/(1-a_1) = -1{,}7521$, которое получено для стадии РРН с учетом первого члена ряда.

Следует отметить, что если приближенно считать $R=-2$, то из уравнения (9) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}=-(2/3)\cdot\Delta\theta(\text{Fo}) \tag{46}$$

и это соотношение полностью совпадает с формулой Н.Ю. Тайца [4]

$$\sigma_{\text{п}}(\tau)=(2/3)\beta E\,\Delta t(\tau)/(1-\nu)\,. \tag{47}$$

Из анализа уравнения (40) вытекает, что коэффициент $b_{\text{п}}$ меняет знак по причине изменения знака амплитуды D_2, изменяющейся от $-\text{Bi}/\pi^2$ при малых числах Био до $D_{2,\infty}=+0{,}09$. Из условия равенства нулю D_2 можно получить граничное число $\text{Bi}_{\text{м}}=20$ выше которого имеем случаи нагрева термически «массивного» тела. Таким образом, при числах $\text{Bi}<\text{Bi}_{\text{м}}$ для определения времени $\text{Fo}_{\text{м.п}}$ можно применять формулу (11) в которой $b_{\text{п}}$ определяется по уравнению (40), а при $\text{Bi}>\text{Bi}_{\text{м}}$ коэффициент $b_{\text{п}}$ становится отрицательным и нельзя пользоваться формулой (11). Возникшую ситуацию можно объяснить следующим образом. Формулы (11)…(21) получены с учетом всего двух членов ряда. С ростом числа Био максимальное время $\text{Fo}_{\text{м.п}}$ уменьшается, вплоть до 0 при $\text{Bi}=\infty$.

При очень малых числах Фурье $(\text{Fo}<0{,}1)$ расчёт температур по уравнениям (2)…(10) затруднителен из-за необходимости учета большого количества членов ряда, ввиду его плохой сходимости. В этом случае для расчёта поверхностной и среднемассовой температур можно использовать формулы, полученные методом операционного исчисления в работе [1]:

$$\theta_{\text{п}}(\text{Fo})=\varphi(y(\text{Fo}))\,, \tag{48}$$

$$\theta_{\text{ср}}(\text{Fo})=1-\int\limits_0^{\text{Fo}}\text{Bi}\cdot\theta_{\text{п}}(\text{Fo})d\text{Fo}=1-\beta\Phi(y), \tag{49}$$

где $\varphi(y)=e^{y^2}erfcy$; $\Phi(y)=\gamma^2\int\limits_0^{\tau}\varphi(y)d\tau=\varphi(y)+py-1$;

$p=2/\sqrt{\pi}=1{,}128379$; $erfcy=(1-erfy)$ — дополнительный интеграл вероятностей; $erfy=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int\limits_0^y e^{-x^2}dx$ — функция ошибок Гаусса; $y=\text{Bi}\sqrt{\text{Fo}}=\text{Ti}$ — безразмерное время, число Тихонова, может быть записано также в виде: $y=\gamma\sqrt{\tau}$, где $\gamma=\alpha/b$ — служит мерой тепловой инерции, с$^{-0,5}$; $b=\sqrt{\lambda c\rho}$ — коэффициент тепловой аккумуляции тела или коэффициент теплоусвоения, Вт·с^{0,5}/м^2·К.

Сопоставление приближенных зависимостей (48) и (49) с точными решениями (5) и (7) показало, что погрешность уравнения (49) при расчете средней температуры гораздо меньше, чем уравнения (48) для температуры поверхности.

Так, например, в случае нагрева при Bi = 1 формулой (48) можно пользоваться с относительной погрешностью $\delta t_{\text{п}}=\left(t_{\text{п}}^{\text{точное}}-t_{\text{п}}^{\text{прибл}}\right)\cdot 100/t_{\text{п}}^{\text{точн}}$ менее $+5\,\%$ при времени начальной стадии от 0 до $\text{Fo}_{\text{н.с}}=0{,}5$, а формулой (49) с погрешностью $\delta t_{\text{ср}}\le -5\%$ до момента времени $\text{Fo}_{\text{н.с}}=1{,}0$.

Знаки перед погрешностями δt означают, что температура поверхности при расчете по уравнению (48) занижена, а средняя температура по (49) — завышена по сравнению с точными значениями. При расчетах процессов охлаждения знаки погрешностей поменяются на обратные.

Решения (48) и (49) можно упростить путем разложения функции $\varphi(y)$ в ряд при малых ($y<1$):

$$\varphi(y)=1-py+y^2-\frac{2p}{3}y^3+\frac{y^4}{2!}\ldots \tag{50}$$

и при больших ($y>>1$) аргументах:

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,y}\left[1-u(1-3u(1-5u(1-\ldots)))\right], \tag{51}$$

где $u=1/\left(2y^2\right)$.

Графическое решение уравнений (48) и (49) приведено на рисунке 1.

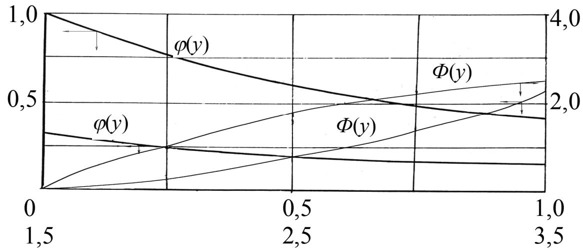

Рис. 1. Зависимость функций φ и Φ от времени $y=\gamma\sqrt{\tau}$

Интересно отметить, что, в отличие от уравнения (5), где температура поверхности зависит от двух величин – числа Био и Фурье, из уравнения (48) следует, что $\theta_{\text{п}}$ зависит только от одного параметра — числа Тихонова $\text{Ti}=\text{Bi}\sqrt{\text{Fo}}$.Вместо семейства кривых (5) на рисунке 1 имеем всего одну линию. Решения, подобные (48), когда исчезает зависимость процесса от какого-либо параметра, принято называть автомодельными.

С учетом сказанного уравнение (2) для расчета термических напряжений на поверхности примет вид

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\text{п}}(\text{Fo})&=1-\beta\Phi(y)-\varphi(y)=\\&=-\beta py+(1+\beta)(1-\varphi(y)),\end{aligned} \tag{52}$$

где $\beta=1/\text{Bi}$.

Вместо уравнения (5) будет (48), а вместо (7) — (49). Температуру в центре тела на начальной стадии нагрева ($\text{Fo}<0{,}1$) приближенно можно принять $\theta_{\text{ц}}\cong 1$.

Дифференцируя уравнение (52) по времени и приравнивая производную нулю с учетом разложений (50) и (51), получим при малых ($y<1$)

$$y_{\text{м.п}}=1/\left(\sqrt{\pi}(1+\beta)\right),\ \text{Fo}_{\text{м.п}}=\left(\beta y_{\text{м.п}}\right)^2=1/\left[\pi(1+\text{Bi})^2\right] \tag{53}$$

и больших аргументах ($y\ge 1$)

$$y_{\text{м.п}}=\sqrt{(1+\text{Bi})/2}\ ,\ \ \text{Fo}_{\text{м.п}}=\beta(1+\beta)/2\,. \tag{54}$$

Таким образом, при больших числах Био ($\text{Bi}>\text{Bi}_{\text{м}}$) расчет времени $\text{Fo}_{\text{м.п}}$ вместо (11) следует производить по уравнению (53) или (54).

Расчет Fo_{max} по (12) с учетом (41) даст

$$\mathrm{Fo}_{max} = \mathrm{Fo}_{\max.\infty} / (1-B)^2 . \quad (55)$$

Иногда требуется определить расположение координаты $X_{\text{н}}$ нейтрального слоя в котором термические напряжения меняют знак с $+\tilde{\sigma}$ на $-\tilde{\sigma}$, т.е. в этой точке равны нулю. Наиболее просто это можно сделать в стадии РРН. Тогда согласно уравнению (1) $\theta_{\text{ср}}(\mathrm{Fo}) = \theta(X_{\text{н}}, \mathrm{Fo})$ или $M_1 = P_1(\cos(\mu_1 X_{\text{н}}))/(\cos\mu_1)$. Разрешая последнее выражение относительно $X_{\text{н}}$, получим

$$X_{\text{н}} = (1/\mu_1)\arccos S , \quad (56)$$

где $S = \sin\mu_1/\mu_1 \approx m_1 / \sqrt{1+m_1\mathrm{Bi}}$.

При малых числах Био $S \approx 1-\mathrm{Bi}$. Тогда с учетом тригонометрического тождества $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$ и разложения в ряд $\arcsin x \approx x$, будем иметь

$$X_{\text{н}} = \sqrt{\mathrm{Bi}/(3\mu_1^2)} \approx 1/\sqrt{3} = 0{,}57735 . \quad (57)$$

При больших числах Био

$$S \approx 1/\mu_1 \quad \text{и} \quad X_{\text{н}} = (1/\mu_1)\arccos(1/\mu_1). \quad (58)$$

В предельном случае при $\mathrm{Bi} = \infty$, $X_{\text{н}.\infty} = (1/a_1)\arccos(1/a_1) = 0{,}560683$. Таким образом, поскольку $X_{\text{н}} > 0{,}5$ нейтральные слои расположены несколько ближе к поверхности, а само $X_{\text{н}}$ колеблется в узких пределах — от 0,56 до 0,58.

Следует отметить, что при нагреве абсолютные, т.е. размерные термические напряжения $\sigma = \sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ поменяют знаки за счет отрицательности σ_0 из-за $\Delta t_0 = (t_0 - t_{\text{ж}}) < 0$.

В заключение укажем, что все полученные решения описывают как процесс конвективного нагрева плоских тел, так и их охлаждение.

Рассмотрим численный пример, взятый из [4].

В печи необходимо нагреть плиту толщиной 0,25 м из стали со следующими теплофизическими свойствами: λ = 29 Вт/(м·К), $a = 0{,}69 \cdot 10^{-5}$ м^2/с, коэффициент теплоотдачи в печи α = 122 Вт/(м^2·К), температура печи $t_{\text{ж}}$ = 900 °С; Начальная температура плиты t_0 = 0 °С. Необходимо найти термические напряжения. При перечисленных исходных данных число Bi = 0,5. Пусть время $\tau = 0{,}1$ час. Число Фурье $\mathrm{Fo} = 0{,}16$.

Согласно уравнению (22) при коэффициенте геометрической формы $k = 3$ для пластины получим: m = 1+0,5/3 = 7/6; D = 3/7; $\rho = D^2/45 = 4 \cdot 10^{-3}$; $\gamma \approx 1+\rho = 1{,}004$ и окончательно первый корень $\mu_1 = \sqrt{3/7/1{,}004}$ =0,6533. Второй корень по формуле (23) при $G_1 = \mathrm{Bi}/\pi = 0{,}5/\pi$; $\rho = G_1^2/D = (0{,}5/\pi)^2/(3/7) = 0{,}0591$; $\gamma \cong 1+\rho = 1{,}0591$; второй корень $\mu_2 = \pi + G_1/\gamma = \pi + 0{,}5/\pi/1{,}0591 = 3{,}2919$. Отношение корней $\delta = (\mu_1/\mu_2)^2 = (0{,}6533/3{,}2919)^2 = 0{,}03938$; $m_2 = \delta m_1 = 0{,}03938 \cdot 7/6 = 0{,}04594$. Разность квадратов $a = \mu_2^2 - \mu_1^2 = 3{,}2919^2 - 0{,}6533^2 = 10{,}4098$. Амплитуды: $P_1 = 2/(1+0{,}5+6/7) = 0{,}8498$; $P_2 = 2/(1+0{,}5+1/0{,}04594) = 0{,}08596$; $M_1 = P_1 \cdot m_1 = 0{,}8498 \cdot 7/6 = 0{,}9914$; $M_2 = P_2 \cdot m_2 = 0{,}08596 \cdot 0{,}04594 = 0{,}0039$; $A_1 = P_1\sqrt{1+m_1\mathrm{Bi}} = 0{,}8498 \times \sqrt{1+0{,}5 \cdot 7/6} = 1{,}0693$; $A_2 = -P_2\sqrt{1+\mathrm{Bi}m_2} = -0{,}08596 \times \sqrt{1+0{,}5 \cdot 0{,}04594} = -0{,}087$. Температура на поверхности по уравнению (5) $\theta_{\text{п}} = P_1 \cdot ex_1 + P_2 ex_2 = 0{,}8498 \times 0{,}934 + 0{,}08596 \times 0{,}1766 = 0{,}8089$, где $ex_1 = exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo}) = exp(-0{,}6533^2 \cdot 0{,}16) = 0{,}9340$; $ex_2 = exp(-\mu_2^2\mathrm{Fo}) = exp(-3{,}2919^2 \cdot 0{,}16) = 0{,}1766$.

Температура в центре по (6) $\theta_{\text{ц}} = A_1 ex_1 + A_2 ex_2 = 1{,}0693 \cdot 0{,}934 - 0{,}087 \cdot 0{,}1766 = 0{,}9834$. Среднемассовая по формуле (7) $\theta_{\text{ср}} = M_1 ex_1 + M_2 ex_2 = 0{,}9914 \cdot 0{,}934 + 0{,}039 \cdot 0{,}1766 = 0{,}9267$.Окончательно термические напряжения на поверхности по уравнению (2) $\tilde{\sigma}_{\text{п}} = \theta_{\text{ср}} - \theta_{\text{п}} = 0{,}9267 - 0{,}8089 = 0{,}118$ и в центре по (3) $\tilde{\sigma}_{\text{ц}} = \theta_{\text{ср}} - \theta_{\text{ц}} = 0{,}9267 - 0{,}9834 = -0{,}057$. Расчет $\tilde{\sigma}_{\text{п}}$ по уравнению (52) при $y = \mathrm{Bi}\sqrt{\mathrm{Fo}} = 0{,}5\sqrt{0{,}16} = 0{,}2$ с учетом $\varphi(0{,}2) = 0{,}808$, рассчитанной по (50), дает $\tilde{\sigma}_{\text{п}} = -1{,}128 \cdot 2 \cdot 0{,}2 + (1+2)(1-0{,}808) = 0{,}1218$.Полученные результаты хорошо согласуются с данным [4] по которым $\tilde{\sigma}_{\text{п}} = 0{,}122$ с погрешностью $\Pi_{\text{п}} = 3{,}1\%$ и $\tilde{\sigma}_{\text{ц}} = 0{,}055$ с $\Pi_{\text{ц}} = 3{,}6\%$. Максимальные времена с учетом коэффициентов по (35) $b_{\text{п}} = 0{,}068$; $b = 0{,}052$ и $b_{\text{ц}} = 0{,}0337$: $\mathrm{Fo}_{\text{м.п}} = (1/a)\ln(1/b_{\text{п}}) = (1/10{,}41)\ln(1/0{,}068) = 0{,}258$; $\mathrm{Fo}_{max} = 0{,}284$ и $\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}} = 0{,}326$. Тогда максимальные напряжения по уравнениям (15) $\tilde{\sigma}_{\text{м.п}} = (1-\delta) \times (M_1 - P_1)exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{\text{м.п}}) = (1-0{,}03938)(0{,}9914-0{,}8498) \times exp(-0{,}6533^2 \cdot 0{,}258) = 0{,}1218$ и согласно (16) $\tilde{\sigma}_{\text{м.ц}} = (1-\delta)(M_1 - A_1)exp(-\mu_1^2\mathrm{Fo}_{\text{м.ц}}) = (1-0{,}0398)(0{,}9914-1{,}0693) \times exp(-0{,}6533^2 \cdot 0{,}326) = -0{,}0651$.

Выводы

1. Разработана инженерная методика роста термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) плоских тел. Получены простые и эффективные формулы для двух предельных случаев малых и больших чисел Био. Сделан акцент на определение максимальных термонапряжений и времени их наступления.