МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Про узгодженість структурних рівнянь нескінченної деформованої групи і розшарування зі зв’язністю

БАЛАКІРЕВА О.Б.

Дніпродзержинський державний технічний університет

В роботі запропоновано спосіб деформації нескінченної групи Лі, при якому її структурне рівняння співпадає з структурним рівнянням розшарування зі зв’язністю.

В роботе предложено способ деформации бесконечной группы Ли, при котором её структурное уравнение совпадает со структурным уравнением расслоения со связностью.

The work under review deals with the infinite Lie group deformation method with which its structural equation coincides with the structural equation of fiber bundle with cohesion.

Постановка задачі. Для опису зв’язностей в розшаруванні було побудовано нескінченну деформовану групу G^{sH} [1]. Її генератори складаються з генераторів лівої дії групи на шарах розшарування і горизонтальних векторних полів – коваріантних похідних, які також пов’язані з лівою дією групи в розшаруванні. Форма зв’язності виражається через вертикальну складову диференційної форми, спряженої до генераторів групи, опосередковано, за допомогою матриці приєднаного зображення, через що структурні рівняння для групи G^{sH} і для розшарування зі зв’язністю хоч і однозначно слідують одне з одного, але не співпадають.

Виникає питання: чи існує такий спосіб деформування, що приводив би до нескінченної групи $G^{s\overline{H}}$, структурне рівняння якої *співпадало б* зі структурним рівнянням розшарування зі зв’язністю, яку вона задає своєю дією.

В даній роботі дається ствердна відповідь на поставлене питання. При побудові нової групи, ми повинні продеформувати її таким чином, щоб вертикальною складовою генераторів групи стали *генератори правої дії*. При цьому керуємося наступними аргументами:

– генератори правої дії групи G^{sH} (фундаментальних векторні поля), комутують з коваріантними похідними, які представляють горизонтальну складову запропонованого набору генераторів;
– форма зв’язності, структурне рівняння для якої є необхідною умовою існування групи G^{sH}, визначається як вертикальна компонента форми спряженої до введеного набору генераторів.

Таким чином, поставимо задачу знайти функції деформації $\overline{H}$, які б відповідали даним генераторам, тобто з’ясуємо яким чином з самого початку потрібно деформувати нескінчену групу G^{s}, щоб в результаті одержати бажаний набір генераторів.

Опис головного розшарування. Головне розшарування $P = M \times V$ зі зв’язністю, структурною групою $V = \left\{v^{i}(x)\right\}$ і групою трансляцій $T = \left\{t^{\mu}(x)\right\}$, яка діє на базі розшарування $M = \left\{x^{\mu}\right\}$, описується за допомогою нескінченної деформованої групи Лі G^{sH}, яка параметризується функціями $g^{a}(x) = \left\{t^{\mu}(x), v^{i}(x)\right\}$. Простір P має своїми елементами точки $p^{\xi} = \left(x^{\mu}, v'^{j}\right)$.

Функції деформації $H^{a}(x, \widetilde{g})$, де $\widetilde{g}$ – елемент недеформованої групи, окрім уже відомих властивостей $1H - 3H$ [1], мають специфічні властивості

$$4H. \quad H^{m}(x, \widetilde{g}) = t^{m}, \ \forall \widetilde{g} = (\widetilde{t}, \widetilde{v}),$$

$$5H. \quad H^{i}(x, \widetilde{g}) = v^{i}, \ \forall \widetilde{g} = (0, \widetilde{v}).$$

Дані властивості є вимогою того, щоб при деформуванні простору P база M і самі шари V не деформувалися, а лише відбувався вертикальний рух шарів один відносно одного.

Коефіцієнти деформації групи G^{sH} визначаються за формулою

$$h(x)_{\alpha}^{a} := \partial_{\widetilde{g}^{\alpha}} H^{a}(x, \widetilde{g})\Big|_{\widetilde{g}=0}. \qquad (1)$$

Виокремлюють праву $(p \cdot v)^{\xi} = f_{R}^{\xi}(p, v) = \left(x^{\mu}, \widetilde{\varphi}^{j}(v', v)\right)$ і ліву $\left(g^{-1}, p\right)^{\xi} = f_{L}^{\xi}(p, g) = \left(x^{\mu} + t^{\mu}, \widetilde{\varphi}^{j}\left(v^{-1}, v'\right)\right)$ дії групи, при цьому визначено, що на базі розшарування група G^{sH} діє зліва. Генератори групи, в загальному випадку, визначаються за формулою

$$X_{a} := \xi(p)_{a}^{\xi} \partial_{\xi},$$

де $\xi(p)_{a}^{\xi} := \partial_{g^{a}} f^{\xi}(p, g)\Big|_{g=0}$ – допоміжні функції.

© Балакірева О.Б., 2010

Оскільки група V вільно діє на шарах простору P справа, не змінюючи при цьому многовид M, генератори її правої дії мають вигляд

$$X_i^R = \tilde{\lambda}(v')^j{}_i \partial_j, \quad (2)$$

де $\tilde{\lambda}(v')_i^j = \partial_{v^i} \tilde{\varphi}^j(v', v)\Big|_{v=0}$, $\tilde{\varphi}^j$ – функції, що задають закон множення в групі V.

Лівій дії групи G^{sH} на P відповідають генератори, які представляють собою набори вертикальних і горизонтальних векторних полів в дотичних до P просторах:

$$\begin{cases} X_i^L = \tilde{\upsilon}(v')_i^j \partial_j, \\ X_m^L = \partial_m + A(x)_m^i \tilde{\upsilon}(v')_i^j \partial_j, \end{cases} \quad (3)$$

де
$$\tilde{\upsilon}(v')_i^j = \partial_{v^i} \tilde{\varphi}^j\left(v^{-1}, v'\right)\Big|_{v=0},$$

$$A(x)_m^i = -h(x)_m^\mu \partial_{t^\mu} H^i(x, \tilde{g})\Big|_{\tilde{g}=0}.$$

Генератори X_i^L системи (3) повністю співпадають з відповідними генераторами лівої дії $\tilde{X}_i^L$ недеформованої групи, тобто деформації залишають вертикальний простір незмінним; на горизонтальні векторні поля, які забезпечують зв'язність в розшаруванні, в деформованій групі додатково діє лінійне перетворення $A(x)_m^i$.

Отже, група G^{sH} природнім чином задає на P геометричну структуру, оскільки своєю дією розкладає всі дотичні до P простори на суму горизонтальних і вертикальних підпросторів.

Розв'язок задачі. Перейдемо до розв'язку поставленої задачі, яка полягає у знаходженні групи $G^{s\overline{H}}$, яка б мала наступний набір генераторів:

$$\begin{cases} X_i = X_i^R, \\ X_m = \partial_m + A(x)_m^i X_i^L, \end{cases} \quad (4)$$

Розв'язок задачі проводиться у кілька кроків. На першому кроці, знаючи вигляд допоміжних функцій $\tilde{\xi}_L(p)_\alpha^\xi$, $\xi_L(p)_a^\xi$ для функцій лівої дії в недеформованій і деформованій групах відповідно, знайдемо коефіцієнти деформації за формулою $\tilde{\xi}_L(p)_\alpha^\xi h(x)_a^\alpha = \xi_L(p)_a^\xi$.

За допомогою матриць $h(x)_a^\alpha$, здійснюється зворотній перехід від деформованої до недеформованої групи. Обернена ж до неї матриця, що визначається співвідношенням (1), буде мати наступний вигляд:

$$h(p)_\alpha^a = \begin{pmatrix} \delta_\mu^m & 0 \\ -\tilde{\varepsilon}(v')_j^i A(x)_\mu^j & \tilde{\varepsilon}(v')_l^i \end{pmatrix}, \quad (5)$$

де $\tilde{\varepsilon}(v')_j^i = \tilde{\lambda}^{-1}(v')_k^i \tilde{\upsilon}(v')_j^k$ – матриця приєднаного зображення (матриця переходу між генераторами лівої і правої дій).

Використовуючи матрицю (5) і формулу (1), одержуємо набір співвідношень, які дозволяють визначити функції деформації $\overline{H}^a(p, \tilde{g})$, що приводять до набору генераторів (4). Їх властивості мають наступний вигляд:

$$4\overline{H}. \quad \overline{H}^m(x, \tilde{g}) = t^m, \quad \tilde{g} = (\tilde{t}, \tilde{v}),$$

$$5\overline{H}. \quad \overline{H}^i(x, \tilde{g}) = \varphi^i\left(\varphi^{-1}\left(\hat{H}(x, \tilde{g}), v'\right), v'\right), \quad \tilde{g} = (\tilde{t}, \tilde{v}),$$

$$\overline{H}^i(x, \tilde{g}) = \varphi^i\left(\varphi^{-1}(\tilde{v}, v'), v'\right), \quad \tilde{g} = (0, \tilde{v}).$$

Тобто, властивість $4\overline{H}$ співпадає з властивістю $4H$ функцій деформації, що відповідали набору генераторів (3). Отже, незалежно від вибору набору генераторів база розшарування M простору P не деформується. Властивість $5\overline{H}$ свідчить про те, що в даному випадку *деформації є внутрішніми автоморфізмами* на самих шарах V. При цьому елементи групи $\tilde{g} = (\tilde{t}, \tilde{v})$ попередньо деформуються за допомогою деякої функції деформації $\hat{H}$.

Спряженими до генераторів (4) є диференційні форми, які визначаються з умови:

$$\Theta^a(X_b) = \delta_b^a \quad (6)$$

і мають вигляд

$$\begin{cases} \Theta^m = dx^m \\ \Theta^i = -\tilde{\varepsilon}(v')_l^i A(x)_\mu^l dx^\mu + \lambda^{-1}(v')_j^k dv^j. \end{cases} \quad (7)$$

При такому підході вертикальна компонента Θ^i диференційної форми (7) співпадає з формою зв'язності ω^i. Тобто, при запропонованому наборі генераторів умова спряженості (6) одразу дає нам вираз для форми зв'язності ω^i і для її знаходження, на відміну від попереднього випадку, не потрібні додатково застосовувати матрицю приєднаного зображення $\tilde{\varepsilon}(v')_j^i$.

Висновки

В даній роботі побудовано нескінченну деформовану групу $G^{s\overline{H}}$, структурне рівняння якої *співпадає* з структурним рівняння розшарування зі зв'язність, яку вона задає своєю дією.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Самохвалов С.Е.* О задании связностей в расслоениях действием бесконечных групп Ли // Укр. мат. ж. – 1991. – 43, № 12. – С. 1599 - 1603.

пост. 02.06.10