

Определение дополнительных усилий в элементах ошлагованных канатов с упругой оболочкой покрытия при переходном процессе

МАМАЕВ Л.М., КАБАКОВ А.М.

Днепродзержинский государственный технический университет

Методами теории упругости определены дополнительные усилия в проволоках канатов, покрытых упругими оболочками, при переходном процессе.

Методами теорії пружності визначені додаткові зусилля в проволоках канатів, покритих пружними оболочками, при переходному процесі.

Using the theory of elasticity are defined further efforts in the strands of ropes, covered elastic shell with pattern during the transition.

Введение. Изгиб канатов на огибающих блоках и барабанах приводит к смещению элементов канатов, которые затухают на определенном отрезке длины под действием сил трения. Дополнительные усилия и напряжения, возникающие при переходном процессе, достаточно полно освещено в работах Глушко М.Ф., Сергеева С.Т. и других ученых.

В последние годы все более широкое применение на практике получают покрытие стальных канатов, бронированных кабелей и подобных изделий упругими синтетическими оболочками, которые предохраняют металлическую часть шлангокабеля от коррозии и других внешних воздействий. Это транспортные ленты, армированные стальными канатами, кабели управления робототехнических систем, каротажные кабели для разведки нефтяных и газовых скважин, уравновешивающие плоские канаты в подъемных установках горнодобывающей промышленности и т.д.

Как показали проведенные лабораторные и промышленные исследования, стойкость канатов с полиамидными покрытиями возрастает в 2-3 раза по сравнению с обычными канатами.

Постановка задачи. Настоящее исследование проведено с целью определения дополнительных усилий в проволоках стального каната, покрытого упругой шланговой оболочкой. При этом принимается допущение, что оболочка покрытия подчиняется законам теории упругости.

Решение задачи. Предполагая величину отношения радиусов оболочки к радиусу кривизны при изгибе достаточно малой, можно полагать, что отрезок кабеля на малом участке длины является прямым.

Введем цилиндрическую систему координат $\theta-r-x$. Обозначим перемещения в направлении полярного радиуса r через U в направлении полярного угла θ через V и в направлении оси аппликат z — W (рисунок).

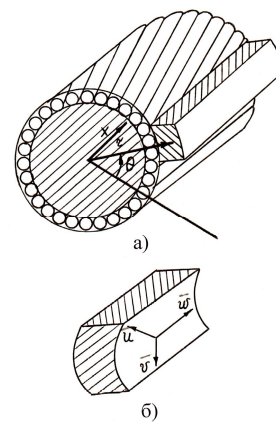


Рис. 1. Координаты и перемещения точек кабеля с оболочкой: а) координаты точек кабеля; б) перемещения точек оболочек

Компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе координат определяется соотношениями (1)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial W}{\partial x}; \\ 2\varepsilon_{r\theta} &= \gamma_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \\ 2\varepsilon_{\theta x} &= \gamma_{\theta x} = \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial x}; \quad 2\varepsilon_{xr} = \gamma_{xr} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Сопоставление величин напряжений в элементах кабеля с величинами сил инерции и других объемных сил при малой длине рассматриваемых участков позволяет в соответствии с данными М.Ф.Глушко и С.Т.Сергеева пренебречь влиянием всех объемных сил. Поэтому для определения напряженного состояния в оболочке можно воспользоваться известной системой уравнений равновесия в цилиндрической системе координат [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial x} + \frac{2\sigma_{\theta r}}{r} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{rx}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\sigma_{rx}}{r} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; $ij = r, \theta, x$.

Зная компоненты тензора напряжений, можно с помощью соотношений Коши установить связь между интенсивностью внешней нагрузки на поверхности оболочки, определяющей ее силовое воздействие на жилы кабеля, и напряженным состоянием внутри оболочки. Внешние силы определяются вектором распределенной нагрузки $\bar{P} = (P_r, P_\theta, P_x)$. Тогда соотношения Коши на поверхности оболочки записываются в виде [4]:

$$P_i = \sigma_{ij} n_j, \quad (3)$$

где n_j – проекции вектора нормами \bar{n} поверхности оболочки на орты системы координат.

Известно, что

$$\bar{n} = \frac{\nabla\Phi}{|\nabla\Phi|},$$

где $\nabla\Phi$ – градиент функции Φ , определяющей уравнение поверхности $\Phi(r, \theta, x) = 0$.

Для цилиндрической поверхности оболочки $\Phi = r - r_0 = 0$,

где r_0 – радиус направляющей.

Тогда $\bar{n} = (1, 0, 0)$ и из (3) получаем

$$\bar{P} = (\sigma_{rr}, \sigma_{\theta r}, \sigma_{xr}). \quad (4)$$

В первом приближении можно принять, что материал оболочки линейноупругий, т.е. подчиняется закону Гука:

$$\sigma_{ik} = \lambda \varepsilon \delta_{ik} + 2\mu \varepsilon_{ik}, \quad (5)$$

где λ и μ – упругие постоянные материала, постоянные Ляме

$$\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{xx},$$

δ_{ik} – символ Кронекера.

На участке перехода между изогнутой и прямой частью кабеля поперечные деформации можно считать равномерными по длине и принять, что поперечные относительные удлинения не зависят от x , тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

В этом случае с учетом (1), (5), и (6) система уравнений равновесия (2) приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 U - \frac{U}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial x} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 V + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta \partial x} + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} &= 0; \\ \nabla^2 W + \frac{1}{1-2\mu} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ – оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.

Краевая задача для дополнительных напряжений доопределяется введением смешанных граничных условий. На внешней поверхности оболочки ($r = R_2$) внешние силы отсутствуют ($\bar{P} = 0$), поэтому, как следует из (4):

$$\sigma_{rr}|_{r=R_2} = 0; \quad \sigma_{r\theta}|_{r=R_2} = 0; \quad \sigma_{rx}|_{r=R_2} = 0. \quad (8)$$

На внутренней поверхности оболочки ($r = R_1$) заданы перемещения, которые определяются перемещениями жил кабеля, обусловленными деформацией по закону $\eta = a \sin \theta$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} U|_{r=R_1} &= 0; \quad V|_{r=R_1} = a \sin \theta \sin \alpha; \\ W|_{r=R_1} &= a \sin \theta \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Кроме того, дополнительные напряжения на участке перехода от изогнутой ветви кабеля к прямой ветви должны затухать. Следовательно, существует такой участок кабеля длиной ℓ , на конце которого ($x = \ell$) напряжения в оболочке равны 0, т.е.

$$\sigma_{xx}|_{x=\ell} = 0; \quad \sigma_{xr}|_{x=\ell} = 0; \quad \sigma_{x\theta}|_{x=\ell} = 0. \quad (10)$$

Из условия (6) с учетом (1) следует, что

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{rr}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (11)$$

Поэтому третье уравнение системы (7) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + \left(1 + \frac{1}{1-2\mu}\right) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \quad (12)$$

Для упрощения выкладок введем обозначение

$$v = \frac{1}{2\mu-1} - 1$$

с соответствующим преобразованием уравнения (12), получим

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = v \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (13)$$

Решение уравнения (13) отыскивается с помощью метода разделения переменных в виде

$$W(r, \theta, x) = g(r)\varphi(x) \sin \theta. \quad (14)$$

После подстановки (14) в (13) имеем

$$g''_r = \varphi \sin \theta + \frac{1}{r} g' r \varphi \sin \theta - \frac{1}{r^2} g \varphi \sin \theta = v g \varphi''_x \sin \theta,$$

которое эквивалентно системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{g''_r}{g} + \frac{1}{r} \frac{g'_r}{g} - \frac{1}{r^2} &= -\lambda; \\ v = \frac{\varphi''_x}{\varphi} &= -\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где $\lambda > 0$ – постоянная величина.

Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\varphi''_x + \frac{\lambda}{v} \varphi = 0, \quad (16)$$

полученное для определения φ из системы (15), решается методом Эйлера. Общее решение (16) имеет вид

$$\varphi(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}} x\right), \quad (17)$$

где C_1, C_2 – коэффициенты.

Для нахождения C_1, C_2 необходимо использовать граничные условия (10), из которых следует, что

$$\varphi(0) = A; \quad \varphi(\ell) = 0, \quad (18)$$

где A – постоянная величина.

Подставляя (17) в (18), получаем

$$\varphi(x) = A \left[\cos \left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}} x \right) - ctg \left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}} \ell \right) \sin \left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}} x \right) \right]. \quad (19)$$

Для интегрирования первого уравнения из системы (15) приводим его к виду

$$r^2 g''_{r^2} + r g'_r + (\lambda r^2 - 1)g = 0. \quad (20)$$

Обозначим $\lambda = \bar{\lambda}^2$ и введем новую переменную

$$t = r\sqrt{\lambda} = r\bar{\lambda}.$$

Тогда уравнение (20) примет вид

$$t^2 \frac{d^2 g}{dt^2} + t \frac{dg}{dt} + (t^2 - 1)g = 0. \quad (21)$$

Это уравнение Бесселя для цилиндрических функций. Его общее решение представляется в виде

$$g(t) = C_3 \tau_1(t) + C_4 Y_1(t) = C_3 \tau_1(\sqrt{\lambda}r) + C_4 Y_1(\sqrt{\lambda}r), \quad (22)$$

где C_3, C_4 – произвольные постоянные; $\tau_1(t) = \tau_1(\sqrt{\lambda}r)$ – функция Бесселя 1 рода I порядка; $Y_1(t) = Y_1(\sqrt{\lambda}r)$ – функция Бесселя 2 рода I порядка.

Эти функции представляются в виде:

$$\tau_1(t) = \frac{t}{2} \left(1 - \frac{t^2}{2 \cdot 4} + \frac{t^4}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{t^6}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \dots \right) \quad (23)$$

$$Y_1(t) = \frac{2}{\pi} \tau_1(t) \ln \frac{t}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{t}{2} \right)^{1+2k}}{K!(K-1)!} \times \left[\frac{\Gamma'(K+1)}{\Gamma(K+1)} - \frac{\Gamma'(K+2)}{\Gamma(K+2)} \right], \quad (24)$$

где $\Gamma(K)$ – гамма-функция.

Возвращаясь к исходной переменной r , получим

$$\tau_1(\sqrt{\lambda}r) = \frac{r\sqrt{\lambda}}{2} \left(1 - \frac{r^2\lambda}{2 \cdot 4} + \frac{r^4\lambda^2}{2 \cdot 4^2 \cdot 6} - \frac{r^6\lambda^3}{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \quad (25)$$

$$Y_1(\sqrt{\lambda}r) = \frac{2}{\pi} \tau_1(\sqrt{\lambda}r) \ln \frac{r\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{r\sqrt{\lambda}}{2} \right)^{1+2k}}{K!(K+1)!} \times \left[\frac{\Gamma'(K+1)}{\Gamma(K+1)} - \frac{\Gamma'(K+2)}{\Gamma(K+2)} \right]. \quad (26)$$

Для определения постоянных C_3 и C_4 воспользуемся граничными условиями (8) и (9). Таким образом, из формулы (22) с учетом (25) и (26), осевое перемещение W будет определено с учетом найденной зависимости $W = W(r, \theta, x)$. Два первых уравнения системы (7) дадут систему неоднородных дифференциальных уравне-

ний второго порядка относительно поперечных перемещений $U = U(r, \theta)$ и $V = V(r, \theta)$.

Решения полученной системы отыскиваются также с помощью метода разделения переменных. Значения произвольных постоянных определяются граничными условиями (8) и (9). Ввиду громоздкости выражений они не приводятся.

Найденные перемещения $U(r, \theta), V(r, \theta), W(r, \theta, x)$ с помощью соотношений (1) и (5) позволяют определить дополнительную осевую нагрузку T' , действующую на жилы кабеля в переходном процессе.

Тогда уравнение равновесия винтового элемента записывается в виде

$$\frac{dT_i}{dS} = \frac{\mu}{\rho} T_i + T', \quad (27)$$

где T_i – натяжение в i -ом элементе кабеля; μ – коэффициент трения; ρ – радиус кривизны изгиба проволоки; T' – дополнительная осевая нагрузка.

Решая уравнение (27), определяем полное усилие в проволоке $T = T_0 + \Delta T$,

где T_0 – начальное натяжение, ΔT – приращение натяжения. По усилиям по известной методике можно оценить напряженное состояние кабеля.

Выводы

Полученные зависимости позволяют решать задачу по оценке напряженного состояния ошлангованных канатов и кабелей с учетом дополнительного силового фактора: упругих оболочек покрытия при переходном процессе. Это позволит конструировать подобные стержневые системы более высокой надежности и долговечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести, М. 1968.
2. Глушко М.Ф., Шахназарян Э.А., Мамаев Л.М. К расчету стальных канатов и бронированных кабелей в неметаллической упругой оболочке, Сб. «Стальные канаты», №5, 1968.
3. Мамаев Л.М., Самойленко Д.С. К вопросу определения напряжений в ошлангованных канатах и кабелях при переходном процессе, Математичне моделювання. Науковий журнал, № 12, Дніпродзержинськ, 2004.
4. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением. –М: Металлургия, 1980.