Вероятностная концепция полиномиальной интерполяции в октаэдре

ХОМЧЕНКО А.Н., МОТАЙЛО А.П.

Херсонский национальный технический университет

Робота присвячена побудові семивузлового базису октаедра ймовірнісно-геометричним методом. Отримані функції наділені класичними властивостями ймовірності.

Работа посвящена построению семиузлового базиса октаэдра вероятностно-геометрическим методом. Полученные функции обладают классическими свойствами вероятности.

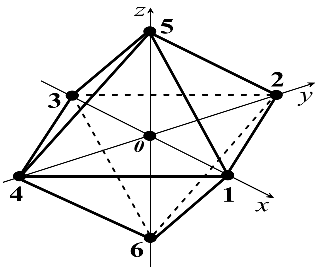
Work is devoted to building an octahedron basis with seven nodes by geometric probability method. Received functions have the classical properties of probability.

Введение. При решении сложных трёхмерных задач методом дискретных элементов чаще всего применяются тетраэдры и гексаэдры. Во всяком случае, так было последние 50 лет XX века. Новое поколение разработчиков и пользователей методов компьютерного моделирования уже использует октаэдры, особенно в сочетании с тетраэдрами и гексаэдрами. Понятно, что для этого необходимо решить актуальную задачу оснащения октаэдра подходящим базисом. Эта задача, безусловно, имеет важное значение в теории приближения функций. Последние применения октаэдра в исследовании идеальных течений в 3D и процедурах объёмной визуализации дают повод говорить о практической значимости задачи конструирования базиса октаэдра.

Анализ предшествующих публикаций, цель работы. Октаэдр, как одно из тел Платона, известен с древних времён. Его замечательные геометрические свойства хорошо изучены. Однако, об октаэдре, как ячейке пространственной структуры, несущей информацию о трёхмерном физическом поле (например, температурном) известно очень мало. Мы обнаружили только две статьи, в которых октаэдр рассматривается в этом качестве. Как обычно, при появлении нового носителя финитной функции первостепенными задачами являются изучение возможности построения базиса и разработка способов конструирования базиса. Сегодня известны два базиса на 7-узловом октаэдре: линейный [1] и квадратичный [2]. Авторы [1] приводят систему из семи базисных функций, однако не указывают кем, когда и как получен линейный базис. Автор [2] для построения квадратичного базиса применяет тейлоровские разложения функции трёх аргументов в сочетании с конечно-разностными аналогами частных производных первого и второго порядков. Эта оригинальная, хотя и несколько громоздкая, процедура заслуживает внимания специалистов, тем более, что в МКЭ [3-5] она пока не получила распространения. Альтернативой распространённого в МКЭ метода обратной матрицы выступает описанный ниже вероятностно-геометрический метод конструирования базиса октаэдра.

Цель статьи – показать возможности вероятностного моделирования линейного и квадратичного базисов на 7-узловом октаэдре.

Основная часть. На рис.1 изображён октаэдр с расчётными узлами в центре и вершинах.



$$1-|x|-|y|-|z| \ge 0.$$

Рис.1. 7-узловой октаэдр

Исходная информация для построения интерполяционного полинома должна содержать 28 чисел: координаты расчётных узлов и узловые значения функции. Для интерполяционного полинома избираем форму Лагранжа:

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=0}^{6}N_i(x,y,z)\cdot\Phi_i\ , \qquad (1)$$

где Φ_i - узловые значения функции; $N_i(x,y,z)$ - коэффициенты Лагранжа (базисные функции, функции формы). Узлы стандартного октаэдра расположены в центре описанной сферы единичного радиуса и в точках пересечения осей координат с описанной сферой. Задача сводится к нахождению системы из 7 функций, обладающих свойствами:

$$N_i(x_k,y_k,z_k)=\delta_{i\,k}\ ,\quad \sum_{i=0}^{6}N_i(x,y,z)=1\ , \qquad (2)$$

где $\delta_{i\,k}$ - символ Кронекера.

Рациональное расположение системы координат позволяет разделить переменные так, что функции, отвечающие вершинам октаэдра, зависят только от одной (своей) координаты. И лишь одна функция $N_0(x,y,z)$ зависит от трёх координат.

Сначала рассмотрим построение линейного базиса. Достаточно построить одну функцию, например, $N_1(x,y,z)$. Мы рассматриваем построение базиса как задачу на геометрическую вероятность [6-8].

Октаэдр – это ансамбль из двух пирамид с общим квадратным основанием. При конструировании функций N_1 и N_3 в центре нашего внимания находятся две пирамиды с вершинами в узлах 1 и 3, т.е. на оси

ОХ (рис.1). Из первого условия (2) следует, что N_1 возрастает линейно на $[0{,}1]$ оси ОХ, а на $[-1{,}0]$ $N_1=0$. Функция N_3 на $[-1{,}0]$ линейно убывает, а на $[0{,}1]$ $N_3=0$. Графики этих функций показаны на рис.2.

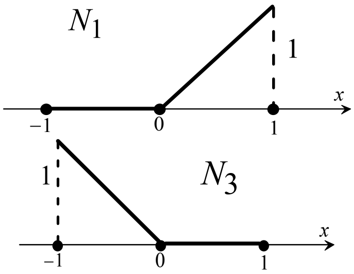


Рис.2. Графики функций N_1 и N_3

Легко показать, что эти функции отождествляются с вероятностью попадания случайной точки в некоторую область октаэдра. Конструируя N_1, мы, естественно, рассматриваем пирамиду с вершиной в узле 1. Выберем внутри этой пирамиды текущую точку $M(x,y,z)$ и соединим эту точку отрезками прямых с вершинами квадрата. Образуется пирамида $M2546$, вложенная в пирамиду 12546. Введём случайное событие A_1={точка, вброшенная наугад в 12546, попала в $M2546$}. По определению геометрической вероятности $p(A_1)=x$. Подчеркнём, что $p(A_1)$ не зависит от y и z и ведёт себя так, как показано на рис.2. Этот результат абсолютно предсказуем, поскольку N_1, будучи линейной функцией, должна удовлетворять интерполяционной гипотезе (2). Таким образом,

$$N_1(x,y,z)=\begin{cases}0, & -1\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le 1.\end{cases}$$

Чтобы описать N_1 на всем интервале $[-1{,}1]$, воспользуемся абсолютной величиной: $N_1=\frac{1}{2}(|x|+x)$, аналогично, $N_3=\frac{1}{2}(|x|-x)$. Остальные функции, отвечающие вершинам октаэдра, легко получаются из N_1 и N_3 путём циклической перестановки координат. Функцию N_0 можно получить на основе второго условия (2). При этом N_0 имеет чёткий вероятностный смысл и может быть выражена, как и все остальные функции, через вероятность попадания случайной точки в некоторую область внутри октаэдра. Для этого построим октаэдр из фрагментов плоскостей, отсекающих одинаковые отрезки длиной a на осях координат:

$$|x|+|y|+|z|=a,\ \text{где}\ 0<a<1.$$

Образовался октаэдрический слой – пространство между поверхностями октаэдров. Введём случайное событие: A_0={точка, вброшенная наугад в октаэдр, попала в октаэдрический слой}. Вероятность $p(A_0)$ найдём геометрически

$$p(A_0)=1-|x|-|y|-|z|.$$

Теперь можно выписать весь набор линейных базисных функций 7-узлового октаэдра:

$$\begin{aligned}N_0(x,y,z)&=1-|x|-|y|-|z|,\\ N_{1,3}(x,y,z)&=\frac{1}{2}(|x|\pm x),\\ N_{2,4}(x,y,z)&=\frac{1}{2}(|y|\pm y),\\ N_{5,6}(x,y,z)&=\frac{1}{2}(|z|\pm z).\end{aligned}\tag{3}$$

Именно этот базис приведён в работе [1], однако о его происхождении никакой информации нет. Заметим, что в координатных сечениях мы получили известные функции (“крышку” и “полукрышку”), реализующие кусочно-линейную интерполяцию функции одного аргумента.

Исходя из тех же соображений и опираясь на геометрическую вероятность, попытаемся построить квадратичный базис на 7-узловом октаэдре (рис.1). Есть основания полагать, что, как и в предыдущей модели, переменные разделяются, открывая возможность использования интерполяционных коэффициентов Лагранжа для функции одного аргумента. Покажем, как построить эти коэффициенты на основе геометрической вероятности. Начнём с N_1. Рассмотрим два линейных элемента с общим узлом в вершине 1: $[0{,}1]$ и $[-1{,}1]$. В каждом из элементов выбираем текущую точку $M(x)$. Полином второго порядка строится в форме произведения двух полиномов первого порядка. Понятно, что теперь нужно ввести два независимых события: A_1={случайная точка, вброшенная в $[0{,}1]$, попала в $[0,x]$}, B_1={случайная точка, вброшенная в $[-1{,}1]$, попала в $[-1,x]$}. Вероятности определяем геометрически, а функцию N_1 - по правилу умножения вероятностей независимых событий:

$$p(A_1)=x;\quad p(B_1)=\frac{x+1}{2};\quad N_1=\frac{1}{2}x(x+1).$$

По аналогии $N_3=\frac{1}{2}x(x-1)$. Графики этих функций на рис. 3.

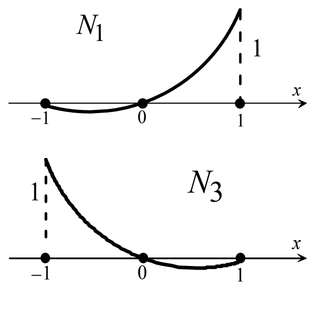


Рис.3. Графики функций N_1 и N_3

Остальные функции в вершинах октаэдра получаются из N_1 и N_3. Для построения N_0 образуем сферический слой – пространство между описанной сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$, где $0<a<1$. Случайное событие A_0={случайная точка, вброшенная в октаэдр, попала в сферический слой}. Геометрическая вероятность $N_0=p(A_0)=1-x^2-y^2-z^2$.

Приведём полный набор квадратичных базисных функций 7-узлового октаэдра:

$$\begin{aligned} N_0(x,y,z)&=1-x^2-y^2-z^2,\\ N_{1,3}(x,y,z)&=\frac{1}{2}x(x\pm 1),\\ N_{2,4}(x,y,z)&=\frac{1}{2}y(y\pm 1),\\ N_{5,6}(x,y,z)&=\frac{1}{2}z(z\pm 1). \end{aligned} \tag{4}$$

Предсказуемость поведения функций построенных здесь базисов во многом обусловлена наличием внутреннего узла. В МКЭ в силу известных причин избавляются от внутренних узлов. Примером могут служить элементы серендипова семейства [3]. Мы полагаем, что вероятностное моделирование базиса на октаэдре без внутреннего узла, потребует большей изобретательности.

Стоит отметить, что интерполяционный полином на 7-узловом октаэдре имеет вид математического ожидания:

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=0}^{6}N_i(x,y,z)\cdot\Phi_i\ ,$$

где Φ_i - узловые значения функции.

При наличии двух базисов на 7-узловом октаэдре появляется возможность оптимизировать качество интерполяции путём взвешенного усреднения базисов.

Выводы

На 7-узловом октаэдре удаётся разделить переменные и для узлов в вершинах обойтись функциями одного аргумента. Установлено, что базисные функции обладают классическими свойствами вероятности, что позволяет предложить способ конструирования базиса на основе геометрической вероятности. Представляет интерес изучение возможности распространения этого способа на 6-узловой октаэдр (без внутреннего узла).

ЛИТЕРАТУРА

1. Grosso R. Hierarchical Meshes for Volume Data / R. Grosso, G. Greiner // Computer Graphics International 1998 (CGI`98). - 1998. - P. 761-771. - Режим доступа: http://dblp.unitrier.de/db/conf/cgi/cgi1998.html#GrossoG98
2. Bruijn H. Numerical Method for 3D Ideal Flow / Han de Bruijn // Режим доступа: http://hdebruijn.soo.dto.tudelft.nl/jaar 2010/octaeder.pdf
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. - М. :Мир, 1975. – 541 с.
4. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. - М. :Мир, 1977. – 349 с.
5. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р. Галлагер. - М. :Мир, 1984. – 428 с.
6. Хомченко А.Н. Вероятностные модели и алгоритмы вычислительной механики для областей сложной геометрии / Хомченко А. Н. // Эффектив. числ.методы решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела : респ. конф., 1989г. : тезисы докл. - Х., 1989. – С. 137-138.
7. Хомченко А. Н. Трикубическая интерполяция как задача на геометрическую вероятность / А.Н.Хомченко // Вестник Херсонского национального технического университета. Вып. 2(35). – Херсон : ХНТУ, 2009. — С. 449-454.
8. Хомченко А. Н. Интерполяция по Кунсу и геометрическая вероятность / А. Н. Хомченко, Н. А. Козуб // Проблеми інформаційних технологій. – Вип. 5. – С. 145-148.

пост. 23.06.11