

температурные циклы в металле и прогнозировать свойства получаемых сварных соединений.

Результаты моделирования процесса точечной контактной сварки свидетельствуют о том, что на ранних этапах формирования сварной точки максимальная температура наблюдается на периферии зоны контакта свариваемых деталей.

Расчётным путём установлено, что максимальный объём жидкой фазы достигается спустя некоторое время после отключения сварочного тока, которое в случае сварки деталей толщиной 2мм из низкоуглеродистой стали составляет примерно один период переменного тока промышленной частоты.

Характерные скорости движения металлического расплава после отключения тока быстро снижаются и для упомянутых выше условий эксперимента на момент начала кристаллизации литого ядра циркуляция жидкой фазы практически отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыкалин Н.Н. Расчёты тепловых процессов при сварке. – М.: Машиностроение, 1951. – 296 с.
2. Гельман А. С. Технология и оборудование контактной электросварки. – М.: Машиностроение, 1960. – 368 с.
3. Каганов Н.Л. Расчётно-экспериментальный метод выявления требуемой геометрии импульса при конденсаторной сварке // Технология и автоматизация процессов сварки и пайки. – М.: Машиностроение, 1969. – С. 150-157.
4. Крикент И.В. Применение вычислительной техники при расчётах режимов сварки давлением в курсовом и дипломном проектировании // Проблемы математического моделирования: Тезисы доповідей міждержавної науково-методичної конференції, Дніпродзержинськ, 29-31 травня 2002 р. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2002. – С. 190.
5. Быковский О.Г. Горбунов А.Д. Математическое моделирование теплового состояния металла при контактной точечной сварке // Сварочное производство. – 1990. – № 6. – С. 36-38.
6. Крикент И.В. Расчётное определение длительности протекания сварочного тока при точечной контактной сварке // Наука – производству. – К.: Вища школа, 1991. – С. 100-105.
7. Tsai C.L., Jammal O.A., Papritan C., Dickinson D.W. Modeling of resistance spot welding nugget growth // Welding Journal. – 1992. – 71(2). – P. 47-54.
8. Sun X., Dong P. Analysis of aluminum resistance spot welding processes using coupled finite element procedures // Welding research supplement. – 2000. – No.8. – P. 215-221.
9. Hamed M., Pashazadeh H. Numerical study of nugget formation in resistance spot welding // International Journal of mechanics. – 2008. – Iss.1.-2. – P. 11-15.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. – М.: Наука, 1986. – Т. VI. Гидродинамика. – 736 с.
11. Казанцев Е.И. Промышленные печи: Справочное руководство. – М.: Металлургия, 1964. – 451 с.
12. Размышляев А.Д. Магнитное управление формированием швов при дуговой сварке. – Мариуполь: ПГТУ, 2000. – 245 с.

пост. 05.07.11

К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве цилиндрических тел

ГОРБУНОВ А.Д.

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве цилиндрических тел. Ключевые слова: аналитический расчет, нагрев, термическое напряжение, цилиндр.

Розроблено інженерну методику аналітичного розрахунку термічних напружень при конвективному нагріванні циліндричних тіл. Ключові слова: аналітичний розрахунок, термічні напруження, нагрівання, циліндр.

The article represents the developed engineering technique of thermal tension during convective heating of cylindrical bodies. Key words: analytical calculations, heating, thermal tension, cylinder.

Постановка проблемы и анализ публикаций.

Без знания температурных полей и термических напряжений внутри массивного тела невозможно назначить рациональные энерго- и материалосберегающие тепловые и температурные режимы печей или других агрегатов, связанных с тепловой обработкой материалов, например, сушильных установок, химических реакторов и т. п. При значительных скоростях нагрева в цилиндрических телах могут возникать термические

напряжения, превышающие допустимые для данного материала, приводящие в некоторых случаях даже к разрушению тела.

В работе [1] приведены аналитические решения для расчета относительных термических напряжений в любой точке неограниченной пластины при ее конвективном нагреве в печи с постоянной температурой греющей среды t_c

$$\tilde{\sigma}(X, Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta(X, Fo), \quad (1)$$

на поверхности при $X=1$

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_n(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (2)$$

и в центре пластины при $X=0$

$$\tilde{\sigma}_{ц}(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu_n) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma} = \sigma/\sigma_0$ — безразмерные термические напряжения, $0 \leq \tilde{\sigma} \leq 1$; $\sigma_0 = \beta E \Delta t_0 / (1-\nu)$ — максимально возможные термические напряжения, Па.

Здесь относительные температуры:

в любой точке $X = x/R_0$

$$\theta(X, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot U_n(X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (4)$$

на поверхности

$$\theta_{п}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (5)$$

в центре

$$\theta_{ц}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (6)$$

и среднемассовая

$$\theta_{cp}(Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (7)$$

где $\theta(Fo) = (t(\tau) - t_c) / \Delta t_0$; $\Delta t_0 = t_0 - t_c$; t_0 — начальная температура тела, °C; $Fo = at/R_0^2$ — число Фурье; $Bi = aR_0/\lambda$ — число Био; $P_n(\mu_n) = 2Bi / [Bi(Bi+1) + \mu_n^2]$ — тепловая амплитуда;

$A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) / \cos \mu_n$;
 $M_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) \cdot Bi / \mu_n^2$; $C_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$;
 $D_n(\mu_n) = M_n(\mu_n) - P_n(\mu_n)$; $U_n(X) = \cos \mu_n X / \cos \mu_n$; μ_n — собственные числа, определяемые характеристическим уравнением:

$$\operatorname{ctg} \mu_n = \mu_n / Bi. \quad (8)$$

Решая совместно уравнения (2) и (3), можно получить формулу связи между термонапряжениями в центре и на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = -\Delta \theta(Fo) + \tilde{\sigma}_{ц}(Fo), \quad (9)$$

где относительный перепад температур получается путем вычитания из (5) уравнения (6)

$$\Delta \theta(Fo) = \theta_{п} - \theta_{ц} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n(\mu_n) \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \quad (10)$$

в котором $E_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) - A_n(\mu_n)$.

Из анализа уравнений (2), (3), (9) и (10) следует, что динамика изменения напряжений во времени аналогична изменению температурной разности, т.е. резко возрастают, достигая максимального значения при числе Фурье $Fo_{max} = 0,05 \dots 0,50$, а затем постепенно падают, т.е. носят колоколообразный характер.

На практике иногда важнее знать не всю динамику изменения напряжений во времени, а только их максимально возможные характерные величины, например, на поверхности и в центре тела. Целью данной работы является аналитическое определение указанных величин для цилиндрических тел.

Изложение материалов исследования.

В монографии Н.Ю. Тайца [2] показано, что для цилиндрических тел следует различать термические напряжения:

радиальные на поверхности

$$\tilde{\sigma}_r(1, Fo) = [\theta_{cp}(Fo) - \theta_{п}(Fo)] / 2, \quad (11)$$

тангенциальные на оси

$$\tilde{\sigma}_{\theta}(0, Fo) = [\theta_{cp}(Fo) - \theta_{ц}(Fo)] / 2, \quad (12)$$

и осевые

$$\tilde{\sigma}_z(X, Fo) = \tilde{\sigma}_r(X, Fo) + \tilde{\sigma}_{\theta}(X, Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta(X, Fo). \quad (13)$$

Из одинаковости выражения (13) и уравнения (1) вытекает, что формулы для расчета осевых напряжений в цилиндре совпадают с формулами (1)...(3) для пластины и можно ограничиться анализом этих уравнений. Поэтому задачу определения термических напряжений в цилиндре будем решать в предположении такой же их зависимости от температур на поверхности, в центре и среднемассовой как для плоских тел.

Для цилиндрических тел будут справедливы уравнения (1)...(7), (9), (10) для пластины с заменой координатной функции $U(X)$, входящей в уравнение (4) $U_n(X) = J_0(\mu_n X) / J_0(\mu_n)$, тепловых амплитуд $P_n(\mu_n) = 2Bi / (Bi^2 + \mu_n^2)$ для уравнения (5), $A_n(\mu_n) = P_n(\mu_n) / J_0(\mu_n)$ — для (6) и $M_n(\mu_n) = 2Bi / \mu_n^2$ — для (7). Теперь корни μ_n вместо (8) определяются из характеристического уравнения:

$$J_0(\mu_n) / J_1(\mu_n) = \mu_n / Bi, \quad (14)$$

где J_0 и J_1 — функция Бесселя первого рода нулевого и первого порядка.

Дифференцируя уравнения (2), (3) и (10) по времени, приравнявая производную нулю и используя два члена суммы ряда, получим формулы для расчёта максимальных времен Фурье:

для максимального термического напряжения на поверхности

$$Fo_{м.п} = (1/a) \ln(1/b_{п}), \quad (15)$$

перепада температур

$$Fo_{max} = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{b} \quad (16)$$

и термонапряжения в центре

$$Fo_{м.ц} = (1/a) \ln(1/b_{ц}), \quad (17)$$

где $a = \mu_2^2 - \mu_1^2$; $b_{п} = -\delta D_1 / D_2$; $b_{ц} = -\delta C_1 / C_2$;
 $b = -\delta E_1 / E_2$; $\delta = (\mu_1 / \mu_2)^2$.

Здесь и далее под E_i понимается амплитуда $E_i(\mu_i)$.

Подставляя Fo_{max} из (16) в уравнение (10), получим максимальный перепад температур с учётом двух членов ряда:

$$\Delta \theta_m = E_1 e^{-\mu_1^2 Fo_{max}} \left(1 + E_2 / E_1 \cdot e^{-a Fo_{max}} \right) = (1 - \delta) E_1(\mu_1) e^{-\mu_1^2 Fo_{max}}. \quad (18)$$

При выводе (18) было учтено, что согласно уравнению (16) $\exp(-a Fo_{max}) = b$.

По аналогии подставляя $Fo_{м.п}$ в уравнение (2), получим максимальное термическое напряжение на поверхности

$$\tilde{\sigma}_{м.п} = (1-\delta)D_1 \cdot e^{-\mu_1^2 Fo_{м.п}} \quad (19)$$

и после подстановки (17) в (3) — максимальное напряжение в центре цилиндра

$$\tilde{\sigma}_{м.ц} = (1-\delta)C_1 e^{-\mu_1^2 Fo_{м.ц}} \quad (20)$$

Анализ полученных решений. Формулы (15)...(17) однотипны и могут быть описаны одним уравнением

$$Fo_{m,j} = (1/a) \ln(1/b_j) \quad (21)$$

При $j=1,3$ имеем расчет напряжений на поверхности и в центре, а при $j=2$ — перепада температур. После определения максимальных времен можно найти соответствующие температуры при этих числах Фурье с учетом двух членов ряда.

Подставляя $Fo_{m,j}$ в уравнение (5), получим температуру поверхности

$$\theta_{п,j} = (P_1 + b_j P_2) \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo_{m,j}), \quad (22)$$

в (6) — температуру центра

$$\theta_{ц,j} = (C_1 + b_j C_2) \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo_{m,j}), \quad (23)$$

в соотношении (7) — среднемассовую

$$\theta_{ср,j} = (M_1 + b_j M_2) \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo_{m,j}), \quad (24)$$

и в (10) перепад температур

$$\Delta\theta_j = (E_1 + b_j E_2) \exp(-\mu_1^2 \cdot Fo_{m,j}). \quad (25)$$

Наибольшую и основную трудность при практических расчетах по уравнениям (1)...(25) представляет определение по соотношению (14) бесчисленного множества корней. В работе [3] приведена общая приближенная формула расчета первого корня для тел простой формы

$$\mu_1 = \sqrt{D/\gamma}, \quad (26)$$

где $D = kBi/m$; $m = 1 + Bi/(k+2)$ — коэффициент термической массивности; $\gamma = (1 + \sqrt{1+4\rho})/2$; $\rho = D^2/[k(k+2)^2(k+4)]$; k — коэффициент геометрической формы, равный 1 — для пластины, 2 — цилиндра и 3 — шара. При малых ρ число $\gamma \approx 1 + \rho$.

Для определения приближенных значений остальных корней следует различать два характерных случая нагрева — при больших и малых числах Био [4].

При малых числах Био ($Bi < 3$)

$$\mu_n = b_n \left(1 + Bi/\left[b_n^2 \left(1 + Bi/2b_n^2\right)\right]\right), \quad (27)$$

где b_n — корни уравнения (14) при $Bi = 0$, т.е. нули функции $J_1(b_n) = 0$: $b_1 = 0$; $b_2 = 3,831706$; $b_3 = 7,015587$ и т.д. [4].

При больших числах Био ($Bi \geq 3$)

$$\mu_n = a_n (1 - \beta(1 - \beta/2)), \quad (28)$$

где $\beta = 1/Bi$; a_n — корни уравнения (14) при $Bi = \infty$, т.е. нули функции $J_0(a_n) = 0$: $a_1 = 2,404826$; $a_2 = 5,520078$ и т.д.

Следует отметить, что при числах Био $Bi > 6$ первый корень μ_1 следует вычислять не по уравнению (26), а по (28).

Получим упрощенные расчетные соотношения в двух предельных случаях.

Асимптотика при малых числах Био. Первый корень уравнения (14) вычисляем по соотношению (26) при $\gamma \approx 1$ и $m = 1 + Bi/4$, а второй — по (27). Тогда отношение собственных чисел

$$\delta = (\mu_1/\mu_2)^2 = D/\gamma b_2^2. \quad (29)$$

Разность квадратов корней $a = \mu_2^2 - \mu_1^2 = b_2^2 - D/\gamma$.

Первая амплитуда, входящая в уравнение (5) температуры поверхности

$$P_1 = 2/(Bi + 2/m\gamma) \approx 1/(m\gamma) \approx 1 - Bi/4. \quad (30)$$

По аналогии вторая $P_2 = 2/(Bi + 1/m_2)$ и любая

$$P_n(\mu_n) = 2/(Bi + 1/m_n), \quad (31)$$

где $m_n = Bi/\mu_n^2$ — n -ый коэффициент термической массивности.

Интересно отметить, что в отличие от других амплитуд зависимость P_2 от числа Био носит немонотонный характер, возрастает от нуля до максимального значения $P_{2max} \approx 0,22$ при числе $Bi \approx 4$, а затем уменьшается до нуля, оставаясь меньше $P_1(Bi)$.

Введем отношение поверхностных амплитуд

$$\eta = P_2/P_1 = (\delta + e)/(1 + e), \quad (32)$$

где $e = m_2 \cdot Bi$.

При определении тепловой амплитуды A воспользуемся разложением функции Бесселя $J_0(x) = 1 - z^2 + z^4/4 - \dots$, где $z = x/2$. Тогда

$$A_1 = P_1/J_0(\mu_1) \approx 1 + K_A \cdot Bi, \quad (33)$$

где $K_A = k/2(k+2) = 1/4$.

Согласно [5] амплитуда

$$A = 2J_1/(\mu S), \quad (34)$$

где $S = J_0^2 + J_1^2$; при больших аргументах $S(x) \approx 2/(\pi x)$.

$$A_2 = P_2/J_0(\mu_2) = -\sqrt{2m_2 P_2/S_2}, \quad (35)$$

где $S_2 = S(\mu_2)$.

Для среднемассовой температуры:

$$M_1 = P_1 \cdot 2Bi/\mu_1^2 = P_1 m \gamma \approx (1 - Bi^2/16) \text{ и } M_2 = 2P_2 \cdot m_2. \quad (36)$$

Для перепада температур по уравнению (10)

$$E_1 = P_1 - A_1 = P_1 - (1 + K_A \cdot Bi) \approx -Bi/2, \quad (37)$$

$$E_2 = P_2 + \sqrt{2m_2 b_2/S_2}.$$

Для термических напряжений в центре цилиндра по (3)

$$C_1 = M_1 - A_1 = P_1 \left(2Bi/\mu_1^2\right) - (1 + K_A \cdot Bi) \approx -K_A \cdot Bi. \quad (38)$$

$$C_2 = M_2 - A_2 = P_2 \cdot 2m_2 + \sqrt{2m_2 P_2/S_2}.$$

Для термонапряжений на поверхности

$$D_1 = M_1 - P_1 = P_1 \left(2Bi/\mu_1^2 - 1\right) \approx P_1(m\gamma - 1) \approx P_1 \cdot Bi/4, \quad (39)$$

$$D_2 = M_2 - P_2 = P_2(2m_2 - 1).$$

С целью проверки амплитуды D можно использовать равенство $D = C - E$.

Выражения для расчета максимальных времен по уравнению (21) также упростятся.

Коэффициент поверхности ($j=1$)

$$b_{\text{п}} = -\delta D_1/D_2 = -\delta(m\gamma - 1)/[\eta(2m_2 - 1)] \approx K_A \cdot \text{Bi} = \text{Bi}/4,$$

для перепада температур ($j=2$)

$$b = -\delta E_1/E_2 = -\delta/\eta \cdot K_A \cdot \text{Bi}(1 + P_1)/\left(P_2 + \sqrt{2m_2 P_2/S_2}\right) \approx \text{Bi}/9,$$

и центра ($j=3$)

$$b_{\text{ц}} = -\delta C_1/C_2 = (\delta \cdot K_A \cdot \text{Bi})/\left[2m_2 \cdot P_2 + \sqrt{2m_2 P_2/S_2}\right] \approx \text{Bi}/10.$$

Результаты расчетов при $\text{Bi}=1$ максимальных времен Fo_j по формуле (21) и соответствующих этим временам максимальных термических напряжений на поверхности по уравнению (19), $\Delta\theta_m$ по (18) и термонапряжений в центре цилиндра по (20) приведены в табл. 1. Там же представлены данные при $\text{Bi}=\infty$.

Таблица 1. Коэффициенты b_j , максимальные времена Fo_j , $\tilde{\sigma}_{\text{м.п.}}$, $\Delta\theta_m$ и $\tilde{\sigma}_{\text{м.ц.}}$ при $\text{Bi}=1$ и ∞ .

j	Число Био $\text{Bi}=1$			$\text{Bi}=\infty$		
	b_j	$\text{Fo}_{m.j}$	$\tilde{\sigma}_{m.j}$	b_j	$\text{Fo}_{m.j}$	$\tilde{\sigma}_{m.j}$
1	0,197687	0,107603	0,159055	1	0	1
2	0,101219	0,152036	-0,306981	0,28556	0,05074	-0,96792
3	0,069518	0,176974	-0,152570	0,14446	0,07837	-0,46734

Анализ уравнений (21) и (40) позволяет сделать вывод о том, что максимум величин наступает в последовательности $j=1, 2, 3$ и с ростом числа Био эти времена уменьшаются.

Для оценки различия максимальных времен при $\text{Bi}=1$ составим их разности:

$$\Delta\text{Fo}_1 = \text{Fo}_{\text{max}} - \text{Fo}_{\text{м.п}} = 0,152 - 0,108 = 0,0444;$$

$$\Delta\text{Fo}_2 = \text{Fo}_{\text{м.ц}} - \text{Fo}_{\text{max}} = 0,177 - 0,152 = 0,0249$$

и

$$\Delta\text{Fo}_3 = \Delta\text{Fo}_1 + \Delta\text{Fo}_2 = 0,0444 + 0,0249 = 0,0693. \quad (41)$$

Из (21) и табл. 1 следует, что с ростом числа Био различия максимальных времен увеличиваются, вплоть до $\Delta\text{Fo}_3 = 0,0784$ – см. уравнение (50).

На практике технологов интересует вопрос — насколько термические напряжения на поверхности тела больше, чем в его середине. Обозначим их отношение $R = \sigma_{\text{п}}/\sigma_{\text{ц}}$. Наиболее просто R можно найти в стадии регулярного режима нагрева (РРН), который наступает при числах Фурье $\text{Fo} > 0,3$ и когда вместо бесконечных сумм в уравнениях (2)...(10) можно ограничиться одним членом ряда. Тогда, деля уравнение (2) на (3) и учитывая упрощенные соотношения (38) и (39), получим

$$R = \tilde{\sigma}_{\text{п}}/\tilde{\sigma}_{\text{ц}} = D_1/C_1 = P_1 \text{Bi}/(4K_A \text{Bi}) \approx -(1 - \text{Bi}/4). \quad (42)$$

При числе $\text{Bi}=0$ $R(0) = -2/k = -1$.

Таким образом, в отличие от процесса нагрева плоских тел, когда при $k=1$ $R(0) = -2$, термические напряжения на поверхности тела в 2 раза больше термонапряжений в центре, при нагреве цилиндрических тел напряжения в центральных точках

тела примерно равны или чуть больше, чем на поверхности.

Асимптотика при больших числах Био. Теперь корни μ_n , в том числе и первый, находим по уравнению (28). Тогда отношение

$$\delta = [a_1(1-\beta)]^2/[a_2(1-\beta)]^2 \approx (a_1/a_2)^2 = 0,189792. \quad (43)$$

В данном случае отношение корней совпадает с максимально возможным, которое получается в предельном случае при $\text{Bi}=\infty$: $\delta_\infty = \delta(\infty) = 0,189792$.

Разность квадратов корней

$$a = a_2^2(1-\beta)^2(1-\delta). \quad (44)$$

Амплитуды:

$$P_1 = 2\beta/(1+z^2) \approx 2\beta(1-z^2);$$

$$P_2 = 2\beta/(1+z^2/\delta) = 2\beta(1-z^2/\delta) \approx P_1,$$

где $z = \mu_1/\text{Bi} = a_1(1-\beta)\beta$.

В работе [1] было получено, что тепловая амплитуда при больших числах Био для плоских тел пропорциональна $\sqrt{1-z^2}$. Предполагая такую же зависимость для любых тел, получим

$$A_1 = A_{1,\infty} \cdot \sqrt{1-z^2} \approx A_{1,\infty} \cdot (1-z^2/2); \quad (45)$$

$$A_2 = A_{2,\infty} \cdot \sqrt{1-z^2/\delta} \approx A_{2,\infty} (1-z^2/2\delta),$$

где $A_{1,\infty}$ и $A_{2,\infty}$ — амплитуды при $\text{Bi}=\infty$. Осуществляя в уравнении (34) предельный переход при $\text{Bi}=\infty$, т.е. полагая в нем $\mu_n = a_n$ и $J_0(a_n) = 0$, будем иметь

$$A_{1,\infty} = 2/(a_1 J_1(a_1)) = 1,6021$$

и

$$A_{2,\infty} = 2/(a_2 J_1(a_2)) = -1,0648.$$

Расчет амплитуды по уравнению (45) при $\text{Bi}=10$ дает $A_1 \approx 1,5636$ с погрешностью 0,3% по сравнению с точным значением $A_1^T(10) = 1,5677$ [5].

Амплитуды

$$M_1 = P_1 2\text{Bi}/\mu_1^2 = 4/[a_1^2(1-\beta)^2(1+z^2)] \approx M_{1,\infty}(1+2\beta-z^2);$$

$$M_2 = M_{2,\infty} \cdot (1+2\beta-z^2/\delta),$$

где $M_{1,\infty} = 4/a_1^2 = 0,691675$; $M_{2,\infty} = 4/a_2^2 = 0,131271$.

$$C_1 = M_1 - A_1 = M_{1,\infty}(1+2\beta-z^2) - A_{1,\infty}\sqrt{1-z^2};$$

$$C_{1,\infty} = M_{1,\infty} - A_{1,\infty} = -0,910425;$$

$$C_2 = M_2 - A_2; \quad C_{2,\infty} = M_{2,\infty} - A_{2,\infty} = 1,196071.$$

$$E_1 = P_1 - A_1 = 2\beta/(1+z^2) - A_{1,\infty}\sqrt{1-z^2}; \quad E_{1,\infty} = -A_{1,\infty};$$

$$E_2 = 2\beta/(1+z^2/\delta) - A_{2,\infty}\sqrt{1-z^2/\delta}; \quad E_{2,\infty} = -A_{2,\infty}.$$

$$D_1 = M_1 - P_1; \quad D_{1,\infty} = M_{1,\infty};$$

$$D_2 = M_2 - P_2; \quad D_{2,\infty} = M_{2,\infty}.$$

Теперь коэффициенты для расчета максимальных времен примут вид:

$$b_{\text{п}} = \frac{\delta[M_{1,\infty} \cdot (1+2\beta-z^2) - 2\beta/(1+z^2)]}{-M_{2,\infty} \cdot (1+2\beta-z^2/\delta) + 2\beta/(1+z^2/\delta)}; \quad (46)$$

$$b = \frac{\delta \left[A_{1,\infty} \sqrt{1-z^2} - 2\beta / (1+z^2) \right]}{-A_{2,\infty} \sqrt{1-z^2/\delta} + 2\beta / (1+z^2/\delta)}; \quad (47)$$

$$b_{\Pi} = \frac{\delta \left[A_{1,\infty} \sqrt{1-z^2} - M_{1,\infty} \cdot (1+2\beta - z^2) \right]}{-A_{2,\infty} \sqrt{1-z^2/\delta} + M_{2,\infty} \cdot (1+2\beta - z^2/\delta)}. \quad (48)$$

В предельном случае при $Bi = \infty$:

$$\begin{aligned} b_{\Pi,\infty} &= -\delta_{\infty} D_{1,\infty} / D_{2,\infty} = -1; \\ b_{\infty} &= -\delta_{\infty} A_{1,\infty} / A_{2,\infty} = 0,285561; \\ b_{\Pi,\infty} &= -\delta_{\infty} C_{1,\infty} / C_{2,\infty} = 0,144461. \end{aligned} \quad (49)$$

Так как $b_{\Pi,\infty} = -1$ лишено физического смысла, следует взять $b_{\Pi,\infty} = |1|$.

Тогда наименьшие максимальные времена согласно (21) при $a_{\infty} = a_2^2(1-\delta_{\infty}) = 24,688073$ будут:

$$\begin{aligned} Fo_{\text{м.п.}\infty} &= 0, \quad Fo_{\text{max.}\infty} = (1/a_{\infty}) \ln(1/b_{\infty}) = 0,05044 \\ \text{и} \quad Fo_{\text{м.ц.}\infty} &= (1/a_{\infty}) \ln(1/b_{\Pi,\infty}) = 0,078368. \end{aligned} \quad (50)$$

Подставляя (50) в уравнение (3), получим максимально возможное термическое напряжение в центре цилиндра

$$\tilde{\sigma}_{\text{м.ц.}\infty} = (1-\delta_{\infty}) C_{1,\infty} \cdot \exp(-a_1^2 Fo_{\text{м.ц.}\infty}) = -0,467336. \quad (51)$$

Величины $b_{j,\infty}$, вычисленные по уравнению (49), времена $Fo_{j,\infty}$ согласно (50) и максимальные термические напряжения $\tilde{\sigma}_{\text{м.ц.}\infty}$ приведены в табл. 1.

Отношение термонапряжений при $Bi = \infty$ $R_{\infty} = D_{1,\infty} / C_{1,\infty} = 0,6918 / (-0,9104) = -0,7598$.

Следует отметить, что если приближенно считать $R = -2/k$, то из уравнения (9) будем иметь

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = -K_{\sigma} \cdot \Delta\theta(Fo), \quad (52)$$

где $K_{\sigma} = 2/(2+k)$.

Это соотношение при $k=1$ и 2 полностью совпадает с формулами Н.Ю. Тайца [2] для максимальных термических напряжений

$$\sigma_{\text{max}}(\tau) = K_{\sigma} \beta E \Delta t(\tau) / (1-\nu). \quad (53)$$

Из анализа уравнения (46) вытекает, что коэффициент b_{Π} меняет знак по причине изменения знака амплитуды D_2 , изменяющейся от $-2Bi/b_2^2$ при малых числах Био до $D_{2,\infty} = +0,131$. Из условия равенства нулю D_2 можно получить граничное число $Bi_{\text{м}} = 15$ выше которого имеем случаи нагрева термически «массивного» тела. Таким образом, при числах $Bi < Bi_{\text{м}}$ для определения времени $Fo_{\text{м.п}}$ можно применять формулу (15) в которой b_{Π} определяется по уравнению (46), а при $Bi > Bi_{\text{м}}$ коэффициент b_{Π} становится отрицательным и нельзя пользоваться формулой (15). Возникшую ситуацию можно объяснить следующим образом. Формулы (15)...(21) получены с учетом всего двух членов ряда. С ростом числа Био максимальное время $Fo_{\text{м.п}}$ уменьшается, вплоть до 0 при $Bi = \infty$.

При очень малых числах Фурье ($Fo < 0,1$) расчёт температур по уравнениям (1)...(10) затруднителен из-за необходимости учета большого количества членов ряда, ввиду его плохой сходимости. В этом случае для расчёта поверхностной температуры можно использовать формулы, полученные методом операционного исчисления в работе [5]. Объединяя эти формулы в одно уравнение для простых тел, будем иметь:

$$\theta_{\Pi}(Fo) = 1 - H(1 - \varphi(y)), \quad (54)$$

где $H = Bi/G$; $G = Bi - (k-1)/2$; $y = G\sqrt{Fo} \equiv Ti$ – модифицированное время, число Тихонова; $\varphi(y) = e^{y^2} \operatorname{erfc} y$; $\operatorname{erfc} y = (1 - \operatorname{erf} y)$ — дополнительный интеграл вероятностей; $\operatorname{erf} y = p \cdot \int_0^y e^{-x^2} dx$ — функция

ошибок Гаусса; $p = 2/\sqrt{\pi}$; k — фактор формы, см. уравнение (26).

Зная температуру поверхности и используя методику [1], можно найти среднемассовую температуру

$$\begin{aligned} \theta_{\text{ср}}(Fo) &= 1 - k \int_0^{Fo} Bi \cdot \theta_{\Pi}(Fo) dFo = \\ &= 1 - k[(1-H) \cdot Fo + H\Phi(y)/G], \end{aligned} \quad (55)$$

где $\Phi(y) = G^2 \int_0^{Fo} \varphi(y) dFo = \varphi(y) + py - 1$.

Сопоставление приближенных зависимостей (54) и (55) с точными решениями (5) и (7) показало, что погрешность уравнения (55) при расчете средней температуры гораздо меньше, чем уравнения (54) для температуры поверхности. Так, например, в случае нагрева при $Bi = 1$ формулой (54) можно пользоваться с относительной погрешностью $\delta t_{\Pi} = (t_{\Pi}^{\text{точное}} - t_{\Pi}^{\text{прибл}}) \cdot 100 / t_{\Pi}^{\text{точн}}$ менее +5% при времени начальной стадии от 0 до $Fo_{\text{н.с}} = 0,4$, а формулой (55) с погрешностью $\delta t_{\text{ср}} \leq -5\%$ до момента времени $Fo_{\text{н.с}} = 0,53$.

Знаки перед погрешностями δt означают, что температура поверхности при расчете по уравнению (54) занижена, а средняя температура по (55) — завышена по сравнению с точными значениями. При расчетах процессов охлаждения знаки погрешностей поменяются на обратные.

Решения (54) и (55) можно упростить путем разложения функции $\varphi(y)$ в ряд при малых ($y < 1$):

$$\varphi(y) = 1 - py + y^2 - \frac{2p}{3}y^3 + \frac{y^4}{2!} \dots \quad (56)$$

и при больших ($y \gg 1$) аргументах:

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}y} [1 - u(1 - 3u(1 - 5u(1 - \dots)))]], \quad (57)$$

где $u = 1/\sqrt{2y^2}$.

Графическое решение уравнений (54) и (55) приведено на рисунке 1.

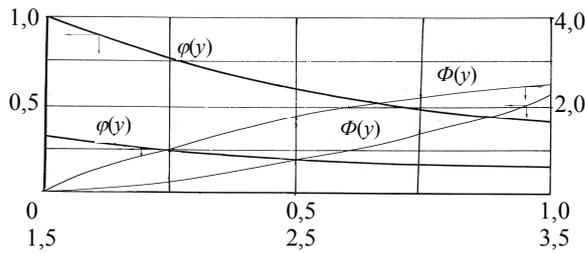


Рис. 1. Зависимость функций φ и Φ от времени y

Интересно отметить, что, в отличие от уравнения (5), где температура поверхности зависит от двух величин – числа Био и Фурье, из уравнения (54) следует, что $\theta_{\text{п}}$ зависит только от одного параметра — числа Тихонова $Ti = G\sqrt{Fo}$. Вместо семейства кривых (5) на рисунке 1 имеем всего одну линию. Решения, подобные (54), когда исчезает зависимость процесса от какого-либо параметра, принято называть автомодельными.

При числах $Bi = 1$ для шара или $1/2$ для цилиндра коэффициент $G = 0$ и в расчетных соотношениях (54) и (55) следует раскрывать неопределенность типа $0/0$. Используя разложение (56) функции $\varphi(y)$ при малых аргументах, из уравнения (54) получим для температуры на поверхности:

$$\theta_{\text{п}}(Fo) = 1 - pBi_*\sqrt{Fo} \quad (58)$$

и для среднemasовой из (55)

$$\theta_{\text{ср}}(Fo) = 1 - kBi_*Fo \left(1 - 2pBi_*\sqrt{Fo}/3 \right), \quad (59)$$

где $Bi_* = 1$ и $k = 3$ для шара и $Bi_* = 1/2$ и $k = 2$ — для длинного цилиндра.

Таким образом, при малых временах процесса ($Fo < 0,1$) вместо уравнения (5) будет (54), вместо (7) — (55), а температуру в центре тела на начальной стадии нагрева приближенно можно принять $\theta_{\text{ц}} \cong 1$.

С учетом сказанного уравнение (2) для расчета термических напряжений на поверхности примет вид

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}(Fo) = H(1 - \varphi(y)) - k[(1 - H)Fo + H\Phi(y)/G]. \quad (60)$$

При $G = 0$, после раскрытия неопределенности с помощью (56), получим

$$\tilde{\sigma}_{\text{п}}(Fo) = pBi_*\sqrt{Fo} \left(1 + 2kBi_*\sqrt{Fo}/3 \right) - kBi_*Fo. \quad (61)$$

Дифференцируя уравнение (60) по времени и приравняв производную нулю с учетом разложений (56) и (57) можно получить формулу, аналогично (15), для расчета времени наступления $Fo_{\text{м.п}}$ максимального термического напряжения на поверхности. Ввиду сложности (60) и необходимости в дальнейшем решать трансцендентные уравнения, покажем ход расчета на более простом уравнении (61). Из соотношения $d\tilde{\sigma}_{\text{п}}/dFo = 0$ получим квадратное уравнение, решение которого имеет вид:

$$Fo_{\text{м.п}} = G_3/\gamma_3, \quad (62)$$

где $G_3 = 1/[k(\pi k - 4Bi_*)]$; $\gamma_3 \cong 1 - \rho_3$; $\rho_3 = (2kBi_* \cdot G_3)^2$.

Расчет для цилиндра при $k = 2$ и $Bi_* = 1/2$ дает $Fo_{\text{м.п}}(1/2) = 0,12346$, что хорошо согласуется с ранее

полученной при $Bi = 1$ по (15) величиной 0,1076 (см. табл. 1).

Иногда требуется определить расположение координаты $X_{\text{н}}$ нейтрального слоя в котором термические напряжения меняют знак с $+\tilde{\sigma}$ на $-\tilde{\sigma}$, т.е. в этой точке равны нулю. Наиболее просто это можно сделать в стадии РРН. Тогда согласно уравнению (1) $\theta_{\text{ср}}(Fo) = \theta(X_{\text{н}}, Fo)$ или $M_1 = P_1(J_0(\mu_1 X_{\text{н}}))/J_0(\mu_1)$. Разрешая последнее выражение относительно $X_{\text{н}}$, с помощью разложения функции $J_0(x) \approx 1 - x^2/4$ — см. уравнение (33), получим при малых числах Био

$$X_{\text{н}} = \sqrt{1/2} = 0,7071. \quad (63)$$

и при больших числах Био

$$X_{\text{н}} = \sqrt{M_{1,\infty}(1 - M_{1,\infty}/A_{1,\infty})} = 0,6269. \quad (64)$$

Таким образом, поскольку $X_{\text{н}} > 0,5$ нейтральные слои расположены ближе к поверхности, а само $X_{\text{н}}$ колеблется в узких пределах — от 0,63 до 0,71.

Следует отметить, что при нагреве абсолютные, т.е. размерные термические напряжения $\sigma = \sigma_0 \cdot \tilde{\sigma}$ поменяют знаки за счет отрицательности σ_0 из-за $\Delta t_0 = (t_0 - t_c) < 0$.

В заключение укажем, что все полученные решения описывают как процесс конвективного нагрева цилиндрических тел, так и их охлаждение.

Выводы

1. Разработана инженерная методика расчета термических напряжений при конвективном нагреве (охлаждении) цилиндрических тел. Получены простые и эффективные формулы для двух предельных случаев малых и больших чисел Био на начальной и регулярной стадиях нагрева. Сделан акцент на определении максимальных термонапряжений и времени их наступления.

2. При нагреве на поверхности цилиндра возникают сжимающие (отрицательные) напряжения, а в середине растягивающие (положительные); в случае процесса охлаждения знаки поменяются.

3. Нейтральные слои расположены ближе к поверхности.

4. Наибольшее значение по абсолютной величине имеют напряжения в середине, которые примерно равны или немного превышают термонапряжения на поверхности цилиндра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов А.Д. К расчёту термических напряжений при конвективном нагреве пластины // Математичне моделювання. – Днепропетровськ: 2010. № 1(22). – С. 16–21.
2. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Металлургиздат, 1950. – 151 с.
3. Гольдфарб Э.М., Горбунов А.Д. Определение корней трансцендентных уравнений при нагреве тел

-
- в прямо́токе и противото́ке // ИФЖ. – 1984. – Т.46. – № 5. – С. 870–871.
4. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э. М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности цилиндра при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 12. – С. 94–97.
 5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 600 с.

