

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ



Комбинированный способ итерационного решения нелинейного уравнения магнитостатики

СМОЛЯНСКИЙ П.С.

КТУ, Кривой Рог

Предложен комбинированный способ решения нелинейного дискретизованного уравнения магнитостатики для пространственных интегральных уравнений в случае плохой сходимости или расходимости итерационного процесса. Этот способ сочетает в себе достоинства прямых и итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений.

Запропоновано комбінований спосіб вирішення нелінійного дискретизованого рівняння магнітостатики для просторових інтегральних рівнянь у разі поганої збіжності або розбіжності ітераційного процесу. Цей спосіб поєднує в собі переваги прямих і ітераційних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

It is proposed a combined solution method of nonlinear discrete magnetostatics equation for spatial integral equations in case of poor convergence or divergence of iterative process. This method combines advantages of direct and iterative solution methods of linear algebraic system.

Постановка. Только высокоточный массовый вычислительный эксперимент может обеспечить оптимальное проектирование прецизионных устройств электронной техники, что гарантирует их компактность и минимальную стоимость, а также надежную и устойчивую работу. Одной из важнейших задач вычислительной физики остается задача расчета и оптимизации магнитостатических устройств в случае нелинейной среды, сложной геометрии магнитной системы (МС) и сильных полей. Эффективным способом расчета магнитостатических систем является метод пространственных нелинейных интегральных уравнений. Особенность реализации итерационных методов для таких уравнений ставит целый ряд вопросов, касающихся сходимости метода итераций и влияния характера дискретизации на итерационное решение, не получивших обоснование в полной мере и в настоящее время.

Анализ предыдущих исследований.

Существуют два различных подхода к построению интегральных уравнений магнитостатики [1-4].

Первый, метод вторичных источников [1, 2], приводит к уравнениям относительно фиктивных (расчетных) источников поля, распределенных только на границе исследуемых областей. Второй подход [3, 4] приводит к уравнениям относительно пространственно распределенных источников во всей области магнетиков, а не только источников на границе. В этом случае источниками являются физические вектора поля или их линейные комбинации. Наиболее распространены уравнения относительно вектора намагниченности \vec{M} , напряженности \vec{H} или индукции магнитного поля \vec{B} или их линейных комбинаций. Такой метод расчета называют методом пространственных интегральных уравнений (ПРИУ) [4].

На первом этапе развития ПРИУ из-за недостаточного быстродействия вычислительных систем наиболее актуальной проблемой было эффективное формирование системы нелинейных уравнений (СНУ) для заданной дискретизации. Затем решение СНУ сводилось к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) путем линеаризации СНУ за счет упрощения нелинейных характеристик среды.

На этом этапе развития ПРИУ число элементов дискретизации было относительно невелико, форма их варьировалась незначительно, поэтому СЛАУ таких магнитных систем были относительно хорошо обусловленными. Возросшие вычислительные мощности современных ЭВМ позволяют резко увеличить количество элементов дискретизации МС. Однако в этих условиях затруднительно обеспечить удовлетворительное итерационное решение СНУ для таких задач.

Цель работы. На современном этапе развития ПРИУ одной из наиболее актуальных проблем становится именно решение СНУ и СЛАУ в силу большого числа элементов дискретизации и их значительной вариации в размерах и формах. Кроме того, еще одним осложняющим обстоятельством является то, что СЛАУ для рассматриваемых методов получаются не симметричными и не знакоопределенными. Следствием этого является возможное нарушение условий сходимости итерационного процесса [5] в силу неустойчивости алгоритма ПРИУ. Это ведет к тому, что итоговая СЛАУ для таких МС становится существенно плохо обусловленной. Применение же прямых методов, которые могли бы обеспечить более точное решение СЛАУ за счет регуляризации, затруднительно в силу большой размерности систем. Следует подчеркнуть, что этап

формирования СНУ и СЛАУ требует существенно больших затрат времени, чем их итерационное решение. Поэтому даже значительное увеличение времени решения СНУ за счет более сложных, но эффективных алгоритмов не приведет к заметному увеличению времени расчета магнитной системы, однако это может решающим образом сказаться на качестве расчета.

В статье предложен блочный алгоритм расчета магнитоэлектростатических полей методом ПРИУ, который позволяет сочетать достоинства прямых и итерационных методов решения СЛАУ.

Изложение основных результатов. Эта статья является продолжением и развитием результатов [5]. В статье рассматривается пространственное интегральное уравнение поля относительно расчетного вектора $\bar{U} = \bar{B} / \mu_0 + \bar{H} = 2 \cdot \bar{H} + \bar{M}$ [3], где \bar{B} – вектор индукции, \bar{H} – вектор напряженности поля, \bar{M} – вектор намагниченности. В свою очередь, это соотношение можно записать так: $\bar{U} = 2 \cdot \bar{H}_0 + 2 \cdot \bar{H}_M + \bar{M}$. Здесь \bar{H}_M – напряженность поля, созданная намагниченностью среды, а $\bar{H}_0(\bar{x})$ – напряженность внешнего поля, созданная первичными источниками поля – токовыми обмотками и/или постоянными магнитами, то есть ферромагнетиками с заранее заданным и известным, практически не зависящим от внешнего поля вектором намагниченности. В этом случае справедливо модифицированное интегральное уравнение [3]:

$$\bar{U}(x) = 2 \cdot \bar{H}_0(x) + P\bar{M}, \quad (1)$$

где $P\bar{M} = 2 \cdot [\int_G K(x, y) \cdot \bar{M}(y) \cdot dy - N_\sigma \cdot \bar{M}] + \bar{M}$; $K(x, y)$ – симметричный тензор второго ранга с компонентами $K_{ij} = (\alpha_i \cdot \alpha_j - \delta_{ij}) / r^m$; $m=2, 3$ – размерность пространства, α_i – направляющие косинусы радиус-вектора r ; δ_{ij} – символ Кронекера; переменные x, y – точки в двумерном или трехмерном пространстве. Для случая кусочно-постоянной изотропной среды следует положить $N_\sigma = 0$.

Интегрирование ведется по всей области магнетиков G . Далее мы будем рассматривать для простоты расчет плоских двумерных систем. Случай осесимметричных и трехмерных систем применительно к исследуемым вопросам аналогичен двумерным. Уравнение (1) должно быть дополнено кривой намагничивания материала $B = B(H)$, с помощью которой можно получить нелинейную зависимость $M = M(U)$ длины вектора M от длины вектора U и связать эти две величины в одном нелинейном интегральном уравнении.

В этих условиях необходимо найти распределение расчетного вектора $\bar{U}(x)$, а затем с помощью кривой намагничивания можно получить также распределение вектора намагниченности $\bar{M}(x)$. Далее напряженность поля в любой точке можно получить с помощью интегрирования по известным источникам поля.

Для получения численного решения область магнетиков G разбивается на совокупность элементарных областей G_i таким образом, чтобы

$G = \cup G_i$ и $G_i \cap G_j$ при $i \neq j$. В пределах элементарной области G_i свойства среды можно считать постоянными, в частности, имеющими одну и ту же намагниченность. Таким образом, уравнение (1) аппроксимируется с помощью кусочно-постоянного приближения вектора $\bar{M}(\bar{x})$ сколь угодно точно.

Рассмотрим дискретный аналог уравнения (1) в случае изотропной нелинейной среды. В результате получается нелинейное векторное уравнение относительно значений вектора $\bar{U}(\bar{x})$, рассматриваемых в центрах тяжести x_i элементов G_i :

$$\bar{U}(x_i) = 2\bar{H}_0(x_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^N A_{ij} \cdot \bar{M}(x_j) + \bar{M}(x_i). \quad (2)$$

Здесь A_{ij} – тензор второго ранга. Он получен путем интегрирования по области G_j функции $K(x, y)$ и

имеет вид $A_{ij} = \begin{pmatrix} T_{xx}, T_{xy} \\ T_{yx}, T_{yy} \end{pmatrix}$, его компоненты

вычисляются численно или аналитически при интегрировании по области G_j . Компоненты тензора A_{ij} определяют составляющие напряженности поля в точке x_i от элемента дискретизации с номером j .

В [5] для нелинейной кусочно-постоянной изотропной среды получено уравнение:

$$\bar{M} = 2 \cdot \bar{H}_0 + (E + 2 \cdot A - 2 \cdot D)\bar{M} = 2 \cdot \bar{H}_0 + S \cdot \bar{M}, \quad (3)$$

где A – клеточная матрица, состоящая из клеточных тензоров A_{ij} , E – единичная матрица. Размерность всех матриц A , D и E равна $2n$, где n – число элементов дискретизации. Здесь $S = E + 2 \cdot A - 2 \cdot D$, а D – диагональная матрица с элементами $1/\chi_i$ на главной диагонали, где χ_i – величина магнитной восприимчивости в i -ом элементе, причем:

$$D_{11} = 1/\chi_1, D_{22} = 1/\chi_2, \dots, D_{2N-1, 2N-1} = 1/\chi_N, D_{2N, 2N} = 1/\chi_N.$$

Отметим, что матрица D не является постоянной, а зависит от вектора \bar{M} . Поэтому итерационный процесс для уравнения (3) должен быть записан следующим образом:

$$M_{n+1} = 2 \cdot H_0 + S_n \cdot M_n \quad (4),$$

где $S_n = E + 2 \cdot (A - D_n)$.

В уравнении (4) фактически присутствуют два итерационных процесса: главный – относительно вектора \bar{M}_n и дополнительный – относительно диагональной матрицы D_n , которая характеризует свойства ферромагнитного материала. Величина диагональных элементов D_n пересчитывается по кривой намагничивания материала после каждой итерации. Изменение матрицы D_n превращает итерационный процесс (4) в нестационарный, что существенно осложняет теоретическое исследование сходимости такого процесса. Однако эти итерационные процессы неравноценны [5]: основную трудность представляет итерационный процесс по вектору \bar{M}_n . Как показано в [5], модуль максимального собственного числа матрицы S_n может превышать единицу в результате даже не очень существенной вариации

размеров и формы элементов в силу неустойчивости вычислительного процесса, хотя, согласно доказанной в [3] теореме это невозможно. Тогда итерационный процесс (4) будет расходящимся [6]. Еще одним неприятным обстоятельством является то, что модуль минимального собственного числа матрицы S_n может быть очень близким к нулю. Если же собственные числа равны нулю, то СЛАУ может иметь неединственное решение. На практике это может приводить к “паразитным” решениям [5]. Подобные решения уравнения (3), вызванные чисто вычислительными проблемами, назовем физически недостоверными. Это вызвано тем фактом, что собственные числа несимметричной матрицы очень чувствительны к погрешностям округлений. В таких случаях типичным является то, что длительный итерационный процесс (4) расходитя (200-1000 и более итераций). При этом либо максимальное по модулю число матрицы $S_n(G)$ для итерационного

процесса (4) $\max|\lambda(S_n(G))| = 1 + \delta_n$, $\delta_n > 0$, где δ_n - небольшое число порядка 10^{-3} - 10^{-5} , либо минимальное по модулю число матрицы $S_n(G)$ $\min|\lambda(S_n(G))| = \delta_n > 0$, где δ_n - небольшое число порядка 10^{-6} - 10^{-8} . Тем не менее, за несколько итераций такой процесс даст “грубое” правильное решение, итерационный процесс не успеет разойтись. Подобная парадоксальная ситуация, когда за большее число итераций не удается получить более точное решение, хорошо известна из практики магнитостатических расчетов. В этом случае можно изменить дискретизацию или применить для решения методы регуляризации по Тихонову.

Как показано в [5], векторное дискретизированное уравнение (3) можно решать и прямыми методами, при условии приближенно известной матрицы D_n . Оно сводится к нелинейной системе относительно вектора намагниченности \bar{M}_n :

$$R_n \cdot \bar{M} = (A - D_n) \bar{M}_n = -\bar{H}_0 \quad (5)$$

где $R_n = A - D_n$. В этом случае не накладывается никаких ограничений на модуль максимального собственного числа матрицы R_n . Для решения (5) из физических соображений задается приближенно диагональная матрица D_n , и решается СЛАУ, к которой сводится после этого СДУ (5). Далее, по известному \bar{M}_n корректируется D_n и процесс повторяется. Расчет ведется до тех пор, пока не будет выполнено: $\|\bar{M}_{n+1} - \bar{M}_n\| / \|\bar{M}_{n+1}\| < \varepsilon$. В случае же малости минимального собственного числа матрицы системы (5) следует применить хорошо разработанные процедуры регуляризации. Однако реализации подобного алгоритма препятствует большая размерность СЛАУ.

Альтернативный подход, который сочетает достоинства прямых и итерационных методов для решения ПРИУ можно назвать поблочной итерацией. Область ферромагнетиков разбивается на небольшое количество блоков B_j , $j = 1, m$ ($m < 20$), которые объединены геометрически и находятся примерно в одинаковых магнитных условиях, впрочем, последнее несущественно. Произведя по (4) несколько общих итераций по всей системе для приближенного

определения матрицы D_n и грубого нахождения вектора M_n , будем затем выполнять итерации по блокам. В этом случае каждый блок можно рассматривать как отдельную магнитную систему и рассматривать ее по (4) итерационными методами или по (5) – прямыми. Влияние остальных блоков можно рассматривать как внешнее поле. После завершения итерационного процесса по заданному блоку корректируем элементы матрицы D_n (только для этого блока) и переходим к следующему блоку. Таким образом, произведя итерации по всем блокам, получаем для магнитной системы решение \bar{M}_n - распределение вектора намагниченности по всем элементам G_i .

Процесс завершается тогда, когда относительное отклонение векторов магнитной индукции для соседних итераций по всей системе меньше заданного. То есть $\|\bar{M}_{n+1} - \bar{M}_n\| / \|\bar{M}_{n+1}\| < \varepsilon$. Здесь важным является то, что для каждого блока справедлива теорема о сходимости метода последовательной итерации [3] и поэтому внутриблочный итерационный процесс будет сходиться. Как показывают численные эксперименты, максимальное по модулю число матрицы $S_n(B_j)$ для итерационного процесса (4) $\max|\lambda(S_n(B_j))| < 1$ по всем блокам. Более того, и все числа обусловленности для матриц $S_n(B_m)$, как правило, меньше, чем число обусловленности $S_n(G)$. Недостатком этого метода является большее время решения СДУ.

Алгоритм поблочной итерации можно описать следующим образом:

1. Выполняется k (например, $k=10$) итераций по всей области G согласно итерационному процессу (4). После этого грубо определяются матрица D_n и вектор намагниченности M_n .
2. Поочередно, по каждому блоку B_j , $j=1, m$ выполняется итерационный процесс (4), сохраняя неизменными значения векторов намагниченности для элементов, принадлежащих другим блокам. Влияние остальных блоков учитывается как внешнее поле. В качестве варианта алгоритма можно получить вектор намагниченности прямым методом (методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу), решая систему (5), а не (4). В этом случае, при необходимости, можно применить регуляризацию по Тихонову.
3. Корректируется матрица D_n для элементов принадлежащих заданному блоку B_j по кривой намагниченности материала.
4. Выполняется переход к следующему блоку.
5. Шаги 2 - 4 повторяются до тех пор, пока относительная погрешность вектора намагниченности по всей системе не станет меньше заданной.

Особенно существенно то, что на этапе 2 алгоритма можно применить прямые, а не итерационные методы при решении дискретизированного уравнения для заданного блока или произвольно сочетать итерационные и прямые методы для разных блоков. Ведь количество элементов в блоке существенно меньше, чем во всей системе. В этом случае можно не заботиться о том, что модуль

максимального собственного числа системы будет больше единицы.

Для примера рассмотрим расчет магнитного поля плоской двумерной системы, эскиз которой изображен на рис. 1, (более детально она изображена на рис. 2), классическим методом итераций и методом блочных итераций. Оба метода решения привели к практически совпадающим результатам, относительное отклонение итоговых векторов намагниченности по всей системе составило менее 0,4%.

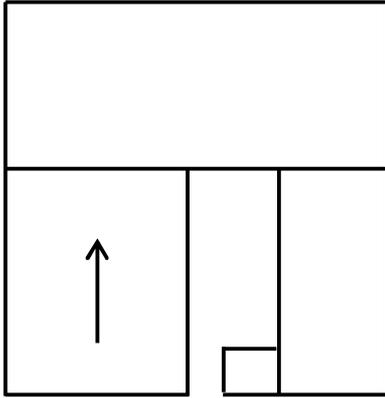


Рис. 1. Расчетная магнитная система

В качестве первичного источника поля был выбран магнитотвердый материал с вертикальной намагниченностью 0.7 Тл (элемент слева внизу). Намагниченность этого материала предполагается практически не зависящей от внешнего поля. Материал магнитопровода – электротехническая сталь, расчет производился по реальной кривой намагничивания $B = B(H)$. Стрелками на рис. 2 изображены величина и направление векторов намагниченности. В таблицах 1 – 4 приведены результаты расчетов для двух случаев дискретизации магнитной системы (примеры 1 и 2). Магнитопровод был разбит на три блока с дискретизацией которая указана во втором столбце таблиц 1 - 4. Здесь первое число обозначает число делений вертикальной стороны, второе – число делений горизонтальной стороны. Параметры для всей системы обозначены блоком с номером 0. В процессе вычислительных экспериментов QR-методом рассчитывались: максимальное и минимальное по модулю собственные числа для матриц S_n и R_n и модули числа обусловленности этих матриц.

Таким образом, максимальные по модулю собственные числа матриц S_n оказываются меньше собственных чисел общей матрицы системы, а минимальные по модулю собственные числа блоков больше соответствующего числа для всей системы. Значит, и числа обусловленности для блоков будут меньше. Поэтому поблочная итерация имеет лучшие характеристики, чем итерационный процесс (4) по всей системе. Кроме того, числа обусловленности и для матрицы R_n лучше для блоков, чем для общей системы, результат применения прямых методов будет лучше при поблочной реализации итерационного процесса (4) с помощью прямых методов. Следует отметить, что хотя для общего процесса (4) применить прямые методы

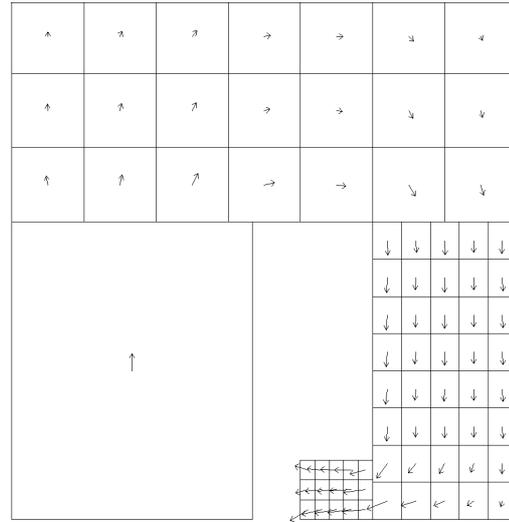


Рис. 2. Графическая иллюстрация распределения поля

может быть затруднительно, для внутриблочных итераций это вполне оправдано. Дополнительным преимуществом может служить эффективное применение регуляризации по Тихонову на внутриблочном этапе итерационного процесса.

Пример 1

Таблица 1. Параметры матрицы S_n

Номер блока	Число элементов разбивки	Модуль числа обусл.	Модуль максим. собств. числа	Модуль миним. собств. числа
0	66	236.558	0.97762	0.004133
1	4×4	154.421	0.97652	0.006324
2	5×5	34.6258	0.97205	0.028073
3	5×5	97.0014	0.96398	0.009938

Таблица 2. Параметры матрицы R_n

Номер блока	Число элементов	Модуль числа обусл.	Модуль максим. собств. числа	Модуль миним. собств. числа
0	66	78.6684	0.98881	0.0125693
1	4×4	76.4524	0.98822	0.0129265
2	5×5	66.7421	0.98602	0.0147737
3	5×5	53.1098	0.98198	0.0184898

Пример 2

Таблица 3. Параметры матрицы S_n

Номер блока	Число элементов	Модуль числа обусл.	Модуль максим. собств. числа	Модуль миним. собств. числа
0	83	343.5336	0.97437	0.002836
1	4×7	314.4429	0.96789	0.003078
2	8×5	245.8907	0.96708	0.003078
3	3×5	12.44069	0.91058	0.003933

Таблица 4. Параметры матрицы R_n

Номер блока	Число элементов	Модуль числа обусл.	Модуль максим. собств. числа	Модуль миним. собств. числа
0	83	73.0886	0.98718	0.0135067
1	4×7	57.5418	0.98395	0.0170997
2	8×5	57.3264	0.98354	0.0171569
3	3×5	21.1625	0.95529	0.0451406

Выводы

1. Метод блочных итераций имеет более широкую область применимости, чем метод итерации, применявшийся для решения нелинейного уравнения (3) до сих пор.
2. Метод блочных итераций позволяет эффективно сочетать преимущества прямых и итерационных методов для решения нелинейного дискретизированного уравнения магнитостатики.
3. Метод блочных итераций позволяет получить физически достоверное решение и в тех случаях, когда метод итераций по всей системе

(классический метод итераций) расходится или сходится к физически неверному решению.

4. В случае применения прямых методов для внутриблочной итерации возможна эффективная регуляризация части уравнения (3) по Тихонову.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тозони О.В. Метод вторичных источников в электротехнике. – М.: Энергия, 1975. – 296 с.
2. Маергойз И.Д. Итерационные методы расчета статистических полей в неоднородных анизотропных и нелинейных средах. – К.: Наукова думка, 1979. – 210 с.
3. Толмачев С.Т. Специальные методы решения задач магнитостатики. – К.: Вища школа, 1983. – 166 с.
4. Курбатов П.А., Аринчин С.А. Численный расчет электромагнитных полей. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 168 с.
5. Смолянский П.С. Особенности итерационного решения нелинейного дискретизированного уравнения магнитостатики // Математичне моделювання. – 2010. - №1 (22). – С. 73-79.

пост. 10.05.11