

імпульсу гравітаційного поля і гравітуючої матерії через суперпотенціал, еквівалентне рівнянню Ейнштейна.

ЛІТЕРАТУРА

1. 't Hooft G. Dimensional Reduction in Quantum Gravity. - // arXiv.org/gr-qc/9310026.
2. Szabados Laslo B. Quasi-Local Energy-Momentum and Angular Momentum in GR: A Review Article. - Living Rev. Relativity. - 2004. - 7. - P.1-140.
3. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповое описание калибровочных полей // ТМФ. - 1988. - 76, №1. - С. 66 - 77.
4. Самохвалов С.Е. Наслідки симетрії калібрувальної теорії гравітації // Математичне моделювання. - 2001. - №1(6). - С.23-27.
5. Freud Ph. Über die Ausdrücke der Gesamtenergie und des Gesamtimpulses eines materiellen Systems in der allgemeinen Relativitätstheorie // Annals of Mathematics. - 1939. - 40. - P.417-419.
6. Эйнштейн А. Основы общей теории относительности // Собр. научн. трудов т.1. - М.: «Наука». - 1965. - С.452-504.
7. Самохвалов С.Е. Теоретико-групповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. - 2003. - 55, №9. - С. 1238 - 1248.
8. Samokhvalov S.E., Vanyashin V.S. Group theory approach to unification of gravity with internal symmetry gauge interaction // Class. Quantum Grav. - 1991. - 8. - P.2277-2282.
9. Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. - М.: Наука, 1974. - 184 с.

пост. 02.12.2010

Про загальний вигляд тангенціальної кривої, що породжена опуклою кривою

ТИМЧЕНКО С.В.

Дніпродзержинський державний технічний університет

Надано загальний вигляд тангенціальної кривої, що породжена даною опуклою кривою. Досліджено окремі характеристики тангенціальної кривої.

Дан общий вид тангенциальной кривой, порожденной данной выпуклой кривой. Исследовано отдельные характеристики тангенциальной кривой.

A general form of tangential curve generated by the given convex curve is presented. It is investigation distinct characteristics of a tangential curve.

Вступ. Однією з основних задач прикладної механіки є побудова механізмів, які мають можливість відтворювати достатньо складні криві які є траєкторіями окремих точок ланок [1]. Це можуть бути і алгебраїчні, і трансцендентні криві. Порядок і вигляд цих кривих, взагалі, можуть бути будь-якими. Всі міркування даної роботи базуються на представлені опуклих кривих, яке розглянуто в роботі [2]. У ній доведено, що для того, щоб замкнена крива Γ була гладкою та строго опуклою, необхідно та достатньо, щоб вона була представлена у вигляді

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1)$$

де функція $\theta(\varphi)$ є гладкою 2π -періодичною функцією такою, що друга похідна $\theta''(\varphi)$ існує всюди на періоді і при цьому виконується нерівність

$$\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0 \quad (\varphi \in [0, 2\pi]).$$

Функція $\theta(\varphi)$ є опорною функцією кривої $\Gamma(\theta)$ в точці $\Gamma(\varphi)$, тобто при кожному значенні $\varphi \in [0, 2\pi]$ величина $\theta(\varphi)$ співпадає з відстанню від початку координат до дотичної до кривої $\Gamma(\theta)$ в точці $\Gamma(\varphi)$.

Формулювання цілей статті. Метою даної роботи є отримання загального рівняння тангенціальної кривої, яка породжена довільною опуклою кривою, дослідження її властивостей.

Основна частина. Сформулюємо означення тангенціальної кривої. Якщо крива $\Gamma(\varphi)$ в кожній точці має дотичну $\Gamma'(\varphi) = (x'(\varphi), y'(\varphi))$, то для заданого ε геометричне місце точок кінців векторів довжини ε з напрямком $\Gamma'(\varphi)$ і початком в точці $\Gamma(\varphi)$ називається ε -тангенціальною кривою або просто тангенціальною кривою. ε -тангенціальну криву для кривої $\Gamma(\varphi)$ будемо позначати $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$. Сама крива $\Gamma(\varphi)$ по відношенню до тангенціальної кривої називається тракт рисою [4].

Якщо крива $\Gamma(\varphi)$ має кутову точку φ_0 з дотичними векторами $\Gamma'(\varphi_0 - 0)$ і $\Gamma'(\varphi_0 + 0)$, то частиною тангенціальної кривої будемо вважати дугу кола з центром в даній точці φ_0 і радіусом ε .

Нехай крива $\Gamma(\varphi)$ визначається рівністю (1). Тоді напрямний вектор дотичної до кривої $\Gamma(\varphi)$ в точці $\Gamma(\theta, \varphi) \in \Gamma'(\theta, \varphi) = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))(\cos \varphi, \sin \varphi)$.

Так як крива $\Gamma(\varphi)$ опукла і величина $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$ додатна, то вектор $a(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ є нормалізований вектор кривої. Таким чином, для тих точок кривої $\Gamma(\varphi)$, де існує похідна $\Gamma'(\varphi)$, рівняння тангенціальної кривої буде мати вигляд

$$\Gamma(\theta, \varphi) + \varepsilon \cdot a(\varphi) = (x(\theta, \varphi) + \varepsilon \cos \varphi, y(\theta, \varphi) + \varepsilon \sin \varphi).$$

Для кутових точок частиною тангенціальної кривої є частини кола радіуса ε . Таким чином, отримали наступне твердження.

Твердження 1. Нехай $\Gamma(\varphi)$ - строго опукла крива. Тоді її тангенціальна крива $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ для всіх точок, які не є кутовими, має вигляд

$$T_\varepsilon \Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x_\varepsilon(\theta, \varphi) \\ y_\varepsilon(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \sin \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

де $\theta(\varphi)$ - функція така, що $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$ не змінює знак на періоді. Для кутових точок - це є частини кола радіуса ε .

Знайдемо умови, при яких тангенціальна крива буде опуклою. Відповідь на це питання дає наступне твердження.

Твердження 2. Нехай $\Gamma(\varphi)$ - опукла, замкнута крива і $\theta(\varphi)$ її опорна функція. Для того щоб тангенціальна крива $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ була опуклою, необхідно та достатньо, щоб виконувалась одна з нерівностей:

$$\varepsilon > \max_{\varphi} \left(-\frac{\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2} \right) \quad (3)$$

або

$$\varepsilon < \min_{\varphi} \left(-\frac{\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2} \right). \quad (4)$$

Дійсно, умова опуклості еквівалентна тому, що кривина кривої додатна, тобто

$$K_\varepsilon(\varphi) = \frac{x'_\varepsilon y''_\varepsilon - y'_\varepsilon x''_\varepsilon}{((x'_\varepsilon)^2 + (y'_\varepsilon)^2)^{3/2}} > 0 \quad (5)$$

при всіх $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Підставимо значення похідних

$$\begin{aligned} x'_\varepsilon &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi, \\ y'_\varepsilon &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi + \varepsilon \cdot \cos \varphi, \\ x''_\varepsilon &= (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi - (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \cos \varphi, \\ y''_\varepsilon &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) \sin \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

в формулу для обчислення кривини кривої. Отримаємо, що кривина тангенціальної кривої $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ в точці φ буде визначатися наступною рівністю

$$K_\varepsilon(\varphi) = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon(\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi)) + (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2}{((\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 + \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

Таким чином, умова (5) еквівалентна умові $\varepsilon^2 + \varepsilon(\theta'(\varphi) + \theta''(\varphi)) + (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 > 0$, ($\varphi \in [0, 2\pi]$) що і доводить нерівності (3) - (4).

Знайдемо зв'язок між опорною функцією $\theta(\varphi)$ тангенціальної кривої $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ та опорною функцією $\theta(\varphi)$ кривої $\Gamma(\varphi)$.

Нехай ψ - кут між дотичною тангенціальної кривої та додатнім напрямом осі OX . Тоді

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi},$$

де

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)}.$$

Дійсно, дотична до тангенціальної кривої задається рівнянням

$$(x + \theta(\varphi) \sin \varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \cos \varphi)(\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi) = (y - \theta(\varphi) \cos \varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \sin \varphi)(\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi).$$

Тоді, відстань від початку координат до дотичної тангенціальної кривої дорівнює

$$r(\varphi) = \frac{\theta(\varphi) - \sigma \cdot (\theta'(\varphi) + \varepsilon)}{\sqrt{1 + \sigma^2}}.$$

Таким чином, опорна функція тангенціальної кривої $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ дорівнює $\theta(\psi) = r(\varphi)$, де

$$\psi = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi} \right).$$

Твердження 3. Площа $S(\Gamma_\varepsilon)$ фігури, обмеженої тангенціальною кривою $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$, що породжена опуклою кривою $\Gamma(\varphi)$, не залежить від вигляду кривої $\Gamma(\varphi)$, тобто

$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \pi \varepsilon^2,$$

де $S(\Gamma)$ - площа фігури, обмеженої кривою $\Gamma(\varphi)$.

Дійсно, нехай $\Gamma(\varphi)$ - опукла крива, тоді вона може бути представлена у вигляді (1). Отже, її тангенціальна крива $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$ буде мати вигляд (2).

Так як площа фігури S , обмеженої кривою Γ , визначається рівністю

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx,$$

то

$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_\varepsilon} x_\varepsilon dy_\varepsilon - y_\varepsilon dx_\varepsilon - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Використаємо значення функцій $x(\varphi)$, $y(\varphi)$, $x_\varepsilon(\varphi)$, $y_\varepsilon(\varphi)$ та їх диференціалів

$$\begin{aligned} dx &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi d\varphi, \\ dy &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi d\varphi, \\ dx_\varepsilon &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi d\varphi, \\ dy_\varepsilon &= -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi + \varepsilon \cdot \cos \varphi d\varphi, \end{aligned}$$

отримаємо, що

$$\begin{aligned} S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\theta(\varphi) \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) + \varepsilon^2 - \\ &\quad - \varepsilon \cdot \theta'(\varphi) - (\theta^2(\varphi) + (\theta'(\varphi))^2)) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\theta(\varphi) \cdot \theta''(\varphi) + (\theta'(\varphi))^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \theta'(\varphi)) d\varphi = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(\theta(\varphi) \cdot \theta'(\varphi)) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \theta'(\varphi)) d\varphi.$$

Враховуючи, що для 2π -періодичної функції з інтегрованою похідною має місце рівність

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(\theta'(\varphi)) = 0,$$

отримуємо

$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \varepsilon^2 \pi,$$

що і треба було довести.

Нехай крива Γ , що представлена у вигляді (1), є кривою рівної ширини d . В роботі [3] доведено, що у цьому випадку її опорна функція має вигляд

$$\theta(\varphi) = \frac{d}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} \cos((2k-1)\varphi + \varphi_{2k-1}).$$

На рисунку 1 наведено тангенціальні криві для кривих рівної ширини.

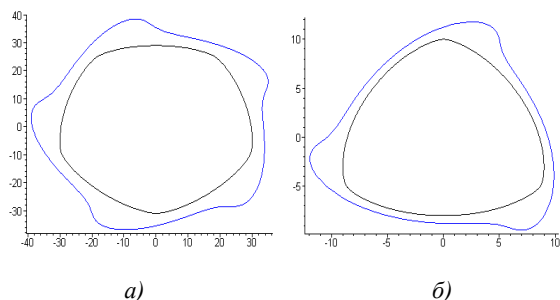


Рис. 1. Приклади тангенціальних кривих для кривих рівної ширини: а) опорна функція $\theta(\varphi) = 30 - \cos 5\varphi$, $\varepsilon = 20$; б) опорна функція $\theta(\varphi) = 9 + \cos 3\varphi$, $\varepsilon = 5$.

Також в роботі [3] доведено, що якщо крива Γ , яка задана у вигляді (1), є дельта-кривою, то її опорна функція має вигляд

$$\theta(\varphi) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{3k-1} \cos((3k-1)\varphi + \varphi_{3k-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{3k+1} \cos((3k+1)\varphi + \varphi_{3k+1}).$$

На рисунку 2 наведено приклади тангенціальних кривих для дельта-кривих.

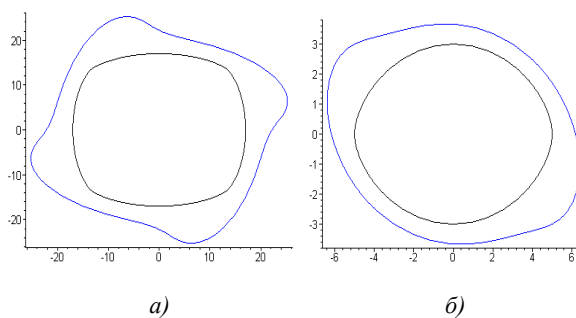


Рис. 2. Приклади тангенціальних кривих для дельта-кривих: а) опорна функція $\theta(\varphi) = 15 - \cos 4\varphi$, $\varepsilon = 15$; б) опорна функція $\theta(\varphi) = 3 - \cos 2\varphi$, $\varepsilon = 3$.

Висновки

У даній роботі розглянуто задачу побудови тангенціальної кривої для довільної опуклої кривої, проведено дослідження умов опуклості тангенціальної кривої. Встановлено зв'язок між опорними функціями тангенціальної кривої та довільної опуклої кривої, яка породжує тангенціальну криву.

ЛІТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И. Теория машин и механизмов. – М., 1988.
2. Лигун А.А., Шумейко А.А. Об описании выпуклых кривых// Известия Тульского гос. университета. Математика. Механика. Информатика. – 1998. – Т. 4, вып.3. – С. 88 – 92.
3. Лигун А.А., Шумейко А.А. Описание выпуклых кривых// Украинский математический журнал. – 2000. – 52, № 2. – С. 908 – 922.
4. Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В. О замечательных кривых, порожденных произвольной выпуклой кривой// УСИМ. – 2004. – № 1. – С.39 – 46.

пост. 02.12.2010