МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Определение собственных чисел в задачах расчета нестационарных режимов работы термобатарей холодильников и тепловых насосов

ГОРБУНОВ А.Д.

Днепродзержинский государственный технический университет

Разработана методика приближенного и точного расчета корней характеристического уравнения при несимметричном конвективном охлаждении (нагреве) термоэлектрических элементов холодильников и тепловых насосов.
Ключевые слова: термоэлементы холодильников и тепловых насосов, охлаждение, нагрев, нестационарный режим

Розроблено методику наближеного та точного розрахунку коренів характеристичного рівняння при несиметричному конвективному охолодженні (нагріванні) термоелектричних елементів холодильників та теплових насосів.
Ключові слова: термоелементи холодильників та теплових насосів, охолодження, нагрівання, нестаціонарний режим

Developed the technique of the approximated and exact calculation of roots of the characteristic equation at non symmetric convection heating of the thermoelectric elements of refrigerators and thermal pumps.
Keywords: thermo elements of refrigerators and thermal pumps, cooling, a non-stationary mode, calculation of own numbers.

Постановка проблемы и анализ публикаций. Процессы конвективного нагрева (охлаждения) термобатарей в нестационарном режиме их работы исследованы в работах [1,2] .Однако, приведенные в них аналитические решения являются достаточно сложными. Наибольшую и основную трудность при практических расчетах нестационарных температурных полей полупроводниковых термоэлектрических охладителей и нагревателей представляет определение бесчисленного множества корней μ_n характеристического уравнения:

$$c\text{tg}\mu_n = \mu_n / V - W / \mu_n , \qquad (1)$$

где $V = 1/\eta\,; W = Bi + I; \eta$ – безразмерная теплоемкость коммутационной пластины и присоединенной к ней массе; I – относительная плотность тока питания; Bi – число Био.

Первые два корня уравнения (1) с точностью до третьего знака приведены в книге [1] для дискретных значений чисел W от 0 до 20 и η от 0 до 1.

Основная часть. Целью данной работы является приближенное и точное определение корней уравнения (1). При выводе расчетных соотношений будем следовать методике, изложенной в работах [3, 4]. Для нахождения первого корня разлагаем в уравнении (1) ctg$x$ в ряд:

$$\text{ctg}x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - ...,0 < x < \pi \qquad (2)$$

и ограничиваясь первыми тремя членами разложения, получим биквадратное уравнение, решением которого будет:

$$\mu_1^2 = G / \gamma , \qquad (3)$$

где $G = D(1+W)$; $D = V / m$; $m = 1 + V/3$; $\gamma = \left(1 + \sqrt{1+4\rho}\right)/2$; $\rho = D^2(1+W)/45 = G^2 / [45(1+W)]$.

Здесь и далее решение квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0 : x_{1,2} = \left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)/2a$ которое с учетом выбора знака «+» перед корнем из физических соображений, для практических расчетов целесообразно представить в следующей форме

$$x = G / \gamma , \qquad (4)$$

где $G = -c/b$; $\gamma = \left(1 + \sqrt{1+4\rho}\right)/2$; $\rho = -aG^2 / c$.

При малых числах G, с учетом разложения функции $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ коэффициент $\gamma \approx 1 + \rho$ и решение (3) упрощается до вида

$$\mu_1^2 = G/(1+\rho) = D(1+W)/(1+\rho) . \qquad (5)$$

Определим остальные корни. Предварительными расчетами было установлено, что невозможно получить одно решение, имеющее достаточную точность при любых значениях критериев V и W. Поэтому рассмотрим отдельно два характерных случая. Первый случай относится для малых чисел V или больших W. В этом случае уравнение (3) достаточно хорошо определяет первый корень, однако при $\mu > \pi$ разложение (2) не работает.

Получим решение для расчета любого из корней μ_n при малых V, для чего обозначим через b_n корни уравнения (1) при $V = 0$ или $W = \infty$, т. е. $b_n = n \cdot \pi$, где n = 1, 2, 3,…, введем подстановку $\mu_n = b_n + z_n$. Тогда уравнение (1) станет:

$$\operatorname{ctg}(b_n + z_n) = (b_n + z_n)/V - W/(b_n + z_n). \qquad (6)$$

Учитывая, что $\operatorname{ctg}(n\pi + z) = \operatorname{ctg} z$ и используя два члена разложения (2), после преобразований получим:

$$\mu_n = b_n + z_n, \qquad (7)$$

где
$$z_n = G_1/\gamma; G_1 = b_n \cdot V/\left[b_n^2 - V(1+W)\right];$$
$$\rho_1 = (6+V)G_1^2/(3V).$$

При достаточно малых V уравнение (7) упрощается до вида:

$$\mu_n = b_n + G_1 \approx b_n + V/b_n \qquad (8)$$

из которого следует, что при малых V и больших n, корни μ_n практически не зависят от числа W.

В случае $W = 0$ применение уравнения (7) приводит к потере точности, поэтому здесь целесообразнее вернуться к исходному уравнению (6), решение которого при $W = 0$ имеет вид (7) в котором величина z_n примет более простой вид:

$$z_n = G_2/\gamma, \qquad (9)$$

где $G_2 = V/b_n$; $\rho_2 = G_2^2/D$; D – см. уравнение (3).

Следует отметить, что при $W = 0$ характеристическое уравнение (1) упрощается до вида

$$\operatorname{ctg}\mu_n = \mu_n/V \qquad (10)$$

и этот случай соответствует процессу конвективного нагрева (охлаждения) неограниченной пластины при симметричных граничных условиях. Первые шесть корней (10) с точностью до четвертого знака приведены в монографии А.В. Лыкова [5]. Приближенные и точные решения уравнения (10) получены и всесторонне проанализированы в работе [3]. Там же приведены решения по расчету корней для цилиндрических и шаровых тел.

Представляет также интерес второй предельный случай, когда $V = \infty$. Тогда уравнение (1) станет

$$\operatorname{ctg}\mu_n = -W/\mu_n, \qquad (11)$$

которое будет соответствовать нагреву пластины при постоянной температуре на её левой поверхности. Расчет корней уравнения (11) можно произвести по соотношению (7), в котором после предельного перехода при $V = \infty$ добавка z_n примет вид

$$z_n = G_3/\gamma, \qquad (12)$$

где $G_3 = -b_n/(1+W)$; $\rho_3 = G_3^2/3$.

Но лучше, как и при выводе формулы (9), с целью улучшения точности, вернуться к исходному уравнению (6) и положить в нем $V = \infty$ Тогда получим решение (7) в котором

$$z_n = G_4/\gamma, \qquad (13)$$

где

$$G_4 = 3b_n/\left[b_n - 3(1+W)\right];$$
$$\gamma = (1 + \sqrt{1+4\rho})/2;$$
$$\rho_4 = G_4^2/(3b_n).$$

Рассмотрим численный пример. Пусть V = 3 и W = 0. Согласно [5] точные значения первых двух корней $\mu_1^T = 1{,}1925$ и $\mu_2^T = 3{,}8088$. Расчет первого корня по уравнению (3):
$m = 1 + V/3 = 1 + 3/3 = 2$; $D = V/m = 1{,}5$;
$\rho = D^2/45 = 0{,}05$; $\gamma = 1 + \rho = 1{,}05$ и окончательно первый корень $\mu_1 = \sqrt{D/(1+\rho)} = 1{,}1952$ с погрешностью $\Pi_{\mu_1} = 0{,}2$ %. Расчет второго корня. Полагая в уравнении (7) $W = 0$ и $b_1 = \pi$ получим
$G_1 = b_1 V/(b_1^2 - V) = \pi \cdot 3/(\pi^2 - 3) = 1{,}3719$;
$\rho = (6+V)G_1^2/(3V) = (6+3) \cdot 1{,}3719^2/(3 \cdot 3) = 1{,}8822$
$\gamma = (1+\sqrt{1+4\rho})/2 = \left(1+\sqrt{1+4 \cdot 1{,}8822}\right)/2 = 1{,}9602$;
$z_2 = 0{,}6999$
и окончательно $\mu_2 = b_1 + z_2 = \pi + 0{,}6999 = 3{,}8415$ с погрешностью Π_{μ_2} = 0,9 %. Расчет второго корня по уравнению (9):
$G_2 = V/b_1 = 3/\pi = 0{,}9549$;
$\rho_2 = G_2^2/D = 0{,}9549^2/1{,}5 = 0{,}6079$;
$\gamma = (1+\sqrt{1+4\rho_2})/2 = 1{,}4262$;
$z_2 = G_2/\gamma = 0{,}9549/1{,}4262 = 0{,}695$ и окончательно $\mu_2 = b_1 + z_2 = \pi + 0{,}6695 = 3{,}8111$ с погрешностью Π_{μ_2} = 0,06 %. Таким образом, использование соотношения (9) вместо (7) увеличивает точность расчетов для данного примера более, чем в 14 раз.

Рассмотрим второй пример когда $V = \infty$ и $W = 20$. Согласно [1] точные значения двух корней $\mu_1^T = 2{,}993$ и $\mu_2^T = 5{,}992$. Расчет первого корня по уравнению (3) при D = 3, G = 63, ρ = 4,20; $\gamma = 2{,}6095$ и $\mu_1 = \sqrt{24{,}14} = 4{,}91$ дает весьма неудовлетворительную погрешность Π_{μ_1} = 64 %. Такую высокую погрешность легко объяснить очень плохой сходимостью разложения (2) при аргументах, близких к π. Для данного примера целесообразнее обратиться к соотношению (13), полученному при $V = \infty$. Первый корень при $b_1 = \pi$,
$G_4 = 3b_1/\left[b_1 - 3(1+W)\right] = 3\pi/\left[\pi - 3(1+20)\right] = -0{,}15745$;
$\rho_4 = G_4^2/3b_1 = 0{,}15745^2/(3\pi) = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$;
$\gamma = 1 + \rho = 1{,}0026$; $z_1 = G_4/\gamma = -0{,}157$ и окончательно

$\mu_1 = b_1 + z_1 = \pi - 0{,}157 = 2{,}9845$. Расчет второго корня при $b_2 = 2\pi = 2b_1$, $G_4 = -0{,}3323 \approx 2 \cdot G_4(b_1)$; $\rho_4 = 5{,}9 \cdot 10^{-3}$, $\gamma \approx 1{,}006$; $z_2 = G_4/1{,}006 = -0{,}3304$ и окончательно $\mu_2 = b_2 + z_2 = 2\pi - 0{,}3304 = 5{,}9528$ с погрешностью $\Pi_{\mu_2} = 0{,}7\ \%$.

Из данного примера и анализа уравнений (12), (13) вытекает, что при больших числах V и W приближенно можно считать корни по простой формуле

$$\mu_n = n \cdot \mu_1 , \tag{14}$$

где μ_1 – первый корень уравнения (1). Если $\mu_1 = \pi$ имеем случай $W = \infty$ и приближенное решение (14) становится точным.

Рассмотрим второй случай, характерный для больших чисел V и малых W.

Обозначим через a_n корни уравнения (1) при $V = \infty$ и $W = 0$, т. е. $a_n = (2n-1)\cdot \pi/2;$ $n = 1,2,3,...$. Введем подстановку $\mu_n = a_n - z_n$ и перепишем уравнение (1), учтя что $\mathrm{ctg}(a_n - z) = \mathrm{tg}z$:

$$\mathrm{tg}z_n = (a_n - z_n)/V - W/(a_n - z_n) \tag{15}$$

после чего, ввиду малости величины z, можно воспользоваться разложением $\mathrm{tg}z$ в ряд и ограничиться одним членом ряда $\mathrm{tg}z = z + z^3/3...$ (так как учёт второго приводит к решению сложного кубического уравнения относительно z). Однако расчеты показали, что более точное решение можно получить, если в уравнении (15) перейти от $\mathrm{tg}z$ к $\mathrm{ctg}z$ и затем воспользоваться двумя членами разложения (2). В итоге получим квадратное уравнение, решение которого имеет вид:

$$\mu_n = a_n - z_n , \tag{16}$$

где

$$z_n = \frac{G_5}{\gamma}; \quad G_5 = \frac{(a_n^2 - V \cdot W)}{[a_n(2+V)]};$$
$$\rho_5 = \frac{[a_n^2 - 3(1+V) - V \cdot W] \cdot G_5^2}{[3(a_n^2 - V \cdot W)]}.$$

При $W = 0$ решением уравнения (15) будет уравнение (16) в котором

$$z_n = G_6/\gamma , \tag{17}$$

где $G_6 = a_n/(1+V)$; $\rho_6 = G_6^2/3$.

Для расчета корней при больших числах V можно сделать предельный переход в решении (17), но лучше вернуться к исходному уравнению (15) и положить в нем $V = \infty$. Тогда получим (16), в котором добавка:

$$z_n = G_7/\gamma , \tag{18}$$

где $G_7 = 3W/(3a_n + W)$; $\rho_7 = G_7^2/W$.

Выясним область применимости полученных решений. В общем случае первый корень (1) находится в промежутке $0 \le \mu_1 \le \pi$, причем $0 \le \mu_1 \le a_1 = \pi/2$ когда правая часть уравнения (1) положительна и $a_1 \le \mu_1 \le \pi$ – отрицательна и равна нулю при $\mu_1 = a_1$.

Разрешая неравенство $\mu/V - W/\mu \ge 0$ при $\mu = a_1$ получим следующую формулу для расчета диапазона изменения первого корня

$$0 \le \mu_1 \le a_1 \ \text{при}\ V \cdot W = Bi_1 \cdot Bi_2 \le a_1^2 \ \text{и}$$

$$a_1 \le \mu \le \pi \ \text{при}\ V \cdot W > a_1^2 . \tag{19}$$

В следующей таблице приведем сводку полученных приближенных формул с указанием диапазона их применимости.

Расчетная величина	Номера формул	Область значения величин		
		V	W	VW
μ_1^2	3, 5	Любое	< 3	< 3
$\mu_n = b_n + z_n$	7 9 12, 13	< 1 < 1 ∞	$\gg 1$ 0 $\gg 1$	> 3 0 > 3
$\mu_n = n \cdot \mu_1$	14	Любое	$W > 3, \infty$	>3
$\mu_n = a_n - z_n$	16 17 18	$\gg 1$ $\gg 3$ ∞	$\ll 1$ 0 $\gg 1$	< 3 0 ∞

Для получения точного решения поступим следующим образом. При больших требованиях к точности расчетов необходимо уточнить полученные приближенные решения. Применяя к трансцендентному уравнению (1) метод касательных Ньютона:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k) , \tag{20}$$

где $f(x) = -x/V + W_x + \mathrm{ctg}x$;

$f'(x) = -1/V - W/x^2 - 1/\sin^2 x$, можно последовательным применением (20) после нескольких итераций получить значение корня μ_n с любой наперед заданной точностью ε. После преобразований получим:

$$\mu_{n,k+1} = \frac{x_k^2(1+\mathrm{ctg}^2 x_k) + x_k ctg x_k + 2W}{x_k(1+\mathrm{ctg}^2 x_k) + x_k/V + W/x_k} , \tag{21}$$

где в качестве приближения x_k берется любое из полученных ранее решений (3)…(18) в зависимости от величины критериев V и W.

Расчет по уравнению (21) можно прекратить при выполнении условия: $|\mu_{n,k+1} - \mu_{n,k}| \le \varepsilon$, в противном случае расчет повторяется, но уже при $x_k = \mu_{n,k+1}$, вычисленному ранее по (21) и т.д. до достижения необходимой точности. Ясно, что чем точнее будет взято первое приближение корня x_k, тем меньше итераций нужно проводить по уравнению (21).

Рассмотрим пояснительный пример. Пусть при $V = 1$ и $W = 0{,}5$ нужно найти первые шесть корней.

Первый корень находим по уравнению (3), предварительно определив $D = 0{,}75$; $G = D\cdot(1+W) = 0{,}75\cdot(1+0{,}5) = 1{,}125$; $\rho = 0{,}01875$; $\gamma = 1+\rho = 1{,}01875$ и окончательно $\mu_1 = 1{,}050854$.

Остальные корни определим из уравнения (7) для случая малых *V*, сначала найдем: $b_2 = (2-1)\pi = \pi$; $G = \pi/\left[\pi^2 - (1+0{,}5)\right] = 0{,}375357$; $\rho = (6+V)G^2/(3V) = (6+1)0{,}375357^2/3 = 0{,}328751$; $\gamma = \left(1+\sqrt{1+4\rho}\right)/2 = \left(1+\sqrt{1+4\cdot 0{,}328751}\right)/2 = 1{,}260757$; $z_2 = G/\gamma = 0{,}375357/1{,}260757 = 0{,}297724$. Окончательно $\mu_2 = b_2 + z_2 = \pi + 0{,}297724 = 3{,}439316$.

Аналогично получим $\mu_3 = 6{,}439226$; $\mu_4 = 9{,}529920$; $\mu_5 = 12{,}64553$; $\mu_6 = 15{,}77141$. Для получения точных значений используем уравнение (21) для каждого из корней. После нескольких итераций получим окончательно с точностью до шестого знака: $\mu_1 = 1{,}049931$ (2 итерации); $\mu_2 = 3{,}436578$ (2 итерации); $\mu_3 = 6{,}439106$ (1 итерация); $\mu_4 = 9{,}529903$ (1 итерация); $\mu_5 = 12{,}64553$; $\mu_6 = 15{,}77141$. Последние два корня не нуждаются в уточнении. Сравнение точных значений корней с приближенными показывает достаточную для инженерных расчетов точность полученных решений. Согласно [1] $\mu_1 = 1{,}049$ и $\mu_2 = 3{,}437$.

Полученные приближенные решения можно также уточнить применяя к уравнению (1) менее эффективный, но более простой метод последовательных приближений:

$$x_{k+1} = \operatorname{arcctg}\left(x_k/V - W/x_k\right). \tag{22}$$

Ранее на примере $V = 3$ и $W = 0$ был получен с помощью уравнения (3) первый корень $\mu_1 = 1{,}1952$ с $\Pi_{\mu_1} = 0{,}23\,\%$. Уточнение по (22) при $x_k = \mu_1$ дает $\mu_{1\cdot(k+1)} = \operatorname{arcctg}(\mu_1/V) = \operatorname{arctg}(V/\mu_1) = \operatorname{arctg}(3/1{,}1952) = 1{,}1922$ с $\Pi_{\mu_1} = 0{,}03\,\%$, т. е. результат улучшился в более, чем 7 раз.

В ряде случаев очень важно знать, хотя бы выборочно, точные значения корней, чтобы иметь возможность оценки погрешности различных приближенных решений не прибегая к процедуре итерирования по достаточно сложному уравнению (21). Получим ряд точных решений для первого корня. Из тригонометрии известно, что ctg 45° = 1. Подставляя в уравнение (1) $\mu = \pi/4$, получим уравнение связи: $1 = \pi/4V - 4W/\pi$, из которого следует, что если при заданном критерии *V*, число $W = \frac{\pi}{4}\left(-1 + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{V}\right)$, либо при заданном *W* критерий $V = \frac{(\pi/4)^2}{\pi/4\cdot 1 + W}$, то первый корень $\mu_1 = \pi/4$. Аналогичные уравнения можно получить и при других значениях аргумента ctg. Результаты сведены в следующую таблицу

ν	$1/2$	$1/6$	$1/4$	$1/3$	$5/12$	$7/12$	$2/3$	$3/4$	$5/6$	$11/12$
$C = \operatorname{ctg}\nu\pi$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-(2-\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$-(2+\sqrt{3})$

Если $W = \nu\pi(\nu\pi/V - C)$ или $V = (\nu\pi)^2/(\nu\pi C + W)$, то корень $\mu_1 = \nu\pi$.

В заключение отметим, что все полученные решения соответствуют режиму охлаждения термоэлементов. Для случая нагрева согласно [1] в уравнении (1) достаточно заменить критерий $W = Bi + I$ на $W = Bi - I$.

Выводы

Получены достаточно простые и эффективные приближенные и точные формулы для определения корней характеристического уравнения, которые значительно облегчают расчеты температурных полей при конвективном несимметричном нагреве (охлаждении) термоэлектрических элементов в случае нестационарных режимов их работы. Знание и правильный расчет корней имеет также самостоятельное и важное значение при определении теплофизических свойств веществ методом регулярного режима. Предложенная схема решения может быть успешно применена и к другим, более сложным случаям процесса теплопроводности, например, при нагреве в движущемся слое, нагреве тел типа оболочек и т.д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каганов М.А., Привин М.Р. Термоэлектрические тепловые насосы. – М.: Энергия, 1970. – 176 с.
2. Стильбанс Р.С., Федорович Н.А. О работе охлаждающих термоэлементов в нестационарном режиме // ЖТФ, 1958, т.28, № 7. – С. 489–492.
3. Горбунов А.Д. К расчёту температурных полей в телах простой формы при граничных условиях III рода / Днепродз. инд. ин-т. – Днепродзержинск, 1982. – 21 с. – Рус. – Деп. в УкрНИИНТИ 19.11.82, № 3947 – Ук -Д 82.
4. Горбунов А.Д., Гольдфарб Э.М. Нахождение корней трансцендентных уравнений в задачах теплопроводности пластины при неоднородных граничных условиях // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1983. – № 8. – С. 104–108.
5. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.

пост. 11.03.2010.