

**Висновок**

В даній роботі була розроблена програма комп'ютерного моделювання нерегулярних, самоподібних структур, яка наглядно демонструє всі особливості фракталів, і дозволяє вивчити всі їх властивості.

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: «Институт компьютерных исследований», 2002.
2. Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х. Красота фракталов. – М.: «Мир», 1993.
3. Федер Е. Фракталы. – М.: «Мир», 1991.
4. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология. – М.: изд-во МГУ, 1993.
5. Фракталы в физике. Труды 6-го международного симпозиума по фракталам в физике, 1985. – М.: «Мир», 1988.
6. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.

11.09.2009

## Особливості навантаження гнучкого тягового органу ступінчастої конструкції на шківі тертя

БЕЛЬМАС І.В., БІЛОУС О.І., КОЛОСОВ Д.Л.\*

Дніпродзержинський державний технічний університет,  
Національний гірничий університет\*

Досліджено напружений стан гумотросового канату змінного поперечного перерізу для підймання вантажів з великих глибин з урахуванням його навантаження дотичними силами. Показано, що найнебезпечніший переріз в канаті ступінчастої конструкції є переріз зміни кількості тросів у мить його набігання на бобіну.

Исследовано напряженное состояние роезинотросового каната переменного сечения для подъема грузов с больших глубин с учетом его нагрузки касательными силами. Показано, что наиболее опасным сечением каната ступенчатой конструкции является сечение изменения количества тросов в момент начала его взаимодействия со шкивом трения.

Ducting rope for lifting cargo we investigate. Rope busy tangent efforts and consists of steel ropes packed in rubber shell. Shows that the most dangerous cross-section rope stepped design is a cross-section of number of changes cables at the time of beginning his interaction with drum friction.

**Вступ.** При значних довжинах канатів маса канату суттєво впливає на величину кінцевого (корисного) навантаження. Збільшення кінцевого навантаження може бути досягнуто використанням плоского гумотросового канату змінного поперечного перерізу. Підняття вантажу таким канатом здійснюють шляхом його намотування на бобіну або передачею тягового зусилля від приводу машини канату шківом (барабаном) тертя. При намотуванні канату між ним та попередньо намотаними шарами виникають сили взаємодії. Ці сили впливають на напружений стан канату. Дослідження впливу ступінчастої конструкції канату на його напружений стан та розробка методики розрахунку канату та окремих параметрів підйомної машини – актуальна науково-технічна задача вдосконалення засобів підняття корисних копалин зі значних глибин.

**Аналіз стану питання.** Напружений стан канату незмінного перерізу в тілі намотки досліджено в роботі Заболотного К.С., Панченко О.В. [1]. В ступінчастому канаті зміна форми його перерізу локально впливає на його напружений стан [2]. В цих роботах не вирішено питання визначення напруженого стану канату змінного перерізу на шківі тертя. В статті ставиться задача визначити розподіл сил поміж тросами плоского гумотро-

сового канату змінного перерізу при його взаємодії зі шківом підйомної машини.

**Результати дослідження.** Між канатом та шківом виникають сили тертя. Фізична модель взаємодії елементів в парі тертя досить складна. Її крайніми випадками можна вважати випадок повного ковзання одного тіла по іншому та випадок коли поверхні контакту тіл не ковзають одна відносно іншої. Перший випадок найнебезпечніший для підйомних машин зі шківом тертя. Його і розглянемо. Ділянку взаємодії каната та шківів позначимо, як першу. Відповідно другою будемо вважати ділянку з меншою кількістю тросів. Номери ділянок покажемо у верхніх індексах. До тросів першої ділянки прикладемо сили  $P_i^{II}$ . Другу ділянку будемо вважати навантаженою лише розподіленими силами тертя інтенсивності  $T_\tau$ , а вільні кінці тросів будемо вважати не навантаженими. Схема навантаження канату показана на рисунку 1.

Враховуючи осьову симетричність канату, розглянемо лише його половину. Вздовж канату спрямуємо вісь  $x$ . Початок осі розташуємо в перерізі зміни кількості тросів. Троси в першому відрізку позначимо номерами від 1 до  $M+1$ , а другого від 1 до  $M$ . Для вивчення впливу лише зміни конструкції канату та характеру

його навантаження в перерізі набігання на шків, будемо вважати, що перша та друга ділянки безмежно довгі. Як наслідок, на значній відстані від перерізу  $x=0$  зусилля розтягу тросів канату мають бути рівними. Звідки граничні умови:

$$x \rightarrow -\infty \quad P_i^I = P_{i\pm 1}^I, \quad x \rightarrow \infty \quad P_i^{II} = P_{i\pm 1}^{II}. \quad (1)$$

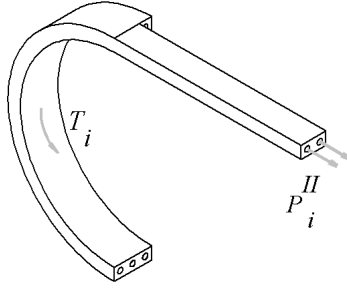


Рис. 1. Схема навантаження каната ступінчастої конструкції

На межі ділянок ( $x=0$ ) мають місце умови сумісності деформування:

а) крайній ( $M+1$ ) трос першої ділянки не навантажено

$$P_{M+1}^I = 0; \quad (2)$$

б) зусилля розтягу тросів суміжних ділянок та їх переміщення попарно збігаються

$$P_i^I = P_i^{II}, \quad u_i^I = P = u_i^{II} \quad p_i^I = p_i^{II} \quad (1 \leq i \leq M);$$

$$u_i^I = u_i^{II} \quad (1 \leq i \leq M). \quad (3)$$

Для визначення напруженого стану канату з першої ділянки виріжмо трос довжиною  $dx$  (рис. 2).

Умова рівноваги відрізка троса

$$dP_i^I + [d \cdot (\tau_{i+1} - \tau_i) - T] dx = 0, \quad (4)$$

де  $T_i = Pf/R$ ;  $\tau_i = \frac{G}{h} k_G [u_i - u_{i-1}]$ ;  $f$  - коефіцієнт тертя матеріалу неробочої обкладинки конвеєрної стрічки по робочій поверхні приводного шківа радіусом  $R$ .

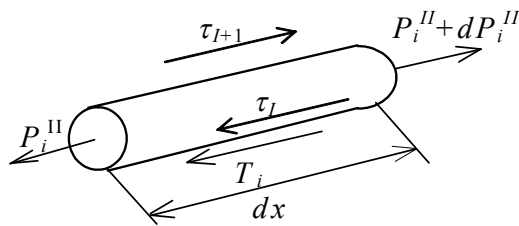


Рис. 2. Відрізок троса

Після перетворень, врахувавши закон Гука, маємо залежність зростання зусиль в тросах від їх деформацій та відповідну залежність для деформацій

$$\frac{dP_i^I}{dx} + \frac{Gd}{h} k_G (u_{i+1}^I - 2u_i^I + u_{i-1}^I) + \frac{EFf}{R} \frac{du_i^I}{dx} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{d^2 u_i^I}{dx^2} + \frac{Gd}{h} k_G (u_{i+1}^I - 2u_i^I + u_{i-1}^I) + \frac{f}{R} \frac{du_i^I}{dx} = 0. \quad (6)$$

Отримані рівняння не прийнятні для крайніх тросів. Для них відповідні рівняння мають вигляд

$$\frac{d^2 u_1^I}{dx^2} + \frac{Gd}{h} k_G (-u_1^I + u_2^I) - \frac{f}{R} \frac{du_1^I}{dx} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2 u_M^I}{dx^2} + \frac{Gd}{h} k_G (u_{M-1}^I - u_M^I) - \frac{f}{R} \frac{du_M^I}{dx} = 0. \quad (8)$$

З урахуванням останніх залежностей, прийнемо розв'язок системи рівнянь у формі

$$u_i^I = \sum_{m=1}^M (A_m^I e^{\mu_{1,m}^I x} + B_m^I e^{\mu_{2,m}^I x}) \cos \left( \frac{\pi m}{M+1} (i-0,5) \right) + a e^{\frac{f}{R} x}, \quad (9)$$

де  $A_m^I$ ,  $B_m^I$ ,  $a$  - сталі інтегрування;

$$\mu_{1,m}^I = \frac{f}{2R} + \beta_m^I;$$

$$\mu_{2,m}^I = \frac{f}{2R} - \beta_m^I;$$

$$\beta_m^I = \sqrt{2 \frac{Gd}{h EF} k_G \left( 1 - \cos \frac{\pi m}{M+1} \right) + \left( \frac{f}{2R_{sr}} \right)^2}.$$

Врахувавши значення  $\mu_{1,m}^I$  та  $\mu_{2,m}^I$ , те що сталі  $A_m^I$ ,  $B_m^I$  підлягають визначенню, запишемо (7) у наступному вигляді

$$u_i^I = \sum_{m=1}^M (A_m^I e^{\beta_m^I x} + B_m^I e^{-\beta_m^I x}) \cos \left( \frac{\pi m}{M+1} (i-0,5) \right) + a e^{\frac{f}{R} x}, \quad (10)$$

Відповідно, зусилля розтягу тросів з урахуванням закону Гука

$$P_i^I = EF \left[ \sum_{m=1}^M (A_m^I \beta_m^I e^{\beta_m^I x} - B_m^I \beta_m^I e^{-\beta_m^I x}) \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{\pi m}{M} (i-0,5) \right) + a \frac{f}{R} e^{\frac{f}{R} x} \right]. \quad (11)$$

Друга ділянка канату не навантажена дотичними зусиллями, кількість тросів в ній менша. Вирази для деформацій та внутрішніх зусиль в тросах для цієї ділянки також визначаються рівновагою відрізка троса, як і в попередньому випадку (рис.1). Але другий відрізок не навантажений дотичною силою. Характер навантаження крайніх і тросів не розташованих на краю канату відрізняється. З урахуванням наведеного, маємо залежності для деформацій та сил розтягу тросів канату другої ділянки:

$$u_i^{II} = \sum_{m=1}^{M-1} (A_m^{II} e^{\beta_m^{II} x} + B_m^{II} e^{-\beta_m^{II} x}) \times \\ \times \cos \left( \frac{\pi m}{M} (i-0,5) \right) + a^{II} x + b^{II}, \quad (12)$$

$$P_i^{II} = \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m^{II} (A_m^{II} e^{\beta_m^{II} x} - B_m^{II} e^{-\beta_m^{II} x}) \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \frac{\pi m}{M} (i-0,5) \right) + a^{II} \right\} EF, \quad (13)$$

де  $A_m^{II}$ ,  $B_m^{II}$ ,  $a^{II}$ ,  $b^{II}$  - сталі інтегрування;

$$\beta_m^{II} = \sqrt{2 \frac{Gd}{h EF} k_G \left( 1 - \cos \frac{\pi m}{M} \right)}.$$

Максимальний вплив зміни кількості тросів в перерізі канату матиме місце, коли вільний кінець першої діля-

нки канату не навантажений. А до вільного кінця другої ділянки канату прикладена сила  $p$ . Підставивши (10), (12), (13), (11) в (2) та (3), врахувавши умови (1), прийнявши, що загальне переміщення канату як твердого тіла відсутнє, маємо значення окремих сталих деформування та систему алгебраїчних рівнянь для визначення решти сталих.

$$B_m^I = 0, \quad A_m^II = 0, \quad b^I = b^II = a^I = 0, \quad a^II = \frac{p}{M},$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{M-1} B_m^II \cos\left(\frac{\pi m}{M}(i-0,5)\right) - \\ - \sum_{m=1}^M A_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) = 0, \\ \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m^II B_m^II \cos\left(\frac{\pi m}{M}(i-0,5)\right) + \\ + \sum_{m=1}^M \beta_m^I A_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) = \frac{-p}{M EF}, \\ \sum_{m=1}^M \beta_m^I A_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(M+0,5)\right) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Останнє рівняння системи (14) подамо в наступній формі

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m^I A_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(M+0,5)\right) + \\ & + \beta_M^I A_M^I \cos\left(\frac{\pi M}{M+1}(M+0,5)\right) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

З отриманої залежності визначимо ще одну сталу

$$A_m^I = - \sum_{m=1}^{M-1} A_m^I \frac{\beta_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(M+0,5)\right)}{\beta_M^I \cos\left(\frac{\pi M}{M+1}(M+0,5)\right)}. \quad (16)$$

Вилучимо цю сталу з системи рівнянь (14)

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{M-1} B_m^II \cos\left(\frac{\pi m}{M}(i-0,5)\right) + \\ & \left[ \begin{array}{l} \beta_m^I \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(M+0,5)\right) \\ \beta_M^I \cos\left(\frac{\pi M}{M+1}(M+0,5)\right) \end{array} \right] \times \\ & + \sum_{m=1}^{M-1} A_m^I \times \left[ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) - \\ - \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) \end{array} \right] = 0, \\ & \sum_{m=1}^{M-1} \beta_m^II B_m^II \cos\left(\frac{\pi m}{M}(i-0,5)\right) - \\ & \left[ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(M+0,5)\right) \\ \cos\left(\frac{\pi M}{M+1}(M+0,5)\right) \end{array} \right] \times \\ & - \sum_{m=1}^{M-1} A_m^I \beta_m^I \times \left[ \begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) - \\ - \cos\left(\frac{\pi m}{M+1}(i-0,5)\right) \end{array} \right] = \frac{-p}{M EF} \end{aligned}$$

Отримана система рівнянь дозволяє визначити решту невідомих сталих диференціювання.

Для канату з параметрами тросів та кроком їх укладання, що відповідають канату типу РТК - 3150 виконані розрахунки внутрішніх зусиль в тросах канату. Кількість тросів на першій ділянці прийняли рівною шести тросам. Відповідно для половини канату маємо кількість тросів  $M+1=4$ . Для другої ділянки кількість тросів становить – три ( $M=3$ ). При розрахунках прийняли, коефіцієнт тертя рівним 0,5, а радіус шківа - один метр. На рисунку 3 наведено графік розподілу коефіцієнтів нерівномірності зусиль.

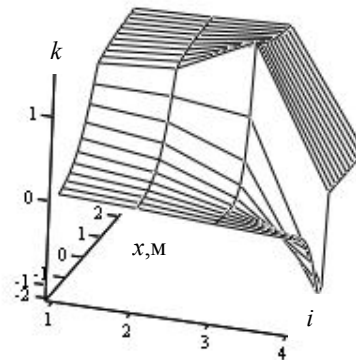


Рис. 3. Графік розподілу коефіцієнтів нерівномірності розподілу зусиль  $k$  поміж  $i$  тросами по довжині канату – вздовж осі  $x$  в районі зміни кількості тросів від трьох до чотирьох на ділянці навантаженні канату дотичними силами

Під коефіцієнтом нерівномірності розподілу зусиль розуміли відношення внутрішнього зусилля, що виникає в тросі до середнього зусилля в тросах на ділянці з більшою їх кількістю. Коефіцієнти нерівномірності розподілу зусиль  $k$  умовно показані для чотирьох тросів (без зменшення їх кількості до трьох), для половини канату. Для четвертого (умовного) троса коефіцієнти  $k$  на ділянці  $x \geq 0$  прийняті рівними 0. Максимального значення 1,654 коефіцієнти нерівномірності розподілу зусиль набуває в перерізі набігання канату на шків. Для порівняння на рисунку 4 показано відповідний графік для випадку його розтягу без навантаження дотичними силами.

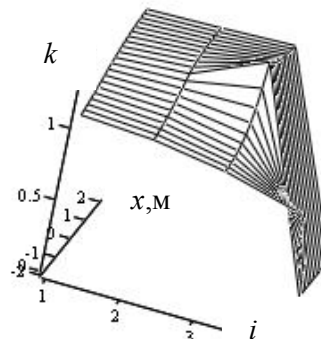


Рис. 4. Графік розподілу коефіцієнтів нерівномірності розподілу зусиль  $k$  поміж  $i$  тросами по довжині канату – вздовж осі  $x$  в районі зміни кількості тросів від чотирьох до трьох

В такому випадку максимальне значення коефіцієнти нерівномірності розподілу зусиль сягає 1,496, тобто, практично на 10% менше. Відповідно найнебезпечніший переріз в канаті ступінчастої конструкції є переріз зміни кількості тросів у мить його набігання на шків тертя підйомної машини.

З наведених графіків видно також і те, що ділянка на якій згасають збудження, спричинені зміною кількості тросів, не перевищує одного метра. Останнє вказує на допустимість прийняття безмежно довгою ділянку взаємодії шківа та каната.

На рисунку 5 наведена залежність максимального значення коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль від значення коефіцієнта тертя.

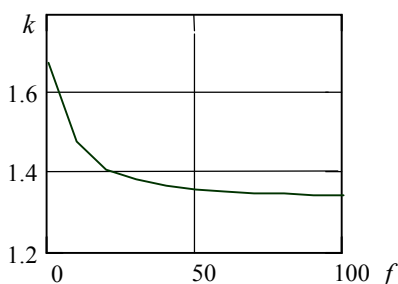


Рис. 5. Залежність максимального значення коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль  $k$  від значення коефіцієнта тертя  $f$

Наведений графік свідчить про те, що зростання коефіцієнта тертя призводить до зменшення коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль. При цьому цей коефіцієнт наближається до значення, що дорівнює співвідношенню кількостей тросів в суміжних ділянках

тобто до значення  $\frac{2(M+1)}{2M}$ . У випадку, що розглядали,

це значення становить  $\frac{2(3+1)}{2 \cdot 3} = 1,333$ . Фізично

безмежне значення коефіцієнту тертя відповідає умові нерухомого закріплення перерізу зміни кількості тросів в канаті.

Отримане значення, до якого наближається коефіцієнт нерівномірності розподілу зусиль, свідчить про відповідність результатів фізичному процесу взаємодії каната та шківа тертя та достовірність побудованої моделі, отриманих результатів.

Враховуючи, що в математичних залежностях значення радіусу виступає як ділитель відносно коефіцієнту тертя, то зміна радіусу шківа призводить до зворотно пропорційних змін коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль.

Залежність (5) дозволяє визначити дотичні напруження, що виникають в гумовій оболонці. На рисунку 6 наведено графік розподілу дотичних напружень.

Розглянемо отриманий графік. Максимальні напруження виникають в гумі між крайнім та передостаннім тросом канату в перерізі зміни кількості тросів та у мить коли цей переріз розділяє канат на дві ділянки. Такими ділянками є ділянка згину канату на шківі (барабані) та прямолінійна ділянка на якій канат плоский.

При робочих навантаженнях канату силами, що відповідають силі в 10кН на один трос максимальні дотичні напруження сягають майже 1,63Мпа. Значення напружень в гумі розташованій поміж іншими тросами значно менші. Оскільки внутрішні зусилля в крайньому тросі в перерізі дії максимальних дотичних напружень в мить набігання на барабан перерізу зі змінною кількістю тросів відсутні. Це дозволяє не вважати дотичні напруження поміж останнім та передостаннім тросами в канаті небезпечними.

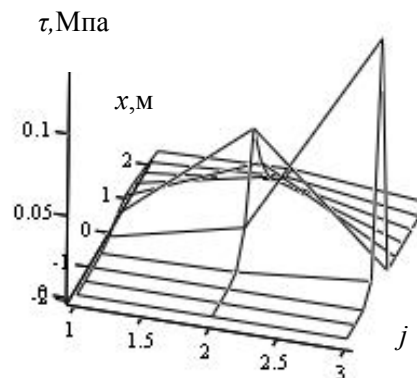


Рис. 6. Графік розподілу дотичних напружень в гумовій оболонці канату поміж тросами по довжині канату – вздовж осі  $x$  в районі зміни кількості тросів від трьох до чотирьох на ділянці навантаження канату силами тертя

## Висновки

На ділянці зміни кількості тросів в канаті ступінчастої конструкції троси навантажені нерівномірно. Ця нерівномірність зростає при зменшенні відстані поміж лінією дотику каната і барабана та перерізом зміни кількості тросів в канаті. Найнебезпечніший переріз в канаті ступінчастої конструкції є переріз зміни кількості тросів у мить його набігання на шків. Зростання коефіцієнта тертя призводить до зменшення коефіцієнта нерівномірності розподілу зусиль. При цьому цей коефіцієнт наближається до значення, що дорівнює співвідношенню кількостей тросів в суміжних ділянках. Отримане значення, до якого наближається коефіцієнт нерівномірності розподілу зусиль, свідчить про відповідність результатів фізичному процесу взаємодії каната та шківа тертя, достовірність побудованої моделі й отриманих результатів. Отримані залежності мають бути використані при проектуванні машини для підняття вантажів зі значної глибини плоскими гумотросовими канатами змінного перерізу.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Заболотный К.С., Панченко Е.В. Исследование величины радиальной нагрузки в бобинной намотке // Сб. науч. тр. НГУ. – 2006. - №26. - Т.1. - С. 106-111.
2. Бельмас І.В., Колосов Л.Д., Танцур Г.І., Конох, Ю.В. Напружений стан ступінчастого канату з ушкодженим тросом./ Матеріали міжнародної конференції «Форум гірників - 2008». Дніпропетровськ.: НГУ, 13-15 жовтня 2008р. С. 183-186.