

Автоколебания в дискретно-распределенном колебательном контуре вызванные подводом теплоты

ГОЦУЛЕНКО В.В.

Институт предпринимательства "Стратегия"

Для вертикальной трубы с теплоподводом в нижней ее части, рассматриваемой как дискретно-распределенный колебательный контур, получены уравнения движения и установлены причины возникновения в них автоколебательных решений.

Для вертикальної труби з теплопідводом в нижній її частині, яка розглядається як дискретно-розподілений коливальний контур, одержані рівняння руху і встановлені причини виникнення в них автоколивальних розв'язків.

For a vertical pipe with heat supply in her bottom part considered as discretely - distributed oscillatory contour, the equations of movement are received and the reasons of occurrence in them of self-oscillatory solution are established.

Введение. Автоколебания феномена Рийке моделируют закономерности вибрационного горения, которое возбуждается и поддерживается теми же механизмами нестационарности, которые возникают при теплоподводе [1]. Описание этого нестационарного режима рассмотрено для вертикальной трубы [2], параметры которой являются сосредоточенными.

В практике, вертикальные камеры горения воздушнонагревателей доменных печей, дымовые трубы промышленных нагревательных печей, печи по типу трубы Рийке, сжигающие бытовые отходы, являются системами с распределенными параметрами. Для трубы Рийке, моделирующей движение в таких динамических системах, получены лишь условия определяющие границу области устойчивости [3].

Постановка задачи. Для возбуждения автоколебаний в трубе Рийке на ее входе должен быть расположен достаточный объем холодного воздуха, акустическая гибкость которого значительно выше нагретого [4]. В данной работе рассматривается дискретно - распределенная модель трубы Рийке (рис. 1), которая состоит из сосредоточенного колебательного контура с зоной теплоподвода и присоединенного сверху к нему распределенного участка трубы. Автоколебания, самовозбуждающиеся из-за отрицательного теплового сопротивления, передаются в распределенный контур. Задачей данной работы является составление математической модели рассматриваемой колебательной системы и определение в ней автоколебаний.

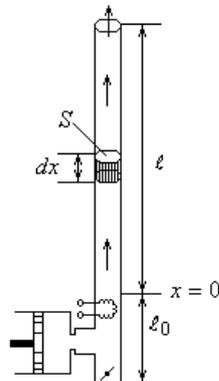


Рис. 1. Схема рассматриваемого дискретно-распределенного колебательного контура

Уравнения движения в колебательных контурах. Изменение массы воздуха в емкости C_a до электроспирали нагревателя можно определить из уравнения согласно работе [5]

$$dM = (M_{ex} - M_t)dt, \quad (1)$$

где M_{ex} , M_t – массовые расходы воздуха, соответственно на входе в трубу и выходе из нее после нагревателя, или

$$C_a \frac{dP}{dt} = Q_{ex} - \varphi(P), \quad (2)$$

где $P = P_t - P_0$, P_0 и P_t – соответственно давление в трубе Рийке перед и после электроспирали,

$C_a = \frac{V}{\rho_0 \cdot c_0^2}$, $V = S \cdot \ell_0$ – объем нижней части трубы,

S – площадь поперечного сечения трубы, ℓ_0 – длина сосредоточенного участка трубы (рис.1), c_0 и ρ_0 – соответственно скорость звука и плотность воздуха в окружающей среде.

Зависимость $Q_t = \varphi(P)$ определяется из уравнения $P = h_t(Q_t) - A(Q_t)$, где $m = \rho_0 \cdot Q_{ex}$ и $Q_t = \frac{m}{\rho_t}$ –

объемный расход нагретой среды. Массовый расход воздуха m проходящий через электроспираль определяется из выражения для мощности теплового потока $W_s = c_p m(t - t_0)$ и зависит от изменения температуры $(t - t_0)$.

Вторым уравнением нестационарного движения в колебательном контуре трубы с сосредоточенными параметрами является уравнение изменения импульса массы

$$L_a \frac{dQ_{ex}}{dt} = P_0 - h_T(Q_{ex}) - h_{dp}(Q_{ex}) - h_{cnp}(Q_{ex}) - P_t, \quad (3)$$

где $h_T(Q_{ex})$ – тепловое сопротивление, возникающее из-за изменения скорости потока при его нагреве, гидравлические потери $h_{dp}(Q_{ex})$ при обтекании дросселя и электроспирали нагревателя $h_{cnp}(Q_{ex})$ объединим в одно выражение

$$h_{dp}(Q_{ex}) + h_{cnp}(Q_{ex}) = k \cdot Q_{ex}^2, \quad (4)$$

коэффициент k , в котором определяется из условия совместной работы колебательных контуров.

Обозначая $F(Q_{ex}) = -h_T(Q_{ex}) - kQ_{ex}^2$, уравнение движения (3) можно окончательно записать в следующей форме

$$L_a \frac{dQ_{ex}}{dt} = F(Q_{ex}) - P, \quad (5)$$

где $h_T(Q_{ex}) = \rho_0 Q_{ex}^2 (1 - (T/T_0)^2) / 2S^2$ – величина отрицательная, т.к. $T > T_0$ [6].

Получим уравнение движения в трубе с распределенными параметрами, составляющей колебательный контур, расположенный выше плоскости $x = 0$.

Вспользуемся уравнением движения для массы элемента потока $m = \rho_t \Delta x \cdot S$ (рис.1)

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = R_p - R_A - R_G - R, \quad (6)$$

где $R_p = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \cdot S$ – поверхностная сила, $R_G = \rho_t g \Delta x \cdot S$ – сила веса, $R_A = \rho_0 g \Delta x \cdot S$ – сила Архимеда, $R(Q_t) = \frac{\lambda}{d} \frac{\rho_t}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^n \cdot S$ – сила вязкостного трения, где $n=1$ и $n=2$ соответственно для ламинарного и турбулентного движения, которое может быть записано в следующем виде

$$L \frac{\partial Q}{\partial t} = H(Q) - \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (7)$$

где $H(Q) = (\rho_0 - \rho_t) \cdot g - R(Q)$, $R(Q) = \frac{\lambda}{d} \cdot \frac{\rho_t}{2 \cdot S} Q^n$, ρ_t – плотность нагретого воздуха, d – диаметр трубы, $\lambda = 0,3164 \text{Re}^{-0,25}$ – коэффициент гидравлических потерь, $L = \frac{\rho_t}{S}$ – акустическая масса нагретой части трубы, ℓ – длина распределенного участка трубы.

Вторым уравнением, используемым для описания нестационарного движения в трубе с распределенными параметрами, является уравнение неразрывности одномерного течения [7]

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} + u \frac{\partial \rho_t}{\partial x} + \rho_t \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

Пренебрегая конвективным членом, что справедливо, когда число Маха $M \ll 1$, а при движении потока в рассматриваемой задаче это условие выполняется, имеем

$$\frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\frac{\rho_t}{S} \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (9)$$

Поскольку $\partial P / \partial \rho_t = c_t^2$, где c_t – скорость звука в нагретой среде, а акустическая гибкость верхней части трубы равна $C = \frac{S}{\rho_t c_t^2}$, то уравнение (9) можно записать в следующем виде

$$C \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (10)$$

Таким образом, динамика в распределенной части, рассматриваемой колебательной системы, опи-

сывается следующей нелинейной системой телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = H(Q) - L \frac{\partial Q}{\partial t}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = -C \frac{\partial P}{\partial t}, \end{cases} \quad (11)$$

которая дополняется граничными условиями:

$$P(x,t)|_{x=0} = P_T(t), \quad Q(x,t)|_{x=0} = Q_T(t), \quad (12)$$

где $P_T(t)$ и $Q_T(t)$ – периодические решения соответствующие предельному циклу в сосредоточенном колебательном контуре.

Дифференцируя первое уравнение (11) по t , а второе – по x , и исключая смешанную производную $\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial t}$, получим следующее уравнение второго порядка

$$a^2 \Delta Q - \partial^2 Q / \partial t^2 + b \partial Q / \partial t = 0, \quad (13)$$

где положено $\Delta Q = \partial^2 Q / \partial x^2$, $a = 1 / \sqrt{LC}$, $b = (1/L) dH/dQ$.

Выполняя линеаризацию характеристики $H(Q) \approx k(Q - \xi) + H_0$, получим $b = k/L$. Рассматривая решения $Q(x,t) = Q(t)$, не зависящие от пространственной переменной x , легко получить, что $Q = C_1 + C_2 \exp(bt)$, и следовательно при положительном коэффициенте $b > 0$, т.е. на восходящей ветви $dH/dQ > 0$ характеристики $H(Q)$ колебания нарастают, а при $b < 0$ – убывают.

Установившиеся колебания. Линейный случай. Рассмотрим уравнение (13) в более общей форме

$$a^2 \Delta u - \partial^2 u / \partial t^2 + b \partial u / \partial t + cu = -f(x,t). \quad (14)$$

Будем искать решения $u(x,t)$ из класса $C^{2,2}(\Omega \times \mathbb{R})$, где $\Omega = [0, \ell]$, $\Gamma = \partial \Omega = \{0, \ell\}$. Предполагаем, что возбуждающая сила $f(x,t)$ и граничные условия являются следующими:

$$f(x,t) = \text{Re}[F(x) \exp(i\omega t)], \quad F = f_1 + if_2, \quad (15)$$

$$u|_{\Gamma} = \text{Re}[\Phi(x) \exp(i\omega t)], \quad \Phi = \Phi_1 + i\Phi_2, \quad (16)$$

где f_i , Φ_i ($i = \overline{1,2}$) не зависят от времени t , $\omega > 0$ – частота.

Решение будем искать в виде [7]

$$u(x,t) = \text{Re}[v(x) \exp(i\omega t)], \quad v = v_1 + iv_2, \quad (17)$$

т.е. $u(x,t) = v_1(x) \cos(\omega t) - v_2(x) \sin(\omega t)$. Подставляя (17) в (14) получим

$$\begin{aligned} & \cos(\omega t) \left[\Delta v_1 + \frac{\omega^2 + c}{a^2} v_1 - \frac{b\omega}{a^2} v_2 \right] - \\ & \sin(\omega t) \left[\Delta v_2 + \frac{\omega^2 + c}{a^2} v_2 + \frac{b\omega}{a^2} v_1 \right] = \\ & = -\frac{f_1}{a^2} \cos(\omega t) + \frac{f_2}{a^2} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Откуда, в силу линейной независимости функций $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ следует, что

$$\Delta v_1 + \frac{\omega^2 + c}{a^2} v_1 - \frac{b\omega}{a^2} v_2 = -\frac{f_1}{a^2}, \quad \Delta v_2 + \frac{\omega^2 + c}{a^2} v_2 + \frac{b\omega}{a^2} v_1 = \frac{f_2}{a^2},$$

или в комплексной форме

$$\Delta v + \lambda v = -\frac{F}{a^2}, \quad (18)$$

где положено $\lambda = \frac{\omega^2}{a^2} \left(1 + \frac{c}{a^2} + i \frac{b}{\omega} \right)$. Таким образом,

функция $v(x) = v_1(x) + i v_2(x)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца (уравнению амплитуд) (18) тогда и только тогда, когда функция $u(x,t) = \text{Re}[v(x) \exp(i\omega t)]$ является решением телеграфного уравнения (14). Из граничного условия (16) получаем условие на комплексную амплитуду

$$v|_{\Gamma} = \Phi(x). \quad (19)$$

Следовательно, мы получили, что внутренняя задача Дирихле об установившихся колебаниях (14)-(16) эквивалентна краевой задаче (18)-(19). Рассматривая любую дважды непрерывно дифференцируемую функцию $U(x)$, такую, что $U(x)|_{\Gamma} = \Phi(x)$, например,

$$U(x) = \Phi(0) \frac{\ell - x}{\ell} + \Phi(\ell) \frac{x}{\ell},$$

замена $v' = v - U$ приводит к задаче с нулевыми граничными условиями:

$$\Delta v' + \lambda v' = -\frac{F'}{a^2}, \quad v'|_{\Gamma} = 0, \quad (20)$$

где $F' = F + a^2(\Delta U + \lambda U) \equiv f'_1 + i f'_2$.

Далее, обозначим через $G(x, \xi)$ функцию Грина [7] следующей внутренней однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta v = 0, \quad v|_{\Gamma} = 0. \quad (21)$$

Тогда решение однородной задачи для уравнения Пуассона $\Delta v = -F$, $v|_{\Gamma} = 0$ представляется в виде следующего интеграла $v(x) = \int_{\Omega} G(x, \xi) F(\xi) d\xi$ и, следовательно, для решения задачи (20) получаем представление:

$$v'(x) = J(x) + \lambda \int_{\Omega} G(x, \xi) v'(\xi) d\xi, \quad (22)$$

где $J(x) = \frac{1}{a^2} \int_{\Omega} G(x, \xi) F'(\xi) d\xi$.

В нашем случае ядро $G(x, \xi)$ полученного интегрального уравнения Фредгольма второго рода (22) можно вычислить явно

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \xi \left(1 - \frac{x}{\ell} \right), & \text{при } 0 \leq \xi \leq x, \\ x \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right), & \text{при } \xi \geq x. \end{cases}$$

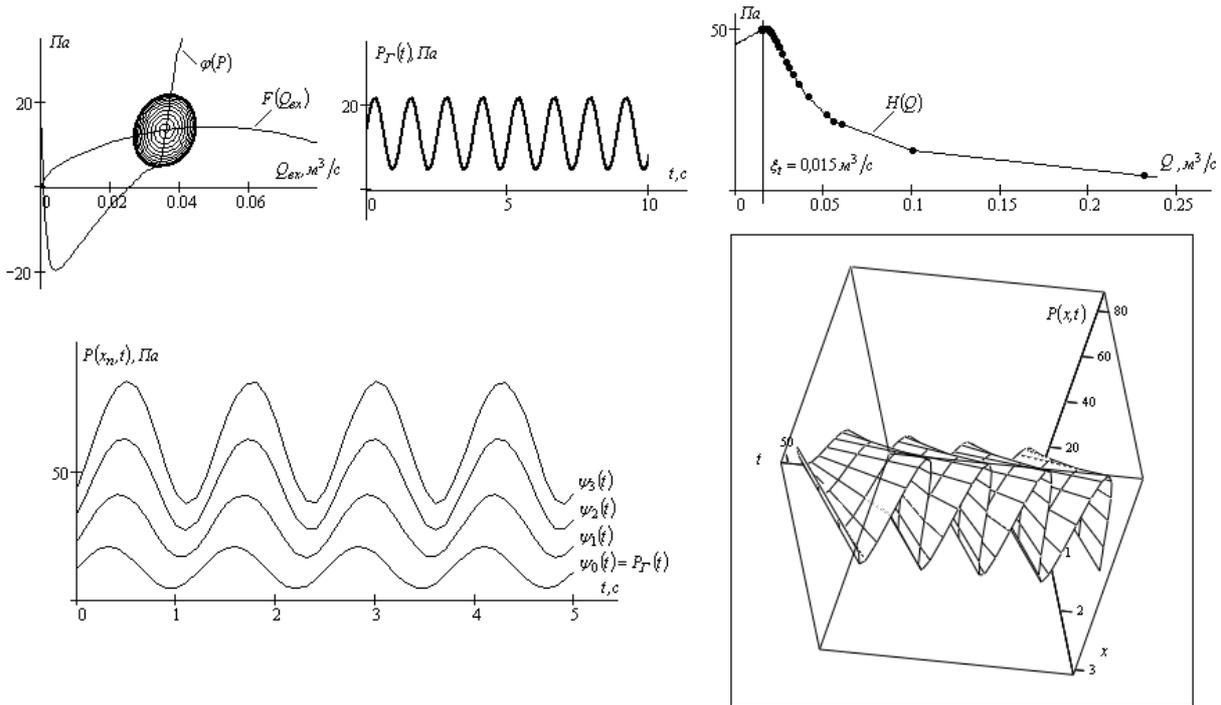


Рис. 2. Автоколебания в рассматриваемой динамической системе

Установившиеся колебания. Нелинейный случай. Дискретизируем пространственную ось x , полагая $x_n = nh$ ($n = 0, 1, \dots, N$), $Nh = L$, и рассмотрим следующую явную разностную схему

$$\begin{bmatrix} \psi_n \\ \varphi_n \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} \psi_{n-1} \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & G_h \\ -hCd/dt & 1 \end{bmatrix}.$$

где положено $\psi_0(t) = P_T(t)$, $\varphi_0(t) = Q_T(t)$, $\psi_n(t) = P(x_n, t)$, $\varphi_n(t) = Q(x_n, t)$ ($n \geq 1$) и линейный

дифференциальный оператор G_h действует по правилу $G_h[f](t) = h\{H(f(t)) - Ldf/dt\}$. Следовательно

$$\begin{bmatrix} \psi_n \\ \varphi_n \end{bmatrix} = S^n \cdot \begin{bmatrix} P_\Gamma(t) \\ Q_\Gamma(t) \end{bmatrix}. \text{ Однако отметим, что т.к. элементы}$$

матричного оператора S не коммутируют, то для вычисления его степеней необходимо следить за порядком произведения операторов G_h и $-hCd/dt$. Например при $n = 3$ имеем

$$\psi_3(t) = P_\Gamma(t) - 3LhdQ_\Gamma/dt + 3LCh^2 d^2 P_\Gamma/dt^2 - L^2 Ch^3 d^3 Q_\Gamma/dt^3,$$

$$\varphi_3(t) = Q_\Gamma(t) - 3ChdP_\Gamma/dt + 3LCh^2 d^2 Q_\Gamma/dt^2 - C^2 Lh^3 d^3 P_\Gamma/dt^3.$$

На рис. 2. представлены характеристики колебательных контуров, а также возбуждаемые автоколебания $P_\Gamma(t)$ в сосредоточенном контуре и характер их преобразования в распределенной части, рассматриваемой вертикальной тубы при мощности теплового потока электронагревателя $W_3 = 7,5 \text{ кВт}$.

Выводы

1. Получена математическая модель трубы Рийке, рассматривая ее как дискретно-распределенную динамическую систему.
2. Установлено, что причиной возбуждения автоколебаний в контуре с сосредоточенными параметрами является отрицательное тепловое сопротивление, а в распределенной части – отрицательное гидравлическое сопротивление, распределенное по длине трубы.

3. Также показано, что когда стационарный рабочий режим ξ_t находится на восходящей ветви напорной характеристики $H(Q)$ распределенного контура, автоколебания, генерируемые в колебательном контуре с сосредоточенными параметрами, усиливаются, а в противном случае (т.е. на нисходящей ветви $H(Q)$) – ослабевают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоцуленко В.В. Механізми автоколивань, зумовлені нагріванням струменів повітря або газу / В.В. Гоцуленко // Прикладна математика та інформатика: всеукр. студ. наук. конф., 11-13 квітня 2001 р.: тези доп. – Л., 2001. – С. 7.
2. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке / В.В. Гоцуленко // Математическое моделирование, РАН. – 2004. – Т.16, № 9. – С. 23 – 28.
3. Гоцуленко В.В. Об устойчивости потока в трубе Рийке как динамической системе с распределенными параметрами / В.В. Гоцуленко // Математическое моделирование. – 2001. – № 2(7). – С. 90 – 92.
4. Гоцуленко В.В. Автоколебания в трубе Рийке при ее собственном волновом сопротивлении / В.В. Гоцуленко // Системные технологии. – 2004. – № 4'(33). – С. 45 – 51.
5. Казакевич В.В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах / В.В. Казакевич. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.
6. Гоцуленко В.В. Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний / В.В. Гоцуленко, В.Н. Гоцуленко // Сборник научн. трудов Днепродзержинского гос. техн. ун-та. – Днепродзержинск, 2009. – С. 95 – 100.
7. Положий Г.Н. Уравнения математической физики / Положий Г.Н. – М.: Высшая школа, 1964. – 559 с.

пост. 05.10.09