

# МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА АЛГОРИТМИ



## Численно-аналитическое определение скорости кристаллизации расплава в условиях осевой симметрии на примере проушин отливок траков

РЯДНО А.А. \*, ЦОЦКО В.И. \*\*, ПЕЛЕШЕНКО Б.И. \*\*

\*Днепропетровская государственная финансовая академия,  
\*\*Днепропетровский государственный аграрный университет

Исследовалась динамика распределения температуры в системе литейный стержень – расплав в форме в процессе кристаллизации проушин отливок траков. Поставленная задача о фазовом переходе для поверхностного слоя проушин решалась методом конечных разностей с использованием неявной схемы для составления системы разностных уравнений. Получена временная зависимость перемещения фронта кристаллизации в графической и аналитической формах.

Досліджувалась динаміка розподілу температури в системі ливарний стрижень – розплав у формі в процесі кристалізації проушин виливок траків. Поставлена задача про фазовий перехід для поверхневого шару проушин розв'язувалась методом скінчених різниць з використанням неявної схеми для складання системи різницевих рівнянь. Одержана часова залежність переміщення фронту кристалізації в графічній і аналітичній формах.

Temperature distribution dynamics in the system “molding core – melt in the mould” in the process of crystallization of the eyes of track link castings was examined. A phased transition for the outer zone of the eyes was achieved with the finite differences method using an implicit scheme for developing difference equations. A temporary dependence of the shifting of the crystallization front was achieved in graphic and analytical forms.

**Введение.** В процессе опытов по поверхностному легированию проушин отливок траков был накоплен материал [1], подтверждающий ограничение глубины легирования упрочняемого слоя, что предварительно связывалось с движением фронта кристаллизации в глубь расплава, темпы которого не были известны.

Задача о фазовом переходе (задача Стефана) довольно просто решается аналитически в случае плоской полубесконечной модели [2, с. 259] путем применения метода подобия. Однако переход к цилиндрическому фронту кристаллизации дает заметные расхождения в скорости его перемещения, особенно в начальной стадии затвердевания проушин, что принципиально важно, так как именно в этот период происходит основное проникновение легирующих элементов в поверхностный слой отливки.

**Постановка задачи.** Была поставлена задача определения скорости кристаллизации расплава в поверхностном слое проушин и нахождения распределения температуры в системе литейный стержень – поверхностный слой проушин отливок траков в указанном временном интервале.

Поскольку литейные стержни для формирования проушин имеют цилиндрическую форму и достаточную длину, то поставленную задачу удобно решать в цилиндрических координатах. В предположении однородности температурного поля по угловой и осевой координатах, можно ограничиться лишь радиальной составляющей оператора Лапласа в уравнении теплопровод-

ности, которое при постоянном коэффициенте теплопроводности  $k$  в пределах одной фазы будет иметь вид

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (1)$$

где  $T$  - температура,  $a^2$  - коэффициент температуропроводности фазы,  $r$  - расстояние, отсчитываемое от оси литейного стержня вдоль его радиуса,  $t$  - время.

Пусть заливаемый в форму расплав имеет температуру  $T_p$ . Температура кристаллизации расплава  $T^*$ . Температура литейного стержня в момент заливки  $T_c$  ( $T_c < T^* < T_p$ ). В процессе охлаждения и кристаллизации расплава распределение температуры в литейном стержне будет изменяться, но, вследствие радиальной симметрии системы, градиент температуры на оси стержня будет постоянным и равным нулю.

Температура расплава с течением времени изменится за счет передачи энергии в литейный стержень и через литейную форму в окружающую среду. Сердцевина расплава в процессе затвердевания отливки всегда будет иметь более высокую температуру, чем поверхностные слои отливки. Следовательно, можно утверждать о существовании в глубине расплава некоторой области, в которой температурный градиент меняет знак. Сузим указанную область в проушинах до цилиндрической поверхности с радиусом  $r^*$ . Предполагается, что область нулевого градиента расплава  $r=r^*$  находится посередине стенки отливки. По крайней мере, это условие выполняется при кристаллизации поверхностного слоя проушин,

в начальный период общей кристаллизации отливки (по предварительным оценкам ~ 30 с).

На поверхности контакта литейного стержня с расплавом должно выполняться условие сохранения тепловых потоков.

Кристаллизация расплава, вступившего в тепловой контакт с литейным стержнем, начинается не сразу, а спустя некоторое время  $t_0$ , за которое расплав в точках контакта  $r=r_0$ , где  $r_0$  – радиус литейного стержня, охладится до температуры кристаллизации. Для данного периода времени задача о распределении температуры в системе литейный стержень – жидкий расплав сводится к решению уравнений

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0; \quad (2)$$

$$\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad r_0 < r < r^*; \quad (3)$$

где  $T_0(r,t)$  и  $T_2(r,t)$  – температуры в стержне и расплаве,  $a_0^2$ , и  $a_2^2$  – соответствующие коэффициенты теплопроводности, с начальными

$$T_0 = T_c \quad \text{и} \quad T_2 = T_p \quad \text{при} \quad t = 0$$

и граничными

$$\frac{\partial T_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = 0,$$

$$k_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \quad \text{при} \quad r = r_0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial r} = 0 \quad \text{при} \quad r = r^*$$

условиями ( $k_0$  и  $k_2$  – коэффициенты теплопроводности литейного стержня и расплава соответственно).

Решение поставленной задачи проводилось методом конечных разностей по неявной схеме вычислений с стандартным преобразованием температуры  $T$  в переменную  $u$ :  $u(r, t) = T(r, t) - T^*$ .

Шаг пространственной координаты  $h$  выбирался достаточно малым по сравнению с  $r_0$  (12 мм) и  $r^*$  (17 мм) –  $h=0,1$  мм. Тогда  $r_i = ih$  ( $i = 0, 1, \dots, 170$ ), причем  $r_0 = r_{120}$ , а  $r^* = r_{170}$ .

Неявные схемы для уравнения теплопроводности приводят к системе алгебраических уравнений для значений искомой функции  $u_{i,j+1}$  на новом (после исходного  $t = t_j$ ) временном слое  $t = t_{j+1}$  ( $j = 0, 1, 2, \dots$ ) [2, с. 590] вида

$$A_i u_{i-1} - C_i u_i + B_i u_{i+1} + D_i = 0, \quad 0 < i < N \quad (4)$$

(в нашем случае: для литейного стержня -  $0 < i < 120$ , для расплава -  $120 < i < 170$ ;  $N=170$ ) с выражениями для разностных коэффициентов уравнений (2) и (3)

$$A_i = a_0^2 \frac{\tau}{h^2}, \quad B_i = a_0^2 \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{1}{i}\right), \quad C_i = a_0^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i}\right) + 1, \\ D_i = u_c$$

при  $i = 1, 2, \dots, 119$  и

$$A_i = a_2^2 \frac{\tau}{h^2}, \quad B_i = a_2^2 \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{1}{i}\right), \quad C_i = a_2^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i}\right) + 1, \\ D_i = u_p$$

при  $i = 121, 122, \dots, 169$ , где  $\tau$  – временной шаг вычислений. Причем, согласно граничному условию при  $r = r_0$ ,

$$A_{120} = k_0, \quad B_{120} = k_2, \quad C_{120} = k_0 + k_2, \quad D_{120} = 0.$$

Решение системы (4) проводилось методом прогонки [2, с. 591-592], учитывающий специальный вид матрицы системы уравнений (4). Поскольку температура в глубине расплава  $u_N$  в процессе кристаллизации поверхностного слоя неопределенно изменяется, в качестве опорной температуры, задающей расчет всех остальных температур в узлах, была выбрана более контролируемая температура  $u_0$  (температура на оси стержня). В этом случае решение системы (4) ищут в виде (обратная прогонка)

$$u_{i+1} = \alpha_{i+1} u_i + \beta_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (5)$$

где коэффициенты  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  определяются по рекуррентным формулам

$$\alpha_i = \frac{A_i}{C_i - B_i \alpha_{i+1}}, \quad \beta_i = \frac{B_i \beta_{i+1} + D_i}{C_i - A_i \alpha_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Из граничного условия для  $r = r^*$  определялись  $\alpha_N = 1$  и  $\beta_N = 0$ , а потом последовательно находились все остальные коэффициенты  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  системы (5). По начальному условию граничная температура  $u_0$  определена, и по ее значению слева направо – от  $i$  к  $i+1$ , определяются  $u_1, u_2, \dots, u_N$ . Для последующих временных слоев  $t=t_{j+1}$ , согласно граничному условию при  $r = 0$   $u_{0,j+1} = u_{1,j+1}$ , в качестве температуры  $u_0$  бралась температура  $u_1$  из предыдущего временного слоя. Тем самым разрешалась неопределенность граничной температуры на оси литейного стержня и осуществлялась гибкая перестройка температурного градиента на нулевое значение.

Численные значения коэффициентов  $k_0 = 0,33$  Вт/(м·К) и  $k_2 = 9$  Вт/(м·К), а также расчетные величины  $a_0^2 = k_0 / (c_0 \rho_0) = 0,265 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с и  $a_2^2 = k_2 / (c_2 \rho_2) = 1,56 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с определялись по данным [3, с. 149, 167, 169], [4, с. 267], [5, с. 384], [6, с. 6], [7, с. 86, 87].

Исследовалось время  $t_0$  достижения температуры кристаллизации  $T^* = 1360^\circ\text{C}$  [8, с. 610] на поверхности контакта литейного стержня с расплавом ( $r = r_0$ ) после заливки расплава в форму ( $t = 0$ ). При температуре заливки расплава  $T_p = 1420^\circ\text{C}$  и пространственном расчетном шаге  $h = 0,1$  мм время  $t_0$  достижения температуры кристаллизации было определено в один временной шаг и составило  $t_0 = 2,48$  мс. Распределение температуры по ближайшим точкам в окрестности  $r = r_0$  приведено в таблице 1 (звездочкой обозначены температура и положение фронта кристаллизации).

Таблица 1

Номер узла, $i$	$r$ , мм	$T$ , °C	Номер узла, $i$	$r$ , мм	$T$ , °C
114	11,4	20,00006	121	12,1	1406,244
115	11,5	20,00094	122	12,2	1416,846
116	11,6	20,01596	123	12,3	1419,277
117	11,7	20,27171	124	12,4	1419,834
118	11,8	24,62463	125	12,5	1419,962
119	11,9	98,71835	126	12,6	1419,991
120*	12,0*	1359,997*	127	12,7	1419,998

После достижения температуры кристаллизации на поверхности контакта литейного стержня с расплавом начинается образование новой фазы – застывшего расплава. При этом уравнения (2) и (3) дополняются

уравнением теплопроводности для кристаллической фазы, температуру которой обозначим как  $T_1(r, t)$ ,

$$\frac{1}{a_0^2} \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_0}{\partial r}, \quad 0 < r < r_0; \quad (6)$$

$$\frac{1}{a_1^2} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r}, \quad r_0 < r < r^*; \quad (7)$$

$$\frac{1}{a_2^2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad r^* < r < r^\wedge \quad (8)$$

где  $a_i^2$  - коэффициент температуропроводности твердой фазы расплава,  $r^* = \zeta(t)$  - радиальная координата точек границы раздела твердой и жидкой фаз расплава в момент времени  $t$ .

Выражения для разностных коэффициентов в узлах литейного стержня и в узлах расплава останутся прежними, только значения  $D_i$  в каждом новом временном шаге будут заменяться предшествующими значениями температуры в этих узлах. Разностные коэффициенты узлов расплава, вследствие смещения фронта кристаллизации, будут начинаться не с прежнего номера узла ( $i = 121$ ), а с последующих номеров -  $i = 122, 123, \dots$

На границе литейного стержня с застывшим расплавом условие равенства тепловых потоков  $k_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} = k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}$  при  $r = r_0$  в разностной форме для переменной  $u$  примет вид (принимается, что фронт кристаллизации уже достиг 121-го узла)

$$k_0 \frac{u_{120} - u_{119}}{h} = k_1 \frac{u_{121} - u_{120}}{h} \quad (9)$$

На границе раздела твердого и жидкого расплава  $r = r^* = \zeta(t)$  должно выполняться условие фазового перехода

$$k_1 \frac{\partial T_0}{\partial r} \Big|_{r=\zeta-0} - k_2 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{r=\zeta+0} = \lambda \rho \frac{d\zeta}{dt},$$

где  $\lambda$  - удельная теплота кристаллизации расплава;  $\rho$  =  $\rho_l$  - плотность твердой фазы при температуре кристаллизации.

Для переменной  $u$  в момент достижения фронтом кристаллизации первого после поверхности контакта со стержнем узла кристаллической фазы (121-го в сквозной нумерации) соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$k_1 \frac{u_{121} - u_{120}}{h} = k_2 \frac{u_{122} - u_{121}}{h} + \lambda \rho \frac{h}{\tau} \quad (10)$$

Соответственно с уравнениями (9) и (10), разностные коэффициенты разделяющих фазы узлов выражения (4) примут вид

$$A_{120} = k_0, \quad B_{120} = k_1, \quad C_{120} = k_0 + k_1, \quad D_{120} = 0;$$

и

$$A_{121} = k_1, \quad B_{121} = k_2, \quad C_{121} = k_1 + k_2, \quad D_{121} = \lambda \rho \frac{h^2}{\tau}.$$

Используя обратную прогонку, варьируем значением временного шага  $\tau$ , так чтобы расчетная температура в 121-ом узле достигла температуры кристаллизации ( $T^* = 1360^\circ\text{C}$ ,  $u^* = 0$ ) и фиксируем указанный промежуток времени. При дальнейшем расчете движения фронта кристаллизации граничное условие на поверхности затвердевания претерпевает смещение от узла к узлу в направлении к  $r^\wedge$ . Разностные коэффициенты промежуточных между  $r_0$  и  $r^*$  узлов находят по формулам

$$A_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2}, \quad B_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{1}{i}\right), \quad C_i = a_1^2 \frac{\tau}{h^2} \left(2 + \frac{1}{i}\right) + 1, \\ D_i = u_{i,j-1}$$

при  $i = 121, 122, \dots, 169$ , где  $u_{i,j-1}$  - температура в  $i$ -ом пространственном узле в предшествующем ( $j-1$ )-ом временном слое.

Значения  $k_i = 26 \text{ Вт/(м·К)}$  и  $a_i^2 = k_i / (c_i \rho_i) = 5,24 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$  рассчитывались по данным [5, с. 384];  $\lambda = 270 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}$  [3, с. 156], [6, с. 6];  $\rho = 7,3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  [4, с. 267].

На рис. 1 приведены распределения температуры в системе литейный стержень ( $0 < r < r_0$ ) - застывший расплав ( $r_0 < r < r^*$ ) - жидкий расплав ( $r^* < r < r^\wedge$ ) в различные моменты времени  $t$ , при значениях параметров  $r_0 = 12 \text{ мм}$  и  $r^\wedge = 17 \text{ мм}$ . Координата  $r^*$  равна соответственно 12,3 мм ( $t = 3,28 \text{ с}$ ); 12,6 мм ( $t = 11,08 \text{ с}$ ); 13,2 мм ( $t = 27,83 \text{ с}$ ); 14,4 мм ( $t = 88,23 \text{ с}$ ).

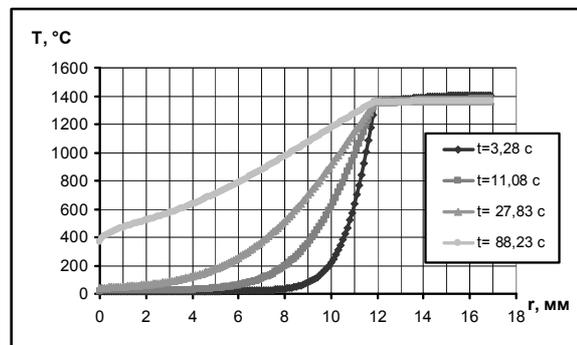


Рис. 1. Распределения температуры в системе литейный стержень - расплав в различные моменты времени  $t$ .

Реальная середина стенки отливки в области проушин колебалась в пределах 16-18 мм. Проведенный расчет для  $r^\wedge = 17 \text{ мм}$  был дополнен аналогичными расчетами для  $r^\wedge = 16 \text{ мм}$  и  $r^\wedge = 18 \text{ мм}$ .

Время достижения температуры кристаллизации на поверхности контакта литейного стержня с расплавом  $t_0$ , а также распределение температуры по ближайшим точкам в окрестности  $r = r_0$  (табл. 1) не изменились.

Зависимость перемещения фронта кристаллизации  $\Delta r^* = r^* - r_0$  от времени, отсчитанного от момента достижения температуры кристаллизации на границе литейного стержня и расплава  $\Delta t = t - t_0$ , в каждом указанном случае приведена на рис. 2. Поскольку  $t_0 = 2,48 \text{ мс}$  достаточно мало, то можно считать  $\Delta t = t$ .

Линейная зависимость между перемещением кристаллизационного фронта  $\Delta r^*$  и временем  $t$  в логарифмических координатах (коэффициент корреляции более 0,997) позволяет утверждать о существовании линейной корреляционной зависимости между указанными переменными -  $\ln(\Delta r^*)$  и  $\ln(t)$ . Выравнивание данных численного эксперимента по показательной кривой методом наименьших квадратов дает следующую эмпирическую формулу, связывающую  $\Delta r^*$  и  $t$ :

$$\Delta r^* = \alpha \cdot t^\beta \quad (11)$$

При размерностях  $[\Delta r^*] = \text{мм}$  и  $[t] = \text{с}$ ,  $\alpha = 0,149$  и  $\beta = 0,623$  – для  $r^\wedge = 17 \text{ мм}$ ;  $\alpha = 0,155$  и  $\beta = 0,652$  – для  $r^\wedge = 16 \text{ мм}$ ;  $\alpha = 0,145$  и  $\beta = 0,596$  – для  $r^\wedge = 18 \text{ мм}$ .

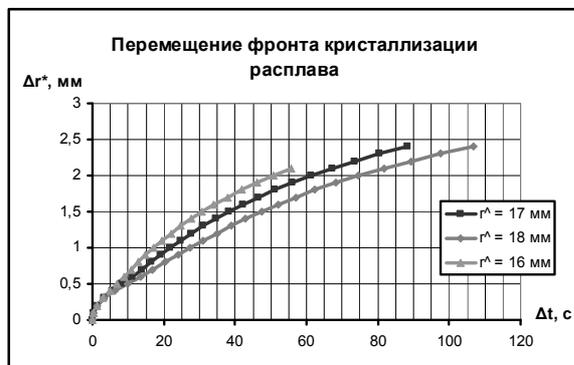


Рис. 2. Зависимость перемещения фронта кристаллизации  $\Delta r^*$  от времени  $\Delta t$ .

Отличие величины  $\beta$  от значения  $\beta = 1/2$  [2, с. 255, 263] обусловлено нарушением однородности граничных условий в сравнении с полубесконечной моделью и неприменимости метода подобия к решению поставленной задачи. Отклонение показателя степени  $\beta$  от значения  $1/2$  можно трактовать как изменение во времени постоянной  $\alpha$  в законе движения границы кристаллизации (11) при  $\beta = 1/2$

$$\Delta r^* = \alpha(t) \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Указанный тезис подтверждается стабилизацией параметра  $\alpha$  в уравнении (12) при достаточном удалении фронта кристаллизации от поверхности, когда температура в области нулевого градиента ( $r = r^\wedge$ ) практически не меняется, приближаясь к температуре кристаллизации расплава.

### Выводы

Поставленная задача о фазовом переходе для поверхностного слоя проушин отливок траков решена

методом конечных разностей с применением неявной схеме вычислений. Определена временная зависимость перемещения фронта кристаллизации в графической и аналитической формах.

Полученные результаты позволяют выяснить темпы кристаллизации и скорости охлаждения поверхностного слоя проушин отливок траков в связи с удалением от поверхности, что определяет эффективность диффузионного насыщения при поверхностном легировании проушин.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Tsotsko V.I., Burya A.I., Shemavnev V.I., Vorobyev G.M. Application of casting surface alloying for hardening surface of track pin holes (Применение метода поверхностного легирования отливок для упрочнения поверхности проушин траков гусениц) // 2<sup>nd</sup> international Conference "Research and Development in Mechanical Industry" RaDMI 2002, 01-04 September 2002, Vrnjačka Banja, Yugoslavia, V. 2, S. 1100-1105.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
3. Енохович А.С. Справочник по физике. – М.: Просвещение, 1978. – 415 с.
4. Лившиц Б. Г. Физические свойства металлов и сплавов. – М.: Машгиз, 1956. – 352 с.
5. Материалы в машиностроении. Справочник в пяти томах. / Под общ. ред. И.В. Кудрявцева. Т. 3. Специальные стали и сплавы. Под ред. Ф. Ф. Химушина. – М.: Машиностроение, 1968. – 448 с.
6. Разливка черных металлов. Справочн. изд. / Н. Н. Власов, В. В. Король, В. С. Радя. – М.: Металлургия, 1987. – 272 с.
7. Цибрик А.Н., Семенюк Л.А., Цибрик В.А. Физико-химические постоянные материалов и параметры процессов литья. Справочник. – К.: Наукова думка, 1987. – 271 с.
8. Марочник сталей и сплавов / В.Г. Сорокин, А.В. Волосникова, С.А. Вяткин и др.; Под общ. ред. В.Г. Сорокина. – М.: Машиностроение, 1989. – 640 с.