

## Решение задачи оптимального управления динамическими системами градиентного типа в двухмерном случае

А.М. НАЗАРЕНКО, А.А. ВАСИЛЬЕВ

Сумский государственный университет

В работе ставится и решается задача оптимального релейного управления динамическими системами градиентного типа, которые описывают макроэкономические процессы. Решение поставленной задачи осуществлялось в рамках принципа максимума Понтрягина. Были получены аналитические выражения для оптимальных значений фазовых и сопряженных переменных, которые апробированы на реальном примере.

В роботі ставиться та розв'язується задача оптимального релейного керування динамічними системами градієнтного типу, що описують макро економічні процеси. Розв'язання поставленої задачі виконувалося у рамках принципу максимуму Понтрягіна. Були отримані аналітичні вирази для оптимальних значень фазових та спряжених змінних, що були апробовані на реальному прикладі.

In work the problem of optimum relay management of dynamic systems of the gradient type which describe macroeconomic processes is put and solved. The decision of a task in view it was carried out within the framework of a Pontryagin's principle of maximum. Analytical expressions for optimum values of the phase and connected variables which are approved on a real example have been received.

Не вызывает сомнений, для успешного ведения хозяйственной деятельности в современных условиях необходимо привлекать не только специалистов в области экономики и финансов, но и использовать аппарат экономико-математического моделирования. Целесообразность привлечения последнего обоснована не только относительно низкой стоимостью его внедрения, а еще и возможностью наглядного и быстрого изучения реакции системы на изменения внешних параметров без проведения экспериментов с реальной системой.

В современных условиях для экономического объекта любого уровня на первый план выходят вопросы ограниченности природных ресурсов и их оптимального использования [1]. Большая часть публикаций, посвященных этой проблеме, пытается решить ее в рамках экономической теории, которой оказывается явно недостаточно. Математический аппарат, применяющийся для решения данной задачи, в основном базируется на теории математического программирования. Однако известно, что линейные модели, в силу того, что экономика является сложной системой, могут использоваться лишь на коротких участках времени, и их дескриптивные качества, зачастую, не достаточно высоки [2].

В связи с этим, целесообразной является разработка нелинейных динамических моделей описания экономической деятельности и методики их применения для оптимального управления развитием экономических объектов. В работе [3] была предложена методика использования систем градиентного типа для аппроксимации реальных экономических систем. При этом управляющие параметры в ней выбирались как непрерывные функции, зависящие от времени. Однако такой подход приемлем не для всех возникающих на практике проблем. Так, важным классом задач теории оптимального управления являются вопросы релейного управления, которым и посвящена данная работа.

Общая постановка задачи оптимального управления [4] выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \max_{\{u(t)\}} J &= \int_{t_0}^T I(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + F(\mathbf{x}_T, T), \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_T, \\ \{\mathbf{u}(t)\} &\in U, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$  и  $\mathbf{f}(\cdot)$  – априорно заданные, непрерывно дифференцируемые функции;  $t_0$ ,  $\mathbf{x}_0$  – параметры, заданные как начальные условия;  $T$  или  $\mathbf{x}_T$  – фиксированные параметры. В данной работе были рассмотрены задачи релейного управления динамическими системами. В этом случае траектории функций управления  $\{\mathbf{u}(t)\}$  на всем рассматриваемом участке должны принадлежать заранее известному множеству управлений  $U$ , причем  $\mathbf{u}(t)$  – кусочно-непрерывные функции времени, значения которых должны принадлежать некоторому фиксированному множеству  $\Omega$ .

Необходимо отметить, что постановка (1) приемлема лишь для узкого круга задач физики и механики, где априорно, основываясь на физических свойствах хорошо изученной системы, можно задать необходимые функции и множества. В большинстве прикладных задач, прежде чем решать задачу оптимизации, необходимо идентифицировать функциональные зависимости в (1).

В задачах макроэкономики основным изучаемым параметром является валовый внутренний продукт (ВВП). Поэтому в данной статье в качестве максимизируемого параметра было выбрано именно значение ВВП. В работе [5] показано, что реальные значения ВВП могут быть с хорошей точностью аппроксимированы квадратичной формой только фазовых переменных. Тогда целевой функционал примет вид

$$\max_{\{u(t)\}} J = \int_{t_0}^T G(\mathbf{x}) dt = \int_{t_0}^T \left( G_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} \right) dt, \quad (2)$$

где  $G(\mathbf{x})$  – некоторая функция, приближенно описывающая динамику изменения ВВП. Если выбрать вектор фазовых переменных  $\mathbf{x}$ , то аналитическое выражение для  $G(\mathbf{x})$  может быть найдено, например, методом наименьших квадратов [5].

Следуя [3], в качестве дифференциальных связей в работе выбрана система дифференциальных уравнений градиентного типа [6]

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{U} \frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{U}$  – диагональная матрица порядка  $n$ , элементами которой являются функции управления  $u_i(t)$ ,  $\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  – вектор-градиент функции  $G(\mathbf{x})$ .

Основная часть задач, которые встречаются в практике ведения экономической деятельности, требует получения максимального значения некоторого экономического показателя (в нашем случае ВВП) за заданный срок. Поэтому в (1) целесообразно задать значение  $T$  – периода проведения оптимального управления.

Таким образом, в данной работе решается задача максимизации суммарного выпуска ВВП, заданная интегральным функционалом с квадратичным критерием качества за некоторый период времени  $T$ , в которой управляющие функции  $\mathbf{u}(t)$  принадлежат некоторой области  $\Omega$ , а дифференциальные связи заданы в виде системы уравнений градиентного типа:

$$\begin{aligned} \max_{\{u_i(t)\}} J &= \int_0^T (G_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x}) dt, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{P}, \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad T = \text{const}. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение данной задачи будем искать с помощью принципа максимума Понтрягина. Функция Гамильтона задачи (4) имеет вид:

$$H = G_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}' \mathbf{y} = G_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}' \mathbf{P} \mathbf{U} \mathbf{y}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{y}$  – вектор сопряженных переменных порядка  $n$ , компонентами которого являются функции  $y_i(t)$ .

Для нахождения экстремальных управлений необходимо найти  $\max_{\{u_i \in \Omega\}} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y})$ , т. е. определить компоненты вектора

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{Y} \mathbf{P} \mathbf{x}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{Y}$  – диагональная матрица порядка  $n$ , элементами которой являются функции  $y_i(t)$ .

Так как (6) явно не зависит от  $\mathbf{u}$ , решение задачи будет лежать на границе области управления. Значит, необходимо использовать релейное управление системой (4). При этом значения управляющих параметров будут определяться, исходя из знака соответствующей компоненты вектора  $\frac{\partial G(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ , а точки переключения управлений системы – точки перемены знака его элементов. Тогда функции  $u_i(t)$  будут определяться по правилу:

$$u_i(t) = \begin{cases} u_{\max_i}, & \text{если } \mathbf{P} \mathbf{x}_i|_{t=t'} > 0, \\ u_{\min_i}, & \text{если } \mathbf{P} \mathbf{x}_i|_{t=t'} < 0, \end{cases}$$

где  $u_{\max_i}$  и  $u_{\min_i}$  – максимальное и минимальное значения соответствующего управления на рассматриваемом участке.

Таким образом,  $\mathbf{u}(t)$  – кусочно-постоянные функции. Множество допустимых управлений  $U$  в общем случае неизвестно и будет зависеть от вектора фазовых переменных, конкретных условий проведения хозяйственной

деятельности и т. д. То есть, для экономических задач  $U$  – сложноформализуемое множество, которое, вообще говоря, должно быть задано апостериорно при решении каждой конкретной задачи. В данной работе предложен алгоритм построения  $U$  на основе рассмотрения статистических данных о системе на некотором базовом периоде.

В работе решение задачи (4) рассматривается для конкретной макроэкономической системы. Реальные статистические данные и оптимальные значения составляющих системы, найденные из решения (4), сравнивались на примере Нидерландов за период с 1997 по 2001 год [6]. При этом неизвестные параметры (4) идентифицировались на базовом периоде с 1974 по 1996 год [6]. Значения всех параметров системы брались относительно начального года.

## 1. Идентификация неизвестных

Специфицируем переменные системы. В качестве основного макроэкономического параметра, который будет описываться функцией  $G(\mathbf{x})$ , выберем ВВП. Из экономической теории известно, что в качестве факторов, значимо влияющих на ВВП, можно выбрать потребление основного капитала  $x_1$  и объем заработной платы  $x_2$ . Если двух факторов будет недостаточно для адекватного описания системы, возможно увеличение размерности задачи за счет количества объясняющих переменных.

Так как вид функции  $G(\mathbf{x})$  задан в (2), оценки ее неизвестных коэффициентов (константы  $G_0$  и матрицы  $\mathbf{P}$ ) найдем с помощью метода наименьших квадратов. Расчеты дают:

$$G(x_1, x_2) = 1.652 + (x_1, x_2) \begin{pmatrix} -3.318 & 4.674 \\ 4.674 & -6.244 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

при этом коэффициент детерминации  $R^2 = 0.97518$ , что говорит о высоком качестве приближения.

Следуя [2], можно найти оценки неизвестных управлений на базовом участке в классе полиномов. Однако для решения задачи (4) такой подход непригоден, так как  $u_i(t)$  должны быть кусочно-постоянными функциями.

В связи с этим в работе предлагается модифицированный подход для аппроксимации значений фазовых переменных на базовом периоде соответствующим классом функций.

Следуя алгоритму переключений, значения управляющих параметров будут изменяться в моменты изменения знака соответствующей компоненты вектора  $\mathbf{P} \mathbf{x}$ . Анализируя исходные статистические данные, находим, что в базовом периоде было два переключения (рис. 1б) в моменты времени 14.411 и 16.337.

Значит, значения управляющих параметров необходимо определить на трех интервалах, причем значения для  $u_1$  и  $u_2$ , полученные на последнем интервале, будут входящими параметрами задачи оптимизации.

Значения функций управления на каждом участке между переключениями  $[t_{k-1}, t_k]$  будем определять с помощью метода Монте-Карло.

Для этого вычислим конкретные значения функций управления в каждый конкретный промежуток времени. Заменяя дифференциальные связи разностной схемой, получим

$$u_i^{(j)} = (x_i^{(j+1)} - x_i^{(j)}) / \left. \frac{\partial G}{\partial x_i} \right|_{t=j}. \quad (8)$$

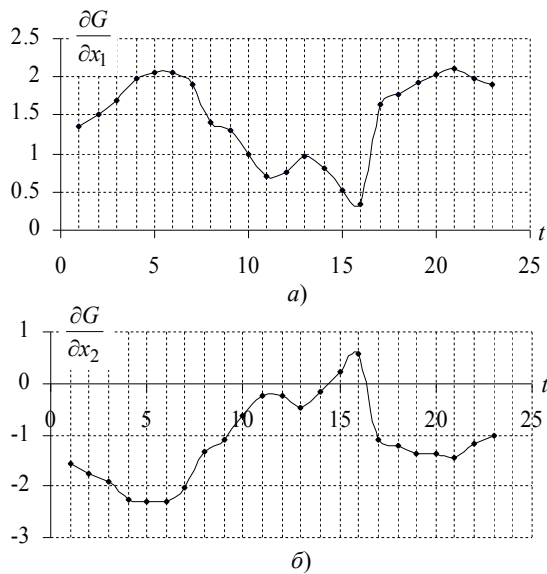


Рис. 1. Графики компонент вектора  $Px$ .

Используя (8), можно приблизительно оценить область  $\hat{\Omega}$ , в которой могут находиться значения релейных управлений. Так как (8) непосредственно использует исходные статистические данные, которые несут в себе разного рода погрешности, то действительные границы  $\Omega$  будут отличаться от оцененных по (8), однако их можно использовать в качестве начального приближения. Для нахождения конкретного значения релейного управления, наблюдавшегося на рассматриваемом участке, применим эвристический алгоритм, который выбирает из расширенной области  $\hat{\Omega}$  допустимые значения комбинаций управляющих параметров в виде констант и решает систему дифференциальных уравнений (3). После этого проводится сравнение найденного решения с реальными данными, наблюдавшимися в этот период. Управления, которые обеспечивают максимальный коэффициент детерминации связи решения и исходных статистических данных, будем считать значениями релейных управлений на данном участке. Соответственно точность найденных оценок тем выше, чем больше проведено испытаний, что есть стандартным условием при нахождении решения методом Монте-Карло.

В результате работы алгоритма были получены следующие результаты (рис. 2) и (рис. 3). На рис. 2 табличные точки управляющих параметров, найденные с помощью (8), соединены пунктирной линией 1. Видно, что в базовом периоде управления изменялись очень активно, однако в рамках каждого периода, полученного разбиением базового отрезка времени точками переключений, наблюдаются незначительные флуктуации изучаемых параметров, что позволяет предположить возможность хорошего качества приближений релейными управлениями в каждый из временных интервалов между переключениями  $[t_{k-1}, t_k]$ . После проведения численного эксперимента по описанной выше схеме, были найдены оценки релейных управлений, изображенные на рис. 2 линией 2. Оказалось, что для первого участка  $[1, 14.411]$  оцененное релейное значение управляющего параметра  $u_1$  несколько занижено, чем среднее

табличное значение, а оценка  $u_2$  наоборот завышена. Это может быть объяснено тем, что на данном отрезке наблюдалось большее влияние фактора  $x_1$  на изучаемый показатель (частный коэффициент корреляции между ВВП и  $x_1$  равен 0.75498, а между ВВП и  $x_2 = 0.55296$ ), и чтобы компенсировать данную разницу, получены именно такие значения оптимальных релейных оценок. Аналогично можно дать объяснение для остальных участков переключений.

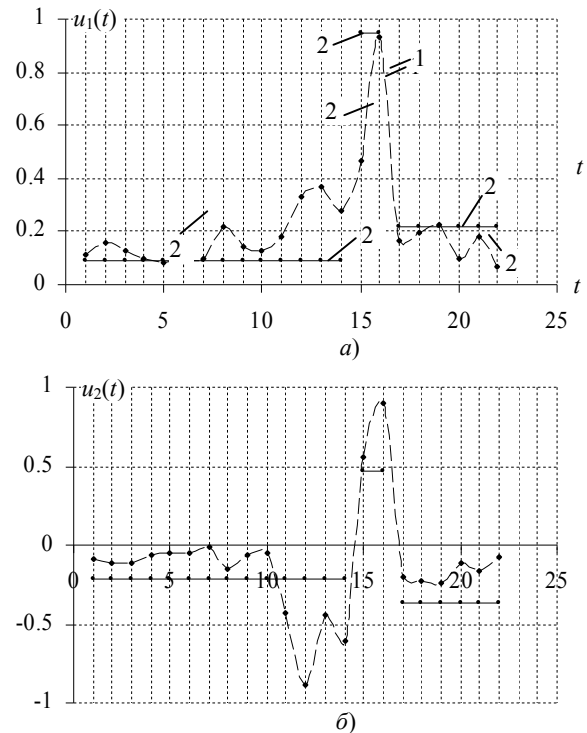


Рис. 2. Графики табличных и релейных управлений

Это может быть объяснено тем, что на данном отрезке наблюдалось большее влияние фактора  $x_1$  на изучаемый показатель (частный коэффициент корреляции между ВВП и  $x_1$  равен 0.75498, а между ВВП и  $x_2 = 0.55296$ ), и чтобы компенсировать данную разницу, получены именно такие значения оптимальных релейных оценок. Аналогично можно дать объяснение для остальных участков переключений.

На рис. 3 показаны табличные (линия 1) и найденные при релейных управлениях значения показателей  $x_1$  и  $x_2$  (линия 2). Видно, что графики линий 1 и 2 практически наложились, что говорит о хорошем качестве аппроксимации с помощью релейных управлений, однако оно хуже непрерывного аналога [2].

Полученный результат может быть объяснен существенной вариативностью экономических процессов. Попытка приблизить реальные значения управляющих параметров константами может быть полезна только из теоретических соображений. Так, оценив значения для релейных управлений на последнем участке, можно задать область  $\Omega$ , в которой будут находиться их значения на участке оптимального управления. Тогда для нашего примера максимальное и минимальное значения параметра  $u_1$  на

участке оптимального управления можно взять равными 0.219 и 0.0873 соответственно, а для  $u_2 - 0.463$  и  $-0.363$ .

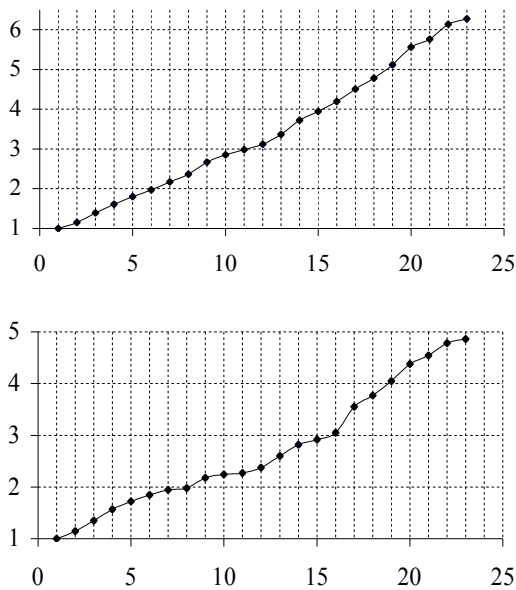


Рис. 3. Графики табличных и приближенных  $x_1$  и  $x_2$

**2. Решение задачи оптимального управления**

Определив область  $\Omega$ , можно приступить к решению задачи (4). Канонические уравнения для нее имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{U}\mathbf{P}\mathbf{x}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0; \\ \dot{\mathbf{y}} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{U}\mathbf{y}, & \mathbf{y}(T) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Следовательно, исходная задача сводится к решению двухточечной краевой задачи [4].

Отметим, что первое уравнение системы (9) прямо не зависит от  $\mathbf{y}$ , поэтому (9) распадается на две независимых подсистемы. Решая уравнение для  $\mathbf{x}$  слева направо, можно найти возможные моменты переключений и значения оптимальных фазовых переменных. После этого, решая систему для  $\mathbf{y}$  справа налево, можно определить значения сопряженных переменных.

Чтобы предупредить возможные проблемы расходимости, для каждого из интервалов времени между переключениями  $[t_{k-1}, t_k]$  были найдены аналитические выражения для решений (9):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t^*} \mathbf{x}_{k-1}, & t^* &= t - t_{k-1}, \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{U}^{-1} e^{-\mathbf{A}t'} \mathbf{U} \mathbf{y}_k - \mathbf{U}^{-1} \text{sh}(\mathbf{A}t') \mathbf{x}_k, & t' &= t - t_k. \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $e^{\mathbf{A}t^*}$ ,  $e^{-\mathbf{A}t'}$  и  $\text{sh}(\mathbf{A}t')$  – матрицы размерности  $n \times n$ . В случае, если характеристические корни  $\lambda_i$  матрицы  $\mathbf{A}$  различны, то матричные функции можно вычислить по теореме Сильвестра, воспользовавшись формулой:

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^n f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)}, \tag{11}$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

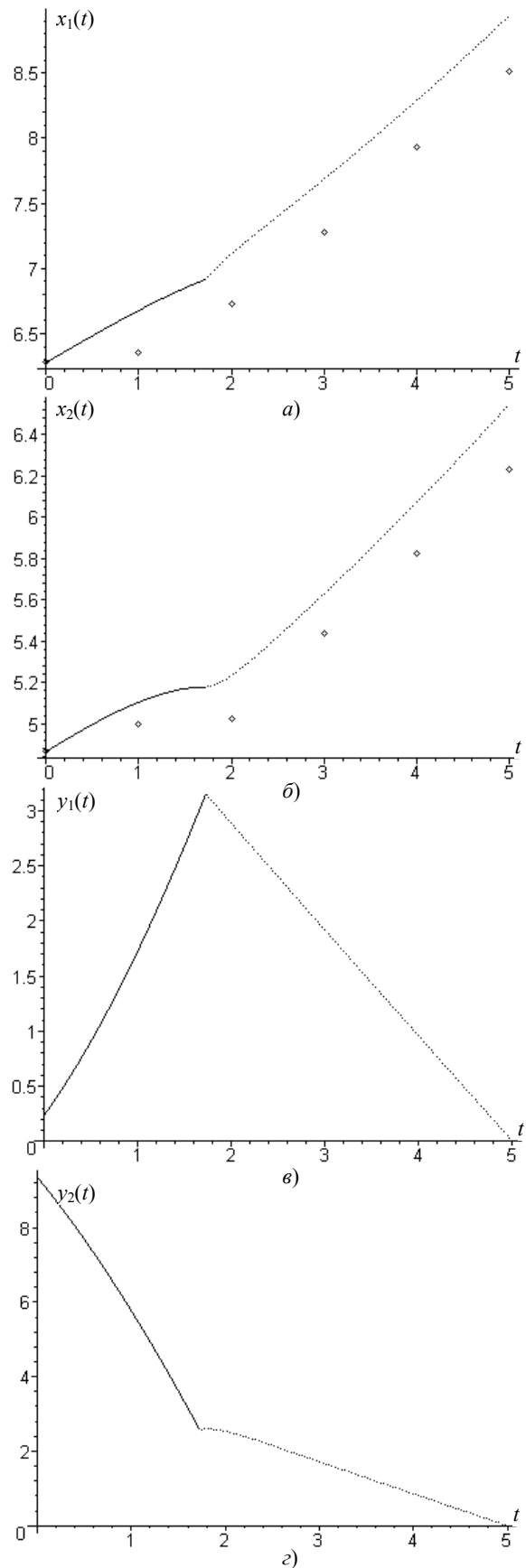


Рис. 4. Результаты решения задачи (4)

В рассматриваемом случае  $n = 2$  и, используя (11), вместо (10) можно записать:

$$x_i(t) = \frac{\dot{x}_{ik-1} - \lambda_2 x_{ik-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\dot{x}_{ik-1} - \lambda_1 x_{ik-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t},$$

$$y_i(t) = -\frac{\dot{x}_{ik} - \lambda_2 x_{ik}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\text{sh } \lambda_1 t'}{u_i} + \frac{\dot{x}_{ik} - \lambda_1 x_{ik}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\text{sh } \lambda_2 t'}{u_i} +$$

$$+ \frac{a_{i1} u_1 y_{1k} + a_{i2} u_2 y_{2k} - \lambda_2 u_i y_{ik}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{-\lambda_1 t'}}{u_i} -$$

$$- \frac{a_{i1} u_1 y_{1k} + a_{i2} u_2 y_{2k} - \lambda_1 u_i y_{ik}}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{e^{-\lambda_2 t'}}{u_i},$$

$$i = 1, 2,$$

где  $\dot{x}_{ik-1} = a_{i1} x_{1k-1} + a_{i2} x_{2k-1}$  ( $a_{ij} = u_i p_{ij}$ ) – значения производных по времени соответствующей фазовой координаты в момент времени  $t_{k-1}$ .

На рис. 4 а и рис. 4 б приведены реальные (обозначены точками) и оптимальные траектории для  $x_1$  и  $x_2$  (непрерывные линии). Заметно, что найденные решения (4) не изменяют тенденции поведения изучаемых параметров, однако их значения несколько выше. Этот факт может говорить о том, что в период с 1997 по 2001 год правительством Нидерландов проводилась политика, близкая к оптимальной. При этом соответствующие значения сопряженных переменных изображены на рис. 4 в и рис. 4 г. Из них видно, что функции  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  принимают неотрицательные значения, что подтверждает справедливость предположения о том, что время переключения будет зависеть только от знака компонент вектора-градиента функции  $G(x)$  и соответствует их интерпретации как теневых цен [4].

Необходимо отметить, что на периоде управления необходимо будет сделать одно переключение в момент времени  $t = 1.727$ . На рис. 4 линии до переключения и после обозначены разными цветами.

Реальные и полученные путем решения (4) значения ВВП приведены на рис. 5. Из него видно, что применение оптимального управления позволило бы значительно увеличить выпуск валового внутреннего продукта.

### Выводы

В работе была поставлена и решена задача оптимального релейного управления динамическими системами градиентного типа с квадратичным функционалом качества. Решение задачи было найдено аналитически с помощью принципа максимума Понтрягина. Результаты

численного эксперимента подтвердили целесообразность внедрения практики оптимального управления. Дальнейшие научные разработки по данной теме могут быть направлены в сторону отыскания непрерывных оптимальных управлений, что, по мнению авторов, позволит улучшить как решение задачи, так и уровень соответствия реальной экономической системе.

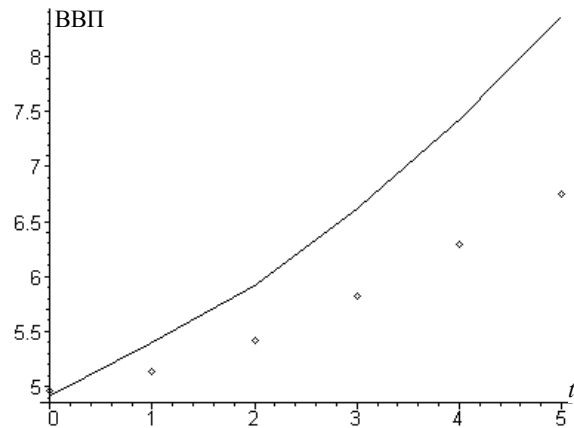


Рис. 5. Оптимальные и реальные значения ВВП

### ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобылев С.Н., Гирусев Э.В., Перелет Р.А. Экономика устойчивого развития. - М.: Ступени, 2004. - 303 с.
2. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. - М.: Мир, 1988. - 492 с.
3. Васильев А.А., Назаренко А.М. Дискретизация и численная идентификация дифференциально-игровых моделей макроэкономической динамики // Вестник Харьковского национального университета. - 2006. - № 733. Сер. "МИА". - С. 67-78.
4. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. - М.: Прогресс, 1975. - 607 с.
5. Назаренко А.М., Васильев А.А. Об одном способе моделирования макроэкономических процессов // Вестник Сумского государственного университета. - 2004. - №12(71). - С. 92-98.
6. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Наука, 1988. - 552 с.
7. <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/>

пост. 23.05.07.