

Монотонизация разностной схемы решения задач линейной акустики методом потенциала

В.В. РЕШЕТНЯК, А.Н. СЕМКО

Донецкий национальный университет

Рассмотрены дисперсионные свойства метода потенциала при решении задач линейной акустики с разрывными начальными условиями. Проведена монотонизация расчетной схемы методом введения искусственной вязкости. Решения тестовых задач, полученные для метода потенциала, сравнивались с аналитическими и численными решениями для других методов. Оценивались сложность алгоритма и затраченное расчетное время.

Розглянуті дисперсійні властивості метода потенціалу при розв'язанні задач лінійної акустики з розривними початковими умовами. Проведена монотонізація розрахункової схеми методом введення штучної в'язкості. Розв'язки тестових задач, отримані для метода потенціалу, порівнювалися з аналітичними та числовими розв'язками для інших методів. Оцінювалися складність алгоритму та витрачений розрахунковий час.

Dispersion properties of the method of potential for computation of linear acoustic problems with discontinuities is discussed. Monotonization of the computation scheme by the method of artificial viscosity is carried out. Solutions of test problems, that obtained with the method of potential compared with analytical solutions and solutions, that obtained for other numerical methods. Difficulty of algorithms and spend solve time are estimated.

Ведение. При решении задач газовой динамики широкое распространение получили численные методы такие, как метод характеристик, методы, основанные на решении задачи Римана и методы с искусственной вязкостью [1, 2]. Однако вычислительные алгоритмы для этих методов характеризуются большими объемами вычислений, что затрудняет их использование для больших расчетных областей и длительных процессов. Значительно ускорить вычисления позволяет использование метода потенциала, который применен при решении задач гидроупругости в работе [3]. В этом методе в предположении о безвихревом характере течения вводится потенциал скорости $\vec{u} = \nabla\phi$, и уравнения движения в рамках линейной акустики преобразуются к одному скалярному уравнению второго порядка для потенциала скорости типа волнового. Конечно-разностная аппроксимация этого уравнения центральными разностями позволила получить приемлемые результаты для быстро изменяющихся процессов со вторым порядком точности по пространству и по времени, которые возникают в задачах гидроупругости [3]. Однако никаких исследований диссипативных и дисперсионных свойств предложенного численного метода выполнено не было.

В работе [4] метод потенциала был применен для решения ряда тестовых задач линейной акустики с разрывами в начальных условиях, которые моделируют процессы при подводном электрическом разряде в различных технологиях и гидроимпульсной штамповке. Проведенные расчеты показали, что как на равномерной, так и на квазиравномерной сетках численное решение осциллирует около средних значений. Амплитуда пульсаций зависит от коэффициента запаса k в условии устойчивости Куранта для разностной схемы $\tau = kh/a_0$, где $k \leq 1$, τ и h – шаг сетки по времени и по пространству, a_0 – скорость звука. На равномерной сетке при $k = 1$ пульсации отсутствуют, а на неравномерной – минимальные. Наличие пульсаций обусловлено тем, что волновое уравнение аппроксимируется со вторым порядком точности и не содержит схемной вяз-

кости. В теории разностных схем доказывается, что при такой аппроксимации уравнений численное решение не может быть монотонным. Поэтому для сглаживания пульсаций и монотонизации разностной схемы в разностные формулы вводится искусственная вязкость.

В настоящей работе исследованы различные способы введения искусственной вязкости в численный метод потенциала. Решения тестовых задач, полученные методом потенциала с разными видами искусственной вязкости, сравниваются с аналитическим решением, с численными решениями другими методами. Оценивается сложность алгоритма и затраченное расчетное время.

1. Вывод уравнений с вязкостью для потенциала. Для монотонизации разностной схемы на основе метода потенциала в исходные уравнения вводился добавочный член с искусственной вязкостью [5, 6]. Как известно, введение искусственной вязкости позволяет проводить расчеты сквозным методом, не выделяя разрывы. Искусственная вязкость вводилась двумя способами: по упрощенному методу с постоянным коэффициентом вязкости и по методу Неймана-Рихтмайера с переменным коэффициентом вязкости [5, 6].

Систему линеаризованных уравнений, описывающих движение идеальной сжимаемой жидкости с искусственной вязкостью, запишем в виде

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nabla q,$$

$$\nabla \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$p = \frac{nB}{\rho_0} (\rho - \rho_0),$$

где $B = 304,5$ МПа, $n = 7,15$, $\rho_0 = 1$ г/см³ – постоянные в уравнении состояния воды в форме Тэта, $q = \lambda \nabla \vec{u}$ – вязкое давление, λ – коэффициент вязкости, который подбирается экспериментально при тестовых расчетах.

Путем элементарных преобразований сведем эти уравнения к виду:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} a_0^2 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \rho + \frac{\partial}{\partial t} \nabla q,$$

$$\nabla^2 \bar{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

где $a_0 = \sqrt{nB/\rho_0}$.

Избавимся от плотностей, перейдем от скоростей к потенциалам и проинтегрируем полученное уравнение по пространству. Получим уравнение для потенциала с вязкостью в окончательном виде:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0^2 \Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} (\lambda \Delta \phi), \quad (1)$$

Для одномерных течений уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right), \quad (2)$$

Алгоритм решения задач линейной акустики с разрывами на неподвижных равномерных сетках был отработан на примере задачи о распаде произвольного разрыва в одномерной постановке (тест Сода).

Начальные условия:

$$v = 0, \quad X_1 \leq x \leq X_2; \quad p = p_1,$$

$$X_1 \leq x \leq X_0; \quad p = p_0, \quad X_0 < x \leq X_2.$$

Здесь p_0 и p_1 – начальные значения давления, X_1 и X_2 – границы расчетной области, X_0 – координата поверхности разрыва.

Выразив эти условия через потенциал, получим:

$$\phi(0, r) = 0, \quad X_1 \leq x \leq X_2;$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = \frac{p_0 - p_1}{\rho_0}, \quad X_1 \leq x \leq X_0;$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad X_0 < x \leq X_1.$$

В настоящей работе обрабатывалась методика расчета только внутренних точек, а граничные точки не рассматривались. Поэтому расчеты проводились только до момента, пока возмущения не достигали границ области.

2. Введение вязкости с постоянным коэффициентом. Проведем разностную аппроксимацию уравнения (2) со вторым порядком точности на пяти (шести) точечном регулярном шаблоне по следующим формулам

$$\phi_i^{m+1} = 2\phi_i^m - \phi_i^{m-1} + a_0^2 \frac{\tau^2}{h^2} (\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m) +$$

$$+ \lambda \frac{\tau}{h^2} \left[3(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m) - \right. \quad (3)$$

$$\left. - 4(\phi_{i+1}^{m-1} - 2\phi_i^{m-1} + \phi_{i-1}^{m-1}) + (\phi_{i+1}^{m-2} - 2\phi_i^{m-2} + \phi_{i-1}^{m-2}) \right]$$

здесь h и τ – шаги сетки по пространству и по времени, i и m – номера узлов сетки по координате и по времени (ϕ_i^m соответствует координате x_i и моменту времени t^m).

Вязкость воздействует на решение локально, а аппроксимация вязкого слагаемого со вторым порядком точности требует увеличения количества вычислительных операций. Поэтому проведем так же аппроксима-

цию вязкого слагаемого с первым порядком точности (3) и сравним полученные результаты.

$$\phi_i^{m+1} = 2\phi_i^m - \phi_i^{m-1} + a_0^2 \frac{\tau^2}{h^2} (\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m) +$$

$$+ \lambda \frac{\tau}{h^2} \left[(\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m) - (\phi_{i+1}^{m-1} - 2\phi_i^{m-1} + \phi_{i-1}^{m-1}) \right] \quad (4)$$

Указанная аппроксимация имеет первый порядок точности по времени и второй по координате.

Как в первом, так и во втором случае значение λ подбиралось экспериментально при решении тестовых задач по минимальному сглаживанию фронта разрыва и максимальному подавлению пульсаций.

При расчетах использовалось условие устойчивости Куранта с $k = 0,9$. Значение λ изменялось в широких пределах. С увеличением λ до некоторого значения пульсации затухали, а потом снова усиливались, и решение теряло устойчивость.

Ниже приведены некоторые результаты расчетов теста Сода, выполненные на равномерной неподвижной сетке, состоящей из 100 (рис. 1-3) и 1000 узлов (рис. 4, 6, 7). Все величины даны в безразмерной форме. Давление и координата отнесены к значениям p_1 и X_1 .

На рис. 1 приведено распределение давления по координате через 70 шагов по времени для расчетов, выполненные по разностным формулам (3) и (4) со вторым и первым порядками аппроксимации по времени (кривые 1 и 2, соответственно).

Из результатов расчетов видно, что порядок ап-

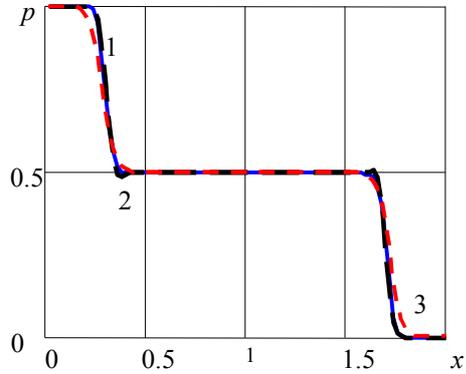


Рис. 1

проксимации вязкого слагаемого по времени практически не влияет на точность расчетов. Поэтому в дальнейшем использовалась более простая аппроксимация первого порядка по времени (4).

На рис. 2 представлено решение теста Сода методом потенциала без вязкости (сплошная пульсирующая кривая 1), с искусственной вязкостью (пунктирная кривая 2) и аналитическое решение (сплошная кривая 3).

Как видно, численное решение без вязкости дает большие осцилляции решения, как на волне сжатия, так и на волне разрежения. Искусственная вязкость подавляет осцилляции, решение становится монотонным, но при этом расширяются зоны волн сжатия и разрежения. Однако это расширение зон незначительное, т.к. разностная схема с вязкостью имеет порядок аппроксимации близкий ко второму.

Предложенный метод сравнивался с методом Родионова, который имеет второй порядок аппроксимации и основан на решении задачи Римана [7]. Метод Родионова относится к методам типа Годунова, которые обладают неявной схемной вязкостью и не требуют

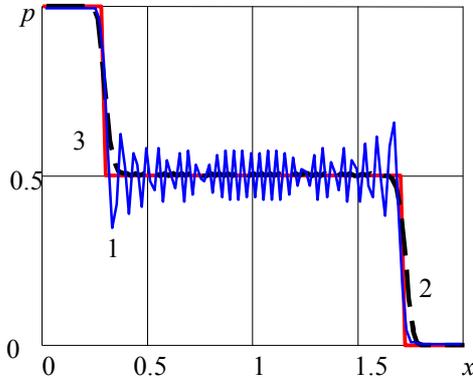


Рис. 2

введения дополнительной вязкости. Повышение порядка аппроксимации до второго и сохранение монотонности схемы Родионова достигается применением принципа минимума производной при определении параметров на границах ячеек для решения задачи Римана. На рис. 1 кривой 3 изображено решение методом Родионова. Как видно, решения разными методами хорошо совпадают.

Метод потенциала даже лучше передает распределение параметров в зонах волн, чем метод Родионова, хотя оба метода имеют одинаковый порядок аппроксимации. При этом расчет методом потенциала быстрее в 3,5 раза.

Исследовано влияние вязкости на эволюцию ширины фронта волны сжатия по мере ее распространения. Расчеты проводились на регулярной сетке, состоящей из 1000 узлов. Установлено, что при заданном способе введения вязкости фронт волны сжатия размывается со временем. На рис. 4 кривая 1 изображает распределение давления вблизи фронта волны сжатия при распаде произвольного разрыва через 400 расчетных шагов по времени.

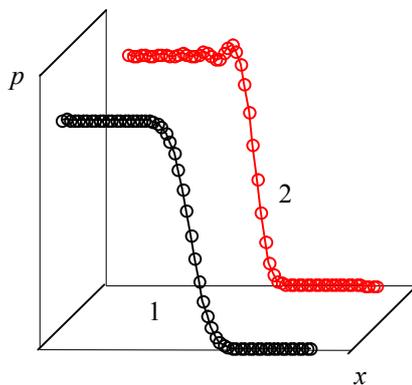


Рис. 4

3. Введение вязкости методом Неймана-Рихтмайера. Для уменьшения размывания волн использовалась искусственная вязкость по схеме Неймана-Рихтмайера [5]. В этой схеме коэффициент вязкости

пропорционален модулю дивергенции скорости $\lambda = (\lambda_0 h)^2 \rho_0 |\nabla \vec{u}|$, λ_0 - подбираемая константа порядка единицы. При таком способе введения вязкости в областях с большими градиентами параметров ее влияние существенно, а в областях гладкого течения - незначительное. Таким образом, уравнение (2) для вязкости Неймана-Рихтмайера запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda_0 h^2 \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left| \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right| \right), \quad (5)$$

где λ_0 - эмпирически подбираемая константа. Конечно-разностная аппроксимация уравнения (5) проводится по формулам

$$\begin{aligned} \phi_i^{m+1} &= 2\phi_i^m - \phi_i^{m-1} + a_0^2 \tau^2 \frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{h^2} + \\ &\lambda_0 h^2 \rho_0 \tau \left[\frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{h^2} \left| \frac{\phi_{i+1}^m - 2\phi_i^m + \phi_{i-1}^m}{h^2} \right| - \right. \\ &\left. \frac{\phi_{i+1}^{m-1} - 2\phi_i^{m-1} + \phi_{i-1}^{m-1}}{h^2} \left| \frac{\phi_{i+1}^{m-1} - 2\phi_i^{m-1} + \phi_{i-1}^{m-1}}{h^2} \right| \right] \end{aligned}$$

При использовании переменной вязкости Неймана-Рихтмайера расчетное время увеличилось по сравнению с методом постоянной вязкости в 1,2 раза. Фронт волны сжатия при этом размывался со временем значительно меньше, чем для метода с постоянной вязкостью (кривая 2 на рис. 4). Однако для нелинейной вязкости характерны небольшие пульсации параметров в численном решении [5] которые связаны с разрывом второй производной скорости.

Предложенный метод введения вязкости был опробован при расчетах на подвижных квазиравномерных сетках, шаг которых для двух соседних узлов изменялся незначительно. Предполагалось, что левая граница сетки движется с заданной постоянной скоростью. Для проверки метода использовался тест Сода.

Расчеты проводились на сетке с переменным шагом по времени, изображенной на рис. 5. Шаг по времени и шаг по координате связаны условие устойчивости Куранта.

Число расчетных узлов n оставалось фиксированным. На каждом шаге по времени проводилось новое разбиение по пространству на n одинаковых интервалов длиной $h = (x_n - x_1)/n$.

Для расчетов в каждый момент времени при помощи интерполяции сетка преобразовывалась к равномерной. На рис. 5 прямоугольниками изображены точки с известными параметрами, а кружочками - точки, параметры в которых определяются интерполяцией; стрелками - точки, в которых параметры рассчитываются при численном решении уравнения (5).

Параметры между известными узлами определялись с помощью линейной интерполяции:

$$\phi_{i+1/2} = \phi_i + dh_i \frac{\partial \phi}{\partial x} + O(dh_i^2),$$

где dh_i - расстояние от узла i до узла $i+1/2$.

В свою очередь $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + O(h)$. Учитывая,

что $dh_i < h$, получим: $\phi_{i+1/2} = \phi_i + dh_i \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h} + O(h \cdot dh_i)$.

Однако при этом аппроксимация производных теряет точность:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{i+1/2} = \frac{\phi_{i+3/2} - 2\phi_{i+1/2} + \phi_{i-1/2}}{h^2} + O(h^2) \quad (6)$$

Подставляя в (6) значения параметров, найденные при интерполяции, получим в первом дифференциальном приближении добавку, пропорциональную dh_i/h . При достаточно малых dh_i/h , такую расчетную схему можно использовать без дополнительного повышения точности интерполяции. Для проверки этого метода скорость движения границы варьировалась в широких пределах.

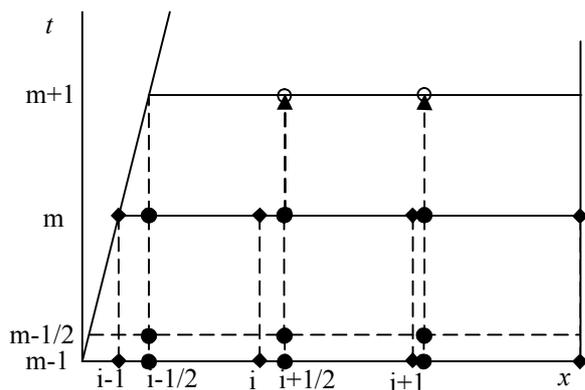


Рис. 5

На рис. 6 для задачи о распаде разрыва сплошной линией изображено точное решение, штриховой – численное решение методом Неймана-Рихтмайера, а кружками – с постоянным коэффициентом вязкости. Расчеты проведены на подвижной сетке из 1000 ячеек.

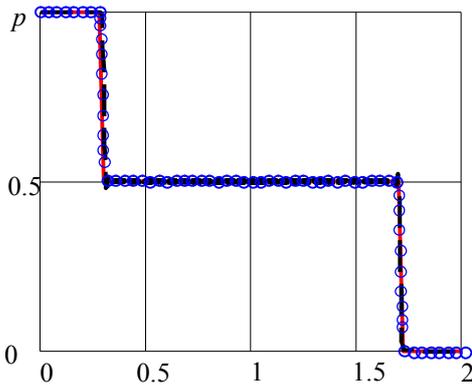


Рис. 6

При значении $u_0 > 0,15a_0$, решение теряло устойчивость. Это связано с потерей точности аппроксимации при использовании линейной интерполяции. Для сохранения второго порядка аппроксимации дифференциальных уравнений, необходимо проводить интерполяцию с четвертым порядком точности. Однако такой подход сильно усложняет вычислительный алгоритм. При этом расчет занимает настолько много машинного времени, что метод потенциала теряет свое преимущество в скорости перед другими методами второго по-

рядка точности, и его применение становится нецелесообразным.

4. Столкновение потоков жидкости. Кроме задачи о распаде разрыва, полученные разностные схемы тестировались на примере расчета столкновения потоков жидкости.

Начальные условия:

$$p = p_0, \quad X_1 \leq x \leq X_2; \quad v = v_1,$$

$$X_1 \leq x \leq X_0; \quad v = v_2 = -v_1, \quad X_0 < x \leq X_2.$$

Здесь v_1 и v_2 – начальные значения скорости.

Через потенциал начальные условия запишутся в виде:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = p_0, \quad X_1 \leq x \leq X_2;$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{t=0} = v_1, \quad X_1 \leq x \leq X_0;$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t=0} = -v_1, \quad X_0 < x \leq X_1.$$

Решение было проведено как методом с линейной вязкостью (на рис. 7 решение отмечено кружками), так и методом Неймана-Рихтмайера (штриховая кривая) на неподвижной сетке с разбиением 1000 ячеек, и сравнено с аналитическим решением (сплошная кривая).

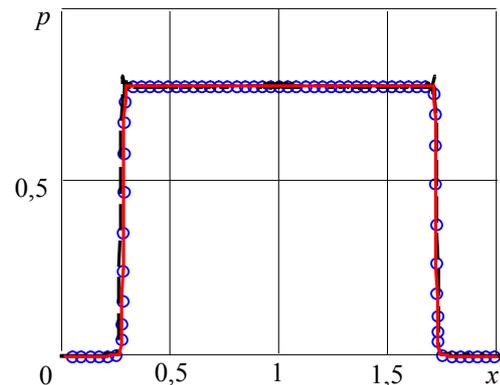


Рис. 7

Из рисунков видно, что характер решения задачи о столкновении потоков аналогичен характеру решения теста Сода.

Заключение. Показана возможность сглаживания пульсаций при численном решении задач линейной акустики с разрывными начальными условиями методом потенциала путем введения искусственной вязкости на примере двух задач. Исследованы два вида вязкости: с постоянным коэффициентом и вязкость Неймана-Рихтмайера. Для вязкости с постоянным коэффициентом разрывы размываются со временем, а для вязкости по схеме Неймана-Рихтмайера размывание разрывов уменьшается, но возникают небольшие пульсации решения. При использовании разных видов вязкости преимущество метода потенциала в скорости счета по сравнению с другими численными методами сохраняется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения ги-

- перболических систем уравнений. – М.: ФИЗМАТ-ЛИТ, 2001. – 608 с.
2. Магамедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. – М.: Наука, 1988. – 290 с.
 3. Галиев Ш. У. Динамика гидроупругопластических систем. – Киев: Наукова думка, 1981. – 276 с.
 4. Коломенская В.В., Семко А.Н. Об использовании метода потенциалов для расчета газодинамических течений // Вісник Донецького університету. Серія А. – Природничі науки, 2002. – №2. – С. 244 – 248.
 5. Рождественский, Яненко Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
 6. Роч П. Вычислительная гидродинамика – М.: Мир, 1980. – 612 с.
 7. Родионов А. В. Монотонная схема второго порядка аппроксимации для сквозного расчета неравновесных течений // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1987. – Т. 27. – С. 585 – 593.