МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Алгоритмічний підхід до задач каркасної інтерполяції статичних зображень

П.І. КОГУТ, М.Є. СЕРДЮК***

*Дніпропетровський національний університет
**Національна металургійна академія України

В роботі запропоновано адаптивний алгоритм просторової інтерполяції статичних зображень, в основі якого лежить локальне відтворення їх топографічних карт (каркасу).

В работе предложен адаптивный алгоритм пространственной интерполяции статических цифровых изображений, в основе которого лежит локальное восстановление их топографических карт (каркасов).

An adaptive algorithm of space interpolation of still images has been proposed. The main point of this approach is a local restoration of the level sets.

Вступ. Обробка цифрових зображень, яка пов'язана зі зміною їх просторових розмірів, зазвичай супроводжується появою візуальних спотворень. Це приводить до втрати реалістичності в масштабованих зображеннях. Тому актуальною є розробка методів покращення якості інтерпольованих зображень. Сутність проблеми просторової інтерполяції цифрових зображень полягає в розробці методів зміни щільності пікселів на одиницю площі. На сьогодні, до найбільш відомих методів просторової інтерполяції можна віднести наступні: метод найближчого сусідства, білінійну, біквадратичну, бікубічну інтерполяції, B-сплайн інтерполяцію, інтерполяцію Lanczos'а. Загальною рисою цих підходів є побудова так званих сепарабельних інтерполяційних фільтрів. Це означає, що зміна щільності пікселів для будь-якого зображення спочатку реалізується за x-координатою (горизонтальний zooming), і лише потім за y-координатою (вертикальний zooming). Власне ця обставина і приводить до втрати реалістичності в масштабованих зображеннях, а саме до появи таких візуальних артифактів, як розмитість, "сходинковий" ефект в похилих контурах (aliazing-ефект), поява дублюючих контурів (ефект Gibbs'а) і т.п. Таким чином, проблема просторової інтерполяції статичних зображень залишається актуальною, а численні методи та алгоритми її якісного розв'язання не є адаптованими до широкого класу цифрових зображень.

Метою даної роботи є розробка адаптивного методу інтерполяції статичних зображень, який би гарантував збереження достатньої гладкості контурних ліній, плавність тональних переходів, і основне, достатню різкість та чіткість результуючого зображення. В основу методу пропонується покласти принцип каркасної інтерполяції з двоетапною схемою його реалізації. На першому етапі відтворюється та частка топографічної карти зображення, яка містить всі пікселі вихідного малюнка. Результат цієї операції - деяка перфорована множина, що є підмножиною носія вихідного зображення. Таку множину будемо називати каркасом зображення. На другому етапі пропонується алгоритм інтерполяції породжуючої функції зображення на побудований каркас. На відміну від відомих на сьогодні методів контурно-направленої інтерполяції [1],[2], в даній роботі не використовуються локальні моделі контурних ліній зображень.

Постановка задачі. Нехай $\Delta = [0,W]\times[0,H]$ - довільна непуста підмножина R^2, $\Delta^{WH} = \{t_{i,j} = (i,j)\}_{i=1,\dots,[W]=N}^{j=1,\dots,[H]=M}$ - масив опорних точок (пікселів) на Δ. Нехай I - зображення в шкалі сірих відтінків, для якого $\operatorname{supp} I = \Delta$ і при цьому

$$< I,\theta >= \int_\Delta \widetilde{I}(x,y)\theta(x,y)dxdy \quad \text{для всіх } \theta \in D(\Delta).$$

Нехай його породжуюча функція $\widetilde{I}:\Delta \to [0,1]$ задовольняє умову $\widetilde{I} \in BV(\Delta)$. Нехай $P(I) = \ = \{P_{ij}(I)\}_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,M}}$ є образом означеного зображення на піксельну сітку Δ^{WH}.

<u>Означення 1.</u> *Множину Ω будемо називати каркасом для зображення $I \in BV(\Delta)$, якщо Ω є зв'язною множиною і при цьому виконуються наступні умови: $\Omega \subset \Delta$, $\partial\Delta \subset \partial\Omega$, $\Delta^{WH} \subset \Omega$, де через $\partial\Delta$ позначено границю множини Δ. Каркас Ω будемо називати допустимим для $I \in BV(\Delta)$, якщо він не містить одночасно ребер $(t_{i,j}, t_{i+1,j+1})$ та $(t_{i+1,j}, t_{i,j+1})$ для будь-якого $t_{i,j} \in \Delta^{WH}$.*

В основу конструювання таких каркасів повинні бути покладені міркування щодо топологічної близькості топографічної карти зображення $I \in BV(\Delta)$ до остову його каркасної структури Ω. Дійсно, основна геометрична інформація про будь-яке зображення міститься в сукупності його множин рівнів $X_{\lambda}(I)=\{(x,y)\in\Delta:\widetilde{I}(x,y)\geq\lambda\}$, а точніше в сукупності зв'язних компонент таких множин. Проте відомо (див. [3]), що для класу функцій з обмеженою варіацією $\widetilde{I}\in BV(\Delta)$ їх топографічні карти можна описати в термінах кривих Jordan'a, тобто кривих в R^2, які гомеоморфні образу одиничного кола. Більше того, майже всі множини рівнів $X_{\lambda}(I)$ для функцій $\widetilde{I}\in BV(\Delta)$ є такими, що їх границя

$$\partial X_{\lambda}(I)=\{(x,y)\in\Delta:\widetilde{I}(x,y)=\lambda\}$$

(або лінія рівня) складається не більше ніж із зліченої кількості кривих Jordan'a. В зв'язку з цим будемо казати, що зображення $I\in BV(\Delta)$ є регулярним, якщо знайдеться інтегровна функція $\widetilde{I}:\Delta\to[0,1]$ така, що: 1) $<I,\theta>=\int_{\Delta}\widetilde{I}(x,y)\theta(x,y)dxdy$ для всіх $\theta\in D(\Delta)$; 2) при кожному значенні $\lambda\in[0,1]$ множини рівнів $X_{\lambda}(I)$ майже всюду належать до класу множин Caccioppoli, тобто мають скінченний периметр:

$$\mathrm{Per}(X_{\lambda}(I),\Delta)=\int_{\Delta}\left|D\chi_{X_{\lambda}(I)}(x,y)\right|<+\infty .$$

Надалі регулярні зображення $I\in BV(\Delta)$ будемо утотожнювати з породжуючими їх функціями $\widetilde{I}:\Delta\to[0,1]$. Залучаючи це означення можна вважати, що лінії рівнів для відповідних цифрових малюнків $P(I)=\{P_{ij}(I)\}_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,M}}$ мають скінченний периметр і містять скінченну кількість зв'язних компонент. Це дає всі підстави стверджувати, що в основу конструювання каркасної структури Ω для будь-якого допустимого зображення $I\in BV(\Delta)$ повинна бути покладена наступна вимога: *остов F каркасу Ω повинен містити (як свої власні підмножини) ті фрагменти ліній рівнів* $\partial X_{\lambda}(P)=\{(x,y)\in\Delta:P(x,y)=\lambda\}$ *відповідного цифрового малюнка* $P(I)$, *які проходять через точки дискретної множини* $t_{i,j}\in\Delta^{WH}$.

<u>Означення 2.</u> Нехай Ω - довільний допустимий каркас для $I\in BV(\Delta)$. *Тоді зображення* $I^{*}\in D'(\Delta)$ *будемо називати каркасною інтерполяцією для* $I\in BV(\Delta)$, *якщо: 1) його образ* $P(I^{*})$ *на піксельну сітку* Δ^{WH} *співпадає з* $P(I)$; *2)* $\mathrm{supp}I^{*}=\Omega$; *3) знайдуться функція* $\widetilde{I}^{*}:\Omega\to R$ *і диз'юнктивне розбиття множини* $\Omega=\bigcup_{i=1}^{L}\Omega_i$ $(\Omega_i\bigcap\Omega_j=\varnothing,i\neq j)$ *такі, що:*

$$<I^{*},\theta>=\int_{\Omega}\widetilde{I}^{*}(x,y)\theta(x,y)dxdy \quad \text{для всіх } \theta\in D(\Omega);$$

$$\widetilde{I}^{*}\in C(\overline{\Omega}_i)\bigcap H^{2}(\Omega_i)\quad\forall i=1,\dots,L. \qquad (1)$$

Тут через $C(\overline{\Omega})\bigcap H^{2}(\Omega)$ позначено простір неперервних на $\overline{\Omega}$ функцій, перша та друга піхідні яких є інтегровними на Ω з своїми квадратами.

Таким чином, проблема каркасної інтерполяції полягає у розв'язанні двоетапної задачі: відтворенні певного каркасу Ω для $I\in BV(\Delta)$, а після - в конструюванні функції $\widetilde{I}^{*}$ такої, що $\widetilde{I}^{*}(t_{i,j})=P_{ij}(I)$ $\forall i=1,\dots,N,\ j=1,\dots,M$.

Конструювання каркасних структур. Нехай для кожного із пікселів $t_{i,j}\in\Delta^{WH}$ є відомим деякий його направлений окіл $W(t_{i,j})$. Позначимо $U(t_{i,j})$ - зону впливу обраного піксела – замкнену кулю радіуса 1/2 з центром в точці $t_{i,j}$. Зону впливу $U(t_{i,j})$ обраного піксела завжди можна подати у вигляді наступного диз'юнктивного розбиття

$$U(t_{i,j})=[U(t_{i,j})\bigcap W(t_{i,j})]\bigcup\,[U(t_{i,j})\setminus W(t_{i,j})].$$

Зрозуміло, що означені підмножини $U(t_{i,j})\bigcap W(t_{i,j})$ та $U(t_{i,j})\setminus W(t_{i,j})$ не перетинаються між собою. Нехай $N(t_{i,j})$ - сукупність всіх пікселів, сусідніх з $t_{i,j}$. Введемо до розгляду множини $\sigma(t_{i,j})=\left[U(t_{i,j})\setminus W(t_{i,j})\right]\bigcap\left[\bigcup_{t_{l,k}\in N(t_{i,j})}W(t_{l,k})\right]$. Покладемо

$$\Omega=\{A\in\Delta:d(A,\partial\Delta)\leq1/4\}\bigcup$$
$$\bigcup\left[\bigcup_{t_{i,j}\in\Delta^{WH}}\left[U(t_{i,j})\bigcap W(t_{i,j})\right]\bigcup\sigma(t_{i,j})\right] \qquad (2)$$

Ясно, що умова приналежності точок $\{A\in\Delta:d(A,\partial\Delta)\leq1/4\}$ до каркасу забезпечує включення $\Omega\subset\Delta,\partial\Delta\subset\partial\Omega$ (див. означення 1). З іншої сторони, цю умову можна опустити, якщо на етапі конструювання направлених околів прийняти наступне правило: для пікселів $t_{i,j}\in\Delta^{WH}$, які належать границі множини Δ, направлені околи повинні бути співнапрямлені з цією ділянкою границі. Надалі вважатимемо, що для пригранничних пікселів ця умова є завжди виконаною.

Проте, з метою забезпечення допустимості побудованого каркасу Ω для кожної пари ребер остову *F*, точки перетину яких не належать множині Δ^{WH}, приберемо з Ω наступну сукупність точок: $\{(x,y)\in\Delta:(|x-x^{*}|+|y-y^{*}|)\leq0{,}25\}$, де $t^{*}=(x^{*},y^{*})$ - спільна точка такої пари ребер. В результаті отримаємо допустимий каркас Ω вихідного зображення $I\in D'(\Delta)$, топологія якого суттєво залежатиме від геометрії направлених околів кожного з пікселів.

Процедура побудови направлених околів. Нехай $t_{i,j}$ - довільна точка множини Δ^{WH}. Приймемо наступне припущення: нехай при деякому $\lambda\in[0,1]$ лінія рівня $\partial X_{\lambda}(I)=\{(x,y)\in\Delta:\widetilde{I}(x,y)=\lambda\}$ є такою, що існує ланцюг $Q^{7,*}[t_{i,j}]$ в Δ^{WH}, який їй належить. Тут ланцюгом $Q^{7,*}[t_{i,j}]$ довжини 7 називається сукупність пікселів

$$Q^{7,*}[t_{i,j}]=$$
$$=\{t^{*}_{i_{-3},j_{-3}},t^{*}_{i_{-2},j_{-2}},t^{*}_{i_{-1},j_{-1}},t_{i,j},t^{*}_{i_1,j_1},t^{*}_{i_2,j_2},t^{*}_{i_3,j_3}\}\subset\Delta^{WH},$$

для якої піксел $t_{i,j}$ є центральним. Серцевиною такого ланцюга є його центральні ланки $Q_0^{7,*}[t_{i,j}] = [t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t_{i,j}] \bigcup [t_{i,j}, t^*_{i_1,j_1}]$.

Будь-який ланцюг $Q^{7,*}[t_{i,j}]$ породжує направлений окіл $W(t_{i,j})$ точки $t_{i,j}$. Дійсно, якщо пов'язати з ланцюгом $Q^{7,*}[t_{i,j}]$ вектор $q_k \in R^2$, який визначається орієнтацією його серцевини, то $Q^{7,*}[t_{i,j}]$-направленим околом $W(t_{i,j})$ є наступна множина:

$$W(t_{i,j}) = \{t \in \Delta : d(t, t_{i,j}) \le 1\} \bigcap \left[\bigcup_{\varepsilon \in [-0,5;0,5]} \{Q_0^{7,*}[t_{i,j}] + \varepsilon \cdot q_k\} \right].$$

Отже, залишається відтворити сам ланцюг.

Конструювання ланцюга будемо здійснювати з використанням 6-точкових сплайнів.

<u>Означення 3.</u> Функцію $s_6 \in H^2(-1/2,1/2)$ будемо називати 6-точковим сплайном, побудованим на ланцюгу вхідних даних $\{c_{-3}, c_{-2}, c_{-1}, c_1, c_2, c_3\}$, якщо $I(s_6) = \min\limits_{s(\cdot) \in D} \int_{-5/2}^{5/2} [s'']^2 dt$, де включення $s(\cdot) \in D$ рівносильне виконанню умов

$$s(t) = \begin{cases} s_1(t) = a_1 t^5 + b_1 t^4 + g_1 t^3 + d_1 t^2 + e_1 t + f_1, \\ \qquad t \in [-5/2, -1/2], \\ s_2(t) = a_2 t^3 + b_2 t^2 + g_2 t + d_2, \; t \in [-1/2, 1/2], \\ s_3(t) = a_3 t^5 + b_3 t^4 + g_3 t^3 + d_3 t^2 + e_3 t + f_3, \\ \qquad t \in [1/2, 5/2], \end{cases} \tag{3}$$

$$s_1'(-1/2) = s_2'(-1/2), \quad s_2'(1/2) = s_3'(1/2), \tag{4}$$

$$s_1''(-1/2) = s_2''(-1/2), \quad s_2''(1/2) = s_3''(1/2). \tag{5}$$

Легко показати, що в цьому випадку

$$\begin{aligned} s_6(t) = & \left[\frac{77}{983} t^3 - \frac{751}{7892} t^2 - \frac{77}{3932} t + \frac{751}{31568} \right] c_{-3} + \\ & + \left[-\frac{416}{983} t^3 + \frac{1016}{1973} t^2 + \frac{104}{983} t - \frac{254}{1973} \right] c_{-2} + \\ & + \left[\frac{863}{983} t^3 - \frac{3313}{7892} t^2 - \frac{4795}{3932} t + \frac{19097}{31568} \right] c_{-1} + \\ & + \left[-\frac{863}{983} t^3 - \frac{3313}{7892} t^2 + \frac{4795}{3932} t + \frac{19097}{31568} \right] c_1 + \\ & + \left[\frac{416}{983} t^3 + \frac{1016}{1973} t^2 - \frac{104}{983} t - \frac{254}{1973} \right] c_2 + \\ & + \left[-\frac{77}{983} t^3 - \frac{751}{7892} t^2 + \frac{77}{3932} t + \frac{751}{31568} \right] c_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Тоді для відтворення ланцюга $Q^{7,*}[t_{i,j}]$ пропонується наступна ітераційна процедура. Позначимо через $f_1(\alpha, \beta)$ значення 6-точкового сплайну $s_6(t)$ при $t = 0$, який будується на ланцюгу вхідних даних $\{P(\alpha),\ P(\alpha), P(\alpha), P(\beta), P(\beta), P(\beta)\}$. Тут α та β є парою довільних представників множини сусідніх з $t_{i,j}$ пікселів. Розглянемо наступну задачу дискретної оптимізації:

$$\inf_{\alpha,\beta \in N(t_{i,j}) \cap \Delta^{WH}} \left| P_{ij} - f_1(\alpha,\beta) \right| = \left| P_{ij} - f_1(t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t^*_{i_1,j_1}) \right|, \qquad t^*_{i_{-1},j_{-1}} \ne t^*_{i_1,j_1}$$

В силу скінченності множини $N(t_{i,j}) \bigcap \Delta^{WH}$ такий розв'язок можна отримати шляхом простого перебору. В результаті знаходимо пару сусідніх з $t_{i,j}$ пікселів $t^*_{i_{-1},j_{-1}}$ та $t^*_{i_1,j_1}$, які в купі з $t_{i,j}$ визначають перше наближення Q_1^7 ланцюга $Q^{7,*}[t_{i,j}]$, тобто $Q_1^7 = \{t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t_{i,j}, t^*_{i_1,j_1}\}$. Далі поступаємо за аналогією. А саме, нехай $f_2(\alpha,\beta)$ є значенням 6-точкового сплайну $s_6(t)$ при $t = 0$, який будується на ланцюгу вхідних даних $\{P(\alpha), P(\alpha), P(t^*_{i_{-1},j_{-1}}), P(t^*_{i_1,j_1}), P(\beta), \quad P(\beta)\}$. Розв'яжемо наступну задачу дискретної оптимізації

$$\inf_{\substack{\alpha \in N(t^*_{i_{-1},j_{-1}}) \cap \Delta^{WH}, \\ \beta \in N(t^*_{i_1,j_1}) \cap \Delta^{WH}}} \left| P_{ij} - f_2(\alpha,\beta) \right| = \left| P_{ij} - f_2(t^*_{i_{-2},j_{-2}}, t^*_{i_2,j_2}) \right|,$$

$$t^*_{i_{-2},j_{-2}}, t^*_{i_2,j_2} \notin Q_1^7, \quad t^*_{i_{-2},j_{-2}} \ne t^*_{i_2,j_2}.$$

Кладемо $Q_2^7 = \{t^*_{i_{-2},j_{-2}}, t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t_{i,j}, t^*_{i_1,j_1}, t^*_{i_2,j_2}\}$. І насамкінець, нехай $f_3(\alpha,\beta)$ є значенням 6-точкового сплайну $s_6(t)$ при $t = 0$, який будується на ланцюгу вхідних даних $\{P(\alpha), P(t^*_{i_{-2},j_{-2}}), P(t^*_{i_{-1},j_{-1}}), P(t^*_{i_1,j_1}), P(t^*_{i_2,j_2}), P(\beta)\}$. Розв'яжемо задачу дискретної оптимізації

$$\inf_{\substack{\alpha \in N(t^*_{i_{-2},j_{-2}}) \cap \Delta^{WH}, \\ \beta \in N(t^*_{i_2,j_2}) \cap \Delta^{WH}}} \left| P_{ij} - f_3(\alpha,\beta) \right| = \left| P_{ij} - f_3(t^*_{i_{-3},j_{-3}}, t^*_{i_3,j_3}) \right|,$$

$$t^*_{i_{-3},j_{-3}}, t^*_{i_3,j_3} \notin Q_2^7, t^*_{i_{-3},j_{-3}} \ne t^*_{i_3,j_3}.$$

В результаті отримуємо ланцюг

$$Q^{7,*}[t_{i,j}] = Q_3^7 = \{t^*_{i_{-3},j_{-3}}, t^*_{i_{-2},j_{-2}}, t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t_{i,j}, t^*_{i_1,j_1}, t^*_{i_2,j_2}, t^*_{i_3,j_3}\}, \tag{7}$$

який визначає ту сукупність точок з Δ^{WH}, за якими можна отримати найкраще наближення значення яркості $P(I)$ в точці $t_{i,j}$.

Алгоритм побудови функції Ĩ*. Функцію $\tilde{I}^* : \Omega \to R$ будемо вважати відтвореною в задачі каркасної інтерполяції (1), якщо правило, за яким визначається її значення в кожній точці каркасу Ω, забезпечує виконання властивостей:

$$\widetilde{I}^*(t_{i,j}) = P_{ij}(I) \quad \forall i = 1,\ldots,N,\ j = 1,\ldots,M\ .$$

Нехай $t_{i_m,j_m} \in \Delta^{WH}$ - довільний допустимий піксел, а $W(t_{i_m,j_m})$ - направлений окіл цього піксела. Введемо наступні поняття.

Означення 4. *Решіткою для множини Δ будемо називати ті точки з Δ, які лежать на прямих $x = i$ та $y = j$, де $i = 0,1,\ldots,N$, $j = 0,1,\ldots,M$.*

Означення 5. *Вектором решітчастого зсуву будемо називати довільний вектор $a = (x_a, y_a)$, координати якого задовольняють умовам:*

$$|x_a| \le 1, \qquad |y_a| \le 1, \quad x_a \cdot (1 - x_a) \cdot y_a \cdot (1 - y_a) = 0.$$

Нехай $A(x_0, y_0)$ - довільна точка направленого околу $W(t_{i_m,j_m})$. Тоді для точки $A(x_0, y_0) \in W(t_{i_m,j_m})$ знайдеться принаймі один вектор решітчатого зсуву $a = (x_a, y_a)$ такий, що

$$(x_0, y_0) \in Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}] + a, \tag{8}$$

тобто $A \in L_3^m \bigcup L_4^m + a$, де L_3^m та L_4^m - центральні ланки ланцюга $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}]$. Оскільки вектор решітчатого зсуву в (8) зазвичай не є єдиним, то будемо казати, що для обраної точки $A(x_0, y_0)$ задано оптимальне покриття, якщо вектор $a = (x_a, y_a)$ має мінімально можливу довжину. Проте, множина всіх допустимих векторів $a = (x_a, y_a)$, при яких умова (8) залишається істинною, є компактною, а функція метрики $d(\cdot,\cdot)$ -неперервною відносно своїх аргументів. Отже, у відповідності до відомого результату варіаційного числення [5], можна стверджувати наступне:

Лема 1. *Для кожної точки $A(x_0, y_0)$ з $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}]$ - направленого околу $W(t_{i_m,j_m})$ існує її оптимальне покриття.*

Нехай $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}] + a^*$ є оптимальним покриттям довільно взятої точки $A(x_0, y_0)$ з $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}]$ - направленого околу піксела t_{i_m,j_m}. Оскільки ланцюг $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}]$ однозначно визначається за послідовністю його опорних точок $\{t^*_{i_{-3},j_{-3}}, t^*_{i_{-2},j_{-2}}, t^*_{i_{-1},j_{-1}}, t_{i_m,j_m}, t^*_{i_1,j_1}, t^*_{i_2,j_2}, t^*_{i_3,j_3}\}$, а піксел t_{i_m,j_m} є його центральним з'єднанням, то знайдуться точки $\{t^a_{i_{-3},j_{-3}}, t^a_{i_{-2},j_{-2}}, t^a_{i_{-1},j_{-1}}, t^a_{i_m,j_m}, t^a_{i_1,j_1}, t^a_{i_2,j_2}, t^a_{i_3,j_3}\}$, які належать решітці множини Δ і такі, що

$$\begin{aligned} Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}] + a^* &= Q^{7,*}[t^a_{i_m,j_m}] = \\ &= \{t^a_{i_{-3},j_{-3}}, t^a_{i_{-2},j_{-2}}, t^a_{i_{-1},j_{-1}}, t^a_{i_m,j_m}, t^a_{i_1,j_1}, t^a_{i_2,j_2}, t^a_{i_3,j_3}\}, \end{aligned} \tag{9}$$

тобто решітчастий зсув ланцюга є знову ж таки ланцюгом, проте за новою системою опорних точок.

Позначимо через δ відстань від опорної точки $t^a_{i_{-3},j_{-3}}$ до множини Δ^{WH}, тобто це відстань від $t^a_{i_{-3},j_{-3}}$ до найближчого піксела. Ясно, що такою ж буде відстань від усіх інших точок $\{t^a_{i_{-2},j_{-2}},\ldots,t^a_{i_3,j_3}\}$ до Δ^{WH}. Позначимо через $t^0_{i_{-3},j_{-3}}$ елемент множини Δ^{WH}, який є найближчим до $t^a_{i_{-3},j_{-3}}$. Тобто

$$\inf_{t_{i,j} \in \Delta^{WH}} \rho(t^a_{i_{-3},j_{-3}}, t_{i,j}) = \rho(t^a_{i_{-3},j_{-3}}, t^0_{i_{-3},j_{-3}}) = \delta,$$

де через ρ позначено метрику на R^2.

Введемо до розгляду вектор $b = t^0_{i_{-3},j_{-3}} - t^a_{i_{-3},j_{-3}}$. Тоді, за побудовою, b є паралельним одній із осей координат. Розглянемо систему точок

$$\begin{gathered} t^0_{i_{-3},j_{-3}} = t^a_{i_{-3},j_{-3}} + b,\ t^0_{i_{-2},j_{-2}} = t^a_{i_{-2},j_{-2}} + b, \\ t^0_{i_{-1},j_{-1}} = t^a_{i_{-1},j_{-1}} + b,\ t^0_{i_1,j_1} = t^a_{i_1,j_1} + b, \\ t^0_{i_2,j_2} = t^a_{i_2,j_2} + b,\ t^0_{i_3,j_3} = t^a_{i_3,j_3} + b, \\ t^0_{i_0,j_0} = t^a_{i_m,j_m} + b \end{gathered}$$

Відтворимо значення функції $\widetilde{I}^*$ на системі точок $\{t^0_{i_q,j_q}\}$, $q = -3,\ldots,3$ через залучення 6-точкових сплайнів. Оскільки ρ є відстанню від $t^0_{i_{-3},j_{-3}}$ до точки $t^a_{i_{-3},j_{-3}}$, то, в залежності від орієнтації вектора b, правило апроксимації буде різним. Так, якщо b є 0°-орієнтованим, то $\widetilde{I}^*(t^a_{i_q,j_q}) = s_6^{[t^0_{i_q,j_q-1}]}(1/2 - \rho)$, $\forall q = -3...3$, де 6-точковий сплайн $s_6^{[t^0_{i_q,j_q-1}]}(t)$ будується за системою точок $\{t^0_{i_q,j_q-3}, t^0_{i_q,j_q-2}, t^0_{i_q,j_q-1}, t^0_{i_q,j_q}, t^0_{i_q,j_q+1}, t^0_{i_q,j_q+2}\}$. Якщо b є 180°-орієнтованим, то $\widetilde{I}^*(t^a_{i_q,j_q}) = s_6^{[t^0_{i_q,j_q}]}(\rho - 1/2)$ $\forall q = -3...3$, де 6-точковий сплайн $s_6^{[t^0_{i_q,j_q}]}(t)$ будується за системою точок $\{t^0_{i_q,j_q-2}, t^0_{i_q,j_q-1}, t^0_{i_q,j_q}, t^0_{i_q,j_q+1}, t^0_{i_q,j_q+2}, t^0_{i_q,j_q+3}\}$. Аналогічно відтворюється значення функції $\widetilde{I}^*$ у випадку, коли b є 90°- орієнтованим або 270°-орієнтованим. При цьому сплайни будуються за вертикальними системами точок.

Зокрема, у випадку 0°- орієнтованого вектора b значення функції $\widetilde{I}^*$ на елементах ланцюга $\{t^a_{i_{-3},j_{-3}},\ t^a_{i_{-2},j_{-2}}, t^a_{i_{-1},j_{-1}}, t^a_{i_m,j_m}, t^a_{i_1,j_1}, t^a_{i_2,j_2}, t^a_{i_3,j_3}\}$ визначаються за правилом

$$\widetilde{I}^*(t^a_{i_q,j_q}) =$$
$$=\left[\frac{77}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3-\frac{751}{7892}(\frac{1}{2}-\rho)^2-\frac{77}{3932}(\frac{1}{2}-\rho)+\frac{751}{31568}\right]\times$$
$$\times P(t^0_{i_q,j_q-3})+$$
$$+\left[-\frac{416}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3+\frac{1016}{1973}(\frac{1}{2}-\rho)^2+\frac{104}{983}(\frac{1}{2}-\rho)-\frac{254}{1973}\right]\times$$
$$\times P(t^0_{i_q,j_q-2})+$$
$$+\left[\frac{863}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3-\frac{3313}{7892}(\frac{1}{2}-\rho)^2-\frac{4795}{3932}(\frac{1}{2}-\rho)+\frac{19097}{31568}\right]\times$$
$$\times P(t^0_{i_q,j_q-1})+$$
$$+\left[-\frac{863}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3-\frac{3313}{7892}(\frac{1}{2}-\rho)^2+\frac{4795}{3932}(\frac{1}{2}-\rho)+\frac{19097}{31568}\right]\times$$
$$\times P(t^0_{i_q,j_q})+$$
$$+\left[\frac{416}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3+\frac{1016}{1973}(\frac{1}{2}-\rho)^2-\frac{104}{983}(\frac{1}{2}-\rho)-\frac{254}{1973}\right]\times$$
$$\times P(t^0_{i_q,j_q+1})+$$
$$+\left[-\frac{77}{983}(\frac{1}{2}-\rho)^3-\frac{751}{7892}(\frac{1}{2}-\rho)^2+\frac{77}{3932}(\frac{1}{2}-\rho)+\frac{751}{31568}\right]\times$$
$$P(t^0_{i_q,j_q+2}).$$

В результаті, правило для відтворення значення функції $\widetilde{I}^*$ в довільній точці $A(x_0,y_0)$ з $Q^{7,*}[t_{i_m,j_m}]$-направленого околу $W(t_{i_m,j_m})$ набуває наступного вигляду: якщо ρ є відстанню від точки $A(x_0,y_0)$ до центрального з'єднання ланцюга $Q^{7,*}[t^a_{i_m,j_m}]$ (9), то

$$\widetilde{I}^*(A)=\begin{cases} s_6^{[t^a_{i_m,j_m}]}(\rho-1/2), & \text{якщо } A\in L_4^a,\\ s_6^{[t^a_{i_{-1},j_{-1}}]}(1/2-\rho), & \text{якщо } A\in L_3^a,\end{cases} \tag{10}$$

де позначено: $s_6^{[t^a_{i_m,j_m}]}(t)$ - 6-точковий сплайн за системою точок $\{t^a_{i_{-2},j_{-2}},t^a_{i_{-1},j_{-1}},t^a_{i_m,j_m},t^a_{i_1,j_1},t^a_{i_2,j_2},\ t^a_{i_3,j_3}\}$, а $s_6^{[t^a_{i_{-1},j_{-1}}]}(t)$ - такий же сплайн за системою $\{t^a_{i_{-3},j_{-3}},t^a_{i_{-2},j_{-2}},t^a_{i_{-1},j_{-1}},t^a_{i_m,j_m},t^a_{i_1,j_1},t^a_{i_2,j_2}\}$.

Висновки

За своєю сутністю запропонований підхід є прикладом адаптивної схеми інтерполяції цифрових зображень. У відповідності до основного постулату *математичної морфології* основна геометрична інформація про будь-який малюнок міститься в сукупності множин λ-рівнів [4], або більш точно в сукупності зв'язних компонент кожної із множин $X_\lambda(P)$. Характерною рисою запропонованого в даній роботі підходу є наслідування даному постулату. І дійсно, в основі алгоритму каркасної інтерполяції лежить локальне відтворення ліній рівня цифрових малюнків в околах кожного піксела. Такий підхід, як показують приклади його програмної реалізації, дозволяє уникнути появи aliazing-ефекту і покращити PSNR-характеристику результуючого зображення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Li X., Orchard T. New edge directed interpolation // Processings of ICIP'00, Vancouver. - Sep 2000. - Pp. 1312-1314.
2. Li X., Orchard T. New edge directed interpolation // IEEE Trans. on Image Processing. - Oct 2001. - Vol. 10, no. 10. - Pp. 1521-1527.
3. Ambrosio L., Caselles V., Masnou S., Morel J.M. The connected components of sets of finite perimeter // European Journal of Mathematics, - 2001. - Vol. 3. - Pp. 39-92.
4. Serra J. Image Analysis and Mathematical Morphology. New York: Academic Press, 1982.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ. - Москва: Физматлит, 2002.

пост. 10.04.07.