

НП- систем з метою їх стабілізації за рахунок швидкого обертання вільного тіла.

У цій роботі, для надпровідних МПЯ систем, отримано траєкторії втрати стійкості вільного тіла і визначено параметри динамічної стійкості обертання ротора в положеннях нестійкої рівноваги системи. Як відомо, зменшення відстані між статором і вільним ротором збільшує підйомну силу і жорсткість підвісу, але існує обмеження по стійкості, що не дозволяє використовувати конструктивно найменшу відстань. У роботі запропоновано зменшувати відстань підвісу, стабілізуючи підвіс обертанням ротора, та виконано моделювання динамічної стабілізації.

Математична модель НП-системи МПЯ

Вивчаються системи з вертикальною віссю обертання ротора (вісь статора співпадає з напрямом сили тяжіння). Вважатимемо статором нерухому кругову НП-котушку, а ротором – кругову НП-котушку з центром ваги на осі котушки в геометричному центрі. Густина матеріалу НП-ротора передбачається рівномірною за об'ємом. Положення ротора відносно нерухомого статора [7] визначається координатами центру мас (x, y, z) і кутами Ейлера–Крилова (α, β, γ) . Через осьову симетрію ротора γ – циклічна координата. Ротор має шість степенів вільності: три поступальних і три обертальних. Для обчислення власних індуктивностей котушок можна використовувати відомі формули [8], а для взаємних індуктивностей котушок – метод еквівалентних кругових контурів, що полягає у заміні котушки одним еквівалентним круговим контуром, діаметр і положення якого визначають так, щоб при відповідній магніторушійній силі, тобто при відповідному струмі і числі витків, ці контури створювали таке ж магнітне поле, як і котушка [8]. В цьому випадку взаємна індуктивність двох моделюючих витків можна обчислювати за формулами для довільного розташування контурів, одержаних в роботі [9]. Для отримання точніших значень, застосовують формули обчислення взаємних індуктивностей за сумою витків котушки. Методика отримання цих формул викладена в [8], а для загального випадку взаємного розташування котушок в [9].

Довільне розташування ротора відносно статора визначається координатами: $q = \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}$. Нехай

$$q_0 = \{x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0, \alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, \gamma = \forall\}$$

координати положення, у якому здійснюється початкове живлення системи струмом (коаксіальність статора і ротора). Коаксіальні положення рівноваги ротора визначатимемо координатами:

$$q_r = \{x_r = 0, y_r = 0, z_r = 0, \alpha_r = 0, \beta_r = 0, \gamma = \forall\}.$$

Потенційна енергія системи у випадку початкового живлення у коаксіальних положеннях [3]:

$$W = W_M^0 \left[1 + (L_{12} - L_{12}^0)^2 (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)^{-1} \right] + Gz, \quad (1)$$

де $L_{12} = L_{12}(q)$ – взаємна індуктивність статора і ротора для будь якого розташування; $L_{12}^0 = L_{12}(q_0)$ – та ж взаємна індуктивність, обчислена у положенні живлення системи, L_{11}, L_{22} – власні індуктивності статора і ротора відповідно, W_M^0 – початкова енергія в по-

ложенні живлення, G – вага ротора. З (1), з урахуванням $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 > 0$ впливає, що нестійкість системи (байдужий стан) виникає, коли взаємна індуктивність L_{12} зберігає незмінним своє значення при зміні координат центру ваги системи і координат, що відповідають за кутову орієнтацію. Інакше, будь-яка зміна $L_{12} = L_{12}(q)$ збільшує W , а отже, положення рівноваги буде стійким. Таким чином, рівняння $L_{12} = L_{12}^0$ визначає всі положення нестійкої рівноваги системи. Враховуючи, що взаємна індуктивність $L_{12} = L_{12}(q)$ є функцією п'яти узагальнених координат (через геометричну симетрію системи, координата γ , яка відповідає за власне обертання ротора, є циклічною), вказане рівняння встановлює зв'язок між координатами, що забезпечують байдужий стан системи. Розв'язуючи рівняння $L_{12} = L_{12}^0$ відносно координат, можна визначити траєкторію, за якою виходитиме з початкового положення байдужої рівноваги вільне тіло при незначних збуреннях. Показовими можна вважати і лінії рівня взаємної індуктивності, побудовані для двох координат. Якщо з досліджуваного положення рівноваги виходять лінії рівня (лінії постійного значення L_{12}), то таке положення не буде стійким за даними координатами. Якщо ж положення рівноваги оточене лініями рівного значення L_{12} , то за цими координатами система буде стійкою. Ці наочні пояснення можуть бути корисні при проектуванні системи на початковій стадії, щоб виключити з розгляду явно не стійкі положення рівноваги або конструкції систем. Відзначимо також, що припущення про $G = 0$ і розгляд у якості положення рівноваги положення початкового живлення, не зменшує узагальнення висновків.

Умови стійкості підвісу

Положення рівноваги q_r визначаються умовами обертання у нуль узагальнених сил $F_q = -\partial W / \partial q = 0$. Біля положення рівноваги (для малих $q - q_r, p - p_r$) потенційну енергію розкладемо у ряд:

$$W = W_M^0 + \sum_q b_q (q - q_r) + \frac{1}{2} \sum_q C_{qq} (q - q_r)^2 + \sum_{q, p \neq q} (q - q_r)(p - p_r) \quad (2)$$

де $(q, p) = \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}, (q_r, p_r) = \{x_r, y_r, z_r, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r\}$,

$$b_q = \frac{\partial W(q_r)}{\partial q}, C_{qp} = \frac{\partial^2 W(q_r)}{\partial q \partial p}. \quad (3)$$

Для положень рівноваги q_r виконується:

$$b_x = b_y = b_\alpha = b_\beta = b_\gamma = 0, b_z = mg = G. \quad (4)$$

$$C_{xy} = C_{xz} = C_{x\alpha} = C_{yz} = C_{y\beta} = C_{z\alpha} = C_{z\beta} = C_{\alpha\beta} = 0, \quad (5)$$

$$C_{\gamma q} = 0, \text{ де } q = \{x, y, z, \alpha, \beta, \gamma\}. \quad (6)$$

Відповідно до критерію Сильвестра, з (2) за умов (4–6), отримаємо достатні умови стійкості системи в положеннях рівноваги q_r :

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_5 > 0, \quad (7)$$

$$\text{де } \Delta_1 = C_{xx}, \Delta_2 = C_{xx}C_{yy}, \Delta_3 = C_{xx}C_{yy}C_{zz},$$

$$\Delta_4 = C_{xx} C_{zz} (C_{yy} C_{\alpha\alpha} - C_{y\alpha}^2),$$

$$\Delta_5 = C_{zz} (C_{yy} C_{\alpha\alpha} - C_{y\alpha}^2) (C_{xx} C_{\beta\beta} - C_{x\beta}^2).$$

Таким чином, умови стійкості набувають вигляду:

$$C_{xx} > 0, C_{yy} > 0, C_{zz} > 0,$$

$$C_{yy} C_{\alpha\alpha} - C_{y\alpha}^2 > 0, C_{xx} C_{\beta\beta} - C_{x\beta}^2 > 0. \quad (8)$$

По кутовій координаті γ , рівновага буде стійкою, з огляду на симетрію ротора і статора.

Рівняння коливань вільного ротора біля положень рівноваги

Як відомо [7], рух вільного твердого тіла для системи сил визначається рівняннями:

$$m\ddot{x} = F_x, \quad m\ddot{y} = F_y, \quad m\ddot{z} = F_z, \quad (9)$$

$$I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x, \quad I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y,$$

$$I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y = M_z, \quad (10)$$

$$\omega_x = \dot{\alpha} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma, \quad \omega_y = \dot{\alpha} \sin \beta \cos \gamma - \dot{\beta} \sin \gamma,$$

$$\omega_z = \dot{\alpha} \cos \beta + \dot{\gamma},$$

де x, y, z – координати центру ваги ротора; I_x, I_y, I_z – осьові моменти інерції. З (2), враховуючи необхідні умови рівноваги, отримаємо проекції сил і моментів на вісі нерухомої системи координат:

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x} = -(C_{xx}x + C_{x\beta}\beta),$$

$$F_y = -\frac{\partial W}{\partial y} = -(C_{yy}y + C_{y\alpha}\alpha),$$

$$F_z = -\frac{\partial W}{\partial z} = -C_{zz}(z - z_0), \quad (11)$$

$$M_x = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -(C_{y\alpha}y + C_{\alpha\alpha}\alpha),$$

$$M_y = -\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -(C_{x\beta}x + C_{\beta\beta}\beta), \quad M_z = 0. \quad (12)$$

Чисельне дослідження стійкості підвісу

Чисельне моделювання виконувалося для однакових котушок квадратного перетину: зовнішній радіус котушки 0,07 (м), середній діаметр котушок 0,12 (м), ширина і висота перетину котушок 0,02 (м), число витків в котушках 400. Початковий струм в котушці статора $I_1^0 = 100$ (А), в котушці ротора $I_2^0 = 0$ (А), власні індуктивності котушок $L_{ii}^0 = 0,0242$ Гн, початкова енергія $W_M^0 = 120,7523$ (Дж), моделюючий радіус котушок $a_i = 0,0603$ (м). Передбачалось, що котушка – суцільний циліндр з рівномірно розподіленою за об'ємом густиною. Як зазначалось, в положенні q_0 живлення системи: $x_0 = y_0 = \alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$, $z_0 \neq 0$. Положення рівноваги ротора q_r визначається координатами $x_r = y_r = \alpha_r = \beta_r = \gamma_r = 0$, і деяким значенням z_r , яке є результатом зсуву ротора з положення рівноваги під дією сили тяжіння.

У таблиці 1 наведено результати розрахунків на стійкість двох різних положень рівноваги ротора. Для випадку 1 відстань між котушками більше, ніж для випадку 2. Як випливає з таблиці 1, на меншій відстані в положенні рівноваги створюється підйомна сила, яка більше ніж в 10 разів перевищує силу на більшій відстані: $F_z^r = 85,47$ (Н) і $F_z^r = 7,002$ (Н), відповідно. Але, як відомо, область стійкості має обмеження на мінімальну відстань. Випадок 1 відповідає мінімально можливій відстані, для якої зберігається стійкість підвісу. Випадок 2 – приклад не стійкої системи. Таким чином, зменшення відстані за умови збереження стійкості дозволило б значно підвищити підйомну силу підвісу.

Таблиця 1. Розрахунки стійкості підвісу

Параметри	Випадок 1	Випадок 2
z_0 (м)	-0,1	-0,05
z_r (м)	-0,13	-0,07
L_{12}^0 (Гн)	$2,0107 \times 10^{-3}$	$6,1554 \times 10^{-3}$
F_z^r (Н)	7,002	85,4715
Δ_1	75,4001	$1,2074 \times 10^3$
Δ_2	5,0852	$1,4578 \times 10^6$
Δ_3	$6,8443 \times 10^4$	$8,7863 \times 10^8$
Δ_4	$2,0416 \times 10^3$	$-1,7177 \times 10^9$
Δ_5	60,9002	$3,358 \times 10^9$
C_{xx}	75,4001	$1,2074 \times 10^3$
$C_{x\beta}$	1,4	-0,476
C_{yy}	75,4001	$1,2074 \times 10^3$
$C_{y\alpha}$	-1,4	0,476
C_{zz}	12,0388	602,7235
$C_{\alpha\alpha}$	0,0558	-1,9548
$C_{\beta\beta}$	0,0558	-1,9548
Стійкість	так	ні

Дослідження коливань і обертання ротора

У роботах [1-5] досліджена динаміка систем, для яких виконуються умови стійкості рівноваги. Досліджуватимемо динаміку ротора нестійкої системи (випадок 2, таблиця 1) для різних початкових умов. Нехтуватимемо магнітним тертям пари ротор-статор, опором повітря, механічними напруженнями, що приводять до зміни геометрії системи. Введемо додатковий параметр ω_0 – швидкість обертання ротора навколо власної вісі, що співпадає з віссю симетрії. Чисельне розв'язання рівнянь руху (9),(10) тіла з шістьма степенями вільності здійснювалося методом Кута–Мерсона.

Як зазначалось, для випадку 2 (таблиця 1) положення рівноваги $x_r = y_r = 0$, $z_r = -0,07$ (м) не стійке. Нестійкість системи обумовлюється нестійкістю за кутами відхиленнями від вертикалі. Для дослідження коливань ротора, після живлення і зсуву ротора під дією сили тяжіння до положення рівноваги, переведемо центр ваги ротора у положення (початкове відхилення): $x_n = 0,02(i)$, $y_n = 0,01(i)$, $z_n = -0,08(i)$. Початкові ку-

тові відхилення α_n, β_n вважатимемо відсутніми. Після вивільнення ротора, центр ваги починає здійснювати стійкі коливальні рухи навколо положення рівноваги. У більшій мірі інтерес викликають коливання, які призводять до втрати стійкості підвісу. На рис.1 наведені результати розв'язків рівнянь (9),(10) для кутової орієнтації ротора $\alpha(t), \beta(t)$ в залежності від часу після вивільнення ротора для вказаних початкових зміщень ротора від положень рівноваги. Крива $\gamma(t)$ відповідає власному закручуванню ротора і на стійкість не впливає. Графіки коливань центру ваги не наводяться, так як стійкість за цими координатами зберігається поблизу положення рівноваги, а втрата стійкості починається за кутами. Початкові кутові відхилення ротора дорівнювали нулю, проте ротор втрачає стійкість по кутах α і β повороту навколо вісей Ox, Oy . Дослідження стійкості довели, що втрата стійкості викликається щонайменшими зсувами в радіальному напрямі від положення співвісності. Графіки зміни кутових відхилень на більшому проміжку часу не наводяться, оскільки їх не можна вважати такими, що задовольняють необхідній точності. Рівняння руху одержані з розкладання потенційної енергії системи поблизу положення рівноваги, тому очевидно, із збільшенням відхилення ротора від положення рівноваги, точність чисельного розв'язку рівнянь руху зменшується. Цінність має лише факт втрати стійкості. Крім того, втрата стійкості за кутовими координатами виводить і центр ваги ротора з положень, близьких до положень рівноваги.

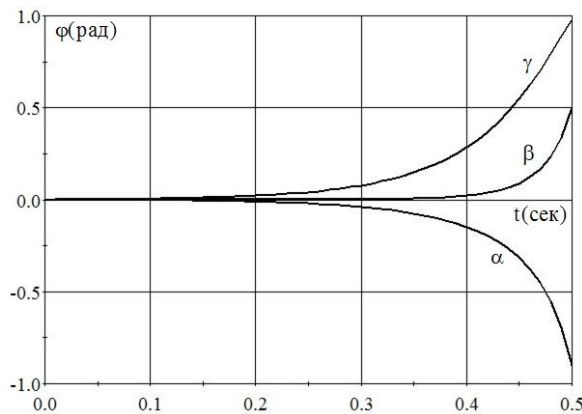


Рис. 1. Траєкторія втрати стійкості ротора за кутами

Наведемо тепер умови, за яких відбувається динамічна стабілізація нестійкого підвісу. Розглядалися ті ж початкові умови, але швидкість обертання ротора навколо своєї вісі ω_0 відмінна від нуля. Аналізувалися різні початкові швидкості. Розрахунки показали, що вже при швидкості $\omega_0 = 15,710$ (рад/с) спостерігалася поява стійкості і кутових коливань ротора. Графіки коливань при швидкості $\omega_0 = 31,4$ (рад/с) наведені на рис.2. Подальше збільшення швидкості обертання ротора зменшує амплітуду коливань. Динамічна стабілізація відбувається і у разі наявності початкових кутових відхилень, наприклад (рис.3), для $\alpha_n = \beta_n = 0,017$ (рад) при швидкості $\omega_0 = 314$ (рад/с).

Графіки коливань центру ваги ротора для цих випадків не наводяться, оскільки за координатами x,y,z стійкість коливань зберігається.

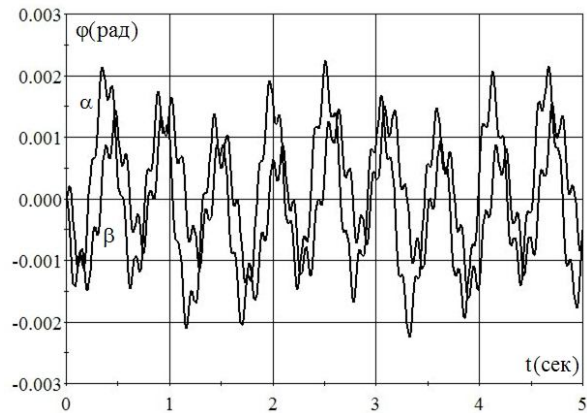


Рис. 2. Кутові коливання ротора без початкових кутових відхилень

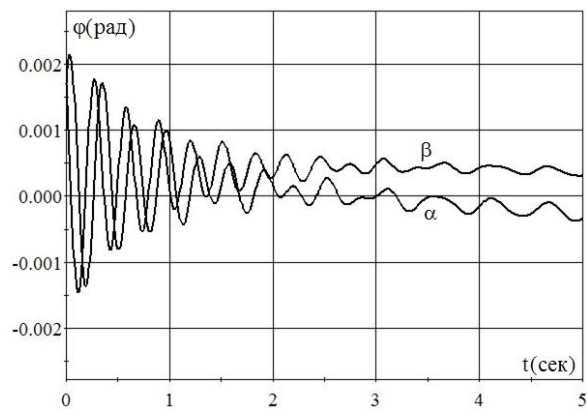


Рис. 3. Стабілізація обертанням початкових кутових відхилень

Висновки

Обертання ротора навколо власної вісі дозволяє стабілізувати статично нестійку за кутовими координатами систему підвісу, а це в свою чергу дозволяє зменшити мінімальну відстань підвісу і збільшити масу підвішуваного ротора. Так, для розглянутих систем, маса вільного ротора була збільшена більш ніж в 10 разів. Крім того, підвищується і жорсткість підвісу (таблиця 1). Достатньо швидке обертання ротора забезпечує системі динамічну стійкість для випадку статичної нестійкості і у разі не нульових кутових відхилень, які і визначають амплітуду кутових коливань при тих же власних динамічних осциляціях. Отримані результати дозволяють проектувати надпровідні динамічні підвіси високої вантажопідйомності.

ЛІТЕРАТУРА

1. Козорез В.В., Чеборин О.Г. Об устойчивости равновесия в системе идеальных токовых колец // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977. – №1. – с.80-81.
2. Шаблій В.П., Козорез В.В. Об интегрировании уравнений движения свободного физического маятника в глубокой магнитной потенциальной яме. – Электроди-

- намика и механика сплошных сред. Математическое моделирование. Рига: ЛГУ им.П.Стучки, 1982 г.
3. Козорез В.В. Динамические системы магнитно взаимодействующих тел. - Киев:Наук.думка, 1981.–140 с.
 4. "Магнитная потенциальная яма" – эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем /Михалевич В.С., Козорез В.В. и др.– Киев: Наук.думка, 1991.– 336 с.
 5. Зиновьев А.С., Козорез В.В., Славко Г.В. Определение положения минимума потенциальной энергии магнитного взаимодействия двух соосных идеально электропроводящих колец. //Техн. электродинамика.–1987.– №3.- с.24–28
 6. M.V.Berry, "The Levitron: an adiabatic trap for spins", Proc. Roy. Soc. LondA, 452, 1207-1220 (1996).
 7. Лунц Я.Л. Введение в теорию гироскопов. М., 1972г., 296 стр.
 8. Калантаров П.Л., Цейтлин Л.А. Расчет индуктивностей: Справ.кн.– Л.: Энергоатомиздат, 1986.- 488 с.

пост. 07.02.07.

Математическая модель процесса очистки воздушного потока волосяными ершами

Ф.В. НЕДОПЁКИН, В.В. ДРЁМОВ, Н.И. КУЛИКОВ

Донецкий национальный университет,
Донбасская национальная академия строительства и архитектуры

На основе молекулярно-кинетической теории предложена математическая модель явления очистки воздуха волосяными ершами и получена формула, описывающая этот процесс.

На основі молекулярно-кінетичної теорії запропонована математична модель явища очищення повітря волосяними ершами і отримана формула, що описує цей процес.

Mathematical model of air clearing effect by hair brushes is proposed on basis of molecular-kinetic theory. Describing this process formula is obtained.

Введение. Использование различных фильтров для очистки газообразной или жидкой среды осуществляется уже давно и обеспечивает во многих случаях удовлетворительную степень очистки [1, 2]. Так, при очистке газов от твёрдых частиц тканевые фильтры могут обеспечить КПД удаления до 99,9 % [3], но при густом расположении волос в применяемых тканях эффективное время работы фильтров ограничено. Поэтому для очистки воздушных потоков предложены фильтры с более редким расположением волос в единице объёма. Эти фильтры представляют собой гирлянды из волосяных ершей, которые хорошо зарекомендовали себя при очистке жидких потоков.

Постановка задачи, исследования. В предлагаемой работе теоретически исследуется процесс очистки грязного воздуха от примесей с помощью вышеназванной модификации тканевых фильтров – слоя из волосяных ершей (Рис. 1). Ерши представляют собой скрученные капроновые шнуры, в которые продеты капроновые волокна [4]. В одном из вариантов длина волокон составляла 80 мм, диаметр 0,25 мм, а на 2 см длины шнура помещается ~ 100 волокон. Шнуры крепятся на квадратных или прямоугольных рамах, изготовленных из металлического уголка. Рамы ставятся поперёк движения воздушного потока и при обтекании потоком волос ерша происходит выделение твёрдых, жидких или газообразных примесей, находящихся в воздухе. Заселяя волосы ерша определённым видом микроорганизмов, можно осуществить выборочную адсорбцию той или иной примеси и переработку её с помощью микроорганизмов в безвредное состояние.

Задача данного исследования состояла в создании достаточно простой физико-математической модели описанного выше явления и получения математических выражений, описывающих взаимодействие воздушного потока с волосами ершей.

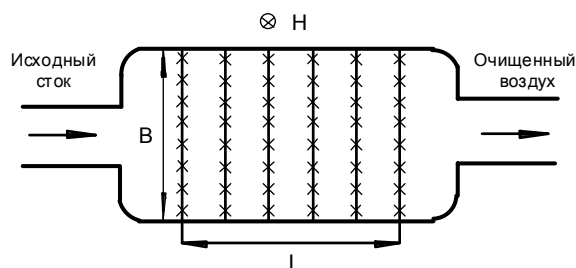


Рис. 1. Конструкция камеры с волосяными ершами для очистки воздушных потоков.

Разработка математической модели. В качестве предлагаемой модели газа используется невязкий несжимаемый газ при нормальных условиях. В этом газе могут быть примеси в виде капель, в виде мелкодисперсных твёрдых частиц, либо в виде паров. Для упрощения записи физических явлений, протекающих при взаимодействии воздушного потока с волосами ершей, весь поток разбивается на элементарные воздушные кубики [5]. Размеры этих кубиков определяются из условия, что с одним волосом в данный момент взаимодействует лишь один воздушный кубик. Поэтому объём элементарного воздушного кубика a^3 равен всему объёму камеры с волосяными ершами, делённому на полное число N_{0l} волос в ершах:

