

Для противоточного конвективного нагрева тел базовой формы (ТБФ) такое решение при помощи метода эквивалентных источников (МЭИ) [4] изложено в работах [5, 6] и использовано при исследовании сухого тушения кокса [7]. Представляет интерес получить такое же решение и для прямого нагрева массивных ТБФ.

**Постановка задачи.** Рассмотрим соответствующую задачу в постановке Э.М. Гольдфарба [1]

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Bi[\theta_{\Gamma}(\tau) - \theta_{II}(\tau)]; \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0; \quad (2)$$

$$\frac{d\theta_{\Gamma}}{d\tau} = -Bi[\theta_{\Gamma}(\tau) - \theta_{II}(\tau)]n_m; \quad (3)$$

$$\theta(\rho, 0) = \theta_0 = 0; \quad \theta_{\Gamma}(0) = \theta_{\Gamma}^0 = 1, \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\theta(\rho, \tau) = \frac{T(\rho, \tau) - T_0}{T_{\Gamma}^0 - T_0}; \quad \theta_{\Gamma}(\tau) = \frac{T_{\Gamma}(\tau) - T_0}{T_{\Gamma}^0 - T_0};$$

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad \tau = \frac{at}{R^2}; \quad Bi = \frac{\alpha_k R}{\lambda}; \quad n = \frac{VC}{V_{\Gamma} C_{\Gamma}};$$

Здесь  $T(\rho, \tau)$  и  $T_{\Gamma}(\tau)$  – температура тела и газа;  $T_0$  и  $T_{\Gamma}^0$  – их начальные значения;  $r$  – координата, отсчитываемая от центра сечения тела;  $2R$  – толщина пластины ( $m=0$ ) или диаметр цилиндра ( $m=1$ ), шара ( $m=2$ );  $t$  – время;  $a$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha_k$  – коэффициенты температуро-, теплопроводности и конвективного теплообмена;  $C$  и  $C_{\Gamma}$  – объемные теплопроводности материала и газа;  $V$  и  $V_{\Gamma}$  – объемы тела и газа;  $m$  – параметр формы тела;  $n$  – отношение водяных чисел  $n_m = (1+m)n$ .

#### Решение задачи

На инерционном этапе ( $0 \leq \tau \leq \tau_0$ ), как и в работах [5, 6], воспользуемся готовым решением МЭИ [4]

$$\theta_1(\rho, \tau) = \frac{\theta_{\Gamma 1}(\tau) Bi}{[2 + Bi l(\tau)] l(\tau)} [\rho - \beta(\tau)]^2, \quad (6)$$

$$\beta(\tau) \leq \rho \leq 1,$$

где толщина  $l(\tau) = 1 - \beta(\tau)$  термического слоя в работе [5] представлена формулой

$$l(\tau) = \sqrt{6(1+m)k\tau}, \quad k = \frac{(3+2Bi)}{(3+Bi)}. \quad (7)$$

Температурную функцию газа  $\theta_1(\rho, \tau)$  получим подстановкой решения (6) в условие теплового баланса (3). Приходим к уравнению

$$\frac{d\theta_{\Gamma 1}}{\theta_{\Gamma 1}(\tau)} = - \frac{Bin_m}{1 + \frac{Bi l(\tau)}{2}} d\tau. \quad (8)$$

Дифференцируя выражение  $l(\tau)$  (7), имеем

$$d\tau = \frac{dl}{3(1+m)k},$$

после чего уравнение (8) принимает вид

$$\frac{d\theta_{\Gamma 1}}{\theta_{\Gamma 1}(\tau)} = - \frac{Bin}{3k} \cdot \frac{dl}{1 + \frac{Bi l(\tau)}{2}}. \quad (9)$$

Интегрируя с использованием начальных условий (4), находим

$$\theta_{\Gamma 1}(\tau) = \exp \left\{ -M \left[ l(\tau) - \frac{2}{Bi} \ln \left( 1 + \frac{Bi l(\tau)}{2} \right) \right] \right\}, \quad (10)$$

где

$$M = \frac{2n}{3k} \quad (11)$$

При  $\tau = \tau_0 = \frac{3+Bi}{6(1+m)(3+2Bi)}$ , когда заканчивается этап прогрева,  $l(\tau_0) = 1$ , температура тела и газа определяются выражениями

$$\theta_{\Gamma 1}(\rho, \tau_0) = \theta_1^0(\rho) = \frac{\theta_{\Gamma 1}^0 Bi}{2+Bi} \rho^2; \quad (12)$$

$$\theta_{\Gamma 1}(\tau_0) = \theta_{\Gamma 1}^0 = \exp \left\{ -M \left[ 1 - \frac{2}{Bi} \ln \left( 1 + \frac{Bi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (13)$$

На упорядоченном этапе нагрева ( $\tau \geq \tau_0$ ) разрешающее уравнение МЭИ принимаем по первому (основному) варианту

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho^m \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right] + f_2(\tau) = 0, \quad (14)$$

где «эквивалентный источник» определяется условием (5)

$$f_2(\tau) = -(1+m) \frac{d}{d\tau} \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho. \quad (15)$$

Интегрируя уравнение (14) дважды по  $\rho$  и используя граничные условия (2), получаем

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{II 2}(\tau) + Bi[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)] \frac{\rho^2}{2+Bi}; \quad (16)$$

$$f_2(\tau) = -2(1+m)Bi \frac{[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)]}{2+Bi}. \quad (17)$$

Подставляя функции (16), (17) в интегральное условие (15), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{(2+Bi)\theta_{II 2}}{(1+m)Bi} + \frac{\theta_{\Gamma 2} - \theta_{II 2}}{3+m} = 2[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)]. \quad (18)$$

Полагая в решении (16)  $\rho = 1$ , находим

$$\theta_{II 2}(\tau) = \theta_{II 2}(\tau) + \frac{Bi[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)]}{2+Bi}, \quad (19)$$

после чего условие теплового баланса (3) можно записать в следующем виде:

$$\theta_{\Gamma 2}(\tau) = - \frac{2Bin_m[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)]}{2+Bi}. \quad (20)$$

Это позволяет выражение (18) свести к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{d[\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)]}{\theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{II 2}(\tau)} = \frac{-(1+m)Bi(1+n)}{1+Bi/(3+m)} d\tau, \quad (21)$$

интегрируя которое с учетом начальных условий (12), (13) для упорядоченного нагрева, имеем

$$\theta_{II 2}(\tau) = \theta_{\Gamma 2}(\tau) - \theta_{\Gamma 1}^0 \Phi(\tau), \quad (22)$$

где

$$\Phi(\tau) = \exp[-\mu(\tau - \tau_0)];$$

$$\mu = \frac{(1+m)Bi}{1+Bi/(3+m)}(1+n). \quad (23)$$

Подставляя выражение (22) в (19), находим

$$\theta_{II2}(\tau) = \theta_{\Gamma2}(\tau) - \frac{2\theta_{\Gamma1}^0}{2+Bi} \Phi(\tau). \quad (24)$$

Функция температуры газа  $\theta_{\Gamma2}(\tau)$  определяется интегрированием выражения (20) с учетом (22)

$$\theta_{\Gamma2}(\tau) = \theta_{\Gamma1}^0 \{1 - D[1 - \Phi(\tau)]\}, \quad (25)$$

где

$$D = \frac{2\omega[1+Bi/(3+m)]}{(2+Bi)(1+n)}. \quad (26)$$

Теперь решение (16) принимает следующий окончательный вид:

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{\Gamma1}^0 \left\{ (1-D) - \left[ (1-D) - \frac{Bi}{2+Bi} \rho^2 \right] \Phi(\tau) \right\}. \quad (27)$$

Полагая в (27)  $\rho = 1$  и  $\rho = 0$ , получаем функции температур поверхности и центра тела:

$$\theta_{II2}(\tau) = \theta_{\Gamma1}^0 \left\{ (1-D) - \left[ \frac{2}{2+Bi} - D \right] \Phi(\tau) \right\}; \quad (28)$$

$$\theta_{II1}(\tau) = \theta_{\Gamma1}^0 (1-D) \{1 - \Phi(\tau)\}. \quad (29)$$

При теплотехнических расчетах иногда необходимо знать среднемассовую температуру тела

$$\bar{\theta}(\tau) = (1+m) \int_0^1 \theta_2(\rho, \tau) \rho^m d\rho.$$

Подставляя сюда функцию (28), после интегрирования имеем

$$\bar{\theta}(\tau) = \theta_{\Gamma1}^0 \left\{ (1-D) - \left[ (1-D) - \frac{1+m}{3+m} \frac{Bi}{2+Bi} \right] \Phi(\tau) \right\}. \quad (30)$$

**Анализ полученного решения.** Для оценки точности полученных решений был проведен численный эксперимент на примере, заимствованном из работы [1]:

$$m = 0; Bi = 1; n = 0,5. \quad (31)$$

Результаты вычислений по приближенному (25), (28), (29) и точному [1] решениям представлены на рисунке, откуда видно, что точность предложенного здесь решения вполне приемлема для инженерных расчетов. При этом имеющиеся расхождения между точным и предложенным приближенным решением вполне компенсируется исключительной простотой последнего.

Для убедительности приведем здесь точное решение (в наших обозначениях)

$$\left. \begin{aligned} \theta(\rho, \tau) &= \frac{1}{1+n} - \sum_{n=1}^{\infty} P_m(\mu_n) \frac{J_m(\mu_n \rho)}{J_m(\mu_n) \rho^m} \exp(-\mu_n \tau) \\ \theta_{II}(\tau) &= \frac{1}{1+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_m(\mu_n)}{\mu_n} \frac{\exp(-\mu_n \tau)}{(1+m)Bi\omega} \\ P_m(\mu_n) &= \frac{2Bi[\mu_n + (1+m)Bin]}{[Bi + (1-m)]Bi\mu_n + (1+m)^2 Bi^2 n + [\mu_n + (1+m)Bin]} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Здесь  $\mu_n$  – корни характеристического уравнения

$$\frac{J_m}{J_{m+1}} = \frac{\mu_n}{Bi} - \frac{(1+m)n}{\mu_n}. \quad (33)$$

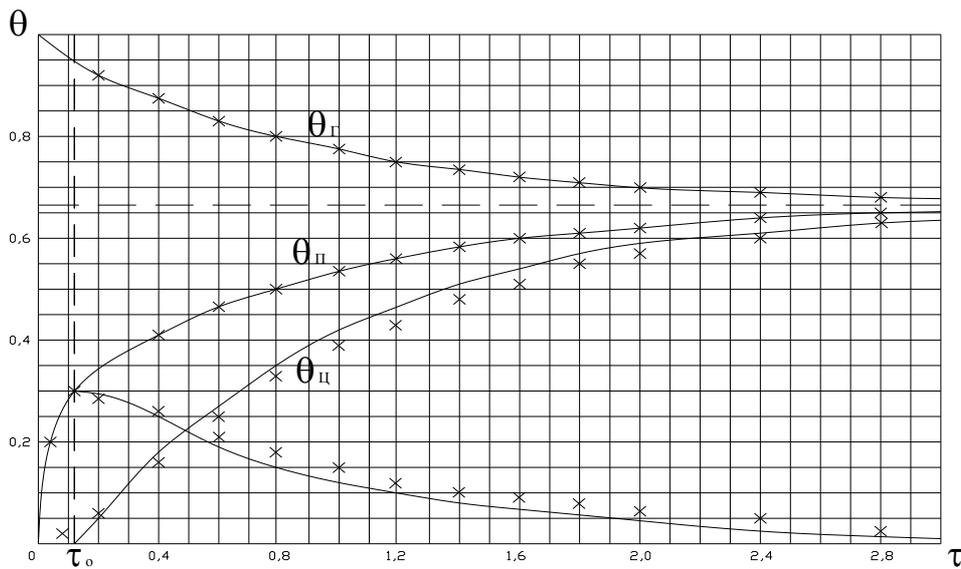


Рис. 1. Изменение температур прямоточного нагрева пластины при данных (31)  
 ———— – приближенное решение МЭИ  
 xxxxxxxxxxxx – точное решение [1]

Приближенное решение МЭИ (25), (27) несравнимо проще решения (32), (33). Кстати, автор работы [1], сохраняя два числа ряда в решении (32), получает первый (приближенный) корень уравнения (33), точно совпадающий с нашим показателем экспоненты  $\mu$  (23).

Следует также отметить, что по точному решению (32), (33) невозможно получить в явном виде формулу для расчета времени  $t_*$ , необходимого для нагрева тела до требуемой температуры  $T_*$ . Решение же (25), (27) позволяет такие формулы получить.

Продолжительность нагрева до заданной той или иной температуры определяется из соответствующей формулы [или (25), или (28), или (29), или (30)], приравняв ее требуемой температуре:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\Gamma}^* &= \tau_0 - \frac{1}{n} \ln \frac{(1-D) - \theta_{\Gamma}^* / \theta_{\Gamma 1}^0}{D}, \\ \tau_{\Pi}^* &= \tau_0 - \frac{1}{n} \ln \frac{(1-D) - \theta_{\Pi}^* / \theta_{\Gamma 1}^0}{2/(2+Bi) - D}, \\ \tau_{Ц}^* &= \tau_0 - \frac{1}{n} \ln \left[ 1 - \frac{\theta_{\Pi}^* / \theta_{\Gamma 1}^0}{1-D} \right], \\ \tau_* &= \tau_0 - \frac{1}{n} \ln \frac{(1-D) - \bar{\theta}_* / \theta_{\Gamma 1}^0}{(1-D) - \frac{1+m}{3+m} Bi / (2+Bi)} \end{aligned} \right\} (34)$$

Таким образом, при помощи приближенного метода (МЭИ) однозначно решена обратная временная задача теплопроводности (ОЗТ) при прямоточном нагреве, тогда как точное решение ОЗТ встречает известные математические трудности.

Следует обратить внимание на то, что постановку и решение задачи нагрева движущихся материалов в газовом потоке автор работы [1] объединил в единую математическую модель, отличающуюся лишь знаком скорости изменения температуры газа. В конечном итоге это выразилось в том, что при исследовании прямоточного нагрева в полученном решении перед параметром водяных чисел  $n = \frac{VC}{V_{\Gamma} C_{\Gamma}}$

необходимо принимать знак «плюс», а в случае противотока – «минус». Задача противоточного нагрева

была нами решена ранее [5]. Сопоставляя это решение с полученным здесь решением для прямотока, легко обнаружить, что они также отличаются лишь знаком перед коэффициентом  $n$ .

## Выводы

Полученное приближенное решение задачи нагрева движущихся заготовок или слитков в прямоточном газовом потоке обладает достаточной для практики простотой и точностью и может найти эффективное применение для расчетов соответствующих процессов в проходных печах скоростного нагрева металла.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов. – М.: Металлургия, 1967. – 439с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. – 599 с.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости – К.: Наук. думка, 1970 – 307с.
4. Постолюник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике – К. – Донецк: Виш. школа, Головн. изд-во, 1984 – 158с.
5. Постолюник Ю.С. К расчету температур и времени нагрева массивных тел при противоточном теплообмене // «Изв. вузов. Черная металлургия», 1990: №6, С.84...86.
6. Тимошпольский В.И., Постолюник Ю.С., Андрианов Д.Н. Теоретические основы теплофизики и термомеханики в металлургии. – Минск: Беларуская навука, 2005. – 560 с. – ISBN 985-08-0622-2/
7. Постолюник Ю.С., Мучник Д.А., Машенко О.И. Исследование процесса сухого тушения кокса // «Изв. вузов. Черная металлургия», 1991: №10, С.80...82.
8. Коздоба Л.А, Крутковский П.Г. Методы решения обратных задач теплопереноса. Киев: Наук. думка, 1982 – 360с.
9. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988 – 280с.
10. Мацевитый Ю.М. Обратные задачи теплопроводности в 2-х т.: т.1. Методология. – К.: Наук. думка, 2002–408с.

пост. 04.01.07.

