

УДК 622.457:519.6

DOI: 10.31319/2519-8106.1(38)2018.129021

**М.М. Біляєв**, д-р т. н., професор, gidravlika2013@mail.ru

Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені академіка

В. Лазаряна, м. Дніпро

**Т.І. Русякова**, к.т.н, доцент, gusakovati1977@gmail.com

Дніпровський національний університет імені О. Гончара, м. Дніпро

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ РОЗСПОВАННЯ ВИКИДІВ ВІД ПОСТІЙНО ДІЮЧОГО СТАЦІОНАРНОГО ДЖЕРЕЛА ЗАБРУДНЕННЯ

У статті представлено математичну модель розсіювання викидів від постійно діючого стаціонарного джерела забруднення (гірничо-збагачувального комбінату), що базується на розв'язанні тримірних рівнянь переносу домішки. Створено числову модель на основі розщеплення модельних рівнянь. Методика розв'язання базується на використанні неявних різницевих схем. Розроблено програмне забезпечення по розрахунку концентрації забруднення атмосферного повітря оксидом вуглецю. Встановлено зони забруднення з урахування зміни метеорологічних параметрів.

**Ключові слова:** числова модель, концентрація забруднення, неявна різницева схема, розсіювання викидів.

*The article presents the mathematical model of emission dispersion from a permanently operating stationary source of pollution (mining and concentrating plant), which is based on the solution of three-dimensional transfer equations of impurity. A numerical model is created based on the splitting of model equations. The methodology is based on the use of implicit difference schemes. The software for calculating the concentration of atmospheric air pollution with carbon monoxide has been developed. The zone of pollution has been established taking into account changes in meteorological parameters.*

**Keywords:** numerical model, pollution concentration, implicit difference scheme, emission dispersion.

### Постановка проблеми

«Північний гірничо-збагачувальний комбінат» — це найбільше гірничодобувне підприємство у Європі із закінченим циклом підготовки доменної сировини для металургійної галузі: залізородного концентрату (зміст заліза 66 %) і окатишів (зміст заліза 62,3 % і 63 %).

На сьогоднішній день потужності підприємства дозволяють виробляти 14,2 млн. т концентрату і близько 9 млн. т окатишів. Основними споживачами продукції Північного ГЗК є найбільші металургійні підприємства України, країни Європи та Китаю.

Поряд із видобутком і переробкою руди існують проблеми з забрудненням атмосферного повітря при здійсненні комбінатом даних технологічних процесів. Основним із завдань є мінімізація шкідливих викидів і зниження їх негативного впливу на навколишнє середовище. Для цього необхідно знати масштаби і рівень забруднення для більш детального здійснення системи моніторингу.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Як за кордоном, так і на Україні розрахунки рівня забруднення атмосферного повітря різними видами домішок, що потрапляють від постійно діючих стаціонарних джерел забруднення, проводяться на основі емпіричних, аналітичних моделей Гауса та їх модифікацій [3—5], на основі чисельних моделей власних програмних продуктів [1, 2, 6] та готових програмних пакетів. Проблема забруднення атмосферного повітря в містах стала настільки серйозною, що існує потреба у своєчасній інформації про зміни рівня забруднення.

### Формулювання мети дослідження

Розробити математичну модель та її чисельну реалізацію для створення програмного забезпечення з метою проведення обчислювальних розрахунків концентрації домішки (оксиду вуглецю), що потрапляє в атмосферу від постійно діючого стаціонарного джерела забруднення,

а саме від «Північного гірничо-збагачувального комбінату». На основі проведених розрахунків оцінити зони забруднення, рівень концентрації, визначити території, що знаходяться в зонах забруднення.

### Виклад основного матеріалу

До основних забруднюючих речовин, що надходять в атмосферу в результаті діяльності «Північного гірничо-збагачувального комбінату» відносяться оксиди азоту, оксид і діоксид вуглецю, пил неорганічний та діоксид сірки.

Оксид вуглецю — найбільш поширена і найзначніша (по масі) домішка в атмосфері. За даними екологічного паспорта міста найбільш значними викидами комбінату є оксид вуглецю, викиди за рік складають близько 40 тис. т. Для моделювання процесу забруднення атмосферного повітря оксидом вуглецю, а саме для розрахунку концентрації  $C_{[CO]}$  використовується тримірне рівняння переносу домішки (1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{[CO]}}{\partial t} + \frac{\partial u C_{[CO]}}{\partial x} + \frac{\partial v C_{[CO]}}{\partial y} + \frac{\partial w C_{[CO]}}{\partial z} = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C_{[CO]}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C_{[CO]}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_z \frac{\partial C_{[CO]}}{\partial z} \right) + \\ + Q_{[CO]} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $Q_{[CO]}$  — інтенсивність викиду  $CO$  від комбінату;  $u, v, w$  — компоненти вектору швидкості вітру;  $\mu = (\mu_x, \mu_y, \mu_z)$  — коефіцієнт турбулентної дифузії;  $x_0, y_0, z_0$  — координати джерела викиду (комбінату) забруднюючої домішки;  $\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$  — дельта-функція Дірака, за допомогою якої моделюється викид домішки. Значення коефіцієнтів дифузії розраховуються за формулами:  $\mu_x = (0,1 \div 1) \cdot U$ ,  $\mu_y = (0,1 \div 1) \cdot U$ , де  $U$  — швидкість вітру,

$\mu_z = k \left( \frac{z}{z_1} \right)^m$ , де  $z$  — висота над рівнем Землі,  $z_1$  — висота, де задана швидкість вітру  $U$ ,  $m \approx 1$ ,  $k = 0,2$  [7].

Для побудови числової моделі застосовується неявна попеременно-трикутна різницева схема, що апроксимує моделююче рівняння (1) і будується на прямокутній різницевій сітці. Концентрація  $C_{[CO]}$  визначається в центрі різницевої комірки, компоненти вектору швидкості повітряного середовища задаються на межах різницевої комірки [8]. Для апроксимації похідних по часу застосовується формула

$$\frac{\partial C_{[CO]}}{\partial t} = \frac{C_{[CO]}^{n+1} - C_{[CO]}^n}{\Delta t}.$$

Перед дискретизацією конвективні похідні записуються у вигляді суми знакопостійних величин

$$\frac{\partial u C_{[CO]}}{\partial x} = \frac{\partial u^+ C_{[CO]}}{\partial x} + \frac{\partial u^- C_{[CO]}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v C_{[CO]}}{\partial y} = \frac{\partial v^+ C_{[CO]}}{\partial y} + \frac{\partial v^- C_{[CO]}}{\partial y}, \quad \frac{\partial w C_{[CO]}}{\partial z} = \frac{\partial w^+ C_{[CO]}}{\partial z} + \frac{\partial w^- C_{[CO]}}{\partial z},$$

$$\text{де } u^+ = \frac{u + |u|}{2}, u^- = \frac{u - |u|}{2}, v^+ = \frac{v + |v|}{2}, v^- = \frac{v - |v|}{2}, w^+ = \frac{w + |w|}{2}, w^- = \frac{w - |w|}{2}.$$

Різницеві апроксимації перших похідних записуються у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^+ C_{[co]}}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,jk}^+ C_{[co]}^{n+1} - u_{ijk}^+ C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial u^- C_{[co]}}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,jk}^- C_{[co]}^{n+1} - u_{ijk}^- C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial v^+ C_{[co]}}{\partial y} &\approx \frac{v_{ij+1k}^+ C_{[co]}^{n+1} - v_{ijk}^+ C_{[co]}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial v^- C_{[co]}}{\partial y} &\approx \frac{v_{ij+1k}^- C_{[co]}^{n+1} - v_{ijk}^- C_{[co]}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial w^+ C_{[co]}}{\partial z} &\approx \frac{w_{ijk+1}^+ C_{[co]}^{n+1} - w_{ijk}^+ C_{[co]}^{n+1}}{\Delta z} = L_z^+ C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial w^- C_{[co]}}{\partial z} &\approx \frac{w_{ijk+1}^- C_{[co]}^{n+1} - w_{ijk}^- C_{[co]}^{n+1}}{\Delta z} = L_z^- C_{[co]}^{n+1},\end{aligned}$$

де  $L_x^+ = \frac{u_{i+1,jk}^+ C_{[co]}^{n+1} - u_{ijk}^+ C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x}$ ,  $L_x^- = \frac{u_{i+1,jk}^- C_{[co]}^{n+1} - u_{ijk}^- C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x}$  і т.д. — позначення різни-  
цевих операторів при апроксимації конвективних похідних.

Різницеві апроксимації похідних другого порядку записуються таким чином

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C_{[co]}}{\partial x} \right) &\approx \mu_x \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x^2} - \\ &- \mu_x \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- C_{[co]}^{n+1} + M_{xx}^+ C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C_{[co]}}{\partial y} \right) &\approx \mu_y \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta y^2} - \\ &- \mu_y \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- C_{[co]}^{n+1} + M_{yy}^+ C_{[co]}^{n+1}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_z \frac{\partial C_{[co]}}{\partial z} \right) &\approx \mu_z \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta z^2} - \\ &- \mu_z \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta z^2} = M_{zz}^- C_{[co]}^{n+1} + M_{zz}^+ C_{[co]}^{n+1}.\end{aligned}$$

Для скорочення запису різницевих рівнянь застосовуються наступні позначення:

$$M_{xx}^+ = -\mu_x \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x^2}, \quad M_{xx}^- = \mu_x \frac{C_{[co]}^{n+1} - C_{[co]}^{n+1}}{\Delta x^2}.$$

Застосовуючи введені позначення різницевих операторів, рівняння переносу набуває наступного виду:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{[co]i,j,k}^{n+1} - C_{[co]i,j,k}^n}{\Delta t} + L_x^+ C_{[co]}^{n+1} + L_x^- C_{[co]}^{n+1} + L_y^+ C_{[co]}^{n+1} + L_y^- C_{[co]}^{n+1} + \\ & + L_z^+ C_{[co]}^{n+1} + L_z^- C_{[co]}^{n+1} + \sigma C_{[co]i,j,k}^{n+1} = M_{xx}^+ C_{[co]}^{n+1} + M_{xx}^- C_{[co]}^{n+1} + \\ & + M_{yy}^+ C_{[co]}^{n+1} + M_{yy}^- C_{[co]}^{n+1} + M_{zz}^+ C_{[co]}^{n+1} + M_{zz}^- C_{[co]}^{n+1} + q(t)\delta. \end{aligned}$$

На наступному етапі побудови різницевої схеми виконується розщеплення даного різницевого рівняння на чотири кроки при інтегруванні на інтервалі по часу  $dt$ :

- на першому кроці розщеплення  $k = 1/4$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{[co]ijk}^{n+k} - C_{[co]ijk}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C_{[co]}^k + L_y^+ C_{[co]}^k + L_z^+ C_{[co]}^k) + \\ & + \frac{\sigma}{4} C_{[co]ijk}^k = \frac{1}{4} (M_{xx}^+ C_{[co]}^k + M_{xx}^- C_{[co]}^k + M_{yy}^+ C_{[co]}^n + \\ & + M_{yy}^- C_{[co]}^n + M_{zz}^+ C_{[co]}^n + M_{zz}^- C_{[co]}^n) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}(t)_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на другому кроці розщеплення  $k = n + 1/2$ ,  $c = n + 1/4$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{[co]ijk}^k - C_{[co]ijk}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C_{[co]}^k + L_y^- C_{[co]}^k + L_z^- C_{[co]}^k) + \\ & + \frac{\sigma}{4} C_{[co]ijk}^k = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C_{[co]}^k + M_{xx}^+ C_{[co]}^c + M_{yy}^- C_{[co]}^k + \\ & + M_{yy}^+ C_{[co]}^c + M_{zz}^- C_{[co]}^k + M_{zz}^+ C_{[co]}^c) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}(t)_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на третьому кроці розщеплення  $k = n + 3/4$ ,  $c = n + 1/2$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{[co]ijk}^k - C_{[co]ijk}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^+ C_{[co]}^k + L_y^+ C_{[co]}^k + L_z^+ C_{[co]}^k) + \\ & + \frac{\sigma}{4} C_{[co]ijk}^k = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C_{[co]}^c + M_{xx}^+ C_{[co]}^k + M_{yy}^- C_{[co]}^k + \\ & + M_{yy}^+ C_{[co]}^c + M_{zz}^- C_{[co]}^k + M_{zz}^+ C_{[co]}^c) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}(t)_l}{4} \delta_l; \end{aligned}$$

- на четвертому кроці розщеплення  $k = n + 1$ ,  $c = n + 3/4$

$$\begin{aligned} & \frac{C_{[co]ijk}^k - C_{[co]ijk}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2} (L_x^- C_{[co]}^k + L_y^- C_{[co]}^k + L_z^- C_{[co]}^k) + \\ & + \frac{\sigma}{4} C_{[co]ijk}^k = \frac{1}{4} (M_{xx}^- C_{[co]}^k + M_{xx}^+ C_{[co]}^c + M_{yy}^- C_{[co]}^c + \\ & + M_{yy}^+ C_{[co]}^k + M_{zz}^- C_{[co]}^c + M_{zz}^+ C_{[co]}^k) + \sum_{l=1}^N \frac{\bar{q}(t)_l}{4} \delta_l. \end{aligned}$$

В дискретному вигляді дельта-функція Дірака «розподіляється» на одну різницеву комірку так, щоб зберегти сумарну кількість  $q_i$  забруднюючої домішки, яка розміщується в комірці. Причому, функція  $\delta_l$ , яка використовується в різницевих виразах не дорівнює нулю тільки в комірках, де розташовано джерело емісії забруднюючої домішки. Використання приведеної

вище схеми розщеплення дозволяє отримати різницеві рівняння більш простої форми, що дає можливість виконати їх програмну реалізацію.

Початкова умова для кожного рівняння розщеплення має наступний вид [6]:

$$\begin{aligned} C \Big|_{t=t^n}^1 &= C(x, y, z, t^n), \\ C \Big|_{t=t^n}^k &= C \Big|_{t=t^{k-1}}^{k-1}, \quad k = 2, 3, 4, \\ C(x, y, z, t^{n+1}) &= C \Big|_{t=t^5}^5, \end{aligned}$$

де  $C^1, C^k, C^5$  — значення концентрації домішки на тому чи іншому розрахунковому кроці.

Гранична умова непротікання реалізується за рахунок використання фіктивних комірок. На основі побудованої чисельної моделі розроблено програмний пакет «Stationery source of air pollution 3D».

Проведено ряд обчислювальних експериментів для вивчення динаміки забруднення атмосферного повітря при стаціонарному викиді оксиду вуглецю «Північним гірничо-збагачувальним комбінатом» на території міста Кривий Ріг.

Згідно даних екологічного паспорту міста відносно викидів в атмосферу великих підприємств, інтенсивність викиду оксиду вуглецю складає  $Q = 1200$  г/с. Розрахунок виконувався при наступних параметрах: розміри розрахункової області  $5 \times 3$  км, швидкість вітру складала  $U = 7$  м/с при направленні вітру з півночі на південно-схід (рис. 1),  $C_{\max} = 5,7426$  мг/м<sup>3</sup>,  $t = 52$  с. Значення концентрації представлено у відсотках від максимальної її величини на даний момент часу.

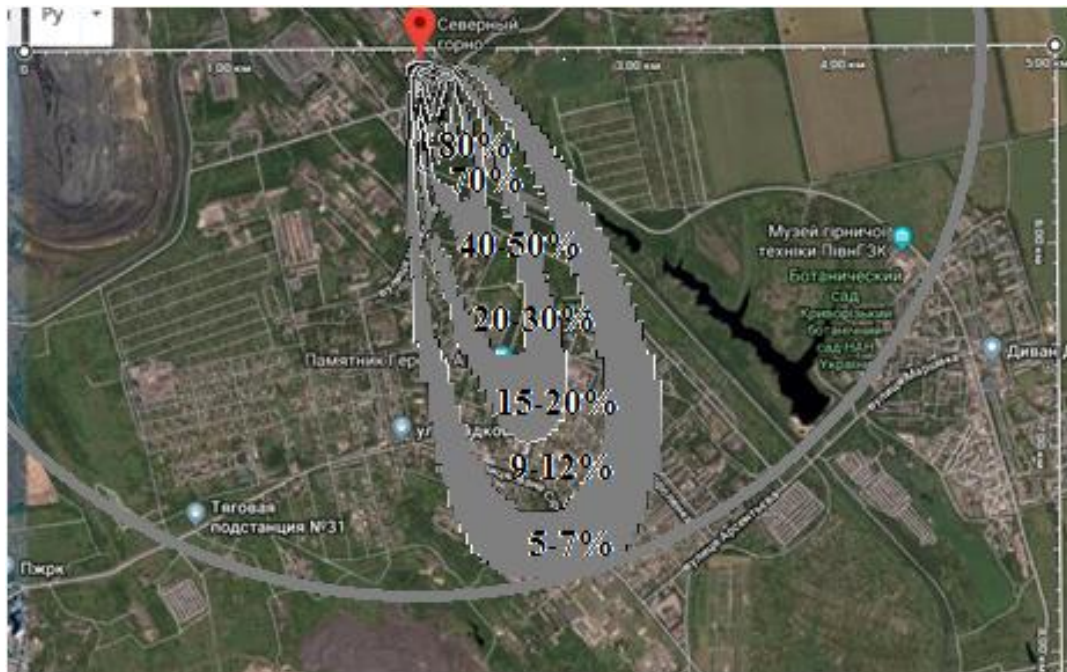


Рис. 1. Відсотковий розподіл концентрації оксиду вуглецю в зоні забруднення

$GDK_{сд}$  — середньодобова гранично допустима концентрація оксиду вуглецю складає 3 мг/м<sup>3</sup>,  $GDK_{мр}$  — максимально одноразова концентрація оксиду вуглецю складає 5 мг/м<sup>3</sup>. Розрахунки показують, що максимальне значення концентрації  $C_{\max} = 5,7426$  мг/м<sup>3</sup> може перевищувати

$GDK_{mp}$ , але її розподіл повільно зменшується, починаючи від центру джерела викиду (Північного ГЗК) до периферії. Відсотковий розподіл концентрації оксиду вуглецю показано на рис.1, в зону забруднення потрапляють: комбінат та його територія — до 70 %, вул. Черкасова — 40—50 %, Північний парк — 20—30 %, вул. Грядкова — 15—20 %, вул. Івана-Сірка та вул. Короленка — 9—12 %, вул. Арсентієва — менше 5 %.

На рис. 1 колом окреслено загальну зону забруднення, яка виникає при зміні метеорологічних умов, а саме напрямку вітру. Показники концентрації  $C_{[CO]}$  з автоматизованих постів спостереження, що розташовані в місті Кривий Ріг, не перевищують навіть  $GDK_{cd}$ , тобто їх місцезнаходження не дозволяє об'єктивно оцінювати концентрацію домішки в атмосфері. Своєчасна оцінка масштабів і рівня забруднення є доцільною для розробки більш конструктивної схеми розташування постів спостереження за якістю атмосферного повітря в місті для роботи системи моніторингу та впровадження заходів екологічної безпеки населення.

#### **Висновки та перспективи подальших досліджень**

В результаті проведених досліджень було отримано наступні результати:

- представлено математичну модель розсіювання домішки в атмосфері від постійно діючого стаціонарного джерела забруднення;
- застосовано чисельну модель на основі розщеплення тримірних рівнянь переносу забруднювача за допомогою неявних різницевих схем;
- розроблено програмне забезпечення для розрахунку концентрації забруднення атмосферного повітря оксидом вуглецю;
- проведено обчислювальні експерименти, встановлено зони та рівень забруднення;
- в подальшому планується проведення досліджень по оцінці ризиків хронічної інтоксикації, пов'язаної з забрудненням атмосферного повітря оксидом вуглецю.

#### **Список використаної літератури**

1. Biliaiev M. M. Determination of areas of atmospheric air pollution by sulfur oxide emissions from mining and metallurgical and energy generating enterprises / M. M. Biliaiev, T. I. Rusakova, V. Ye. Kolesnik, A. V. Pavlichenko // Науковий вісник НГУ. – 2017. – № 3. – С. 100–106.
2. Murakami, S. Comparison of “k-ε” model, ASM and LES with wind tunnel test for flow field around cubic model / S. Murakami, A. Mochida, H. Yoshihiko // 8th Intern. Conf. on Wind Engineering. – Western Ontario, 1991. – № 12. – P. 3.
3. Use of gaussian mathematical model in the distribution of sulphur dioxide into the atmosphere from point source (2017) / S. Jaćimovski, S. Miladinović, R. Radovanović, V. Pijazi // Tehnički vjesnik 24, Suppl. 1, 157–162.
4. Y Qu. Development of building resolving atmospheric CFD code taking into account atmospheric radiation in complex geometric / Y Qu, M. Millez, L. Musson-Genon // Air Pollution Modeling and it's Application, NATO SPS Series C : Environmental Security, 2010. – P. 1–5.
5. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды / Г.И. Марчук. – М. : Наука, 1982. – 320 с.
6. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 368 с.