

- праць. – Івано-Франківськ: Плай, 2010. – № 2(16). – С. 115–121.
8. Фень М.И. Эффективность труда в современных условиях / М.И. Фень, Р.Я. Романюк // Проблемы недропользования: сб. научных трудов. – Санкт-Петербург. – 2013. – Ч. II. – С. 130–131.
 9. Фень М.И. Особенности планирования производительности труда в современных условиях / М.И. Фень, Р.Я. Романюк // Современный научный вестник: экономические науки. – Белгород: Руснаучкнига, 2013. – № 33(172). – С. 44–50.
 10. Борождкіна Н.О. Комплексний аналіз логістичних процесів металургійної галузі в межах ефективного господарювання підприємств / Н.О. Борождкіна, К.О. Левчук // Вісник Житомирського державного технологічного університету. Серія: Економічні науки. – 2014. – № 2(68). – С. 90–94.

пост. 12.10.2017

І.К. КАРИМОВ, к.ф.-м.н., доцент

Г.І. КАРИМОВ, к.е.н., доцент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Реалізація неявних різницевих схем розв'язання задач математичної фізики засобами табличного процесора MS Excel

Запропонований новий підхід до реалізації неявних різницевих схем, заснований на використанні табличного процесора MS Excel. Надано алгоритм і результати розв'язання крайової задачі теплопровідності на основі запропонованого підходу.

There was proposed new approach to realization of implicit difference scheme that is based on usage of table processor MS Excel. There was given algorithm and results for solving of boundary-value problem of thermal conductivity based on the proposed approach.

Постановка проблеми

При дослідженні різноманітних технологічних процесів доводиться використовувати математичні моделі на основі рівнянь математичної фізики. Одним з найпоширеніших методів розв'язування таких задач є метод скінчених різниць, заснований на побудові явних або неявних різницевих схем [1–5]. Реалізація таких схем пов'язана з великим обсягом обчислень і зазвичай проводиться на ПК за програмою, складеною на одній з мов програмування [5–6]. Для фахівців, чия основна робота не пов'язана з програмуванням, такий підхід призводить до певних труднощів, що і зумовлює актуальність пошуку альтернативних шляхів реалізації різницевих схем.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблема використання методу скінчених різниць для розв'язання задач математичної фізики досліджувалася багатьма вітчизняними та зарубіжними вченими, які розглядали загальні принципи побудови різницевих схем [1–3], особливості їх використання для окремих типів задач [4–5]; принципи реалізації на основі алгоритмічних мов програмування [5–6]. Відомі також спроби застосування інших програмних засобів для реалізації різницевих схем [7–9], однак, дане питання вивчене ще недостатньо, що потребує подальших досліджень, зокрема, в напрямку розробки алгоритмів реалізації неявних різницевих схем в загальнодоступних програмних середовищах.

Формулювання мети дослідження

Мета дослідження — вивчення особливостей використання табличного процесора MS Excel для реалізації неявних різницевих схем, розробка та апробація відповідного алгоритму на прикладі розв'язання крайової задачі для типового рівняння параболічного типу — рівняння теплопровідності.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо модельну крайову задачу для рівняння теплопровідності, яка в допущенні про одновимірний характер переносу теплоти в просторі може мати, наприклад, такий вигляд [6]:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < S; \quad (1)$$

$$t(x, 0) = t_0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad -\lambda \left. \frac{\partial t}{\partial x} \right|_{x=S} = \alpha(t(S, \tau) - t_{cp}). \quad (3)$$

Розрахункові співвідношення при використанні неявної різницевої схеми для такої задачі приводять до системи рівнянь [6]

$$A_i t_i^{n+1} - C_i t_i^{n+1} + B_i t_{i+1}^{n+1} = -F_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (4)$$

де

$$A_i = B_i = \frac{a \Delta \tau}{\Delta x^2}; \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$A_0 = 0; \quad A_N = \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2};$$

$$B_0 = \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2}; \quad B_N = 0;$$

$$C_i = 1 + A_i + B_i; \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$C_N = 1 + \frac{2a \Delta \tau}{\Delta x^2} + \frac{2\alpha \Delta \tau}{c \rho \Delta x};$$

$$F_i = t_i^n; \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$F_N = t_N^n + \frac{2\alpha \Delta \tau}{c \rho \Delta x} t_{cp}.$$

В наведених формулах $\Delta\tau$ і Δx — кроки різницевої сітки за змінними τ та x , відповідно; t_i^n і t_i^{n+1} — значення шуканої функції в точці $x_i = i\Delta x$ в попередній та наступний моменти часу; $a, c\rho, \alpha, t_{cp}$ — константи, які характеризують конкретні умови перебігу процесу; $N=S/\Delta x$.

Для розв'язання системи рівнянь (4) на кожному часовому кроці використовується метод прогону, в якому прямиий хід реалізується формулами

$$\xi_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \xi_i}, \eta_{i+1} = \frac{A_i \eta_i + F_i}{C_i - A_i \xi_i}, i = 0, 1, \dots, N, \quad (5)$$

а обернений хід — формулою

$$t_i^{n+1} = \xi_{i+1} t_{i+1}^{n+1} + \eta_{i+1}, i = N, N-1, \dots, 0, \quad (6)$$

причому $\xi_0 = 0; \eta_0 = 0; t_N^{n+1} = \eta_{N+1}$.

Як видно, алгоритм розв'язання задачі (1)–(3) є типовим алгоритмом циклічної структури, в якому параметром циклу виступає змінна τ , що набуває значень від 0 до деякого τ^* . Величина τ^* може бути однозначно заданою в разі моделювання перебігу процесу протягом

конкретного часу або ж визначатися в самому процесі моделювання, якщо процес ведеться, наприклад, до досягнення заданого значення шуканої функції в певній точці. Таким чином, мова може йти або про цикл з параметром, або про ітераційний цикл. В будь-якому разі тіло циклу складають операції, що реалізують обчислення коефіцієнтів системи рівнянь (4) та формули методу прогону (5)–(6). Зауважимо, що значення коефіцієнтів A_i, B_i, C_i ($i = 0, 1, \dots, N$) від кроку до кроку не змінюються, отже, їх можна обчислити до початку циклу. Те ж саме стосується коефіцієнтів ξ_i , за допомогою яких реалізується метод прогону.

Алгоритми циклічної структури можуть бути реалізовані в середовищі табличного процесора MS Excel, причому не тільки засобами мови VBA (Visual Basic for Application), а й в режимі маніпулювання даними, без безпосереднього програмування. В останньому випадку необхідно просто внести відомі дані в комірки електронної таблиці, записати формули, що реалізують один крок обчислень, та організувати копіювання формул необхідну кількість разів.

Фрагмент електронної таблиці, побудований за описаним принципом для розв'язання задачі (1)–(3), наведено на рис. 1. В діапазоні комірок A1:F1, A2:H2 містяться значення констант $a, c\rho, \alpha, t_0, t_{cp}, \Delta x, \Delta\tau$, які

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$a = 1,00E-05$		$c\rho = 5,29E+06$		$\alpha = 150$		$\Delta\tau^* = 2$	
2	$t_0 = 20$		$t_{cp} = 1200$		$\Delta x = 0,05$		$\Delta\tau = 120$	
3	4,80E-01	1,36E-01						
4								
5	A_i	0,00	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,96
6	B_i	0,96	0,48	0,48	0,48	0,48	0,48	0,00
7	C_i	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	1,96	2,10
8								
9		Температура в точці з координатою						
10	$\tau, \text{хв}$	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3
11	0	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00	20,00
12	2	20,06	20,11	20,41	21,56	25,96	42,78	107,05
13	4	20,29	20,53	21,63	25,27	36,64	70,27	161,18
14	6	20,84	21,42	23,87	30,99	50,01	96,88	199,18
15	8	21,87	22,94	27,17	38,28	64,57	121,19	228,45
16	10	23,48	25,16	31,46	46,68	79,42	143,10	252,45
17	12	25,75	28,10	36,60	55,82	94,09	162,90	272,96
18	14	28,70	31,77	42,47	65,41	108,33	180,91	291,00
19	16	32,33	36,11	48,94	75,25	122,04	197,41	307,16
20	18	36,61	41,08	55,89	85,19	135,21	212,65	321,85
21	20	41,51	46,61	63,24	95,16	147,84	226,83	335,35
22	22	46,96	52,64	70,89	105,08	159,96	240,09	347,87
23	24	52,91	59,11	78,79	114,94	171,62	252,58	359,56
24	26	59,31	65,96	86,89	124,70	182,85	264,39	370,55
25	28	66,08	73,14	95,15	134,36	193,69	275,62	380,93
26	30	73,19	80,59	103,53	143,91	204,19	286,33	390,79

Рис. 1. Фрагмент листа MS Excel

характеризують конкретні умови перебігу процесу та задають параметри різничевої сітки. Комірка Н1 містить формулу для обчислення значення $\Delta\tau$ в хвиликах (для наочності подання результатів моделювання). В комітках А3:G3 розміщені формули (див. табл. 1) для обчислення деяких величин, що не змінюються в подальших розрахунках (нагадаємо, що при розміщенні в комітках однакових формул, їх не обов'язково вводити щоразу, можна просто скопіювати).

Таблиця 1. Формули діапазону комірок А3:Н7

Комірка	Формула	Пояснення
A3	=B1*H2/F2^2	$K_1 = \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}$
B3	=2*F1*H2/D1/F2	$K_2 = \frac{2\alpha\Delta\tau}{c\rho\Delta x}$
B5, H6	0	A_0, B_N
C5:G6	=A3	$A_i, B_i, i=1,2,\dots,N-1$
H5, B6	=2*A3	A_N, B_0
B7:G7	=1+H5	$C_i, i=0,1,\dots,N-1$
H7	=B7+B3	C_N

Комірки А9:Н10 містять пояснюючий текст; комірка А11 — початкове значення часу; комірки В11:Н11 — формулу =B\$2 (задається початкове температурне поле).

В комірці А8 розміщена формула =A8+\$H\$1, яка реалізує перехід до наступного моменту часу.

Діапазони комірок І12:О12, В13:О3 містять формули, що реалізують обчислення значень шуканої функції в момент часу $\tau = \Delta\tau$ (див. табл. 2).

Таблиця 2. Формули діапазону комірок А3:Н7

Комірка	Формула	Пояснення
I11	=B\$6/B\$7	ξ_1
J11	=C\$6/(C\$7-C\$5*I\$11)	ξ_2 (формула копіюється в діапазон К11:О11)
I12	=B11/B\$7	η_1
J12	=(C\$5*I12+C11)/(C\$7-C\$5*I\$11)	η_2 (формула копіюється в діапазон К12:Н12)
O12	=(H\$5*N12+H11+B\$3*\$D\$2)/(H\$7-H\$5*N\$11)	η_N
B12	=I\$11*C12+I12	t_0^{n+1} (формула копіюється в діапазон С12:G12)
H12	=O12	t_N^{n+1}

Як наслідок виконаних дій в комітках В12:Н12 з'являються значення шуканої функції в момент часу $\tau = \Delta\tau$. Далі необхідно просто виділити діапазон комірок А13:О13, схопити мишкою за маркер заповнення і протягнути вниз на необхідну кількість рядків. В рядках автоматично будуть з'являтися значення шуканої функції в нові моменти часу. Для припинення копіювання формул (фактично — припинення обчислень) слід контролювати значення в стовпчику А (якщо заданий час проведення процесу) або в стовпчиках В чи Н (якщо потрібно досягнути певного значення в одній з граничних точок). В будь-який момент можна припинити копіювання формул для аналізу вже одержаних даних, а потім продовжити обчислення шляхом копіювання останнього рядка з даними. Стовпчики І:О можна тимчасово сховати (команда *Сховати* контекстного меню при виділенні стовпчиків), оскільки вони містять проміжні дані, що не використовуються в подальшому аналізі досліджуваного процесу.

Як видно, процедура реалізації неявної різничевої схеми дещо складніша від аналогічної процедури для явної схеми [9], але значно простіша порівняно з підходом, заснованим на безпосередньому програмуванні на одній з алгоритмічних мов. В ряді випадків цей фактор може виявитися вирішальним, зокрема, при вивченні методу скінчених різниць, аналізі відмінностей явних і неявних схем, особливостей явно-неявних схем тощо.

Одержані описаним вище способом дані дозволяють проаналізувати модельований процес в усіх аспектах, що цікавлять дослідника: відповісти на ряд питань щодо характеру розподілу температур в досліджуваній області, визначити час досягнення тієї чи іншої температури в заданій точці, перепади температур тощо.

Суттєвим є і той факт, що використання табличного процесора дає можливість легко ілюструвати одержані результати без виконання проміжних операцій первинної обробки даних. Так, для одержання графіка, наведеного на рис.2, досить просто виділити діапазони комірок А11:В37, Н11:Н37 і відпрацювати стандартну для MS Excel процедуру побудови діаграми типу "графік".

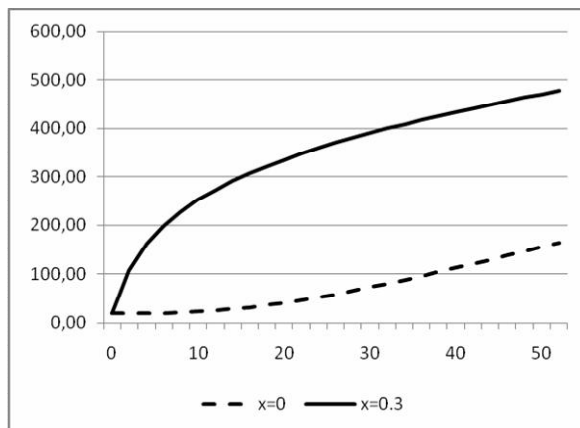


Рис. 2. Графік зміни температур граничних точок

Особливо слід відзначити привабливість застосування запропонованого підходу в навчальному процесі. Відмова від програмування дає можливість студентам скоротити складову моделювання, не пов'язану безпо-

середнього з майбутньою фаховою діяльністю, сконцентрувати зусилля на формуванні навичок побудови математичних моделей та аналізу особливостей перебігу досліджуваного процесу. Як наслідок, процес навчання стає більш творчим, краще засвоюються теоретичні положення, підвищується мотивація та зацікавленість в застосуванні методів математичного моделювання.

Висновки та перспективи подальших досліджень

1. Запропонований новий підхід до реалізації неявних різницевих схем, заснований на використанні табличного процесора MS Excel.

2. Надано алгоритм і результати розв'язання крайової задачі теплопровідності на основі запропонованого підходу.

3. До найбільш привабливих рис запропонованого підходу слід віднести відмову від безпосереднього програмування, простоту комп'ютерної реалізації, легкість та природність унаочнення результатів.

4. Використання запропонованого підходу в навчальному процесі сприяє кращому засвоєнню теоретичних положень, підвищує мотивацію та зацікавленість в застосуванні методів математичного моделювання.

5. Особливості застосування запропонованого підходу в окремих випадках (нелінійні задачі, двовимірні задачі тощо) потребують подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский – М.: Наука, 1983. – 616 с.
2. Годунов С.К. Разностные схемы. Введение в теорию/ С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
3. Фельдман Л.П. Чисельні методи в інформатиці/ Л.П. Фельдман, А.І. Петренко, О.А. Дмитрієва. – К.: Видавнич група ВНУ, 2006. – 480 с.
4. Пасконов В.М. Численное моделирование процессов тепло- и массопереноса/ В.М. Пасконов, В.И. Полежаев, Л.А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
5. Огурцов А.П. Численные методы исследования гидродинамических и тепломассопереносных процессов сталеплавильного производства / А.П. Огурцов, С.Е. Самохвалов. – К.: Наукова думка, 1993. – 220 с.
6. Огурцов А.П. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ : учеб. пособие / А.П. Огурцов, Л.М. Мамаев, И. К. Каримов. – К.: ИСМО, 1997. – 192 с.
7. Кундрат А.М. Науково-технічні обчислення засобами MathCAD та MS Excel: навч. посібник/ А.М. Кундрат, М.М. Кундрат. – Рівне: НУВГП, 2014. – 252 с.
8. Поршнев С.В. Численные методы на базе MathCAD/ С.В. Поршнев, И.В. Беленкова. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 464 с.
9. Карімов І.К. Реалізація різницевих схем засобами табличного процесора MS Excel/ І.К. Карімов, Г.І. Карімов, С.А. Нужна// Проблеми математичного моделювання: Матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., 24–26 трав. 2017 р. – Дніпро: Біла К.О., 2017. – С. 130–132.

пост. 31.10.2017