

А.Д. ГОРБУНОВ, д.т.н., профессор
С.В. УКЛЕИНА, аспирант

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

Решение задачи конвективно-радиационного нагрева (охлаждения) тел простой геометрической формы методом конечных разностей

Разработана конечно-разностная методика расчета температурных полей и термических напряжений при нагреве (охлаждении) простых тел одновременно конвекцией и излучением. Расчетами установлено равенство двух вариантов: $Sk = \infty, Bi = 0$ и $Bi = \infty, Sk = 0$. Это обстоятельство подтвердило сделанный ранее вывод о том, что в случае интенсивного нелинейного теплового нагружения определение поля температур можно вести по линейной теории конвективного нагрева (охлаждения) тел при $Bi = \infty$.

A finite-difference method for temperature fields and thermal stresses for heating (cooling) calculation of simple bodies by convection and radiation was developed. By calculations, the equality of two variants is established: $Sk = \infty, Bi = 0$ and $Bi = \infty, Sk = 0$. This circumstance confirmed the earlier conclusion that in the case of intense nonlinear thermal loading, the determination of the temperature field can be carried out by the linear theory of convective heating (cooling) bodies for $Bi = \infty$.

Анализ публикаций

В работе [1] приведены результаты расчетов численного интегрирования (методом сеток) конвективно-радиационного нагрева при умеренных числах Био и Старка (менее 5). Кроме того, там отсутствует информация о среднemasовых температурах, без знания которых невозможно определить термические напряжения.

Получим решения, свободные от указанных недостатков.

Постановка задачи

Математическая постановка задачи симметричного нагрева тел простой геометрической формы конвекцией и радиацией от начальной температуры T_0 до температуры среды T_c имеет вид (см. рис. 1).

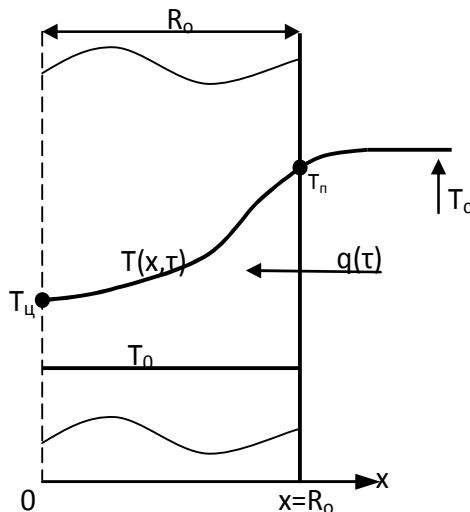


Рис. 1. К постановке задачи теплопроводности

$$\frac{\partial \theta(X, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{X^v} \cdot \frac{\partial}{\partial X} \left(X^v \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \right); \quad (1)$$

$$\theta(X, 0) = \theta_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial X} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Q(\theta_n) = Bi(\theta_c - \theta_n) + Sk(\theta_c^4 - \theta_n^4), \quad (4)$$

где $\theta = T/T_x$; $\theta_0 = T_0/T_x$ — начальная температура; $\theta_c = T_c/T_x$ — температура окружающей среды; $\theta_n(Fo) = \theta(1, Fo)$ — относительная температура поверхности; $X = x/R_0$; $Bi = \alpha \cdot R_0/\lambda$ — число Био; $Sk = \sigma T_x^3 R_0/\lambda$ — радиационное число Старка; $Fo = \alpha t/R_0^2$ — число Фурье; v — коэффициент геометрической формы, равный 0, 1, 2 соответственно для пластины, цилиндра и шара; T_x — характерная или масштабная температура, °К. В случае нагрева $T_x = T_c$ и тогда следует положить $\theta_c = 1$, а при охлаждении $T_x = T_0$ и $\theta_0 = 1$.

Согласно [3] осевые термические напряжения можно определить по формулам:

на поверхности

$$\tilde{\sigma}_n(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_n(Fo) \quad (5)$$

и в центре тела

$$\tilde{\sigma}_c(Fo) = \theta_{cp}(Fo) - \theta_c(Fo), \quad (6)$$

где $\tilde{\sigma}(Fo) = \sigma(x, \tau)/\sigma_0$ — относительное термическое напряжение; $\sigma_0 = \beta E \cdot T_x / (1 - \mu)$; β — линейный коэффициент термического расширения, $1/K$; E — модуль упругости, Па; μ — коэффициент Пуассона.

Среднemasовая температура θ_{cp} отсутствует в системе уравнений (1)...(4), но её можно найти по известному выражению [4]:

$$\theta_{cp}(Fo) = (v+1) \int_0^1 \theta(X, Fo) X^v \cdot dX. \quad (7)$$

Решение задачи

Систему уравнений (1)...(7), представляющую собой математическую постановку задачи нестационарной теплопроводности, будем решать явным методом конечных разностей [5, 6]. Для этого введем в расчетной области изменения пространственной координаты $0 \leq X \leq 1$ равномерную сетку (рис. 2) с относительным шагом $H = 1/N$, где N — число разбиений (должно быть четным) и пронумеруем точки от 1 до $N_1 = N + 1$. Тогда величина $X_j = (j-1) \cdot H$, в которой $j = 1, 2, \dots, N, N_1 = 1, N_1$ будет расстоянием от геометрического центра тела до рассматриваемой точки j .

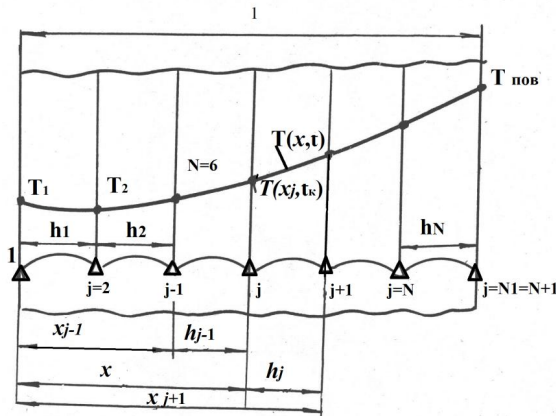


Рис. 2. Схема сеточной области

Поставим в соответствие непрерывной функции поля температур $\theta(X, Fo(\tau))$ дискретную функцию $\theta_j^k = \theta(X_j, \tau_k)$, определённой в узлах разностной сетки $X = X_j$ в фиксированные моменты времени $\tau_k = k \cdot \Delta\tau$, где $\Delta\tau$ — сеточный шаг во времени, $k = 0, 1, 2, \dots$ — номер временного слоя.

Заменяя в уравнении (1) непрерывные производные явными конечно-разностными соотношениями согласно [5,6], получим сеточный или конечно-разностный аналог (аппроксимацию) исходного дифференциального уравнения теплопроводности:

$$\hat{\theta}_j = \theta_j + G [E_p(\theta_{j+1} - \theta_j) - E_M(\theta_j - \theta_{j-1})], \quad j = 2, N, \quad (8)$$

где $G = Fo_c = \Delta Fo \cdot N^2$ — сеточное число Фурье; $\Delta Fo = a\Delta\tau / R_0^2$ — обычное изменение числа Фурье;

$$\theta_j = \theta(X_j, \tau_k); \quad \hat{\theta}_j = \theta(X_j, \tau_{k+1});$$

$$X_p = (X_j + X_{j+1})/2 = (2j-1) \cdot H/2;$$

$$X_M = X_{j-1/2} = (X_j + X_{j-1})/2 = (2j-3) \cdot H/2;$$

$$E_p = (X_p / X_j)^v = \left(\frac{2j-1}{2 \cdot (j-1)} \right)^v;$$

$$E_M = (X_M / X_j)^v = \left(\frac{2j-3}{2 \cdot (j-1)} \right)^v.$$

Для плоских тел коэффициент формы тела $v = 0$ и уравнение (8) упрощается до вида:

$$\hat{\theta}_j = \theta_j + G \cdot (\theta_{j+1} - 2\theta_j + \theta_{j-1}). \quad (9)$$

Из уравнения (9) вытекает требование $Fo_c \leq 1/2$, которое называется условием устойчивости примененной здесь явной разностной схемы.

Начальное условие (2) при $\tau = 0$ станет:

$$\theta(X_j, 0) = \theta_0, \quad j = \overline{1, N_1}. \quad (10)$$

Простая аппроксимация граничного условия (3):

$$\hat{\theta}_1 = \theta_2 \quad (11)$$

либо повышенной точности, с использованием интерполяционного полинома Ньютона на трехточечном шаблоне

$$\hat{\theta}_1 = (4\theta_2 - \theta_3)/3. \quad (12)$$

Аналогичный подход к правой границе дает

$$\hat{\theta}_{N_1} = (4\theta_N - \theta_{N-1})/3. \quad (12a)$$

Рассчитывая цилиндрические и сферические тела в их центре при $X = 0$ в уравнении (1) возникает неопределенность $\frac{\partial\theta/\partial X}{X}$ типа $\frac{0}{0}$ и требуется более точная аппроксимация, чем по уравнению (11).

Используя рекомендации [5], а именно, разложение функции поля температур в ряд Тейлора в окрестности точки $X = 0$:

$$\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_1 + \frac{\partial\theta(0, Fo)}{\partial X} \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2\theta(0, Fo)}{\partial X^2} h_1^2$$

при $\frac{\partial\theta(0, Fo)}{\partial X} = 0$ и раскрытие неопределенности по правилу Лопиталя, было получено

$$\hat{\theta}_1 = (\hat{\theta}_2 + F_1 \cdot \theta_1) / (1 + F_1), \quad (13)$$

где $F_1 = 1/[2(1+\nu)Fo_c]$.

Существует много способов для расчета температуры поверхности θ_n . Укажем основные из них. Первый способ.

Прямая разностная аппроксимация граничного условия (4) на правой границе при $X = 1$ ($j = N_1$, см. рис. 2) приводит к алгебраическому уравнению 4-ой степени относительно искомой температуры на поверхности $\theta_n = \hat{\theta}_{N_1}$:

$$\theta_n - \theta_N = Q_c(\theta_n) = Bi_c(\theta_c - \theta_n) + Sk_c(\theta_c^4 - \theta_n^4), \quad (14)$$

где $Q_c(\theta_n)$ — сеточный тепловой поток; $\theta_n = \theta_{N_1}$ — сеточная температура на поверхности при $j = N_1$, $Bi_c = Bi/N$ — сеточное число Био, $Sk_c = Sk/N$, то же — число Старка.

С целью уменьшения числа переменных, приведем последнее выражение к каноническому виду

$$N \cdot Z^m + Z - 1 = 0, \quad (15)$$

в котором $N = \frac{Sk \cdot A^3}{(1 + Bi_c)}$; $C = \theta_N + Bi_c \cdot \theta_c + Sk_c \cdot \theta_c^4$;

$$A = \frac{C}{(1 + Bi_c)}; \quad Z = \theta_n / A \quad \text{и} \quad m = 4.$$

В работе [7] приведена итерационная формула решения (15) по методу касательных Ньютона [6]:

$$Z_{k+1} = Z_k - \frac{f(Z_k)}{f'(Z_k)} = \frac{1 + (m-1) \cdot N \cdot Z_k^m}{1 + mN Z_k^{m-1}}, \quad (16)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — номер итерации.

Число итераций по уравнению (16), необходимое для достижения заданной точности, например, $\varepsilon = 0,00001$, когда $|Z_{k+1} - Z_k| \leq \varepsilon$, можно значительно сократить, если правильно выбрать первое приближение Z_1 .

В [7] показано, что при малых числах $N < 1$

$$Z_1 = 1 - \frac{N}{1 + mN}, \quad (17)$$

а при больших $N \geq 1$

$$Z_1 = \frac{1}{1/m + N^{1/m}}. \quad (18)$$

После определения Z искомая температура поверхности $\theta_n = C \cdot Z / (1 + Bi_c)$.

В случае отсутствия излучения $Sk = 0$, $N = 0$ и $Z = 1$ согласно уравнению (17), тогда уравнение (14) для расчета температуры поверхности разрешается в явном виде:

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{N1} = \frac{\hat{\theta}_N + Bi_c \cdot \hat{\theta}_c}{1 + Bi_c}. \quad (19)$$

Второй способ расчета θ_n . Если, по аналогии с выводом уравнения (13), использовать разложение функции температур в ряд Тейлора в окрестности поверхности $X = 1 (j = N1)$:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_n + \frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} \cdot (-h_n) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \theta(1, Fo)}{\partial X^2} h_n^2$$

при $\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial X} = Q_c$ согласно уравнению (14), после преобразований получим

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{F_2} \left[\hat{\theta}_N + \frac{\theta_N}{2 \cdot G} + F_3 \cdot Q_c(\theta_n) \right], \quad (20)$$

где $F_2 = 1 + \frac{1}{2G}$; $F_3 = 1 - \frac{v}{2N}$.

Третий способ. В работе [2], используя идею фиктивного слоя и приемы метода элементарных балансов Ваничева, было предложено следующие уравнения для расчета температуры поверхности

$$\hat{\theta}_n = \theta_n + 2 \cdot G \left[Q_c(\theta_n) / F_3 - (\theta_n - \hat{\theta}_N) \right]. \quad (21)$$

Применяя к интегралу (7) метод трапеций [6], получим разностную формулу для расчета среднemasовой температуры

$$\hat{\theta}_{cp} = (v+1) \cdot [S \cdot H^{(v+1)} - D], \quad (22)$$

где сумма ряда $S = \sum_{j=1}^{N1} \theta_j \cdot (j-1)^v$; $H = 1/N$,

$$D = \frac{[(\theta_1 + \theta_n) \cdot H]}{2}.$$

Система уравнений (8)...(22) представляет собой конечно-разностную аппроксимацию исходной задачи (1)...(7).

По данному алгоритму была составлена программа на языке Фортран-77, тестирование которой проводилось путем сопоставления с точными аналитическими решениями [3] для случая конвективного нагрева тел простой формы при $Bi = \text{const}$ и $Sk = 0$.

Проверка методики на адекватность

Оценку эффективности предложенных схем осуществим путем сопоставления с точными решениями конвективного нагрева пластины ($v = 0$) от начальной температуры $\theta_0 = 0$ при $Bi = 2$ и $\theta_c = 1$. Примем следующие сеточные параметры задачи: число разбиений тела $N = 20$ и сеточное число Фурье $G = Fo_c = 0,25$. Тогда сеточное число Био $Bi_c = Bi/N = 2/20 = 0,1$. Температура поверхности в самый первый момент времени $Fo_1 = \Delta Fo = G/N^2 = 0,25/20^2 = 0,000625$, например, по формуле (19) станет $\hat{\theta}_n(Fo_1) = (0 + 0,1 \cdot 1)/(1 + 0,1) = 0,0909$. Результаты расчетов θ_n по другим формулам и точное решение сведены в табл. 1. Согласно [3] теоретическое значение температуры поверхности при очень малых числах Фурье:

$$\theta_n^T(Fo) = 1 - \varphi(y), \quad (23)$$

где $y = Bi \sqrt{Fo}$ — модифицированное время;

$\varphi(y) = e^{y^2} \cdot (1 - \text{erf}y)$; $\text{erf}y = p \int_0^y e^{-x^2} dx$ — функция ошибок Гаусса; $p = 2/\sqrt{\pi}$.

Решение (23) можно упростить путем разложения функции $\varphi(y)$ в ряд при малых ($y < 1$): $\varphi(y) \approx 1 - py + y^2 - 2py^3/3 + \dots$ и при больших ($y \gg 1$) аргументах: $\varphi(y) \approx [1 - 1/(2y^2)]/(\sqrt{\pi}y)$. С учетом разложения формула (23) при ($y < 1$) примет вид:

$$\theta_n^T(Fo) = y(p - y(1 - 2py/3)). \quad (24)$$

Если принять $y = Bi \cdot \sqrt{Fo_1} = 2 \cdot \sqrt{0,000625} = 0,05$,

то из (24) получим $\theta_n^T(Fo_1) = 0,054$ — см. табл. 1.

Таблица 1. Температура поверхности в момент времени $Fo_1 = 0,000625$, рассчитанная по различным уравнениям

Температура поверхности $\theta_n(Fo_1)$. Расчет по формулам			
(24)	(19)	(20)	(21)
0,054	0,091	0,033	0,050

Из анализа табличных данных следует, что самую минимальную погрешность расчета температуры поверхности имеет формула (21). Однако, численными экспериментами, путем перебора чисел Био, было установлено, что при больших числах Био $Bi > 20$ все схемы, кроме (19) оказались «расходящимися», т.е. непригодными к использованию. Оценить предельное число Био и Старка $(Sk + Bi)_{пр}$, можно из неравенства $\theta < 1$, используя, например, уравнение (21), а именно: $(Sk + Bi)_{c.п.} < 1/(2G)$ или

$$(Sk + Bi)_{пр} \leq N/(2 \cdot G). \quad (25)$$

Для рассматриваемого здесь примера $Bi_{пр} \leq 20/(2 \cdot 0,25) = 40$.

По схеме (19) был посчитан вариант при $Bi = 10^7$ и $Sk = 0$ с погрешностью определения температур в центре, например, при $Fo = 1$: $П_{\theta_c} = (1 - 0,8921/0,8920) \cdot 100 = 0,01\%$, где $\theta_n^T(1) = 1 - (4/\pi) \cdot \exp(-\pi^2 \cdot 1/4) = 0,8920$ — теоретическая температура в центре.

Следует отметить, что второй вариант при $Sk = 10^7$ и $Bi = 0$ — оказался полностью идентичен первому. Таким образом, подтвердился сделанный в работе [8] вывод о том, что расчет температур при любых нелинейных интенсивных тепловых нагрузках, т.е. при граничных условиях I рода можно считать по линейной теории конвективного нагрева (охлаждения) тел при $Bi = \infty$.

Выводы

1. Разработана конечно-разностная методика расчета температурных полей и термических напряжений при нагреве (охлаждении) простых тел одновременно конвекцией и излучением.

2. Путем использования метода касательных Ньютона, разложения на границах тела функции температур в ряд Тейлора, идеи фиктивного слоя и приемов метода элементарных балансов, получен ряд схем улучшенной аппроксимации граничных условий.

3. Выявлено, что выбор схемы существенно зависит от величины коэффициентов теплообмена чисел Старка и Био.

4. Расчетами установлено равенство двух вариантов: $Sk = \infty, Bi = 0$ и $Bi = \infty, Sk = 0$. Это обстоятельство подтвердило сделанный ранее вывод о том, что в случае интенсивного нелинейного теплового нагружения определение поля температур можно вести по линейной теории конвективного нагрева (охлаждения) тел при $Bi = \infty$.

5. Тестовые расчеты показали, что максимальные погрешности возникают на начальной стадии и при определении поверхностных температур, а применение формул улучшенной аппроксимации снижает погрешность с 5 % до 2 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Видин Ю.В., Иванов В.В. Расчет температурных полей в твердых телах, прогреваемых конвекцией и радиацией одновременно.— Красноярск: КПИ, – 1965. – 144 с.
2. Кавадеров А.В., Самойлович Ю.А.: Уточнение закономерностей неограниченной пластины // ИФЖ. - 1960. – т. III, – № 2. – С. 57–60.
3. Горбунов А.Д. К аналитическому расчету термических напряжений при конвективном нагреве тел простой формы // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2012. – № 1(26). – С. 39–45.
4. Гольдфарб Э.М. Теплотехника металлургических процессов.– М.: Металлургия, 1967. – 439 с.
5. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971.–552 с.
6. Огурцов А.П., Мамаев Л.М., Каримов И.К. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ. – К.: ИСМО, 1997. – 192 с.
7. Горбунов А.Д. Аналитический расчет процессов радиационного нагрева (охлаждения) тел на начальной стадии // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2012. – № 2(27). – С. 90–94.
8. Горбунов А.Д., Уклеина С.В. Аналитическое исследование нагрева твердых тел радиацией. Сообщение 3. // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2015 – № 2 (33). – С. 65–68.

пост. 18.09.2017