3. Рыжов А.Ф., Милашенко Н.С. Математическая модель тепло- и массопереноса при нагреве "массивного" плоского слоя жидкости / А.Ф. Рыжов, Н.С. Милашенко // Математичне моделювання. — 2014. — Днепродзержинск: ДДТУ, № 1 (30). — С. 75—78

пост. 08.12.2015

Оптимізація систем резервування методом точної квадратичної регуляції

А.І. КОСОЛАП, А.О. ДОВГОПОЛА

Український державний хіміко-технологічний университет

У роботі розглядається задача оптимізації структури систем резервування елементів. Такі завдання виникають при проектуванні складних систем. Для підвищення надійності функціонування таких систем її елементи дублюються. Це збільшує вартість системи і підвищує її надійність. При оптимізації таких систем максимізується ймовірність безвідмовної роботи всієї системи при обмеженні на її вартість або мінімізується вартість при заданій ймовірності безвідмовної роботи. Математична модель задачі резервування є дискретною багатоекстремальною. У роботі для вирішення завдань резервування використовується новий метод точної квадратичної регуляризації. В даний час, це кращий метод для локальної оптимізації нелінійних задач. Перетворена задача містить нову допоміжну змінну, яка визначається методом дихотомії. Були проведені численні порівняльні чисельні експерименти в задачах резервування з числом підсистем до ста. Ці експерименти підтверджують ефективність методу точної квадратичної регуляризації для вирішення задач резервування.

В работе рассматривается задача оптимизации структуры систем резервирования элементов. Такие задачи возникают при проектировании сложных систем. Для повышения надежности функционирования таких систем ее элементы дублируются. Это увеличивает стоимость системы и повышает ее надежность. При оптимизации таких систем максимизируется вероятность безотказной работы всей системы при ограничении на ее стоимость либо минимизируется стоимость при заданной вероятности безотказной работы. Математическая модель задачи резервирования является дискретной многоэкстремальной. В работе для решения задач резервирования используется новый метод точной квадратичной регуляризации. В настоящее время, это лучший метод для локальной оптимизации нелинейных задач. Были проведены многочисленные сравнительные численные эксперименты в задачах резервирования с числом подсистем до ста. Эти эксперименты подтверждают эффективность метода точной квадратичной регуляризации для решения задач резервирования.

The problem of optimization of the structure of systems redundancy elements. Such problems arise in the design of complex systems. To improve the reliability of operation of such systems of its elements are duplicated. This increases system cost and improves its reliability. When optimizing these systems is maximized probability of failure of the entire system while limiting its cost or the cost is minimized for a given probability of failure-free operation. A mathematical model of the problem is a discrete backup multiextremal. In the work for solving redundancy uses a new method for accurate quadratic regularization. Currently, it is the best method for local optimization of nonlinear problems. There have been numerous comparative numerical experiments in problems with the number of redundant subsystems to one hundred. These experiments confirm the effectiveness of the method of precise quadratic regularization for solving problems of redundancy.

Забезпечення заданого рівня надійності в системах обробки інформації реального часу є важливою та актуальною задачею, так як відмова або навіть збій в таких системах обробки інформації, може призвести до порушення роботи всієї системи, що в свою чергу може спричинити катастрофічні наслідки. Системи обробки даних містять безліч елементів, надійність яких впливає на надійність всієї системи. Покращити надійність системи можна за рахунок покращення надійності її елементів або шляхом їх резервування. Задачі оптимального резервування систем є досить складними обчислювальними проблемами, що пов'язано з їх багатоекстремальністю та дискретностью [1-2]. Виникає необхідність розробки нових та ефективних методів для даного класу задач. В даній роботі для розв'язування задач оптимального резервування систем пропонується метод точної квадратичної регуляризації [3].

Постановка задачі оптимального резервування. Нехай задана система, яка послідовно з'єднує n елементів. Кожен елемент може дублюватись певною кількістю аналогічних резервних елементів. На рис.1 представлено схему резервування елементів системи.

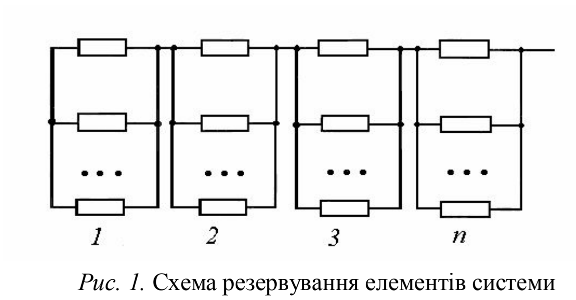

Рис. 1. Схема резервування елементів системи

При виході елементу з ладу його заміщає резервний елемент і система продовжує працювати. Чим більше резервних елементів, тим вище надійність системи. Але кількість резервних елементів впливає на вартість системи. Можна мінімізувати вартість системи при забезпеченні заданої надійності, або навпаки, максимізувати надійність при обмеженнях на вартість системи. Отримуємо пряму та обернену задачу оптимального резервування системи. Пряму задачу оптимального резервування при декількох обмеженнях можна сформулювати наступним чином: потрібно знайти таку кількість елементів для кожної підсистеми, щоб потрібний показник надійності системи в цілому забезпечувався при мінімальних сумарних витратах на всі резервні елементи.

Обернену задачу оптимального резервування при декількох обмеженнях можна сформулювати наступним чином: потрібно знайти таку кількість елементів для кожної підсистеми, щоб показник надійності системи був максимальним при обмежених сумарних витратах на всі резервні елементи [1].

У формальному записі пряма задача виглядає наступним чином: знайти вектор $\tilde{O}_0$ такий, що

$$C(X_0) = \min_{X_0 \in X} C(X),$$

де X − множина всіх можливих (допустимих) розв'язків, а надійність системи задовольняє умові

$$R(X) \ge R_0 .$$

Резервні елементи підключаються паралельно робочому елементу, тому надійність і-ї підсистеми визначаються формулою

$$R_i(x_i) = 1-(1-r_i)^{x_i+1},$$

де x_i – кількість резервних елементів і-ї підсистеми, а r_i – її надійність. Надійність системи визначається формулою

$$R(X) = \prod_{i=1}^{n} R_i(x_i) .$$

Нехай c_i − вартість одного елементу i-го типу підсистеми. Тоді пряма задача буде мати вигляд

$$\min\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i\, x_i \mid \prod_{i=1}^{n} R_i(x_i) \ge R_0, x \in N, x_i \ge 1, i = 1,\ldots,n \right\}, \quad (1)$$

де N – множина натуральних чисел.

Розглянемо обернену задачу оптимального резервування, яка формулюється наступним чином: потрібно знайти таку кількість резервних елементів для кожної підсистеми, щоб при заданих допустимих витратах на систему в цілому по ресурсам кожного типу забезпечувався максимально можливий показник надійності системи [1]. У формальному запису ця задача, очевидно, відрізняється від оберненої задачі для одновимірного випадку лише областю допустимих розв'язків та може бути записана у вигляді: знайти вектор $\tilde{O}_0$ такий, що

$$R(X_0) = \max_{X_0 \in X} R(X), \quad (2)$$

де X − множина всіх можливих (допустимих) розв'язків, які задовольняють обмеженням $C(X) \le C_0$.
Перетворимо задачу (2) у вигляд:

$$\max\left\{ \prod_{i=1}^{n} R_i(x_i) \mid \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C_0, x \in N, x_i \ge 1, i = 1,\ldots,n \right\}, \quad (3)$$

Складність розв'язку задачі (3) полягає в тому, що її цільова функція є неопуклою, а допустима множина – дискретною. Для розв'язку задачі (3) використовуємо метод точної квадратичної регуляризації [3], за допомогою якого задачу (3) перетворюємо до вигляду:

$$\max\left\{ \|z\|^2 \mid -\prod_{i=1}^{n} R_i(x_i) + s + (r-1)\|z\|^2 \le d, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \le C_0, \right.$$
$$\left. \sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) + r\|z\|^2 \le d, x_i \ge 1, i = 1,\ldots,n \right\}, \quad (4)$$

де ||.|| - евклідова норма вектору, $z = (x_1,\ldots,x_{n+1})$. Існує значення параметру r > 0, для якого допустима множина задачі (4) буде опуклою, а значення параметра s вибираємо таким, щоб

$$s \ge \left\|x^*\right\|^2 + \prod_{i=1}^{n} R_i\left(x_i^*\right)$$

де x* - розв'язок задачі (3). Нерівність

$$\sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) \le 0$$

буде виконуватись тільки для цілих значень хі. В задачі (4) необхідно знайти мінімальне значення змінної d для якої розв'язок задачі (4) задовольняє умові

$$r\|z\|^2 = d. \quad (5)$$

Таке значення d будемо знаходити методом дихотомії. При збільшенні d, різниця між лівою та правою частиною рівності (5) буде зменшуватись. Це дає змогу швидко отримати значення d, що задовольняє умові (5).При кожному фіксованому значенні d задачу (4) розв'язуємо модифікованим прямо-двоїстим методом внутрішньої точки.

Чисельні експерименти. Були проведені численні експерименти для прямої та оберненої задач резервування. Розв'язок методом точної квадратичної регуляризації проводився для значення кількості підсистем n = 7÷50 та порівнювалось з результатами розв'язку еволюційним методом [4]. Деякі результати розв'язаних задач приведено нижче у таблиці 1 та таблиці 2, де n – кількість підсистем; C0 − задані обмеження на вартість системи при розв'язуванні оберненої задачі оптимального резервування; C – отримане значення витрат на всю систему в цілому, коли і-та підсистема має по хі резервних елементів; R0(X) − показник надійності системи; R (X) – отримане значення показника надійності; EQR – значення, які отримані за допо-

Таблиця 1. Результати розв'язку методом точної квадратичної регуляризації прямих задач оптимального резервування

№ п/п	n	R0 (X)	EQR		EPR	
			R(X)	C	R (X)	C
1	7	0,95	0,950386	472	0,950386	472
зсув			0,950386	472	0,950386	472
2	11	0,84	0,851929	188	0,851929	188
зсув			0,84	181,15	0,851929	188
3	20	0,89	0,890177	294	0,892739	298
зсув			0,89	290,96	0,894168	313
4	50	0,95	0,951071	1927	0,950475	1952
зсув			0,951071	1927	0,950071	2019
5	15	0,97	0,970752	537	–	–
зсув			0,970752	537	–	–
6	11	0,99	0,99	333,02	–	–
зсув			0,99	340	0,990029	350

могою метода точної квадратичної регуляризації; EPR – значення, отримані за допомогою еволюційного метода.

Таблиця 2. Результати розв’язку методом точної квадратичної регуляризації обернених задач оптимального резервування

№ п/п	n	C0	EQR		EPR	
			C	R (X)	C	R (X)
1	7	630	547	0,99371	547	0,99371
2	11	250	243	0,89738	250	0,89426
3	20	300	296	0,89	299	0,89274
4	50	2000	1997	0,957632	1994	0,9553466
5	15	600	600	0,97064	600	0,95013
6	11	650	650	0,99988	650	0,99988
7	12	500	498,25	0,99373	500	0,99365
		600	547,28		541	
8	7	450	450	0,9266	449	0,93928
9	11	250	244	0,92521	244	0,92521
10	20	300	298	0,89274	298	0,89274
11	15	600	600	0,98088	600	0,98122

При розв’язку задач 5 та 6 (см. *табл. 1*) еволюційним методом розв’язок не був знайдений, так як не виконувались обмеження задачі.

Висновки. Задача максимізації надійності складних систем при обмежених ресурсах забезпечується вибором оптимальної кількості резервних елементів системи. Ця досить складна задача розв’язується новим методом точної квадратичної регуляризації. Приведені порівняльні обчислювальні експерименти свідчать про ефективність нового методу для даного класу задач. Ця ефективність буде збільшуватись при збільшенні кількості підсистем.

Література

1. Ушаков И.А. Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений / И.А. Ушаков – М.: Советское радио, 1969. – 176 с.
2. Way Kuo. Optimal reliability modeling : principles and applications / Way Kuo, Ming J. Zuo. – Canada: John Wiley & Sons. 2003. – 561 p.
3. Косолап, А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап – Днепропетровск: ПГАСА, 2015 – 164 с.
4. Kenneth V.P. Differential Evolution. A Practical Approach to Global Optimization/ V.P. Kenneth, R.M. Storn, J.A. Lampinen. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 542 p.

пост. 28.12.2015

Комп’ютерна реалізація математичної моделі оптимального розміщення сучасних відділень зв'язку, що надають різні види послуг

В.О. СТРОЄВА, М.Ю. КРАВЕЦЬ

Дніпродзержинський державний технічний університет

Приведено результати застосування алгоритмів розв’язання неперервних нелінійних багатопродуктових задач оптимального розбиття множини до ряду прикладних задач оптимального розміщення сучасних відділень зв'язку, що надають різні види послуг з одночасним розбиттям заданої області абонентів на зони обслуговування з метою мінімізації загальної вартості виробничих витрат.

Приведены результаты применения алгоритмов решения непрерывных нелинейных многопродуктовых задач оптимального разбиения множества к ряду прикладных задач оптимального размещения современных отделений связи, которые предоставляют различные виды услуг с одновременным разбиением заданной области абонентов на зоны обслуживания с целью минимизации общей стоимости производственных расходов.

The results of application of algorithms of decision of continuous nonlinear multigrocery problems of optimal set partition to the row of the applied tasks of the optimum placing of the modern communication offices that provide various types of services with simultaneous decomposition predetermined area subscribers to the service area in order to minimize the total cost of production costs.

Вступ. Велика кількість актуальних теоретичних та прикладних оптимізаційних задач може бути зведена в математичній постановці до неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ). Розробці методів розв’язання задач оптимального розбиття, що належать до маловивченого класу задач нескінченновимірного математичного програмування з булевими значеннями змінних, їх модифікаціям та узагальненням, присвячені чисельні публікації Дніпропетровської наукової школи під керівництвом професора Олени Михайлівни Кісельової. В цих публікаціях сформульовано нові класи математичних моделей оптимального розбиття множин. Серед таких:

- детерміновані лінійні та нелінійні, однопродуктові та багатопродуктові задачі ОРМ при обмеженнях, як с заданим розміщенням центрів підмножин, так і з відшуканням варіанту їх розміщення;
- задачі ОРМ в умовах невизначеності;
- динамічні задачі з критеріями оптимальності;
- неперервні задачі про кулькове покриття, які зводяться до задач ОРМ.

До розв’язання сформульованих класів задач розбиття запропоновано єдиний підхід. Його основна ідея полягає у переході від початкових нескінченновимірних задач оптимізації, через функціонал Лагранжа, до допоміжних скінченновимірних недиференційовних задач