

## Введение

Общей особенностью конструкций различных роботов-манипуляторов является выполнение их в виде цепочки звеньев, последовательно сочлененных между собой кинематическими парами различных классов. Несмотря на то, что при больших нагрузках в такой кинематической цепи с увеличением числа звеньев могут возникать интенсивные упругие деформации, в первом приближении целесообразно пренебречь деформативными свойствами звеньев и рассматривать их как абсолютно твердые тела, образующие многозвенный механизм с конечным числом степеней подвижности. Такой подход позволяет получить некоторые качественные и количественные оценки динамического поведения управляемых робототехнических систем при выборе различных регулируемых параметров систем, которые влияют на основные характеристики движения системы (колебательность, устойчивость) и на возникновение опасных резонансных режимов движения. Трудности математического моделирования динамики пространственных движений роботов различной конструкции связаны с существенной нелинейностью разрешающих дифференциальных уравнений и взаимосвязью степеней подвижности, совершающих большие относительные перемещения. Результаты построения некоторых математических моделей жестких звеньев манипуляторов изложены в [1-6]. Как правило, в литературе рассматриваются кинематические цепи манипуляторов, любые два примыкающих звена которых образуют кинематическую пару 5-го класса вращательного или поступательного типа, обладая только одной управляемой степенью подвижности в своем относительном движении. Кинематические схемы манипуляторов, сочленения которых выполнены в виде последовательностей таких кинематических пар в настоящее время не изучены. Целью предлагаемой работы является исследование динамики робота-манипулятора, каждое звено исполнительного механизма которого, сочленено с предыдущим одновременно вращательной и поступательной парой.

В данной работе построена математическая модель динамики напольного управляемого робота, конструкция которого включает пространственно ориентированный манипулятор, закрепленный на подъемно-поворотной платформе, перемещающейся относительно неподвижной стойки. Первое звено прикреплено к платформе, а второе звено соединено с первым одновременно вращательным и поступательным сочленениями и могут поворачиваться вокруг некоторой оси, а также двигаться вдоль своей направляющей. Математическая модель динамики такого робота, представленного в виде цепочки четырех абсолютно твердых тел, построена на основе формализма уравнений Лагранжа II рода. Она включает систему шести нелинейных взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

### 1. Постановка задачи

Построим математическую модель динамики промышленного робота, кинематическая схема которого изображена на рис. 1. Его конструкция состоит из

установленной на неподвижном основании вертикально ориентированной стойки, подъемно-поворотной платформы, которая совершает поступательное и вращательное движения относительно стойки, и прикрепленной к платформе двухзвенной руки манипулятора, которая транспортирует в заданную точку пространства груз конечных размеров, жестко присоединенный к последнему звену манипулятора. Все рассмотренные тела системы будем считать абсолютно твердыми и пронумеруем их, как показано на рис. 1, в порядке их последовательного присоединения, присвоив условно номер "1" неподвижному основанию с вертикальной стойкой. Примем также, что рука манипулятора представляет собой цепочку двух прямолинейных стержней, соединенных последовательно с платформой и между собой идеальным цилиндрическим шарниром и поступательной парой.

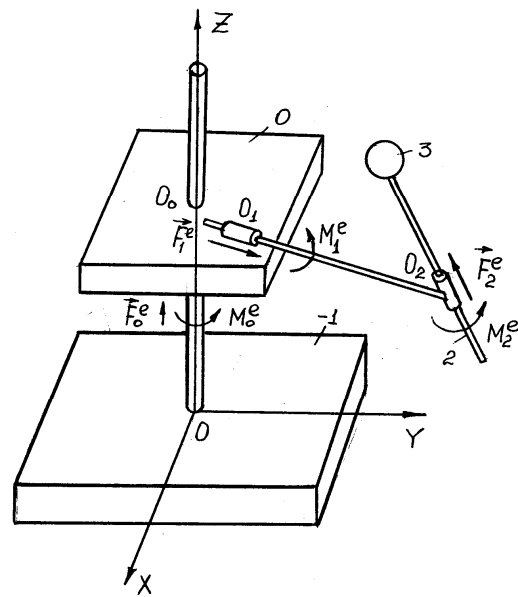


Рис. 1. Кинематическая схема напольного робота-манипулятора

Для исследования динамики данной механической системы введем жестко связанную с неподвижным основанием неподвижную систему координат  $OXYZ$  с ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , ось  $OZ$  которой направим вдоль осевой линии стойки. С каждым  $n$ -ым ( $n = \overline{0,3}$ ) подвижным телом системы свяжем систему координат  $C_n x_n y_n z_n$  так, чтобы ее начало совпадало с центром масс этого тела и оси были главными центральными осями инерции. Для  $n$ -го ( $n = \overline{1,2}$ ) стержневого звена манипулятора координатную ось  $C_n x_n$  совместим с его осевой линией и введем дополнительную местную систему координат  $O_n x_n y_n z_n$  с ортами  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$  и началом в точке  $O_n$  звена, соответствующие оси которой параллельны осям системы  $C_n x_n y_n z_n$ . Для несущей платформы ( $n = 0$ ) и несомого тела ( $n = 3$ ) выберем такую ориентацию осей системы  $C_n x_n y_n z_n$ , при кото-

рой оси  $C_n x_n$ ,  $C_n y_n$ ,  $C_n z_n$  всех тел механической системы параллельны осям  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  неподвижной системы координат, когда кинематическая цепочка робота вытянута в одну прямую линию, параллельную оси  $OX$ . Пусть ось каждого  $n$ -го ( $n = \overline{1,2}$ ) шарнира, который соединяет концы  $n-1$ -го и  $n$ -го примыкающих тел системы, с ортом  $\vec{e}_n$  совпадает с одной из осей местной системы координат  $O_n x_n y_n z_n$  и, таким образом, выполняется соответствующее равенство  $\vec{e}_n = \vec{i}_n$ ,  $\vec{e}_n = \vec{j}_n$  или  $\vec{e}_n = \vec{k}_n$ . Отметим, что поступательные сочленения платформы и первого стержня, а также первого и второго стержней ориентированы вдоль осей  $O_n x_n$  ( $n = \overline{1,2}$ ) и позволяют первому и второму звену выдвигаться в соответствующем направлении. Обозначим  $Z_0$  координату центра масс  $C_0$  платформы в неподвижной системе координат  $OXYZ$ ;  $\theta_0$  - угол поворота системы координат  $C_0 x_0 y_0 z_0$  относительно системы  $OXYZ$  вокруг оси  $O_0 z_0$ ;  $\varphi_n$ ,  $\psi_n$  или  $\theta_n$  ( $n = \overline{1,2}$ ) - угол поворота системы  $O_n x_n y_n z_n$  по отношению к системе  $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$  вокруг какой-либо из осей  $O_n x_n$ ,  $O_n y_n$  или  $O_n z_n$ , который описывает поворот  $n$ -го тела механической системы относительно  $n-1$ -го в зависимости от ориентации осевой линии цилиндрического шарнира. Указанные углы поворотов будем считать положительными, если с конца соответствующих осей вращения эти повороты видны происходящими против хода часовой стрелки. Обозначим через  $L_1$  и  $L_2$  функции выдвигания первого и второго звеньев, которые будем считать положительными, если они увеличивает свои значения вдоль осей  $O_n x_n$  ( $n = \overline{1,2}$ ) соответственно. Будем считать (рис. 1), что в соединении  $O_0$  к платформе приложены внешние управляющие сила  $\vec{F}_0^e$  и момент  $\vec{M}_0^e$ , в каждом  $n$ -ом ( $n = \overline{1,2}$ ) шарнирном соединении  $O_n$  к  $n$ -му звену манипулятора приложен внешний момент  $\vec{M}_n^e$  и в каждом  $n$ -ом ( $n = \overline{1,2}$ ) поступательном сочленении приложена внешняя сила.

Данная механическая система имеет шесть степеней свободы. Для однозначного определения ее положения в пространстве введем совокупность обобщенных координат  $q_k = q_k(t)$  ( $k = \overline{-1,4}$ ), которые соответственно представляют собой координату центра масс 0-го тела ( $k = -1$ ), углы поворота  $n$ -го ( $n = \overline{0,2}$ ) тела относительно  $n-1$ -го ( $k = \overline{0,2}$ ) и функции выдвигания  $n$ -го ( $n = \overline{1,2}$ ) звена манипулятора ( $k = \overline{3,4}$ ).

Для выведения уравнений движения робота-манипулятора воспользуемся уравнениями Лагранжа II рода

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad (k = \overline{-1,4}), \quad (1.1)$$

где  $\dot{q}_k$  -  $k$ -ая обобщенная скорость;  $T$  - кинетическая энергия механической системы;  $Q_k$  - обобщенная сила, отвечающая обобщенной координате  $q_k$ . Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Определим кинетическую энергию системы согласно формуле

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^3 \left( m_n v_n^2 + J_{xn} \omega_{xn}^2 + J_{yn} \omega_{yn}^2 + J_{zn} \omega_{zn}^2 \right), \quad (1.2)$$

где для  $n$ -го ( $n = \overline{0,3}$ ) тела системы приняты обозначения:  $m_n$  - масса;  $v_n$  - модуль вектора абсолютной скорости  $\vec{v}_n$  центра масс  $C_n$ ;  $J_{xn}$ ,  $J_{yn}$ ,  $J_{zn}$  - моменты инерции относительно осей системы  $C_n x_n y_n z_n$ ;  $\omega_{xn}$ ,  $\omega_{yn}$ ,  $\omega_{zn}$  - проекции вектора абсолютной угловой скорости  $\vec{\omega}_n$  на оси системы  $O_n x_n y_n z_n$ .

Положения центров масс звеньев манипулятора и переносимого им тела в неподвижной системе координат  $OXYZ$  определим радиусами-векторами

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + (L_1 - \frac{1}{2} l_1) \vec{i}_1; \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + L_1 \vec{i}_1 + \left( L_2 - \frac{1}{2} l_2 \right) \vec{i}_2; \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_0 + \vec{l}_0 + L_1 \vec{i}_1 + L_2 \vec{i}_2 + \vec{l}_3, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $\vec{r}_0$  - радиус-вектор центра масс  $C_0$  0-го тела в системе координат  $OXYZ$ ;  $\vec{l}_0$  - вектор с началом в точке  $O_0$  и концом в точке  $O_1$  0-го тела в системе  $O_0 x_0 y_0 z_0$ ;  $l_n$  - длина  $n$ -го ( $n = \overline{1,2}$ ) звена манипулятора;  $\vec{l}_3$  - вектор с началом в конце второго звена манипулятора и концом в точке  $C_3$  третьего тела в системе координат  $O_3 x_3 y_3 z_3$ .

Для подсчета компонент радиусов-векторов  $\vec{r}_n$  и векторов скоростей  $\vec{v}_n$ ,  $\vec{\omega}_n$  ( $n = \overline{0,3}$ ) воспользуемся матричным методом. Определим векторы  $\vec{r}_0$  и  $\vec{r}_n$  в системе  $OXYZ$  векторами-столбцами их координат  $\|0 \ 0 \ Z_0\|^T$  и  $\|X_n \ Y_n \ Z_n\|^T$  соответственно; векторы  $\vec{l}_0$  и  $\vec{l}_3$  в системах  $O_0 x_0 y_0 z_0$  и  $O_3 x_3 y_3 z_3$  - векторами-столбцами координат  $\|x_0 \ y_0 \ z_0\|^T$  и  $\|x_3 \ y_3 \ z_3\|^T$ . Тогда из соотношения (1.3) получим следующие матричные формулы для определения координат центра масс  $n$ -го ( $n = \overline{1,3}$ ) тела механической системы

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{Bmatrix} + A_{-1,0} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + A_{-1,1} \begin{Bmatrix} q_3 - \frac{1}{2} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (1.4) \\ \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{Bmatrix} + A_{-1,0} \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix} + A_{-1,1} \begin{Bmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + A_{-1,2} \begin{Bmatrix} q_4 - \frac{1}{2} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{-1} \end{pmatrix} + A_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} q_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Gamma$$
 где  $A_{-1,n} = B_{-1,0} \cdot B_{0,1} \cdot B_{1,2} \cdot \dots \cdot B_{n-1,n}$  ( $n = \overline{0,3}$ ) – матрица направляющих косинусов углов  $\alpha_{11}^{-1,n} = \cos(X, x_n)$ ,  $\alpha_{12}^{-1,n} = \cos(X, y_n), \dots, \alpha_{33}^{-1,n} = \cos(Z, z_n)$  между ортами базисов  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  и  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$ ;  $B_{n-1,n} = A_{-1,n}^T \cdot A_{-1,n-1}$  – матрица перехода от базиса  $\vec{i}_{n-1}, \vec{j}_{n-1}, \vec{k}_{n-1}$  к базису  $\vec{i}_n, \vec{j}_n, \vec{k}_n$ , различные варианты подсчета которой в зависимости от ориентации осей соединительных шарниров рассмотрены в [7]; символом ”Г” обозначена операция транспонирования матриц; индекс “-1” соответствует базису  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Проекции векторов скорости  $\vec{v}_n$  ( $n = \overline{1,3}$ ) на оси неподвижной системы координат  $OXYZ$  найдем дифференцированием левой и правой частей (1.4) по времени

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{Y}_1 \\ \dot{Z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} q_3 - \frac{1}{2}l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_2 \\ \dot{Y}_2 \\ \dot{Z}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,2} \begin{pmatrix} q_4 - \frac{1}{2}l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} \dot{q}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_3 \\ \dot{Y}_3 \\ \dot{Z}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_{-1} \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,1} \begin{pmatrix} q_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,1} \begin{pmatrix} \dot{q}_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,2} \begin{pmatrix} q_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + A_{-1,2} \begin{pmatrix} \dot{q}_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{A}_{-1,3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Представим вектор угловой скорости  $\vec{\omega}_n$  на основе правила сложения вращательных движений твердого тела вокруг пересекающихся осей [8,9].

$$\vec{\omega}_n = \sum_{i=0}^n \vec{\omega}_{i-1,i} \quad (n = \overline{1,2}), \quad \vec{\omega}_3 = \vec{\omega}_2, \quad (1.6)$$

где  $\vec{\omega}_{i-1,i} = \dot{q}_i \vec{e}_i$  ( $i = \overline{0,2}$ ) – вектор угловой скорости вращения  $i$ -го тела системы относительно  $i-1$ -го. Определим векторы  $\vec{\omega}_{-1,0}$  в системе  $O_0x_0y_0z_0$ ,  $\vec{\omega}_n$  ( $n = \overline{1,3}$ ) в системе  $O_nx_ny_nz_n$  соответственно векторами-столбцами проекций  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{\theta}_0 \end{pmatrix}^T$ ,  $\begin{pmatrix} \omega_{xn} & \omega_{yn} & \omega_{zn} \end{pmatrix}^T$ . Каждому вектору  $\vec{\omega}_{i-1,i}$  ( $i = \overline{1,2}$ ) в системе  $O_i x_i y_i z_i$  поставим в соответствие один из век-

торов-столбцов  $\begin{pmatrix} \dot{q}_i & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & \dot{q}_i & 0 \end{pmatrix}^T$  или  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_i \end{pmatrix}^T$  в зависимости от ориентации цилиндрического шарнира. Примем для определенности, что ось  $i$ -го соединительного шарнира совпадает с осью  $O_i z_i$ . Тогда матричные выражения для проекций вектора угловой скорости  $n$ -го тела, определяемого равенствами (1.6), на оси жестко связанной с ним местной системы координат примут вид

$$\begin{pmatrix} \omega_{xn} \\ \omega_{yn} \\ \omega_{zn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n A_{n,i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_i \end{pmatrix}, \quad (n = \overline{1,2}), \quad \begin{pmatrix} \omega_{x3} \\ \omega_{y3} \\ \omega_{z3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{x2} \\ \omega_{y2} \\ \omega_{z2} \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $A_{n,i} = B_{n,n-1} \cdot B_{n-1,n-2} \cdot \dots \cdot B_{i+1,i}$  – матрица направляющих косинусов между осями систем координат  $O_n x_n y_n z_n$  и  $O_i x_i y_i z_i$  с компонентами  $\alpha_{11}^{n,i} = \cos(x_n, x_i)$ ,  $\alpha_{12}^{n,i} = \cos(x_n, y_i), \dots, \alpha_{33}^{n,i} = \cos(z_n, z_i)$ ;  $B_{i+1,i}$  – матрица перехода от базиса  $\vec{i}_{i+1}, \vec{j}_{i+1}, \vec{k}_{i+1}$  к базису  $\vec{i}_i, \vec{j}_i, \vec{k}_i$  [7].

Обобщенную силу  $Q_k$  ( $k = \overline{-1,4}$ ) представим в виде суммы двух слагаемых

$$Q_k = Q_k^* - \frac{\partial \Pi}{\partial q_k}, \quad (1.8)$$

первое из которых связано с наличием непотенциальных сил (управляющих сил и моментов), второй – потенциальных сил (сил тяжести), которые действуют на робот-манипулятор. Обобщенную силу  $Q_k^*$  ( $k = \overline{-1,4}$ ) определим равенствами  $Q_{-1}^* = F_0^e$ ,  $Q_n^* = M_n^e$  ( $n = \overline{0,2}$ ),  $Q_3^* = F_1^e$ ,  $Q_4^* = F_2^e$ . Потенциальную энергию системы вычислим по формуле  $\Pi = g \sum_{n=0}^3 m_n Z_n$ , где  $g$  – модуль вектора ускорения свободного падения.

Подставляя (1.2), (1.8) в уравнения (1.1) и выполняя необходимые операции дифференцирования, получим систему шести взаимосвязанных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которая с соответствующими начальными условиями при заданном законе динамического или кинематического управления однозначно описывает динамику пространственных движений напольного робота-манипулятора с поворотновывидными звеньями.

Задачу динамического управления рассматриваемой механической системой сформулируем следующим образом. По заданному программному закону изменения во времени управляющих сил и моментов  $\vec{F}_0^e(t)$ ,  $\vec{M}_n^e(t)$  ( $n = \overline{0,2}$ ),  $\vec{F}_n^e(t)$  ( $n = \overline{1,2}$ ) необходимо определить закон движения системы (обобщенные координаты  $q_k(t)$  ( $k = \overline{-1,4}$ )). Задача кинематического управления, наоборот, заключается в нахождении по заданному программному закону изменения обобщенных координат  $q_k(t)$  ( $k = \overline{-1,4}$ ), который описывает движение механической системы, управляющих сил и моментов  $\vec{F}_0^e(t)$ ,  $\vec{M}_n^e(t)$  ( $n = \overline{0,2}$ ),  $\vec{F}_n^e(t)$  ( $n = \overline{1,2}$ ),

обеспечивающих реализацию заданных зависимостей  $q_k(t)$  ( $k = \overline{1,4}$ ).

## 2. Уравнения движения

Запишем, полученные на основе изложенной в п. 1 методики, уравнения динамики промышленного напольного робота с двузвенной рукой манипулятора для случая, когда оси соединительных шарниров  $O_1$ ,  $O_2$  манипулятора совпадают с осями  $O_1z_1$ ,  $O_2y_2$  соответствующих местных систем координат. Поступательные соединения первого и второго звеньев манипулятора ориентированы вдоль осей  $O_1x_1$ ,  $O_2x_2$  и позволяют каждому звену выдвигаться в соответствующем направлении. Примем для упрощения, что переносимый манипулятором груз представляет собой однородное шарообразное тело радиуса  $r$ . Тогда для данной управляемой механической системы с шестью степенями свободы можно составить систему нелинейных взаимосвязанных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} b_1 \ddot{z}_0 - f_1 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{L}_2 - 2a_2 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \dot{L}_2 + \\ + f_1 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 = Q_{-1}, \\ (J_{z_0} + b_2(x_0^2 + y_0^2) + f_8 + b_6 + f_{14} + 2f_4 f_{10}) \ddot{\varphi}_0 + \\ + (f_8 + b_6 + f_{14} + f_4 f_{10}) \ddot{\varphi}_1 - f_1 f_3 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + b_2 f_3 \ddot{L}_1 + \\ + a_2 f_3 \cos \varphi_2 \ddot{L}_2 - 2f_3 f_{10} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 - 2(f_{13} + f_1 f_4) \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 - \\ + 2f_{11} \dot{\varphi}_0 \dot{L}_1 + 2f_{12} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{L}_2 - 2(f_{13} + f_1 f_4) \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 - \\ - f_3 f_{10} \dot{\varphi}_1^2 - f_1 f_3 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 + 2f_{11} \dot{\varphi}_1 \dot{L}_1 + 2f_{12} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{L}_2 - \\ - 2a_2 f_3 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \dot{L}_2 = Q_0, \\ (f_8 + b_6 + f_{14} + f_4 f_{10}) \ddot{\varphi}_0 + (f_8 + b_6 + f_{14}) \ddot{\varphi}_1 + f_3 f_{10} \dot{\varphi}_0^2 - \\ - 2(f_9 \cos \varphi_2 L_2 + f_1 L_1) \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_2 + 2f_5 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{L}_2 + \\ + 2f_{10} \dot{\varphi}_0 \dot{L}_1 + 2f_{10} \dot{\varphi}_1 \dot{L}_1 + 2f_5 \dot{\varphi}_1 \dot{L}_2 - 2f_{13} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 = Q_1, \\ - f_1 \cos \varphi_2 \ddot{z}_0 - f_1 f_3 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_0 + (f_2 + b_4) \ddot{\varphi}_2 - f_1 \sin \varphi_2 \ddot{L}_1 + \\ + (f_{13} + f_1 f_4) \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0^2 + f_{13} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 + 2f_{13} \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 + \\ + 2f_1 \dot{\varphi}_2 \dot{L}_2 = Q_2, \\ b_2 f_3 \ddot{\varphi}_0 - f_1 \sin \varphi_2 \ddot{\varphi}_2 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{L}_2 - 2a_2 \sin \varphi_2 \dot{\varphi}_2 \dot{L}_2 - \\ - f_1 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_2^2 - (f_{15} + b_2 f_4) \dot{\varphi}_0^2 - f_{15} \dot{\varphi}_1^2 - 2f_{15} \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 = Q_3, \\ - a_2 \sin \varphi_2 \ddot{z}_0 + a_2 f_3 \cos \varphi_2 \ddot{\varphi}_0 + a_2 \cos \varphi_2 \ddot{L}_1 - f_{12} \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_0^2 - \\ - f_5 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_1^2 - f_1 \dot{\varphi}_2^2 - 2f_5 \cos \varphi_2 \dot{\varphi}_0 \dot{\varphi}_1 = Q_4. \end{aligned}$$

В уравнениях (2.1) введены обозначения для постоянных коэффициентов

$$\begin{aligned} a_1 = \frac{1}{2} m_1 + m_2 + m_3, \quad a_2 = m_2 + m_3, \quad a_3 = \frac{J_{y_1}}{l_1^2} + m_2 + m_3, \\ a_4 = \frac{J_{z_1}}{l_1^2} + m_2 + m_3, \\ b_1 = m_0 + m_1 + m_2 + m_3, \quad b_2 = m_1 + m_2 + m_3, \quad (2.2) \\ b_3 = J_{x_2} + J_{x_3}, \quad b_4 = J_{y_2} + J_{y_3}, \quad b_5 = J_{z_2} + J_{z_3}, \\ b_6 = b_3 + J_{z_1}, \quad b_7 = \frac{1}{4} m_2 + m_3 \left( \frac{r}{l_2} \right)^2, \quad b_8 = m_3 \frac{r}{l_2} - \frac{1}{2} m_2; \end{aligned}$$

функций времени

$$\begin{aligned} f_1 = a_2 L_2 + l_2 b_8, \quad f_2 = a_2 L_2^2 + 2l_2 b_8 L_2 + b_7 l_2^2, \\ f_3 = x_0 \sin \varphi_1 - y_0 \cos \varphi_1, \quad f_4 = y_0 \sin \varphi_1 + x_0 \cos \varphi_1, \\ f_5 = a_2 L_1 + f_1 \cos \varphi_2, \quad f_6 = f_2 + b_5 - b_4, \\ f_7 = m_1 \left( L_1 - \frac{1}{2} l_1 \right) + a_2 L_1, \quad f_8 = m_1 \left( L_1 - \frac{1}{2} l_1 \right)^2 + a_2 L_1^2, \\ f_9 = a_2 L_2 + 2l_2 b_8, \quad f_{10} = f_7 + f_1 \cos \varphi_2, \quad f_{11} = f_{10} + b_2 f_4, \\ f_{12} = f_5 + a_2 f_4, \quad f_{13} = f_6 \cos \varphi_2 + f_1 L_1, \\ f_{14} = f_6 \cos^2 \varphi_2 + 2L_1 f_1 \cos \varphi_2, \quad (2.3) \\ f_{15} = b_2 L_1 - \frac{1}{2} m_1 l_1 + f_1 \cos \varphi_2; \text{ обобщенных сил} \end{aligned}$$

$$Q_{-1} = F_0^e - b_1 g, \quad Q_0 = M_0^e, \quad Q_1 = M_1^e, \quad (2.4)$$

$$Q_2 = M_2^e + g f_1 \cos \varphi_2, \quad Q_3 = F_1^e, \quad Q_4 = F_2^e + a_2 g \sin \varphi_2.$$

Построение решений задачи динамического управления роботом-манипулятором с жесткими звеньями можно осуществить путем интегрирования уравнений вида (2.1) с коэффициентами (2.2)-(2.4) (или в общем случае (1.1)) с соответствующими начальными условиями одним из методов численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе применялся явный метод Рунге-Кутты 4-го порядка [10]. Определение решений задачи кинематического управления роботом-манипулятором фактически сводится к необходимости вычисления неизвестных внешних сил и моментов из системы алгебраических уравнений (2.1) с коэффициентами (2.2)-(2.4) (или (1.1)).

## 3. Обсуждение результатов

Приведем результаты исследования задачи кинематического управления пространственными движениями робота-манипулятора, рассмотренного на основе уравнений (2.1). Вычисления выполнены для следующих геометрических и физических параметров его конструкции. Переносимый манипулятором платформа, представляет собой однородное твердое тело коробчатой формы, имеет массу  $m_0 = 50$  кг и момент инерции  $J_{z_0} = 25$  кгм<sup>2</sup>. Звенья манипулятора выполнены в виде прямолинейных стальных стержней длиной  $l_1 = l_2 = 1$  м кольцевого поперечного сечения с одинаковыми внутренними  $d_1 = d_2 = 6 \cdot 10^{-2}$  м и внешними  $D_1 = D_2 = 7 \cdot 10^{-2}$  м диаметрами, массы и моменты инерции которых составляют  $m_1 = m_2 = 2,752$  кг,  $J_{x_1} = J_{x_2} = 2,929 \cdot 10^{-3}$  кгм<sup>2</sup>,  $J_{y_1} = J_{z_1} = J_{y_2} = J_{z_2} = 2,312 \cdot 10^{-1}$  кгм<sup>2</sup>. Несомый груз имеет радиус  $r = 0,1$  м, массу  $m_3 = 32,865$  кг и моменты инерции  $J_{x_3} = J_{y_3} = J_{z_3} = 1,315 \cdot 10^{-1}$  кгм<sup>2</sup>. Принято, что оси первого и второго соединительных шарниров совпадают соответственно с осями  $O_1z_1$  и  $O_2y_2$  местных систем координат. Координаты точки  $O_1$  прикрепления манипулятора к платформе равны  $x_0 = 0,3$  м,  $y_0 = 0,4$  м,  $z_0 = 0,2$  м. Исходная конфигурация механической системы, которая находится в состоянии покоя в начальный момент времени, определяется следующими значе-

ниями функций  $Z_0(0) = 0$  м,  $\theta_0(0) = 0$  рад,  $\theta_1(0) = \pi/2$  рад,  $\psi_2(0) = \pi/2$  рад,  $L_1(0) = 0,7$  м,  $L_2(0) = 0,8$ .

Кинематически управляемое движение механической системы исследовалось на отрезке времени  $0 \leq t \leq 2,4$  с и осуществлялось вследствие изменения функций  $\ddot{Z}_0(t)$ ,  $\ddot{\theta}_0(t)$ ,  $\ddot{\theta}_1(t)$ ,  $\ddot{\psi}_2(t)$ ,  $\ddot{L}_1(t)$ ,  $\ddot{L}_2(t)$  на протяжении 1,2 с по трапециевидным законам, которые описываются формулами  $s_k t$ ,  $0 \leq t \leq \tau$ ;  $s_k \tau$ ,  $\tau \leq t \leq 2\tau$ ;  $s_k(3\tau - t)$ ,  $2\tau \leq t \leq 4\tau$ ;  $-s_k \tau$ ,  $4\tau \leq t \leq 5\tau$ ;  $s_k(t - 6\tau)$ ,  $5\tau \leq t \leq 6\tau$ ;  $0$ ,  $t > 6\tau$ , где ( $k = \overline{1,6}$ ),  $s_1 = 41,667$  мс<sup>-3</sup>,  $s_2 = s_3 = 21,817; 32,725; 43,633$  с<sup>-3</sup>,  $s_4 = 10,908; 21,817; 32,725$  с<sup>-3</sup>,  $s_5 = s_6 = 208,333$  мс<sup>-3</sup>,  $\tau = 0,2$  с. Тогда в конце процесса управления функции управления роботом-манипулятором примут следующие значения  $Z_0(1,2) = 0,5$  м,  $\theta_0(1,2) = 60^\circ; 90^\circ; 120^\circ$ ,  $\theta_1(1,2) = 150^\circ; 180^\circ; 210^\circ$ ,  $\psi_2(1,2) = 120^\circ; 150^\circ; 180^\circ$ ,  $L_1(1,2) = 0,8$  м,  $L_2(1,2) = 0,9$  м. На рис. 2 представлены функции внешних сил и моментов  $\bar{F}_0^e(t)$  (а),  $\bar{M}_n^e(t)$  ( $n = \overline{0,2}$ ) (б-г),  $\bar{F}_n^e(t)$  ( $n = \overline{1,2}$ ) (д, е), которые подсчитываются в результате решения задач кинематического управления роботом-манипулятором для трех случаев конечных значений функций углов поворотов платформы, первого и второго исполнительных звеньев. Для случая, когда указанные функции управления принимают значения  $\theta_0(1,2) = 60^\circ$ ,  $\theta_1(1,2) = 150^\circ$ ,  $\psi_2(1,2) = 120^\circ$ , графики функций внешних сил и моментов показаны на рисунке сплошными линиями; для случая  $\theta_0(1,2) = 90^\circ$ ,  $\theta_1(1,2) = 180^\circ$ ,  $\psi_2(1,2) = 150^\circ$  они отмечены пунктирными линиями; для случая  $\theta_0(1,2) = 120^\circ$ ,  $\theta_1(1,2) = 210^\circ$ ,  $\psi_2(1,2) = 180^\circ$  – штрихпунктирными линиями. Изменение конечных значений углов взаимных поворотов тел механической системы существенно влияет на функции управления на этапах разгона и торможения робота-манипулятора. При этом изменение конечных значений взаимных углов поворотов при снятии управления не влияет на вид функций управления, каждая из которых для трех рассмотренных случаев принимает одинаковые значения. Следует отметить, что для функции  $M_1^e(t)$  при первой и третьей группе значений конечных взаимных углов поворотов тел механической системы ее графики практически совпадают. Существенные отличия в их форме наблюдаются только для второй группы значений конечных функций углов поворотов.

### ВЫВОДЫ

Изучение динамики пространственного движения напольного робота-манипулятора с двумя поворотно-выдвижными звеньями на основе математической модели многих абсолютно твердых тел позволяет качественно и количественно оценить влияние изменения конечных значений функций углов поворотов платформы, первого и второго исполнительных звеньев манипулятора на характер функций управления, реали-

зующих заданный программный закон движения робота. Дальнейшие разработки в данном направлении позволят исследовать динамику многосвязных роботоманипуляторов произвольной конфигурации, включая роботы с сочленениями, выполненными в виде последовательностей кинематических пар 5-го порядка.

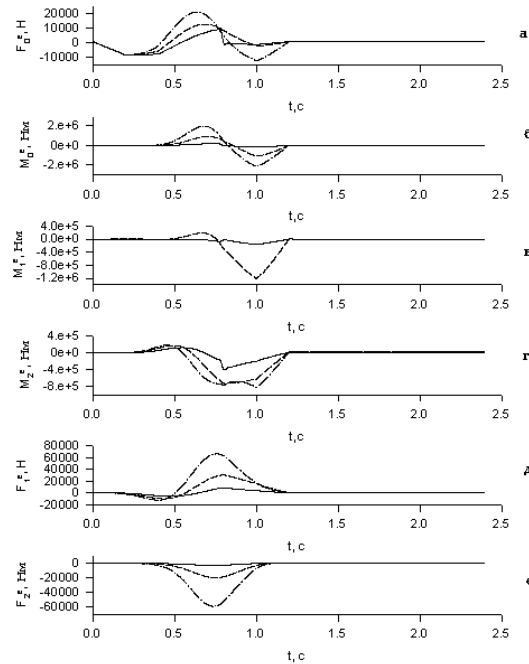


Рис. 2. Графики управляющих сил и моментов

### ЛИТЕРАТУРА

1. De Queiroz M.S., Donopudi S., Burg T., Dawson D.M. Model-based control of rigid-link flexible-joint robots: An experimental evolution//Robotica.-1988.-16, №1.- P.11-21.
2. Vukobratovic M., Matijevic V., Potkonjak. Control of robots with elastic joints interacting with dynamic environment//J.Intell and Rob. System.-1988.-23, №1.- P.87-100.
3. Завражина Н.М. Динаміка багатоланкового маніпуляційного механізму з пружно-дисипативними шарнірними сполученнями// Опір матеріалів та теорія споруд. – К.: КНУБА. - Вип. 69, 2001, С.159-173.
4. Завражина Т.В., Завражина Н.М. Влияние упруго-дисипативных свойств шарнирных соединений на динамику космического манипулятора//Проблемы управления и информатики. – 2001, № 6, С. 119-131.
5. Завражина Т.В. Вплив пружної піддатливості ланок маніпулятора на точність його позиціонування. I. Математичні моделі динаміки//Математичні методи та фіз.-мех. поля.- 2002.- 45, № 3, С. 124-133.
6. Завражина Т.В. Вплив пружної піддатливості ланок маніпулятора на точність його позиціонування. II. Методика та результати чисельного моделювання// Математичні методи та фіз.-мех. поля.- 2004.- 47, № 1, С. 120-128.
7. Накано Э. Введение в робототехнику. – М.: Мир, 1988, 334 с.

8. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1982. – Т. 1, 352 с.
9. Лурье А.И. Аналитическая механика. – М.: Физматгиз, 1961, 334 с.
10. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990, 512 с.

пост. 29.03.05