

## РОЗДІЛ «МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ»

УДК 539.3

БЕЗВЕРХИЙ О.І., д.фіз.-мат.н., професор

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

### ПРО ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ГАРМОНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ

**Вступ.** Природні і синтезовані п'єзоелектричні матеріали завдяки їх здатності перетворення електричного поля в механічні деформації (обернений п'єзоэффект) та механічних деформацій в електричне поле (прямий п'єзоэффект) знаходять широке застосування в пристроях радіоелектроніки і зв'язку, обчислювальної техніки, автоматики, вимірювальної техніки, приладах для контролю технологічних процесів, генераторах і приймачах механічних (акустичних) коливань в кіло-і мегагерцевому діапазоні. Експериментальні і теоретичні дослідження зв'язаного деформування п'єзоелектричних елементів мають велике фундаментальне і прикладне значення. У зв'язку з цим актуальними є розробка і вдосконалення теоретичних та чисельних методів аналізу пружноелектричних гармонічних та нестационарних коливань на основі дискретних просторових континуальних рівнянь електропружності і їх варіаційних тлумачень з використанням сіткових апроксимацій по просторовій координаті, реалізація розроблених алгоритмів і проведення аналізу коливань напружено-деформованого стану і електричного поля типових п'єзокерамічних елементів.

Для розв'язку задач електропружності широко застосовуються різні методи сіткових апроксимацій, які або безпосередньо алгебраізують задачу або зменшують її розмірність.

В роботах Москалькова М.Н. [3], Мельника В.Н. і Москалькова М.Н. [4] вивчаються переважно математичні питання сіткових різницевоїх апроксимацій рівнянь електропружності.

Варіаційно-різницевий метод (ВРМ) побудови сіткових апроксимацій запропоновано в роботах [7-9]. Більш низький порядок похідних, забезпечує перевагу ВРМ над безпосередньою різницевою апроксимацією диференціальних рівнянь коливань. При побудові рівнянь за допомогою ВРМ вдається уникнути протиріч в кутових точках області. У порівнянні з варіаційними методами, в яких використовується єдина для всього тіла система базисних функцій, ВРМ має перевагу через відсутність проблеми вибору цих функцій. Матриця розв'язуючої системи ВРМ має симетричну стрічкову структуру.

На початку 70-х років для розв'язання крайових задач про гармонічні електропружні коливання був застосований метод скінченних елементів (МСЕ) [11-15]. Більшість робіт, опублікованих пізніше [2 та ін.], присвячені аналізу коливань п'єзоелектричних тіл, здійснюваному в рамках двовимірного підходу. Просторовий тривимірний аналіз коливань п'єзоелектричного перетворювача наводиться в роботі [12], в якій використано ізопараметричні елементи другого порядку у вигляді двадцятивузлового гексаедра. Восьмивузловий гексаедричний елемент з нижчою апроксимацією переміщень і електричного потенціалу застосовано для тривимірного аналізу в роботі [15]. Питання теорії і реалізації МСЕ частково описані в монографії [5].

Редукція системи рівнянь гармонічних електропружних коливань п'єзокерамічного циліндру на основі сплайн-апроксимацій застосовується в статті [1].

В статті [10] використовуються рівняння гамільтонового типу по товщинній координаті для аналізу одномірних гармонічних коливань кулі, циліндру і плоского шару.

Закладена в цій статті ідея узагальнюється у цій роботі для осесиметричної задачі електропружності для циліндру.

**Постановка задачі.** В теорії електропружності загальноприйнятим [2, 5, 6 та ін.] є використання системи рівнянь коливань деформацій твердого тіла

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{k1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{k2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{k3}}{\partial x_3}, \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.1)$$

та квазістатичного наближення рівнянь Максвелла для електричного поля

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (1.2)$$

разом з матеріальними залежностями для поляризованої п'єзоелектричної кераміки (п'єзокераміки) і п'єзоелектриків гексагональної системи класу  $6mm$  з віссю симетрії шостого порядку та враховані формули Коші для деформацій.

Система рівнянь зводиться до чотирьох рівнянь типу Ламе

$$\rho \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} = L_k(u_1, u_2, u_3, \varphi), \quad 0 = L_4(u_1, u_2, u_3, \varphi), \quad k = 1, 2, 3$$

відносно компонент вектора механічних переміщень  $u_k(x_1, x_2, x_3, t)$  і електричного потенціалу  $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ , який вводиться градієнтним розв'язком  $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$  другого з рівнянь (1.2).

Система рівнянь доповнюється граничними умовами  $u_S = u_S \vee \sigma_n = \sigma_n^o$  для механічних переміщень і напружень, і граничними умовами  $\varphi = \varphi \vee D_n = D_n^o$  для електричних величин на граничній поверхні  $S$ .

При необхідності треба сформулювати початкові умови; при усталених гармонічних коливаннях початкові умови не формулюються.

**Метод розв'язку.** Система рівнянь електропружності осесиметричних гармонічних коливань ( $f(r, z, t) = \operatorname{Re} f^a(r, z) \exp i \omega t$ ) в циліндричних координатах при радіальній поляризації складається з рівнянь механічних коливань

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}^a}{r} + \rho \omega^2 u_z^a &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rr}^a}{\partial r} + \frac{\sigma_{\theta\theta}^a - \sigma_{rr}^a}{r} + \frac{\partial \sigma_{zr}^a}{\partial z} + \rho \omega^2 u_r^a &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

квазістатичного наближення рівнянь Максвелла

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_z^a}{\partial z} + \frac{\partial D_r^a}{\partial r} + \frac{D_r^a}{r} &= 0, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}^a = 0 \rightarrow E_z^a = -\frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \quad E_r^a = -\frac{\partial \varphi^a}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.2)$$

і матеріальних залежностей для поляризованої вздовж осі  $r$  п'єзокераміки

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\theta\theta}^a &= c_{11}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{12}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\
 \sigma_{zz}^a &= c_{21}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{11}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{13}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{13} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r} \\
 \sigma_{rr}^a &= c_{31}^E \frac{u_r^a}{r} + c_{31}^E \frac{\partial u_z^a}{\partial z} + c_{33}^E \frac{\partial u_r^a}{\partial r} + e_{33} \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}, \\
 \sigma_{zr}^a &= c_{55}^E \left( \frac{\partial u_r^a}{\partial z} + \frac{\partial u_z^a}{\partial r} \right) + e_{51} \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\
 D_z^a &= e_{51} \left( \frac{\partial u_z^a}{\partial r} + \frac{\partial u_r^a}{\partial z} \right) - \varepsilon_{11}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial z}, \\
 D_r^a &= e_{31} \left( \frac{u_r^a}{r} + \frac{\partial u_z^a}{\partial z} \right) + e_{33} \frac{\partial u_r^a}{\partial r} - \varepsilon_{33}^K \frac{\partial \varphi^a}{\partial r}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Далі верхні індекси « $a$ », « $E$ » і « $K$ » будемо опускати.

Зведемо систему рівнянь (2.1)-(2.3) до операторної гамільтонової системи по радіальній координаті відносно функцій  $\bar{\sigma}_{rr}$ ,  $u_z$ ,  $\bar{D}_r$ ,  $u_r$ ,  $\bar{\sigma}_{rz}$ ,  $\varphi$  ( $\bar{\sigma}_{rz} = r\sigma_{rz}$ ,  $\bar{\sigma}_{rr} = r\sigma_{rr}$ ,  $\bar{D}_r = rD_r$ ). Після необхідних перетворень одержимо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial r} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} + \left( c_{13} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \\
 &+ \left[ -r\rho\omega^2 + \frac{1}{r} \left( c_{11} - c_{12} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \right] u_r - \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z}; \\
 \frac{\partial u_z}{\partial r} &= -\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{c_{55}} \frac{\bar{\sigma}_{rz}}{r} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \varphi}{\partial z}; \quad \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial r} = -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial z} + \varepsilon_{11}^* r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}; \\
 \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_r}{r}; \\
 \frac{\partial \bar{\sigma}_{rz}}{\partial r} &= -\frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}}{\partial z} + r \left[ -\rho\omega^2 u_z - \left( c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \right] \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\
 &+ \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial \bar{D}_r}{\partial z} - \left( c_{13} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_r}{\partial z}; \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33} c_{33}^*} \frac{\bar{D}_r}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_r}{r}.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

В попередніх рівняннях використані позначення

$$c_{j3}^* = c_{j3} + e_{j3} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}}, \quad j = 1, 3; \quad e_{j3}^* = e_{j3} - c_{j3} \frac{e_{33}}{c_{33}}, \quad j = 1, 3;$$

$$\varepsilon_{11}^* = \varepsilon_{11} + \frac{e_{51}^2}{c_{55}}, \quad \varepsilon_{33}^* = \varepsilon_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}.$$

Величини  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$ , які не увійшли в систему (2.4), визначаються через основні функції  $\sigma_{rr}$ ,  $u_z$ ,  $D_r$ ,  $u_r$ ,  $\sigma_{rz}$ ,  $\varphi$  формулами

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left( c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left( c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ \sigma_{zz} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr} + \left( c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_r + \left( c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_r}{r}, \\ D_z &= \frac{e_{51}}{c_{55}} \sigma_{zr} - \left( \varepsilon_{11} + e_{51} \frac{e_{51}}{c_{55}} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z}.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Приведемо систему рівнянь (2.4) до системи звичайних диференціальних рівнянь на основі різницевих апроксимацій по осевій координаті.

Розглянемо п'єзокерамічний циліндр  $r_0 < r < r_1$ ,  $0 < z < l$ . Введемо розбиття відрізка  $(0, l)$  по осі  $z$  на інтервали точками  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$  і в формулах (2.4) апроксимуємо похідні по  $z$  скінченними різницями. В результаті одержимо систему  $6(n-2)$  звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\sigma}_{rr,i}}{dr} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} + \left( c_{13} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{c_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \\ &\quad + \left[ -r\rho\omega^2 + \frac{1}{r} \left( c_{11} - c_{12} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \right] u_{r,i} - \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta_z}; \\ \frac{du_{z,i}}{dr} &= -\frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta_z} + \frac{1}{c_{44}} \frac{\bar{\sigma}_{rz,i}}{r} - \frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta_z}; \\ \frac{d\bar{D}_{r,i}}{dr} &= -\frac{e_{51}}{c_{55}} \frac{\bar{\sigma}_{rz,i+1} - \bar{\sigma}_{rz,i-1}}{2\Delta_z} + \varepsilon_{22}^* r \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta_z^2}; \\ \frac{du_{r,i}}{dr} &= \frac{1}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} - \frac{c_{23}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} - \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r}; \\ \frac{d\bar{\sigma}_{rz,i}}{dr} &= -\frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i+1} - \bar{\sigma}_{rr,i-1}}{2\Delta_z} + r \left[ -\rho\omega^2 u_{z,i} - \right. \\ &\quad \left. - \left( c_{22} - c_{13} \frac{c_{23}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{23}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{z,i+1} - 2u_{z,i} + u_{z,i-1}}{\Delta_z^2} \right] + \\ &\quad + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i+1} - \bar{D}_{r,i-1}}{2\Delta_z} - \left( c_{13} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{r,i+1} - u_{r,i-1}}{2\Delta_z}; \\ \frac{d\varphi_i}{dr} &= \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{\sigma}_{rr,i}}{r} + \frac{e_{23}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{z,i+1} - u_{z,i-1}}{2\Delta_z} - \frac{c_{33}}{\varepsilon_{33}c_{33}^*} \frac{\bar{D}_{r,i}}{r} + \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \frac{u_{r,i}}{r};\end{aligned}\quad (2.6)$$

$i = 1, 2, \dots, n-2, n-1.$

Для виконання граничних умов при  $z = z_0 = 0$  і  $z = z_n = l$  необхідно записати різницевий аналог для  $\sigma_{zz}$ ,  $D_z$ . Скориставшись формулами (2.5), одержимо

$$\begin{aligned} \sigma_{zz,0} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr,0} + \left( c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{z,1} - u_{z,0}}{\Delta_z} - \\ &\quad - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_{r,0} + \left( c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{r,0}}{r}, \\ D_{z,0} &= \frac{e_{51}}{c_{55}} \sigma_{zr,0} - \left( \varepsilon_{11} + e_{51} \frac{e_{51}}{c_{55}} \right) \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{\Delta_z}. \\ \sigma_{zz,n} &= \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} \sigma_{rr,n} + \left( c_{11} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{z,n} - u_{z,n-1}}{\Delta_z} - \\ &\quad - \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} D_{r,n} + \left( c_{12} - c_{13} \frac{c_{13}^*}{c_{33}^*} + e_{13} \frac{e_{13}^*}{\varepsilon_{33}^*} \right) \frac{u_{r,n}}{r}, \\ D_{z,n} &= \frac{e_{51}}{c_{55}} \sigma_{zr,n} - \left( \varepsilon_{11} + e_{51} \frac{e_{51}}{c_{55}} \right) \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{\Delta_z}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Користуючись формулами (2.7) і апроксимаціями необхідних величин з матеріальних залежностей (2.3) та відповідними граничними умовами, знайдемо невідомі значення основних функцій  $\bar{\sigma}_{rr}$ ,  $u_z$ ,  $\bar{D}_r$ ,  $u_r$ ,  $\bar{\sigma}_{rz}$ ,  $\varphi$  на границях  $z = z_0 = 0$  і  $z = z_n = l$ . У результаті отримаємо замкнену систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

**Висновки.** Запропоновано новий метод редукції рівнянь гармонічних електропружних коливань в циліндричних координатах до системи звичайних диференціальних рівнянь першого порядку на основі гамільтонового формалізму по радіальній координаті і різницевих апроксимацій по осьовій координаті.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Григоренко А.Я. Исследование свободных колебаний полых пьезокерамических цилиндров конечной длины с осевой поляризацией / А.Я.Григоренко, Т.Л.Ефимова, И.А.Лоза // Прикладная механика. – 2011. – № 6 (46). – С.17-26.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций в 5-ти томах / под общ. ред. А.Н.Гузя. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: Наукова думка, 1989. – 280с.
3. Москальков М.Н. Исследование разностной схемы решения задачи излучения звука цилиндрическим пьезовибратором / М.Н.Москальков // Дифференциальные уравнения. – 1986. – №7 (22). – С.1220-1226.
4. Мельник В.Н. Разностные схемы и анализ приближенных решений для двумерных нестационарных задач связанной электроупругости / В.Н.Мельник, М.Н.Москальков // Дифференциальные уравнения. – 1991. – №7 (27). – С.1220-1229.
5. Шульга Н.А. Колебания пьезокермических тел / Шульга Н.А., Болкисев А.М. – К.: Наукова думка, 1990. – 228с.
6. Шульга М.О. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин / Шульга М.О., Карлаш В.Л. – К.: Наукова думка, 2007. – 186с.
7. Шульга Н.А. Колебания пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией при электрическом нагружении / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика.

- 1989. – № 10 (025). – С.41-47.
8. Шульга Н.А. Электроупругие колебания радиально поляризованного пьезокерамического цилиндра с частично электродированными боковыми поверхностями / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 1 (26). – С.43-47.
  9. Шульга Н.А. Электроупругие колебания секционированного пьезокерамического цилиндра с осевой поляризацией / Шульга Н.А., Борисенко Л.В. // Прикладная механика. – 1990. – № 2 (26). – С.63-67.
  10. Шульга Н.А. Сравнительный анализ упругоэлектрических толщинных колебаний слоев с искривленными границами / Шульга Н.А., Григорьева Л.О. // Прикладная механика. – 2011. – № 2 (47). – С.86-95.
  11. Allik H. Finite element method for piezoelectric vibration / Allik H., Hughes T.J.R. // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1970. – N 2. – P.151-157.
  12. Allik H. Vibrational response of sonar transducers using piezoelectric finite elements / Allik H., Webman K.M., Hunt J.T. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1974. – N 6 (56). – P.1782-1791.
  13. Kagawa Y. A new approach to analysis and design of electromechanical filters by finite element technique / Kagawa Y. // J. Acoust. Soc. Amer. – 1971. – N 5a (49) – P.1348-1356.
  14. Kagawa Y. Application of finite element method to vibration problems in which electrical and mechanical systems are coupled – An analysis of flexure type vibrators with electrostrictive transducers / Kagawa Y., Gladwell G.M.L. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1970. – SU-17. – P.41-52.
  15. Tomikawa V. Analysis of electrical equivalent circuit elements of piezo-tuning forks by the finite element method / Tomikawa V., Miura H., Dong S.B. // IEEE Trans. Sonics and Ultrasonics. – 1978. – SU-25. – P.206-212.

Надійшла до редколегії 24.03.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### **КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ О ВДАВЛИВАНИИ ДВУХ ЖЕСТКИХ ШТАМПОВ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО**

**Введение.** Методы решения пространственных контактных задач для упругих тел достаточно хорошо разработаны. Среди работ в данной области можно выделить [1-3] и др., а также [4, 5]. В то же время, все возрастающее использование электроупругих материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, вызывает необходимость детального изучения распределения силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи трещин, штампов [6]. Однако, решение трехмерных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система дифференциальных уравнений является связанной относительно силовых и электрических полей. Решению отдельных контактных задач для электроупругих тел посвящены работы [6-8]. Однако до настоящего времени контактное взаимодействие двух жестких штампов кругового сечения с электроупругим полупространством не изучено.

В данной работе рассмотрены задачи контактного взаимодействия двух жестких штампов (плоских и неплоских) кругового сечения. Получены решения новых задач, найдены аналитические выражения для распределения контактного давления под

штампами (плоскими и неплоскими), для неплоских штампов найдено соотношение для нахождения неизвестной области контакта. Исследовано влияние электроупругих свойств полупространства на контактное взаимодействие со штампами.

**Постановка задачи.** Пусть два жестких штампа кругового сечения вдавливаются в электроупругое полупространство  $z \leq 0$ . Полагаем, что ось  $Oz$  совпадает с осью симметрии (поляризации) пьезоэлектрического тела. Также считаем поверхность полупространства неэлектропроводящей. Граничные условия при гладком контакте (без трения) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, \quad D_z(x, y) = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad \sigma_{zz} = 0 \quad \text{при } (x, y) \notin \Omega; \\ \sigma_{zz} = -p(x, y) \quad \text{при } (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  – область контакта штампов с полупространством,  $p(x, y)$  – распределение контактного давления под штампами,  $D_z$  – нормальная компонента вектора электрической индукции. Перемещения  $u_z$  точек основания штампов имеют вид

$$u_z^{(i)}(x_i, y_i, 0) = \delta_i - \beta_{y_i}^{(i)} x_i + \beta_{x_i}^{(i)} y_i - \varphi_i(x_i, y_i) \quad \text{при } (x_i, y_i) \in \Omega_i, \quad (2)$$

где  $\delta_i$  – поступательное перемещение каждого штампа вдоль оси  $Oz$ ;  $\beta_x, \beta_y$  – проекции вектора поворота на оси  $Ox$  и  $Oy$ ;  $z_i = \varphi_i(x, y)$  – уравнение поверхности основания каждого штампа. Для плоского основания штампа  $\varphi(x, y) \equiv 0$ .

**Основные уравнения и соотношения.** Система связанных уравнений статики электроупругости для трансверсально-изотропного тела относительно перемещений  $u_x, u_y, u_z$  и электрического потенциала  $\Psi$  принимает вид [6]:

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0; \\ c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + \\ + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0; \\ (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0; \\ (e_{31} + e_{15})(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15}(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) - \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

Согласно [6] компоненты перемещений и электрический потенциал можно записать в виде

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \quad (4)$$

где  $k_j, l_j$  – некоторые постоянные, которые подлежат определению. Функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4), \quad (5)$$

где  $v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , остальные значения  $v_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями алгебраического уравнения третьего порядка. Постоянные  $k_j, l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) связаны с корнями уравнения  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{e_{33} k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j=1, 2, 3), \quad (6)$$

где  $a_j = c_{44}^E(1+k_j) + e_{15} l_j$ ;  $d_j = e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j$  ( $j=1, 2, 3$ ). (7)

Далее получаем

$$k_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)(e_{31} + e_{15})]}{[(c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33}) - (c_{44}^E v_j - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15})]},$$

$$l_j = \frac{[(v_j c_{11}^E - c_{44}^E)(v_j c_{44}^E - c_{33}^E) + v_j (c_{44}^E + c_{13}^E)^2]}{[(v_j c_{44}^E - c_{33}^E)(e_{31} + e_{15}) - (c_{13}^E + c_{44}^E)(e_{15} v_j - e_{33})]} \quad (j=1,2,3). \quad (8)$$

После введения обозначений  $z_j = v_j^{-1/2} z$  видно, что функции  $\Phi_j$  являются гармоническими в системах координат  $(x, y, z_j)$ .

**Метод решения и основные результаты.** Выберем потенциальные функции следующим образом:

$$\Phi_i(x, y, z_1) = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^* \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i = 1, 2, 3), \quad (9)$$

где  $\rho_i = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}$ ,  $\alpha_i^*$  – постоянные, которые находим из системы трех линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15} l_j) = 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j (c_{44}^E(1+k_j) + e_{15} l_j) / \sqrt{v_j} = 0;$$

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j (e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j) = 0. \quad (10)$$

Также положим  $\Phi_4^{(2)} = \Phi_5^{(2)} = 0$ . В результате такого выбора потенциальных функций контактную задачу электроупругости о вдавлении двух жестких штампов кругового сечения в электроупругое полупространство приводим к нахождению неизвестной плотности потенциала простого слоя по области  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , при которой нормальные компоненты перемещения под штампами связаны со значениями контактного давления следующим образом:

$$u_z(x, y, 0) = \frac{A^{Piezo}}{2\pi} \iint_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}. \quad (11)$$



Значение  $A^{Piezo}$  определяем согласно выражению  $A^{Piezo} = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$ . (12)

Следовательно, как и в случае классической контактной задачи теории упругости для изотропного полупространства, задача электроупругости сведена к нахождению неизвестной плотности потенциала простого слоя в областях контакта.

*Задача 1.* Рассмотрим вначале случай вдавливания в электроупругое полупространство (с неэлектропроводной поверхностью) двух одинаковых плоских круговых штампов радиуса  $a$ , оси которых проходят через точки с координатами  $(0,0)$  и  $(s,0)$ . Используя метод разложения по малому параметру (аналогично задаче классической теории упругости [5]), получаем распределение контактного давления под штампом с центром в точке  $(0,0)$  в виде

$$p(x, y) = \frac{\delta}{A^{Piezo} \pi \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \varepsilon - \frac{4x}{\pi a} \varepsilon^2 + \frac{4}{\pi^2} \varepsilon^2 - \frac{6x^2}{\pi a^2} \varepsilon^3 + \frac{2y^2}{\pi a^2} \varepsilon^3 + \frac{8x}{\pi^2 a} \varepsilon^3 + \frac{8}{\pi^3} \left( \frac{\pi^2}{12} - 1 \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right\}, \quad \varepsilon = a/s, \quad (13)$$

где  $\delta$  – перемещения штампа. Связь между силой вдавливания  $P$ , которая действует на каждый плоский штамп, и его перемещением принимает вид

$$P = \frac{4a\delta}{A^{Piezo} \pi} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \varepsilon + \frac{4}{\pi^2} \varepsilon^2 - \frac{8}{\pi^3} \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right]. \quad (14)$$

Отметим, что малым параметром в приведенных выражениях является отношение радиусов штампов к расстоянию между их центрами.

*Задача 2.* Исследуем случай вдавливания в электроупругое полупространство, поверхность которого не содержит электродного покрытия, двух шарообразных штампов одинакового радиуса  $b$ , центры которых удалены один от другого на расстоянии  $s$ . При этом предполагаем, радиус  $b \gg \delta$ , поэтому перемещение точек полупространства под основаниями штампов приближенно можно представить  $u_z = \delta - r^2/(2b)$ .

Применяя метод последовательных приближений к системе интегральных уравнений и разложения по малому параметру, подобно [5] для классической задачи теории упругости, распределение контактного давления под штампом с центром в  $(0,0)$  получаем в виде

$$p(r, \alpha) = \frac{2}{\pi A^{Piezo}} \sqrt{\frac{R(\alpha) - r}{R(\alpha) + r}} \left\{ \sqrt{\frac{\delta}{b}} [4 - 0,8492\varepsilon + 0,1800\varepsilon^2 + 3,0328\varepsilon^3 - (0,7423 + 0,0394\varepsilon)\varepsilon^2 \cos \alpha] + [-2 + 0,8492\varepsilon^3 + (0,0265 - 0,0084\varepsilon)\varepsilon^2 \cos \alpha + 0,4246\varepsilon^3 + \cos 2\alpha] b^{-1} [R(\alpha) - r] + o(\varepsilon^4) \right\}, \quad (15)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{\delta b}/s$ ,  $0 \leq \varepsilon < 0,5$ . При этом радиус-вектор контура штампа находим в виде

$$R(\alpha) = \sqrt{\delta b} \left[ 1 - 0,2123\varepsilon + 0,0450\varepsilon^2 + 0,3336\varepsilon^3 - \varepsilon^2 \cos \beta (0,4244 - 0,1394\varepsilon) - 0,2123\varepsilon^3 \cos 2\alpha + o(\varepsilon^4) \right].$$

Радиус области контакта для неплоского штампа определяется согласно выражению

$$a = \sqrt{\delta b} \left[ 1 - 0,2123\varepsilon - 0,3794\varepsilon^2 + 0,2607\varepsilon^3 + o(\varepsilon^4) \right]. \quad (16)$$

С помощью формул (15), (16) находим контактное давление и размеры области контакта под одинаковыми шарообразными штампами.

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим случай вдавливания двух плоских круговых штампов в пьезоэлектрическое полупространство. Согласно выражениям (14), связывающим силу вдавливания штампа  $P$  с величиной перемещения штампа  $\delta$ , электроупругие свойства материала полупространства входят в эти выражения через значение  $A^{Piezo}$ . Из формул (14) следует, что при заданной силе вдавливания плоских штампов, перемещения штампов  $\delta$  (их осадка) обратно пропорциональны значению  $A^{Piezo}$ , что позволяет провести оценку влияния связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия. Для сравнения со случаем вдавливания плоских штампов в чисто упругое трансверсально-изотропное полупространство (с теми же упругими свойствами, что и исходный пьезоэлектрик) вычислим также значение  $A^{Trans}$ , которое находим из  $A^{Piezo}$ , полагая близкими нулю пьезомодули и диэлектрические проницаемости для соответствующего пьезоэлектрического материала. В результате вычислений для пьезокерамических материалов PZT-5Н и P-7 имеем  $A^{Piezo} / A^{Trans} = 0,784$  и  $0,711$  соответственно. Это означает, что связанность силовых и электрических полей для приведенных электроупругих материалов значительно уменьшает величину перемещений под плоскими штампами по сравнению со случаем упругого трансверсально-изотропного материала (с теми же упругими свойствами, что и электроупругий материал). Для материалов PZT-5Н и P-7 такое уменьшение составляет 21,6% и 28,8%.

**Выводы.** Таким образом, в настоящей работе получены аналитические приближенные решения новых задач электроупругости о вдавливании двух плоских и неплоских (шарообразных) штампов кругового сечения в электроупругое полупространство с неэлектропроводной поверхностью. Найдены выражения для распределений контактных давлений под штампами, перемещений штампов, а также формулы для вычисления размеров области контакта для неплоских штампов. Дана оценка влияния связанности силовых и электрических полей на перемещения плоских жестких штампов при вдавливании в полупространство.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости / Галин Л.А. – М.: Наука, 1980. – 304с.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / Джонсон К. – М.: Мир, 1989. – 509с.
3. Лурье А.И. Теория упругости / Лурье А.И. – М.: Наука, 1970. – 939с.
4. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B. // Int. Appl. Mech. – 2004. – Vol. 40, № 7. – P.744-765.
5. Андрейкив А.Е. Вдавливание в упругое полупространство системы штампов / Андрейкив А.Е. // Изв. АН СССР. МТТ. – 1975. – № 2. – С.125-131.
6. Podil'chuk Yu.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Podil'chuk Yu.N.

// Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P.132-170.

7. Кирилюк В.С. О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / Кирилюк В.С. // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып.46. – С.29-35.
8. Кирилюк В.С. Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3 (49). – С.28-37.

Поступила в редколлегию 26.03.2014.

УДК 539.3

ЛУГОВОЙ П.З., д.т.н., профессор, гл.науч.сотр.  
ПРОКОПЕНКО Н.Я., к.т.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### О ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

**Введение.** При анализе воздействия гармонических нагрузок на оболочку необходимо знать динамические характеристики распространяющихся волн [1], и, в частности, их волновые параметры. После определения последних строятся дисперсионные кривые. Задача о построении этих кривых для подкреплённых ребрами замкнутых цилиндрических оболочек рассмотрена в работах [2, 3], в которых оценивается влияние дискретного размещения ребер на число и форму дисперсионных кривых.

Ниже дисперсионные кривые получены для гармонических волн, распространяющихся вдоль замкнутых цилиндрических оболочек, усиленных регулярной сеткой продольных ребер и находящихся на упругом основании Пастернака.

**Постановка задачи и уравнения движения.** Рассматривается задача о распространении гармонических волн вдоль замкнутых круговых цилиндрических оболочек, шарнирно опертых по краям и подкреплённых продольными ребрами. Дисперсионные уравнения получены в результате точного решения уравнений движения оболочек, усиленных регулярной системой продольных ребер, выведенных с учетом дискретного размещения ребер, на основе предположения, что движение собственно оболочки (обшивки) может быть описано с использованием прикладной теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а движение ребер – прикладной теорией стержней Кирхгофа-Клебша [2]. Рассматривается случай деформирования оболочки, когда профиль волны в окружном направлении имеет узел прогиба на ребре.

Для волн рассматриваемого профиля полученные в [3] дисперсионные уравнения с учетом упругого основания [1] можно представить в виде

$$1 + L_n^{22} + L_n^{44} + L_n^{22} L_n^{44} - L_n^{24} L_n^{42} = 0 \quad (n=0, \frac{k_1}{2} \delta_{k_1 2s}), \quad (1)$$

где  $L_n^{22} = C_3 \Phi_1^n \left( \frac{N_{n_1}}{1 + \delta_{0n_1}} \right) - C_4 \Phi_1^n (n_1 M_{n_1})$ ;

$$\begin{aligned}
 L_n^{24} &= C_6 \Phi_1^n (n_1 M_{n_1}) + C_4 \Phi_1^n \left( \frac{N_{n_1}}{1 + \delta_{0n_1}} \right); \\
 L_n^{42} &= -C_3 \Phi_1^n (n_1 M_{n_1}) - C_4 \Phi_1^n (n_1^2 F_{n_1}); \\
 L_n^{44} &= C_6 \Phi_1^n (n_1^2 F_{n_1}) - C_4 \Phi_1^n (n_1 M_{n_1}); \\
 \Phi_1^n (X_{n_1}) &= X_n + \sum_{l=1}^{\infty} (X_{lk_1+n} + X_{lk_1-n}); \\
 N_n &= \frac{1}{D_n} \left[ a_n^{11} a_n^{33} - (a_n^{13})^2 \right]; \quad M_n = \frac{1}{D_n} (a_n^{13} a_n^{12} - a_n^{11} a_n^{23}); \\
 F_n &= -\frac{1}{D_n} \left[ a_n^{11} a_n^{22} - (a_n^{12})^2 \right]; \\
 D_n &= -a_n^{11} a_n^{22} a_n^{33} - 2a_n^{12} a_n^{13} a_n^{23} + a_n^{11} (a_n^{23})^2 + a_n^{22} (a_n^{13})^2 + a_n^{33} (a_n^{12})^2; \\
 a_n^{11} &= k^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 - \omega_1^2, \quad a_n^{12} = \frac{1+\nu}{2} kn, \quad a_n^{13} = \nu k; \\
 a_n^{22} &= (1+a^2) n^2 + \frac{1-\nu}{2} (1+4a^2) k^2 - \omega_1^2, \\
 a_n^{23} &= n \left[ 1 + (2-\nu) a^2 k^2 + a^2 n^2 \right]; \\
 a_n^{33} &= 1 + a^2 (k^2 + n^2)^2 + \bar{C}_1 + \bar{C}_2 (k^2 + n^2) - \omega_1^2; \\
 C_3 &= k^2 (\lambda_{1c} k^2 + \mu_c) - \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \omega_1^2 \left( 1 - \frac{h_c}{r} \right) - \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \omega_1^2; \\
 C_4 &= k^2 (\lambda_{2c} k^2 - \mu_c) - \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \omega_1^2 \left( 1 - \frac{h_c}{r} \right) + \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \omega_1^2; \\
 C_6 &= k^2 (\lambda_{3c} k^2 + \mu_c) - \bar{\rho}_c (\bar{\mu}_c + \bar{\eta}_c) \omega_1^2; \\
 \omega_1 &= \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0^2 = \frac{E}{(1-\nu^2) \rho_0 r^2}, \quad a^2 = \frac{h^2}{12r^2}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \quad \bar{\gamma}_c = \frac{F_c k_1}{2\pi r h}, \quad \bar{\delta}_c = \frac{h_c}{r} \bar{\gamma}_c; \\
 \bar{\eta}_c &= \left( \frac{h_c}{r} \right)^2 \bar{\gamma}_c, \quad \bar{\mu}_c = \frac{I_{kpc} k_1}{2\pi r^3 h}, \quad \lambda_{1c} = \frac{E_c I_{zc} k_1 (1-\nu^2)}{2\pi r^3 h E}, \quad \lambda_{2c} = \frac{h_c}{r} \lambda_{1c}; \\
 \lambda_{3c} &= \left( \frac{h_c}{r} \right)^2 \lambda_{1c}, \quad \mu_c = \frac{G_c}{E_c} (1-\nu^2) \bar{\mu}_c,
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

$k$  – волновой параметр,  $h, r$  – толщина оболочки и радиус ее срединной поверхности;  $E, \nu, \rho_0$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки;  $\omega$  – круговая частота колебаний, возбуждаемых в оболочке внешним источником;  $F_c, I_{zc}, I_{kpc}$  – площадь поперечного сечения ребер, его моменты инерции при изгибе в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности обшивки, и при кручении;  $h_c$  – эксцентриситет ребер (расстояние от осей ребер до срединной поверхности оболочки,  $h_c > 0$ , если ребро укреплено на внутренней поверхности обшивки);

$k_1$  – число ребер;  $E_c$ ,  $G_c$ ,  $\rho_c$  – модуль упругости и модуль сдвига материала ребер, а также его плотность,  $2n$  – параметр, определяющий число узловых точек профиля волны в окружном направлении;  $\delta_{k_1, 2s}$  ( $s=1, 2, \dots$ ) – символ Кронеккера.

Уравнения для вычисления частот запираания могут быть получены из уравнения (1), если в них принять  $k = 0$ .

**Числовые результаты.** Вычисления выполнены для оболочки, усиленной продольными ребрами, размещенными на внутренней поверхности обшивки, имеющей такие безразмерные геометрические и механические параметры:

$$\frac{h}{r} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{F_c}{2\pi r h} = 0,16 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{h_c}{r} = 0,14 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{I_{крс}}{2\pi r^3 h} = 0,53 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{zc}}{2\pi r^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}; \quad E_c = E; \quad G_c = 0,3845E; \quad \nu = 0,3.$$

Принято, что характер внешнего воздействия таков, что в оболочке возбуждаются гармонические волны, профиль которых таков, что они описываются дисперсионными уравнениями (1). В табл.1 представлены результаты вычисления частот запираания в зависимости от количества подкрепляющих ребер  $k_1$  для различных значений коэффициентов упругого основания Пастернака для двух случаев, когда  $n = 0$  (нагружение ребристой оболочки гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом  $2\pi / k_1$ ) и  $n = k_1 / 2$  (нагружение оболочки гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом  $4\pi / k_1$ ).

Таблица 1 – Влияние количества ребер и коэффициентов упругого основания Пастернака на частоты запираания

$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$k_1$	$\omega_1 \cdot 10$			
			$n = 0$		$n = k_1 / 2$	
0,001	0,0001	2	0,326, 0,490, 0,524, 0,939,	0,230, 0,416, 0,603, 0,833,		
			1,230, 1,569, 1,958	1,106, 1,427, 1,796		
-“-	-“-	4	0,503, 0,962, 1,602	0,331, 0,711, 1,258, 1,995		
-“-	-“-	6	0,710, 1,599	0,412, 1,102		
-“-	-“-	8	0,959	0,500, 1,595, 1,608		
	-“-	10	1,252	0,598		
0,002	0,0002	2	0,470, 0,706, 0,977, 1,286	0,326, 0,585, 0,836, 1,127,		
				1,456, 1,825		
-“-	-“-	4	1,635	0,462, 0,975, 1,632		
-“-	-“-	6	0,973	0,589, 1,451		
-“-	-“-	8	1,280	0,700		
-“-	-“-	10	1,625	0,829		
0,003	0,0003	2	0,577, 0,861, 1,183, 1,54	0,400, 0,716, 1,017, 1,359,		
			1,9393	1,736		
-“-	-“-	4	0,859, 1,541	0,572, 1,181, 1,935		
-“-	-“-	6	1,179	0,710, 1,730		
-“-	-“-	8	1,536	0,854		
-“-	-“-	10	1,926	1,008		

Из табл.1 видно, что с увеличением количества подкрепляющих ребер значения частот запираания возрастают, а их количество в заданном диапазоне частот возбуждения ( $0 \leq \omega_1 \leq 0,2$ ) уменьшается.

Дисперсионные кривые получены в результате решения уравнения (1) (при выполнении вычислений в рядах (2) удерживалось 100 слагаемых). На рис.1 и 2 показаны дисперсионные кривые для оболочки, нагруженной гармонической нагрузкой циклически симметричной в окружном направлении с периодом  $4\pi / k_1$ . Кривые на рис.1 соответствуют оболочке без упругого основания, подкрепленной четырьмя ребрами, а на рис.2 – оболочке, подкрепленной восемью ребрами и находящейся на упругом основании Пастернака ( $\bar{C}_1=0,001$ ;  $\bar{C}_2=0,0001$ ). Сравнивая кривые на рис.1 и 2, видим, что увеличение количества подкрепляющих ребер и наличие упругого основания приводит к уменьшению числа дисперсионных кривых в заданном диапазоне частот возбуждения, при этом изменяется форма дисперсионных кривых (они становятся более пологими).

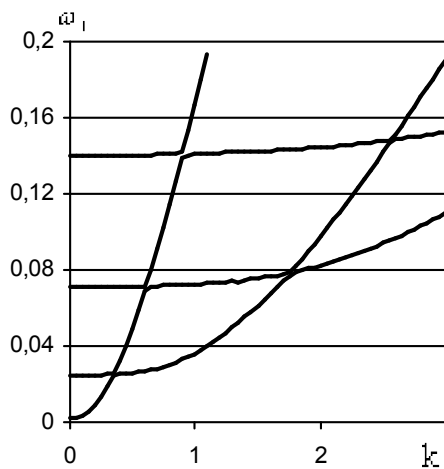


Рисунок 1 – Дисперсионные кривые для оболочки без упругого основания ( $k_1 = 4$ )

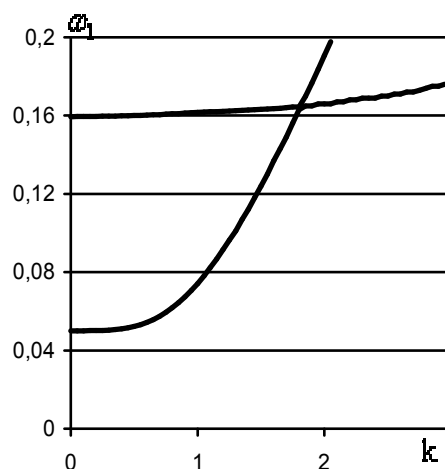


Рисунок 2 – Дисперсионные кривые для оболочки на упругом основании ( $k_1 = 8$ )

Для показанных на рис.1, 2 дисперсионных кривых наблюдается их незначительное «раздвоение».

**Выводы.** На основании проведенного исследования можно сделать вывод, что упругое основание Пастернака и усиление подкрепления оболочки приводят к возрастанию частот запираания и уменьшению количества дисперсионных кривых в заданном диапазоне частот возбуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Головки К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках / Головки К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. – К.: Изд-во полиграф. центр «Киевский университет», 2012. – 541с.
2. Заруцкий В.А. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек / Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. // Прикладная механика. – 2003. – № 4 (39). – С.92-98.
3. Заруцкий В.А. О дисперсионных кривых для гармонических волн, распространяющихся вдоль продольно подкрепленных цилиндрических оболочек / Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. // Прикладная механика. – 2003. – №6. – С.110-114.

Поступила в редколлегию 26.03.2014.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

## ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ НАПРУЖЕНЬ НА ЧАСТОТНИЙ СПЕКТР ХВИЛЬОВОГО ПРОЦЕСУ У ПОПЕРЕДНЬО ДЕФОРМОВАНОМУ СТИСЛИВОМУ ПРУЖНОМУ ШАРІ, ЩО ВЗАЄМОДІЄ З ШАРОМ ІДЕАЛЬНОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

**Вступ.** Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів поверхневих акустичних хвиль: Релея, Лява, Стоунлі та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності, наведено в [1, 2]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним тілам. До числа таких факторів належать початкові напруження. Створені цілеспрямовано, або такі, що виникли в результаті технологічних процесів при виготовленні, вони мають суттєвий вплив на хвильові процеси. Задачі, які розглянуто, та результати, що отримані з урахуванням у тілах початкових напружень, наведено в [3]. Дослідженню в рамках лінеаризованої теорії пружності впливу початкових напружень на швидкості нормальних хвиль у попередньо деформованому пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини, і присвячене дане повідомлення.

**Постановка задачі.** Припустимо, що нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, заповнює об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  та контактує з шаром ідеальної стисливої рідини, що займає об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі  $oz_3$ . У цьому випадку у всіх площинах, паралельних площині  $oz_1z_2$ , явища будуть відбуватися тотожним чином. Тому задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині  $oz_1z_2$ .

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [4-7]. Для плоского випадку, який розглядається, загальні розв'язки будуть мати вигляд [4-7]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1;$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}; \quad (1)$$

де введені функції  $\chi_1$  та  $\chi_2$  задовольняють рівнянням:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (2)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0; \quad (3)$$

Дана задача характеризується наступними динамічними

$$Q_1|_{z_2=0} = 0, Q_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}, Q_1|_{z_2=-h_2} = 0, Q_2|_{z_2=-h_2} = 0, P_2|_{z_2=h_1} = 0 \quad (4)$$

та кінематичними 
$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (5)$$

граничними умовами. Тут введені наступні позначення:  $u_i$  – компоненти вектора переміщень пружного тіла;  $\lambda_i$  – подовження пружного шару в напрямках координатних осей;  $a_{ij}$  та  $\mu_{ij}$  – величини, які визначаються з рівнянь стану, та залежать від виду пружного потенціалу [8];  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  – початкові напруження ( $s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$ );  $\rho$  – щільність матеріалу пружного шару;  $v_i$  – компоненти вектора швидкості рідини;  $a_0$  – швидкість звуку в рідині в стані спокою;  $Q_j$  та  $P_i$  – складові векторів напружень у твердому тілі та рідині.

**Результати роботи.** Далі параметри, що характеризують процес поширення хвиль, розшукуються у класі біжучих хвиль, які обираються у вигляді:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

де  $k$  – хвильове число,  $\omega$  – кругова частота.

Зауважимо, що обраний в роботі клас гармонійних хвиль, який є найбільш простим та зручним у теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонійних складових. Далі розв’язуються дві задачі Штурма – Ліувіля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини, а також знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв’язків у граничні умови (4) – (5) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв’язку, та, прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm} \left( c_\sigma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \frac{\omega h_1}{c_s}, \frac{\omega h_2}{c_s} \right) \right\| = 0, \quad l, m = 1-6, \quad (7)$$

де  $c_\sigma$  – фазова швидкість нормальних хвиль у попередньо напруженому шарі,

$\left[ (c) \right]_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – швидкість хвилі зсуву,  $\mu$  – модуль зсуву,  $h_2$  – товщина пружного шару,

$h_1$  – товщина шару рідини,  $\rho_0$  – щільність рідини. Зауважимо також, що особливість розповсюдження збурень у гідропружному хвилеводі зазначеної структури обумовлена наявністю в пружному тілі та рідині граничних поверхонь. Це значно ускладнює картину хвильового поля у ньому. Причиною цього є те, що у формуванні поля в гідропружній системі суттєву роль відіграють не тільки наявність рідини, а також взаємодія хвиль з поверхнею пружного тіла, контактуючого з рідким середовищем, але і наявність вільних границь та їх взаємовплив. Складна взаємодія хвиль, породжених граничними поверхнями, призводить до виникнення, так званих, квазіповерхневих мод.

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння (7) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати ряд частинних



випадків. Зокрема, якщо  $a_0$  спрямувати до нескінченості, то (7) переходить у рівняння для визначення параметрів мод у випадку взаємодії з ідеальною нестисливою рідиною. При  $\rho_0 = 0$  рівність (7) перейде в рівняння для визначення швидкостей хвиль Лемба [9]. Якщо додатково спрямувати  $h_2$  до нескінченості, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [10,11]. При  $\rho_0 \neq 0$  та  $h_1 \rightarrow \infty$  рівність перейде у рівняння Стоунлі [11]. Вказані частинні випадки враховують наявність початкових деформацій у пружному шарі. Задачі, які було розглянуто в рамках цієї моделі, наведено в [3]. Якщо покласти  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ , то отримаємо рівності для добре досліджених в рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі та Лемба [1, 2].

У подальшому дисперсійне рівняння (7) розв'язувалося чисельно. При цьому числові розрахунки проводилися для системи оргскло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар -  $\rho = 1160 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ; шар рідини -  $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $a_0 = 1459,5 \text{ м/с}$ . Зауважимо, що рівняння (7) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми. При чисельній реалізації питання щодо вибору конкретної форми пружного потенціалу має самостійне й важливе значення і суттєвим чином може вплинути на кінцевий результат. Як показано у роботі [8], для попередньо напружених стисливих жорстких матеріалів (сталь, оргскло) закономірності, які спостерігаються експериментально, можуть бути правильно описані теоретично лише у рамках триінваріантних пружних потенціалів. У зв'язку з цим, у даній роботі для оргскла використовувався найпростіший триінваріантний потенціал у формі Мурнагана [8]. З урахуванням цього сталі Мурнагана для оргскла, через які визначаються величини рівнянь стану  $a_{ij}$  та  $\mu_{ij}$ , обиралися такими:  $a = -3,91 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ;  $b = -7,02 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ;  $c = -1,41 \cdot 10^9 \text{ Па}$  [9].

Результати обчислень представлені на рис.1-5. На рис.1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних фазових швидкостей  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = \frac{c}{c_s}$ ) від безрозмірних товщин пружного шару  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \frac{\omega h_2}{c_s}$ ) для хвиль при відсутності початкових деформацій. Номерами  $n_a$  позначено антисиметричні моди,  $an_s$  – відповідно симетричні моди. На рис.2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних швидкостей від безрозмірних товщин шару рідини  $\bar{h}_1$  ( $\bar{h}_1 = \frac{\omega h_1}{c_s}$ ) для пружного шару з товщиною рівною  $\bar{h}_2 = 2$ , теж при відсутності початкових деформацій. Характер впливу попереднього розтягу ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на швидкості мод у пружному шарі, який взаємодіє з шаром рідини, ілюструють графіки на рис.3-5, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей  $C_\varepsilon$  ( $C_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon - c}{c}$ ,  $C_\sigma$  – фазова швидкість нормальних хвиль у попередньо напруженому шарі,  $c$  – фазова швидкість нормальних хвиль у системі при відсутності початкових деформацій) від товщини шару рідини для перших 7 мод. На цих рисунках представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, товщина пружного шару якого дорівнює  $\bar{h}_2 = 2$ .

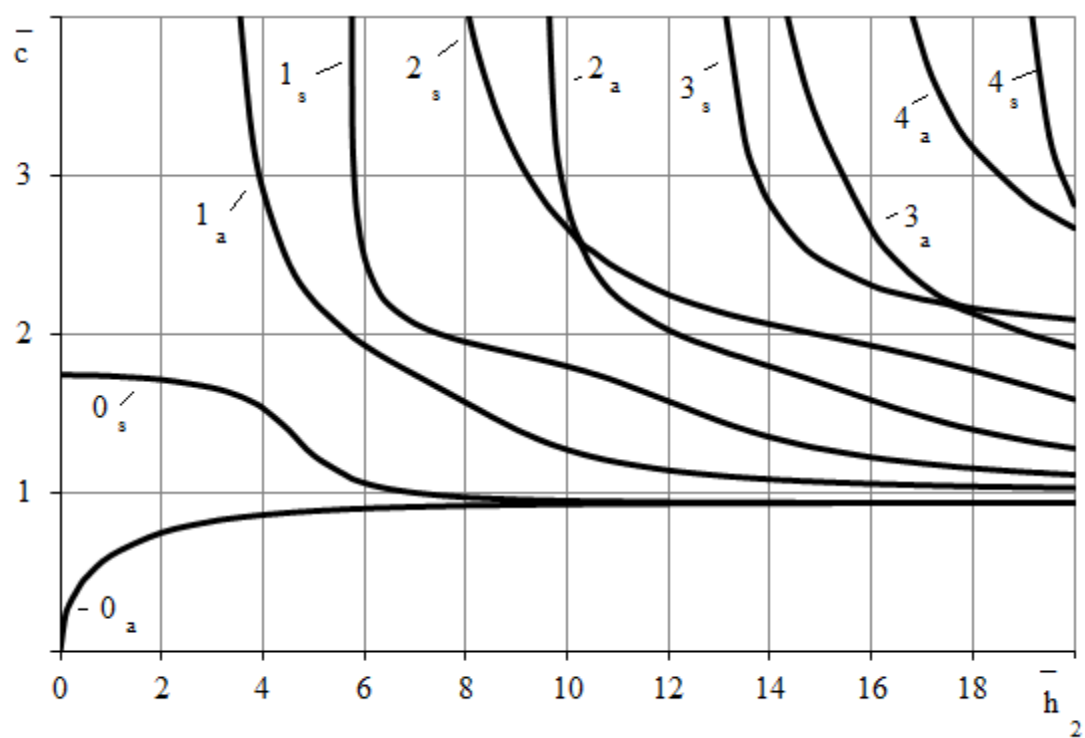


Рисунок 1

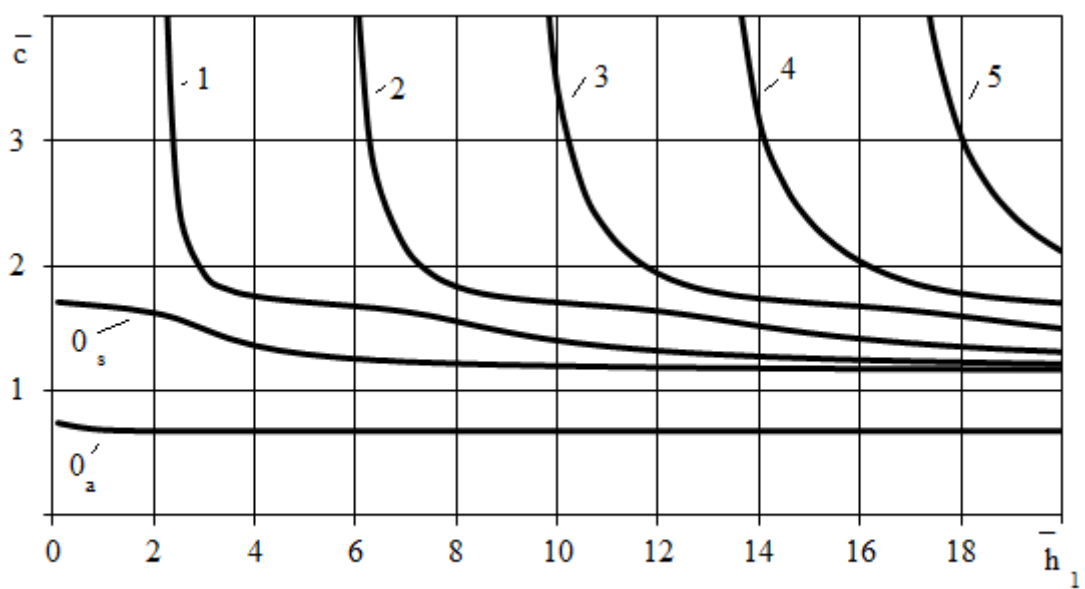


Рисунок 2

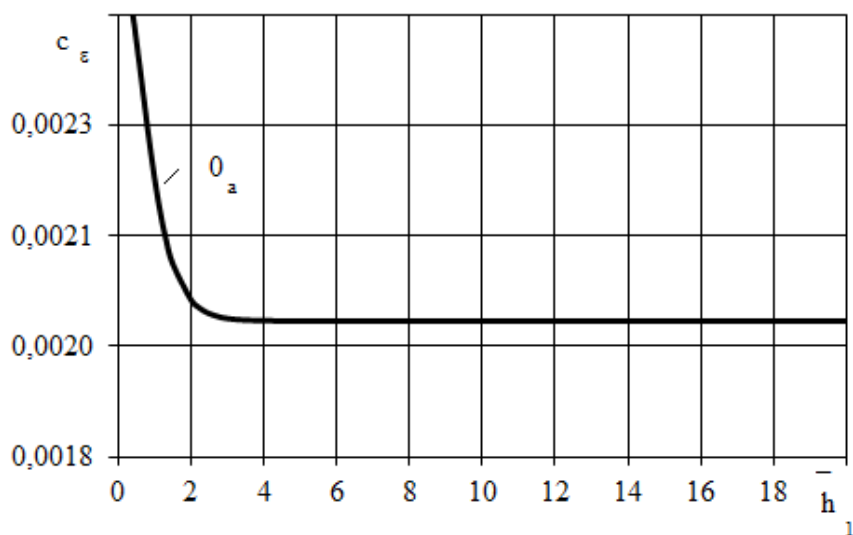


Рисунок 3

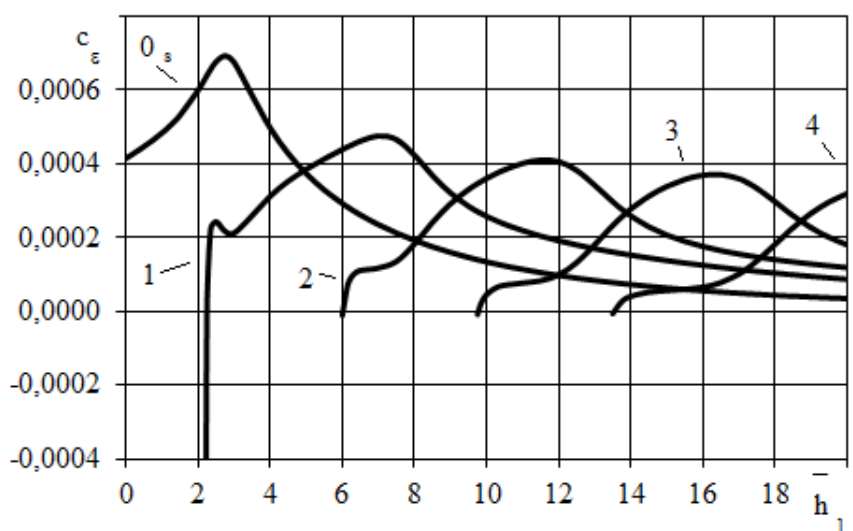


Рисунок 4

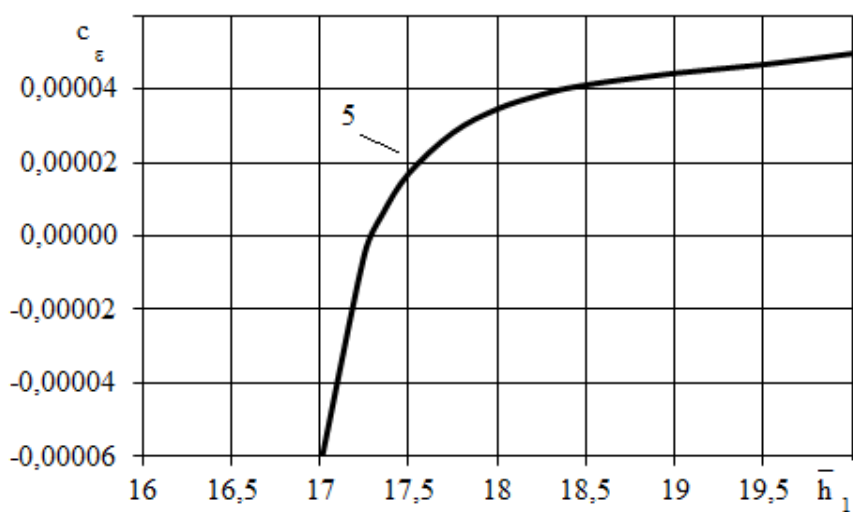


Рисунок 5

**Висновки.** З наведених графіків неважко бачити, що початкові напруження суттєво впливають на критичні частоти мод. Для всіх мод, окрім нульових антисиметричної та симетричної, попередній розтяг пружного шару призводить до зменшення величин швидкостей мод в околі частот їх зародження.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах (обзор) / Викторов И.А. // Акустический журнал. – 1979. – Вып. 1 (25). – С.1-17.
2. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах / Викторов И.А. – М.: Наука, 1981. – 288с.
3. Багно А.М. Упругие волны в предварительно напряжённых телах, взаимодействующих с жидкостью (обзор) / Багно А.М., Гузь А.Н. // Прикладная механика. – 1997. – № 6 (33). – С.3-39.
4. Гузь А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями / Гузь А.Н. // Прикладная механика. – 1980. – № 3 (16). – С.3-21.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах / Гузь А.Н. – К.: Наукова думка, 1986. – 286с.
6. Гузь А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости / Гузь А.Н. – К.: А.С.К., 1998. – 350с.
7. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / Гузь А.Н. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
8. Гузь А.Н. Введение в акустоупругость / Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуща О.И. – К.: Наукова думка, 1977. – 152с.
9. Гузь А.Н. Волны в слое с начальными напряжениями / Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г. – К.: Наук.думка, 1976. – 104с.
10. Бабич С.Ю. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / Бабич С.Ю., Гузь А.Н., Жук А.П. // Прикладная механика. – 1979. – № 4 (15). – С.3-23.
11. Жук А.П. Волны Стоуна в среде с начальными напряжениями / Жук А.П. // Прикладная механика. – 1980. – № 1 (16). – С.113-114.

Надійшла до редколегії 28.03.2014.

УДК 534.075

НАЗАРЕНКО В.М., д.т.н.  
ДОВЖИК М.В., к.т.н.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН України

### **РАЗРУШЕНИЕ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СЖАТИИ ВДОЛЬ ПРИПОВЕРХНОСТНОЙ ДИСКООБРАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ ПРИ МАЛЫХ РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ ТРЕЩИНОЙ И СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

**Введение.** Разрушение материала при сжатии вдоль трещин одна из неклассических проблем механики разрушения. В случае нагружения материала вдоль плоскости расположения трещины применяется два подхода. Первый из них базируется на применении приближенных расчетных схем [1], когда вычлняемый трещинами элемент заменяется балкой, пластиной или оболочкой. Второй предложен в работах А.Н.Гузя [2]. В качестве критерия разрушения в этом случае используется критерий локальной потери устойчивости материала в окрестностях трещины, в рамках трехмерной линеаризированной теории упругой устойчивости [2]. Согласно этому подходу, процесс разрушения инициируется моментом локальной потери устойчивости материала вблизи трещин, а критические параметры сжатия определяются из решения соответствующих за-

дач на собственные значения, в рамках трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел. В рамках этого подхода получены результаты для эластичных пластических и композитных материалов.

**Постановка задачи.** Работа посвящена исследованию задач про разрушение композитного материала с приповерхностной дискообразной трещиной радиуса  $a$ , расположенной в плоскости  $x_3 = 0$  при сжатии вдоль трещины в осесимметричной постановке. В случае тела с макротрещиной, когда размеры трещины значительно больше размеров микроструктур композит рассматривается в виде анизотропной среды с наведенными макрохарактеристиками [4].

Задача сводится к решению системы интегральных уравнений Фредгольма с дополнительным условием

$$\begin{aligned} f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\ g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0; \\ \int_0^1 g(\xi) d\xi &= 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1). \end{aligned} \quad (1)$$

**Методика решения.** Для дальнейших исследований применялась численно-аналитическая методика решения интегральных уравнений Фредгольма, позволившая получить результаты при исследовании упругих высокоэластичных материалов, предложенная в работах [5, 6]. Для поиска критических укорочений, и напряжений из интегральных уравнений (1) использовалась процедура, построенная на методе Бубнова-Гальоркина. В качестве системы координатных функций использовались степенные функции. В отличие от предыдущих работ [2-4], где после подстановки координатных функций в систему интегральных уравнений (1) при дальнейшем исследовании сразу проводилось численное интегрирование системы, предложенная численно-аналитическая методика, позволяющая, используя современный пакет символьных вычислений, аналитически посчитать интегралы от ядер интегральных уравнений (1). Это позволило при дальнейших расчетах получить большую точность.

После использования данной методики, система интегральных уравнений (1) сводится к решению системы из  $2(N+1)+1$  уравнения

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{1ji} &= 0; \quad \sum_{i=0}^N F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 &= 0; \\ \sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} G_i &= 0, \quad 0 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (2)$$

с неизвестными величинами  $F_i$ ,  $G_i$ ,  $\tilde{C}_1$ ,  $i \in [0, N]$ , где  $F_{kji}$ ,  $G_{kji}$  – точные выражения, посчитанные аналитически, зависящие от констант материала и безразмерного расстояния между трещинами  $\beta = ha^{-1}$ .

**Результаты работы.** В качестве примера проведено исследование композита с приведенными характеристиками трансверсально-изотропной среды  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,2$ ;  $G'/E = 0,1$ ;  $E'/E = 0,5$ .

Так на графиках показана зависимость критических напряжений от безразмерного расстояния между трещиной и свободной поверхностью для больших расстояний

(рис.1) и для малых (рис.2). При этом результаты, полученные для больших значений безразмерных расстояний, совпадают с результатами, полученными ранее [4].

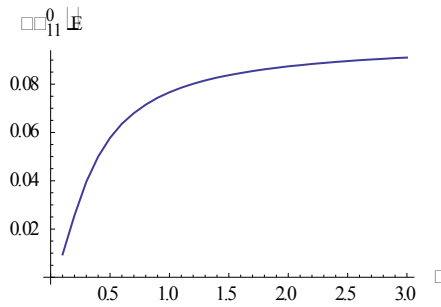


Рисунок 1

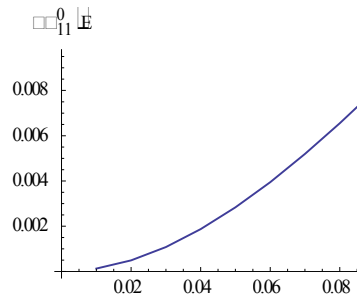


Рисунок 2

В табл.1 приведены результаты критических напряжений для очень малых безразмерных расстояний, а также значение коэффициента  $A$ , исходя из предположения, что  $\sigma_{11}^0/E = A\beta^2$ .

Таблица 1

$\beta$	$\sigma_{11}^0/E$	$A$
$9 \cdot 10^{-2}$	$-7.997 \cdot 10^{-3}$	-0.987
$8 \cdot 10^{-2}$	$-6.553 \cdot 10^{-3}$	-1.024
$7 \cdot 10^{-2}$	$-5.197 \cdot 10^{-3}$	-1.061
$6 \cdot 10^{-2}$	$-3.951 \cdot 10^{-3}$	-1.097
$5 \cdot 10^{-2}$	$-2.834 \cdot 10^{-3}$	-1.134
$4 \cdot 10^{-2}$	$-1.871 \cdot 10^{-3}$	-1.169
$3 \cdot 10^{-2}$	$-1.084 \cdot 10^{-3}$	-1.204
$2 \cdot 10^{-2}$	$-4.947 \cdot 10^{-4}$	-1.237
$1 \cdot 10^{-2}$	$-1.268 \cdot 10^{-4}$	-1.268
$1 \cdot 10^{-3}$	$-1.290 \cdot 10^{-6}$	-1.290
$1 \cdot 10^{-4}$	$-1.287 \cdot 10^{-8}$	-1.287
$1 \cdot 10^{-5}$	$-1.285 \cdot 10^{-10}$	-1.285
$1 \cdot 10^{-6}$	$-1.284 \cdot 10^{-12}$	-1.284
$1 \cdot 10^{-9}$	$-1.284 \cdot 10^{-18}$	-1.284

**Выводы.** Используя численно аналитическую методику из [5, 6] для композитного материала с приповерхностной дискообразной трещиной, получены критические параметры разрушения для больших и малых значений относительных расстояний между трещинами.

Из анализа полученных результатов можно определить, что при малых значениях безразмерных расстояний критические напряжения  $\sigma_{11}^0/E$  имеют квадратичную зависимость от безразмерного расстояния с коэффициентом  $A = -1.28$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica / Obreimoff I.W. // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P.290-297.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.Н. – К.: Наукова думка, 1983. – 296с.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикладная механика. – 1989 – № 9 (25). – С.3-32.
4. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Конструкционные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикладная механика. – 1989 – №10 (26). – С.3-19.
5. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / А.Н.Гузь, М.В.Довжик, В.М.Назаренко // Прикладная механика. – 2011. – Т. 47, № 6. – С.28-37.
6. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / М.В.Довжик // Прикладная механика. – 2012. – Т. 48, № 3. – С.79-88.

Поступила в редколлегию 28.03.2014.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ УПРУГИЙ ТРУБОПРОВОД – ЖИДКОСТЬ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

**Введение.** Механические системы, состоящие из трубопровода и жидкости, широко представлены в различных отраслях экономики. Такие системы являются составляющей частью многих технических устройств, которые при эксплуатации зачастую подвержены различного типа динамическим (в том числе и ударным) продольным нагрузкам. Одним из существенных аспектов при этом является изучение переходных процессов в таких гидроупругих системах под воздействием продольных импульсных и ударных нагрузок. Поэтому изучение взаимного влияния жидкости и трубопровода, как элементов механической системы, является весьма актуальным. При этом возникает необходимость построения адекватной математической модели рассматриваемых явлений и процессов, а также эффективных методов исследования. Существенным моментом при таком исследовании есть выделение характерных параметров, которые определяют состояние данной гидроупругой системы. Необходимость решать вопросы снижения материалоемкости и энергоемкости, повышения прочности конструкций и т.п. приводит к необходимости более тщательного изучения динамических процессов в сложных механических системах. К таким вопросам относятся, в частности, исследования по изучению переходных процессов в гидроупругих системах при различного рода импульсных и динамических нагрузках. При этом рассматриваются задачи, как в нелинейной, так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи [1-4]. Для решения подобных задач зачастую применяется интегральное преобразование Лапласа-Карсона. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке в линейной постановке (метод Бубнова-Галеркина, метод итераций, численное обращение интегрального преобразования) [5-7].

В работе ставится цель применить метод итераций к исследованию переходных процессов в трубопроводе с жидкостью при продольном ударном нагружении для конкретной механической задачи. Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах при продольных ударных нагружениях можно моделировать, с приемлемой погрешностью, полубесконечной цилиндрической оболочкой с находящейся внутри жидкостью. При этом необходимо применять такие механические модели цилиндрической оболочки и жидкости, которые учитывают волновой характер распространения возмущений в системе. Поэтому целесообразно использовать линейные уравнения движения оболочки по модели Тимошенко и акустическое приближение для жидкости.

**Постановка задачи.** На оболочку действует продольная ударная нагрузка, т.е. удар по торцу оболочки массой  $M$  с начальной скоростью  $V_0$ . Рассматриваются тонкостенные оболочки в классическом понимании ( $h/R \leq 0,1$ ,  $h$  – толщина стенки оболочки;  $R$  – срединный радиус оболочки). На торце оболочки находится масса  $m$ . Задача рассматривается в безразмерном виде. За характерную длину  $L$  выбран радиус оболочки, т.е.  $L = R$ , за характерную массу выбрана величина  $M + m$ , а за характерное время

$T$  выбрана величина  $T = R \left( (1 - \nu^2) \rho_1 / E \right)^{1/2}$ , где  $\nu, E, \rho_1$  – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно.

В работе [8] для данного класса задач в пространстве изображений по Лапласу-Карсону ( $F^*(p) = p \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ ) построен потенциал скоростей жидкости  $\varphi^*$  через известные перемещения оболочки. Тогда математическая модель исследования переходных процессов в гидроупругой системе полубесконечная цилиндрическая оболочка – жидкость при продольных динамических ударных нагружениях в пространстве изображений на основании вышеизложенного может быть записана следующим образом.

Уравнения движения

$$\begin{cases} U_{xx}^* - d_1^2 U^* = \beta_{13} W_x^*, & \Psi_{xx}^* - d_2^2 \Psi^* = \beta_{23} W_x^*, \\ W_{xx}^* - d_3^2 W^* = \beta_{31} U_x^* + \beta_{32} \Psi_x^* + K_s p \left( -a U^*(0) e^{-\beta x} + \sum_{j=0}^N X_j(x) J_0(\alpha_j) \right). \end{cases} \quad (1)$$

Граничные условия будут

$$x=0: W_x^* = \Psi^* = 0; \quad x=\infty: U^* = W^* = \Psi^* = 0, \quad (2)$$

$$x=0: p^2 (U^* - V_0 / p) = 2\pi K_m K_h (U_x^* + \nu W^*) + \left( 2\pi K_m K_s K_h p \int_0^1 \varphi^* r dr \right) / \alpha_{33}. \quad (3)$$

Здесь  $x, r$  – продольная и радиальная координаты соответственно;  $U^*, W^*, \Psi^*$  – продольное, радиальное перемещение стенки оболочки и тангенс угла наклона сечения по теории оболочек типа Тимошенко соответственно (в пространстве изображений). Коэффициенты системы имеют следующий вид:  $d_1^2 = p^2$ ,  $d_2^2 = p^2 + \alpha_{22}$ ,  $d_3^2 = b_3^2 p^2 + \alpha_{33} + apK_s$ ,  $b_3^2 = \alpha_{33} = 2 / (k^2 (1 - \nu))$ ,  $\beta_{13} = -\nu$ ,  $\alpha_{22} = \beta_{23} = 6k^2 (1 - \nu) / K_h^2$ ,  $\beta_{31} = 2\nu / (k^2 (1 - \nu))$ ,  $\beta_{32} = -1$ . Остальные коэффициенты приведены в [9]. Уравнения движения и граничные условия записаны в безразмерном виде. Их анализ позволяет выделить характерные величины для данной задачи. Это следующие величины:  $K_h = h / R$ ,  $K_m = R^3 \rho_1 / (M + m)$ ,  $K_s = 2R\rho_0 / (h\rho_1 k^2 (1 - \nu)) = (2 / k^2 / (1 - \nu)) \cdot K_\rho / K_h$ ,  $K_\rho = \rho_0 / \rho_1$ . Здесь  $\rho_0$  плотность жидкости в состоянии покоя. Коэффициент  $K_s$ , который отражает взаимосвязь оболочки и жидкости, будем называть коэффициентом взаимосвязи гидроупругой системы. Вышеприведенные коэффициенты есть массово-геометрические характеристики системы, которые отражают существенные взаимосвязи в рассматриваемой системе.

**Результаты работы.** В результате проведенных выше исследований [8] задача математической физики относительно четырех переменных  $U^*, W^*, \Psi^*, \varphi^*$  с независимыми переменными  $x, r, t$  ( $t$  – время) сведена к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций  $U^*, W^*, \Psi^*$  по продольной координате  $x$ . При этом потенциал скоростей жидкости (в пространстве изображений по времени) находится по найденным значениям перемещений  $U^*, W^*, \Psi^*$ . Для решение поставленной задачи предлагается применить метод итераций.

**Начальное приближение.** За начальное приближение (нулевое) выбираем  $W_0^* = 0$ , которое удовлетворяет граничным условиям для  $W^*$  (2). Для нахождения начального приближения  $U^* = U_0^*$  используем первое уравнение из (1) при граничных условиях (2)-(3). В результате получим следующую краевую задачу.



$$\text{Уравнение движения} \quad U_{xx}^* - d_1^2 U^* = 0, \quad (4)$$

$$\text{краевые условия} \quad x=0: U^* = K_1 U_x^* + K_2; \quad x=\infty: U^* = 0. \quad (5)$$

$$\text{Здесь} \quad K_1 = 2\pi K_m K_h / p^2, \quad K_2 = V_0 / p + 2\pi K_m K_s K_h K_0 / p^2, \quad (6)$$

$$K_0 = -aU^*(0)/2 + X_0(0)/2 + a(\beta-1)W^*(0)/\beta^2 + aW^*(0)e^{-\beta}/\beta^2. \quad (7)$$

Общее решение дифференциального уравнения (4) находим стандартным методом как сумму решения общего неоднородного уравнения и частного решения однородного уравнения. Общее решение однородного уравнения (4) имеет вид  $U^* = C_1 e^{-d_1 x} + C_2 e^{d_1 x}$ . Из второго краевого условия (5) находим  $C_2 = 0$ . Для нахождения  $C_1$  используем первое граничное условие (5). Вначале находим

$$U^*(0) = C_1 e^{-d_1 \cdot 0} = C_1 \quad \text{и} \quad \frac{dU^*}{dx} = \frac{d}{dx}(C_1 e^{-d_1 x}) = -d_1 C_1 e^{-d_1 x}. \quad \text{Тогда} \quad U_x^*|_{x=0} = -d_1 C_1.$$

Для нахождения значения  $K_2$  по (6) вначале найдем  $K_0$  по (7). Получим  $K_0 = -aU^*(0)/2 + X_0(0)/2 + a(\beta-1)W^*(0)/\beta^2 + aW^*(0)e^{-\beta}/\beta^2$ . Для нахождения  $X_0$  имеем

$$\text{дифференциальное уравнение} \quad \frac{d^2 X_0}{dx^2} - \lambda_0^2 X_0 = -pB_{10}W_0^* - aB_{20} \frac{d^2 W_0^*}{dx^2}$$

при следующих граничных условиях  $x=0; \infty: \frac{dX_0}{dx} = 0$ . Поскольку  $W_0^* = 0$ , то имеем очевидное решение

$X_0 = 0$ . Следовательно  $K_0 = -aU^*(0)/2 = -aC_1/2$ . Тогда  $K_2 = V_0/p - a\pi C_1 K_m K_s K_h$ . После этого первое граничное условие из (5) примет вид

$$C_1 = K_1(-d_1 C_1) + V_0/p - a\pi C_1 K_m K_s K_h / p^2. \quad \text{Отсюда} \quad C_1 = \frac{pV_0}{p^2 + p^2 d_1 K_1 + a\pi K_m K_s K_h}$$

и начальное приближение для  $U^*$  примет вид  $U_0^* = C_1 e^{-d_1 x}$ .

Начальное приближение для  $\Psi^* - \Psi_0^*$  находим из второго уравнения системы (1) при соответствующих граничных условиях:  $\Psi_{xx}^* - d_2^2 \Psi^* = 0; \quad x=0; \infty: \Psi^* = 0$ . Отсюда находим начальное приближения  $\Psi_0^* = 0$ .

Найдем начальное приближение для потенциала скоростей  $\varphi^*$ . Ранее был построен потенциал скоростей жидкости в пространстве изображений через перемещения стенок оболочки [8]:

$$\varphi^* = -aU^*(0)e^{-\beta x} + aW^* e^{-(1-r)\beta} + \sum_{j=0}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r).$$

$$\text{Функции} \quad X_j(x) \quad \text{находим из уравнений [8]} \quad \frac{d^2 X_j}{dx^2} - \lambda_j^2 X_j = -pB_{1j}W^* - aB_{2j} \frac{d^2 W^*}{dx^2}$$

при граничных условиях  $x=0; \infty: \frac{dX_j}{dx} = 0 \quad (j=\overline{0, N})$ . Решение данных уравнений тривиальное

$X_j = 0 \quad (j=\overline{0, N})$ . Следовательно начальное приближение для потенциала скоростей имеет вид  $\varphi_0^* = -aC_1 e^{-\beta x}$ .

**Первое приближение.** Для нахождения первого приближения поперечного перемещения стенки оболочки  $W_1^*$  используем третье уравнение системы (1) при соответствующих граничных условиях. Получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 W_1^*}{dx^2} - d_3^2 W_1^* = \beta_{31} \frac{dU_0^*}{dx} + \beta_{32} \frac{d\Psi_0^*}{dx} - a\pi K_s U_0^*(0)e^{-\beta x} + K_s \sum_{j=0}^N X_{0j}(x)J_0(\alpha_j)$$

и граничные условия  $x=0$ :  $\frac{dW_1^*}{dx}=0$ ;  $x=\infty$ :  $W_1^*=0$ . Из начального приближения имеем

$$U_0^* = C_1 e^{-d_1 x}, \quad \frac{dU_0^*}{dx} = -d_1 C_1 e^{-d_1 x}, \quad \Psi_0^* = 0, \quad \frac{d\Psi_0^*}{dx} = 0, \quad U_0^*(0) = C_1, \quad X_{0j} = 0 \quad (j = \overline{1, N}).$$

Тогда уравнение для первого приближения  $W_1^*$  примет вид

$$\frac{d^2 W_1^*}{dx^2} - d_3^2 W_1^* = -\beta_{31} d_1 C_1 e^{-d_1 x} - ap K_s C_1 e^{-\beta x} \quad \text{при тех же граничных условиях. Находим решение дифференциального уравнения стандартным способом. Получим } W_1^* = C_5 e^{-d_3 x} + N_1 e^{-d_1 x} + N_2 e^{-\beta x}. \quad \text{Здесь } N_1 = \beta_{31} d_1 C_1 / (d_3^2 - d_1^2), \quad N_2 = ap K_s C_1 / (d_3^2 - \beta^2), \quad C_5 = -d_1 N_1 / d_3 - \beta N_2 / d_3.$$

Для нахождения первого приближения для  $U^*$ ,  $\Psi^*$  и  $\varphi^*$  найдем выражения

$$\frac{dW_1^*}{dx} = -d_3 C_5 e^{-d_3 x} - d_1 N_1 e^{-d_1 x} - \beta N_2 e^{-\beta x}; \quad \frac{d^2 W_1^*}{dx^2} = d_3^2 C_5 e^{-d_3 x} + d_1^2 N_1 e^{-d_1 x} + \beta^2 N_2 e^{-\beta x}. \quad (8)$$

Первое приближение для  $U^*$  находим из первого уравнения системы (1) и соответствующих граничных условий:

$$\frac{d^2 U_1^*}{dx^2} - d_1^2 U_1^* = \beta_{13} \frac{dW_1^*}{dx}; \quad x=0: \quad U_1^* = K_1 \left[ \frac{dU_1^*}{dx} + v W_1^* \right] + K_2; \quad x=\infty: \quad U_1^* = 0.$$

Используем ранее полученное выражение для (8). Уравнение (1) примет вид

$$\frac{d^2 U_1^*}{dx^2} - d_1^2 U_1^* = -\beta_{13} d_3 C_5 e^{-d_3 x} - \beta_{13} d_1 N_1 e^{-d_1 x} - \beta_{13} \beta N_2 e^{-\beta x} \quad \text{при тех же граничных условиях. Решение дифференциального уравнения находим стандартным способом. } U_1^* = (C_7 + N_4 x) e^{-d_1 x} + N_3 e^{-d_3 x} + N_5 e^{-\beta x}. \quad \text{Здесь } N_3 = \beta_{13} d_3 C_5 / (d_1^2 - d_3^2), \quad N_4 = \beta_{13} N_1 / 2, \quad N_5 = \beta_{13} \beta N_2 / (d_1^2 - \beta^2), \quad C_7 = \frac{K_1 [-d_3 N_3 + N_4 - \beta N_5 + v(C_5 + N_1 + N_2)] + V_0 / p + 2\pi K_m K_h K_{01}}{1 + d_1 K_1 + \pi K_m K_s K_h / p^2},$$

$$K_{01} = -a(N_3 + N_5) / 2 + (C_{1x0} + N_{1x0} + N_{3x0}) / 2 + (a(\beta - 1) + ae^{-\beta})(C_5 + N_1 + N_2) / \beta^2,$$

$$C_{1x0} = -(d_1 N_{1x0} + d_3 N_{3x0} - N_{\beta x0}) / \beta, \quad N_{1x0} = (pB_{10} + ad_1^2 B_{20}) N_1 / (\beta^2 - d_1^2),$$

$$N_{3x0} = (pB_{10} + ad_3^2 B_{20}) C_5 / (\beta^2 - d_3^2), \quad N_{\beta x0} = (pB_{10} + a\beta^2 B_{20}) N_2 / 2\beta.$$

Для первого приближения  $\Psi^* = \Psi_1^*$  используем второе уравнение из (1) при соответствующих граничных условиях (2)-(3). Получим следующую краевую задачу.

$$\text{Уравнения движения } \frac{d^2 \Psi_1^*}{dx^2} - d_2^2 \Psi_1^* = -\beta_{23} d_1 N_1 e^{-d_1 x} - \beta_{23} d_3 C_5 e^{-d_3 x} - \beta_{23} \beta N_2 e^{-\beta x};$$

$$\text{краевые условия } x=0; \infty: \Psi_1^* = 0.$$

Находим решение, как и ранее, стандартным способом и получим

$$\Psi_1^* = N_6 e^{-d_1 x} + C_9 e^{-d_2 l} + N_7 e^{-d_3 x} + N_8 e^{-\beta x}.$$

$$\text{Здесь } N_6 = \beta_{23} d_1 N_1 / (d_2^2 - d_1^2), \quad N_7 = \beta_{23} d_3 C_5 / (d_2^2 - d_3^2), \quad N_8 = \beta_{23} \beta N_2 / (d_2^2 - \beta^2), \quad C_9 = -N_6 - N_7 - N_8.$$

Согласно [8] первое приближение для потенциала скоростей будет:

$$\varphi_1^* = -a U_1^*(0) e^{-\beta x} + a W_1^* e^{-(1-r)\beta} + \sum_{j=0}^N X_j(x) J_0(\alpha_j r).$$

Выделим первое слагаемое под знаком суммы.  $\varphi_1^* = -aU_{10}^*(0)e^{-\beta x} + aW_{10}^*e^{-(1-r)\beta} + X_0(x)J_0(\alpha_{0r}) + \sum_{j=1}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r)$ . Ранее было найдено выражение для  $X_0(x)$ :  $X_0(x) = (C_{1x0} + N_{\beta x0}x)e^{-\beta x} + N_{1x0}e^{-d_1x} + N_{3x0}e^{-d_3x}$ . Для  $(j = \overline{1, N})$  функции  $X_j(x)$  находим согласно [8]. В данном случае имеем  $\frac{d^2 X_j}{dx^2} - \lambda_j^2 X_j = -(pB_{1j} + ad_1^2 B_{2j})N_1 e^{-d_1x} - (pB_{1j} + ad_3^2 B_{2j})C_5 e^{-d_3x} - (pB_{1j} + a\beta^2 B_{2j})N_2 e^{-\beta x}$ .

Граничные условия  $x=0; \infty$ :  $\frac{dX_j}{dx} = 0$ . ( $j = \overline{1, N}$ ). Решение данной задачи будет:

$$X_j = C_{1xy}e^{-\lambda_j x} + N_{1xy}e^{-d_1x} + N_{3xy}e^{-d_3x} + N_{\beta xy}e^{-\beta x}.$$

Тогда выражение для  $\varphi_1^*$  примет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1^* = & aN_{10}e^{-d_1x}e^{-\beta(1-r)} + N_{1x0}e^{-d_1x} + \left( \sum_{j=1}^N N_{1xy}J_0(\alpha_j r) \right) e^{-d_1x} + aC_5e^{-d_3x}e^{-\beta(1-r)} + N_{3x0}e^{-d_3x} + \\ & + \left( \sum_{j=1}^N N_{3xy}J_0(\alpha_j r) \right) e^{-d_3x} + aN_2e^{-\beta x}e^{-\beta(1-r)} + [-a(C_7 + N_3 + N_5) + C_{1x0} + N_{\beta x0}x]e^{-\beta x} + \\ & + \left( \sum_{j=1}^N N_{\beta xy}J_0(\alpha_j r) \right) e^{-\beta x} + \sum_{j=1}^N C_{1xy}e^{-\lambda_j x}J_0(\alpha_j r). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } N_{1xy} = & (pB_{1j} + ad_1^2 B_{2j})N_1 / (\lambda_j^2 - d_1^2), \quad N_{3xy} = (pB_{1j} + ad_3^2 B_{2j})C_5 / (\lambda_j^2 - d_3^2), \\ N_{\beta xy} = & (pB_{1j} + a\beta^2 B_{2j})N_2 / (\lambda_j^2 - \beta^2), \quad C_{1xy} = -(d_1N_{1xy} + d_3N_{3xy} + \beta N_{\beta xy}) / \lambda_j. \end{aligned}$$

**Второе приближение** для  $W^*$  находим на основании первого приближения для  $U^*, \Psi^*, \varphi^*$  по предложенному методу. В результате получим

$$W_2^* = (S_{10} + S_{11}x) \cdot e^{-d_1x} + S_{20} \cdot e^{-d_2x} + (C_{11} + S_{30}x) \cdot e^{-d_3x} + (S_{\beta 0} + S_{\beta 1}x) \cdot e^{-\beta x} + \sum_{j=1}^N S_{xj0} e^{-\lambda_j x}.$$

Коэффициенты приведены в [9]. Таким образом, предложено нахождение приближенного решения в пространстве изображений. Данный метод имеет хорошую сходимость, что подтверждено на примере подобных задач [6].

**Выводы.** В пространстве изображений начально-краевую задачу удалось свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (для определенного класса задач). При записи задачи в безразмерных величинах были выделены массово-геометрические характеристики системы. Для нахождения приближенного аналитического решения системы дифференциальных уравнений в пространстве изображений предложено применить метод итераций. Метод итераций показывает хорошую сходимость для подобного класса задач. Переход в пространство оригиналов предполагается осуществлять численно. Исследования в данной области целесообразно продолжать для исследования переходных процессов в конкретных механических системах при осевом ударном нагружении для различных параметров системы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок / Н.А.Алумяэ // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.883-889.
2. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой /

- В.Д.Кубенко. – Киев.:Наукова думка, 1979. – 184с.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.593-599.
  4. Сагомоян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость / А.Я.Сагомоян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.173-176.
  5. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа- Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
  6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008.– Вып. 2(31). – С.240-244.
  7. Коваленко А.П. Массово-геометрические характеристики системы упругий трубопровод-жидкость и их влияние на переходные процессы в системе при продольных динамических ударных нагрузках / А.П.Коваленко // КОНСОНАНС-2013. Акустичний симпозіум (01.10-02.10 2013 р.): Збірник праць. – Київ, 2013. – С.142-147.
  8. Коваленко А.П. Построение математической модели исследования переходных процессов в системе упругий трубопровод жидкость при продольных ударных динамических нагрузениях / Коваленко А.П. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2(22). – 2012. – С.110-115.
  9. Коваленко А.П. Влияние массово-геометрических характеристик системы упругий трубопровод-жидкость на переходные процессы в трубопроводе при продольных динамических ударных нагрузках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2013.– Вып. 2(47). – С.150-154.

Поступила в редколлегию 02.04.2014.

УДК 539.3

БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н.  
ДЕКРЕТ В.А., д.физ.-мат.н.  
ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ДОКРИТИЧЕСКОМ СОСТОЯНИИ

**Введение.** При эксплуатационных нагрузках и технологических процессах изготовления волокнистых и слоистых композитных материалов возникают сжимающие напряжения, которые могут привести к потере устойчивости в структуре композитного материала [1-7]. Потеря устойчивости в структуре волокнистых и слоистых композитных материалах является одним из основных механизмов разрушения композитных материалов при сжатии [5-7]. В [5] сформулированы неклассические проблемы механики разрушения и рассмотрены соответствующие механизмы разрушения композитных материалов при сжатии. Одной из таких проблем является разрушение в виде смятия торцов при сжатии композитных материалов [6, 7]. В [6] показано, что на первоначальном

етапе разрушения при смятии торцов наиболее вероятным механизмом является потеря устойчивости в структуре композита, которая имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи загруженного торца с формами потери устойчивости, которые затухают при удалении от торца. Этот механизм относится к однонаправленным композитам или к ортогонально-армированным композитам при нагружении вдоль осей симметрии. По терминологии [6] указанное явление соответствует поверхностной неустойчивости возле плоской границы (плоского торца) при ее нагружении внешней нормальной сжимающей нагрузкой. В [7] представлены результаты численного исследования приповерхностной потери устойчивости слабоармированного слоистого композитного материала при одноосном нагружении, которые подтверждают наличие указанного механизма.

При одноосном сжатии однонаправленных композитов вдоль направления армирования возникают нормальные сжимающие напряжения на плоскостях, которые параллельны торцевой поверхности. Это обуславливает описанный выше механизм на первоначальном этапе разрушения композита при смятии торцов. При этом напряженно-деформированное состояние в случае равномерной поверхностной нагрузки может рассматриваться как однородное или кусочно-однородное. Более сложное напряженно-деформированное состояние может возникать за счет ограничений на перемещения в плоскости торца и более сложных условий нагружения поверхности материала. К таким условиям нагружения можно отнести поверхностную нагрузку, которая прикладывается только к армирующим компонентам композитного материала и в общем случае имеет период, сравнимый или превышающий характерный размер структуры материала. В [8] показано, что размер и геометрия области неоднородности напряженного состояния, характер распределения напряжений и деформаций зависят от соотношения механических и геометрических характеристик компонент материала, степени их анизотропии, а также от соотношения геометрических параметров, которые определяют микроструктуру композита и размер расчетной области.

Вполне очевидно, что адекватное описание столь сложного явления как потеря устойчивости в структуре композитных материалов не может быть достаточно надежно реализовано в рамках двумерных прикладных теорий устойчивости тонкостенных элементов (стержней, пластин и оболочек). В настоящее время наиболее строгим и точным подходом при решении задач указанного класса является применение модели кусочно-однородной среды и основных соотношений трехмерной линеаризованной теории устойчивости (ТЛТУДТ), которые учитывают неоднородность докритического состояния [9, 10].

Сложность получения аналитических решений для задач указанного класса предполагает использование современных численных методов [7, 11]. Следует отметить, что при использовании численных методов и, в частности, метода сеток, который применяется в данной работе, задачи определения докритического состояния и устойчивости формулируется для расчетной области конечных размеров. Переход от исходной модели для материалов, которым соответствует бесконечная или полубесконечная области, к области конечных размеров осуществляется из условий регулярности и периодичности композитных структур, симметричности условий нагружения. При этом для расчетной области конечных размеров должны быть определенным образом учтены условия периодичности композитной структуры, соответствующие материалу, который моделируется бесконечной или полубесконечной областью. Решение задачи устойчивости для представительного элемента композитного материала при граничных условиях, которые соответствуют условиям симметрии (а не условиям периодичности) приводит к более высоким значениям критических нагрузок и формам потери устойчивости, которые соответствуют т.н. “однонаправленным” формам потери устойчивости

(unidirectional buckling) [12]. Это связано с наложением дополнительных связей в виде, например, смешанных граничных условий на боковых сторонах расчетной области, которые соответствуют условиям симметрии. Но с другой стороны такая расчетная модель определенным образом учитывает влияние боковых поверхностей образца или элемента конструкции при исследовании механизма разрушения материала при смятии торцов.

Данная работа является развитием численных исследований устойчивости композитных материалов при неоднородных докритических состояниях и связана с разработкой эталонных моделей для их использования в рамках вычислительного эксперимента при расчете композитных материалов и элементов конструкций. В [13] представлена расчетная схема для численного исследования и проведения сравнительного анализа критических параметров устойчивости материала и элемента конструкции слоистой структуры при одноосном продольном сжатии армирующих слоев (для элемента конструкции – более жестких слоев) поверхностной нагрузкой. Эта расчетная схема может использоваться для исследования механизмов разрушения композитных материалов, связанных с потерей устойчивости в структуре композита, которая имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи нагруженной торцевой поверхности материала. В данной работе на основе указанной расчетной схемы исследовано влияние неоднородности докритического состояния на критическую нагрузку и форму потери устойчивости слоистого композитного материала. Задача рассмотрена для случая граничных условий, которые соответствуют условиям симметрии нагружения композитного материала при одноосном сжатии поверхностной нагрузкой, которая приложена к армирующим слоям.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача устойчивости слоистого двухкомпонентного композитного материала регулярной структуры (рис.1) при равномерном одноосном сжатии армирующих слоев поверхностной нагрузкой постоянной интенсивности. Нагружение реализуется в виде “мертвой” нагрузки, что обеспечивает выполнение достаточных условий применимости статического метода ГЛТУДТ [12]. Для исследования устойчивости композитных структур применяется *статический метод трехмерной линеаризованной теории устойчивости в рамках второго варианта теории малых докритических деформаций*. Докритическое состояние определяется из решения плоской задачи линейной теории упругости кусочно-однородных тел для различных граничных условий, которые соответствуют трехслойному элементу периодичности. Исходя из условий симметрии нагружения, в качестве расчетной схемы рассматривается краевая задача с однородными смешанными граничными условиями на боковых сторонах двухслойной расчетной области.

Расчетная модель для композитного материала в силу неоднородности докритического состояния предполагает исследование механизмов потери устойчивости в структуре материала и механизмов приповерхностной потери устойчивости для полупространства слоистой структуры.

При постановке задачи слоистый композитный материал отнесем к декартовой системе координат  $Ox_1x_2x_3$  и разместим в верхнем полупространстве  $x_2 \geq 0$ . Принимается, что слои являются достаточно протяженными в направлении оси  $Ox_3$ , размещены параллельно плоскости  $Ox_2x_3$  и армирующие слои сжимаются вдоль оси  $Ox_2$  поверхностной (торцевой) нагрузкой постоянной интенсивности. При выполнении этих условий задача может рассматриваться в двумерной постановке для случая плоской деформации в плоскости  $x_1Ox_2$  (рис.1).

При использовании статического метода Эйлера задача устойчивости сводится к обобщенной задаче на собственные значения, в которой минимальное собственное значе-

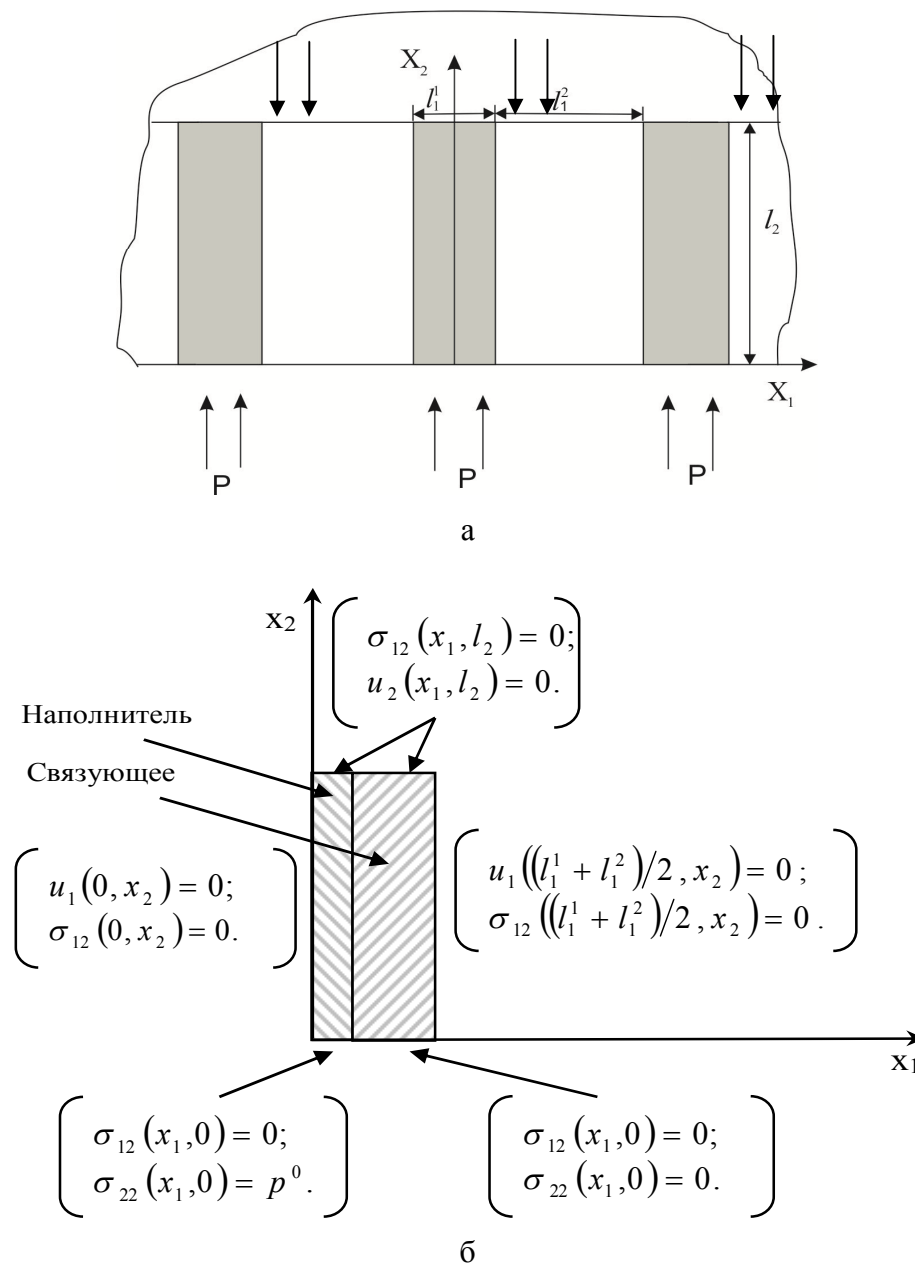


Рисунок 1 – Расчетная схема для исследования потери устойчивости в структуре слоистого композитного материала при одноосном сжатии

ние  $\lambda$  определяет критическую нагрузку, а соответствующая собственная функция  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – форму потери устойчивости. Уравнения и граничные для определения критических параметров устойчивости рассматриваемых композитных структур имеют следующий вид:

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} = 0, x \in \Omega. \quad (1)$$

$$(\sigma_{21} + \lambda \sigma_{2k}^0 u_{1,k}) = 0 \wedge u_2 = 0, x \in S_1,$$

$$(\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) = 0 \wedge u_1 = 0, x \in S_2,$$

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k}) = 0, x \in S_3, \quad (2)$$

$$(\sigma_{22} + \lambda \sigma_{22}^0 u_{2,2}) = 0, x \in S_4,$$

$$(\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k}^0 u_{2,k}) = 0 \wedge u_1 = 0, x \in S_5.$$

Условия на контакте между слоями:  $[\sigma_{ij}] = 0, [u_i] = 0.$  (3)

Критическая нагрузка определяется из условия:

$$P_{kp} = \min |\lambda| / (l_1^1 + l_1^2) \int_{x_1 \in S_3 \cup S_4} P(x_1) dx_1 = \min |\lambda| P (l_1^1 / (l_1^1 + l_1^2)),$$
 (4)

где  $\lambda$  – минимальное собственное число задачи (1)-(3). Вид соотношения (4) отражает тот факт, что сжимающая нагрузка прикладывается только к армирующим слоям.

Компоненты докритического состояния определяются из уравнений линейной теории упругости, которые вместе с граничными условиями и основными соотношениями имеют вид:

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0, x \in \Omega.$$
 (5)

$$\sigma_{21} = 0 \wedge u_2^0 = 0, x \in S_1, \quad \sigma_{12} = 0 \wedge u_1^0 = 0, x \in S_2, \quad \sigma_{ij}^0 = 0, x \in S_3,$$
 (6)

$$\sigma_{22}^0 = P \wedge \sigma_{21}^0 = 0, x \in S_4, \quad \sigma_{12}^0 = 0 \wedge u_1^0 = 0, x \in S_5, \quad \sigma_{ii}^0 = A_{ik} \varepsilon_{ik}, \quad \sigma_{ij}^0 = 2G \varepsilon_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), i \neq j, \quad A_{ii} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$
 (7)

Обозначения в (1)-(7) являются общепринятыми и индексы изменяются от 1 до 2.  $\wedge, \vee$  – знаки логического умножения и сложения. В соотношениях (1)-(7) верхним индексом “0” обозначены компоненты напряжений и перемещений для докритического состояния. Индекс, обозначающий принадлежность к слою композитной структуры для удобства опущен. Также использованы обозначения, которые соответствуют рис.2:

$$S_1 \in (x_2 = l_2 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1 + l_1^2), \quad S_2 \in (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \wedge x_1 \leq l_1^1 + l_1^2), \quad S_3 \in (x_2 = 0 \wedge l_1^1 \leq x_1 \leq l_1^2),$$

$$S_4 \in (x_2 = 0 \wedge 0 \leq x_1 \leq l_1^1), \quad S_5 \in (x_1 = 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2).$$

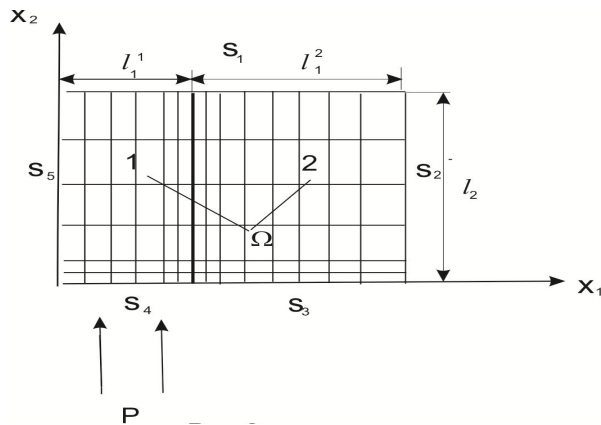


Рисунок 2 – Разностная сетка

Для сравнительного анализа результатов определения критических нагрузок и форм потери устойчивости в композитных структурах при однородных и неоднородных докритических состояниях в рамках вычислительного эксперимента определялись значения напряжений в области установившегося напряженного состояния для неоднородного докритического состояния. Эти значения на последующих этапах вычислительного эксперимента использовались для задания условий нагружения, которые приводят к кусочно-однородному докритическому состоянию.

**Разностная задача.** Задача (1)-(7) решается методом сеток с использованием концепции базовой схемы. При таком подходе разностная схема для расчетной области строится в каждом сеточном узле как определенная сумма значений базовой схемы, представляющей собой разностную схему, полученную вариационно-разностным способом на шаблоне ячейки разностной сетки [7].

При использовании численного подхода задача для исходной полубесконечной модели композитного материала сводится к задаче для ограниченной расчетной области. Размер этой области определяется в результате вычислительного эксперимента, исходя из условия, что расчетные параметры принимают установившееся значение от-



носительно изменения (увеличения) размеров расчетной области в направлении оси  $Ox_2$ . Такими расчетными параметрами являются размер области неоднородного докритического состояния и критическая нагрузка.

На рис.2 представлена расчетная область, в которой введена неравномерная разностная сетка. На прямоугольной неравномерной разностной сетке  $\bar{\omega} = \omega + \gamma$ , которая аппроксимирует область  $\bar{\Omega}$ , задаче (1)-(7), ставится в соответствие разностная задача

$$A_m \mathbf{u} = \lambda B_m \mathbf{u} \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}, \quad (8)$$

где

$$A_m \mathbf{u} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_m(\xi) \mathbf{u} & , \quad \mathbf{x} \in \gamma_{u_m} \\ I u_m & , \quad \mathbf{x} \in \gamma_{u_m} \end{cases}, \quad B_m \mathbf{u} = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_m(\xi) \mathbf{u} \\ I u_m \end{cases}; \quad (9)$$

$$a_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{ji} + \sigma_{ji}^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}, \quad b_i(\xi) \mathbf{u} = -H \frac{\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k} + (\sigma_{jk}^0 u_{i,\xi_k})^{\xi_j}}{\eta_{\xi_j}}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\omega}. \quad (10)$$

$$\sigma_{ii} = c_{ik} \varepsilon_{kk}, \quad \sigma_{12} = 2g \varepsilon_{12}; \quad \varepsilon_{ij} = 0,5 \left( u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i} \right); \quad (11)$$

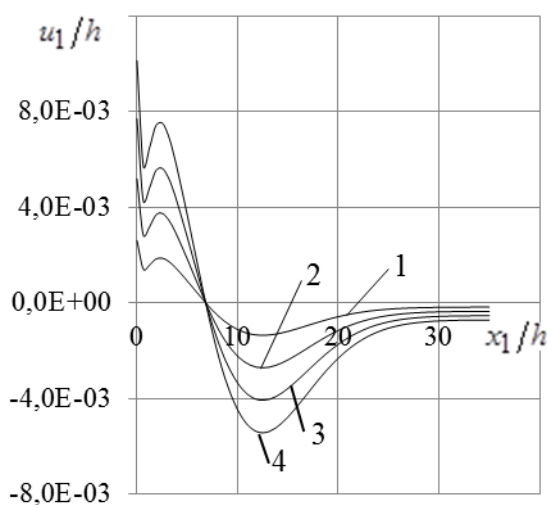
$$z_{,\xi_i} = -\text{sign}(\xi_i) \frac{z^{-\xi_i} - z}{h_i}. \quad (12)$$

В (8)-(12) переменные обозначаются (где такое возможно) так же, как соответствующие континуальные переменные, что, по-видимому, не может привести к недоразумениям. В (8)-(12) обозначено:  $a_m, b_m$  – компоненты базовых операторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ;  $H$  – площадь ячейки;  $h_i$  – шаг ячейки в направлении  $x_i$ ;  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$  – разностные аналоги компонент напряжений, деформаций из (4);  $z_{,\xi_i}$  – разностная производная сеточной функции  $z(\xi)$  в направлении  $x_i$ , правая – при  $\xi_i < 0$ ;  $\xi = (\xi_1, \xi_2), \xi_i = \pm i$  – параметр узла ячейки; знак  $\sum_{\xi \in x}$  означает суммирование компоненты базовой схемы по тем параметрам  $\xi$ , которые совпадают с сеточным узлом  $\mathbf{x}$ ;  $\xi_{-i} = -\xi_i$ ;  $I$  – тождественный оператор;  $\gamma_{u_m}$  – участок границы  $\gamma$ , на котором  $m$ -ая компонента разностного аналога граничного условия задана в смещениях.

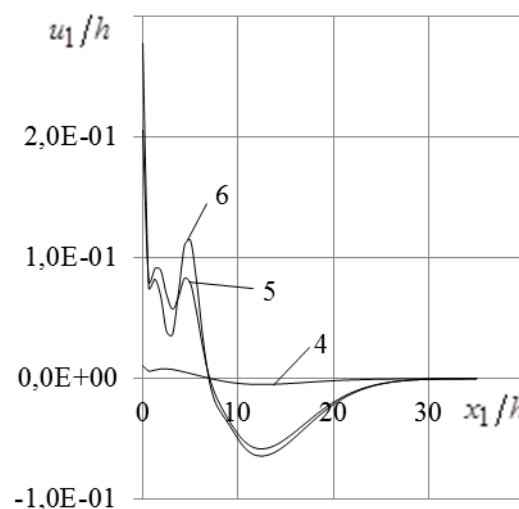
Для решения дискретных задач применялись эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой, представленной в [11]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача решалась прямым методом – методом Холецкого [14], а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов [14]. При этом решение, полученное методом Холецкого, интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения дискретной задачи на собственные значения методом итерирования подпространства [15].

**Результаты расчетов.** Рассматривается материал со следующими механическими и геометрическими характеристиками:  $E^1 / E^2 = 100$ ;  $\nu^1 = \nu^2 = 0,3$ ;  $c_a = S_4 / (S_3 + S_4) = 0,5$ , где  $c_a$  – объемное содержание армирующих компонентов. Здесь  $E^1, E^2$  и  $\nu^1, \nu^2$  – соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона армирующих слоев и слоев связующего. На рис.3, а и 3, б представлены формы потери устойчивости в композитном материале при неоднородном докритическом состоянии соответственно для армирующего слоя и слоя наполнителя. Зависимости  $u_1(x_2)$  приведены для сечений  $x_1 / h = 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75$ , обозначенных на рисунках

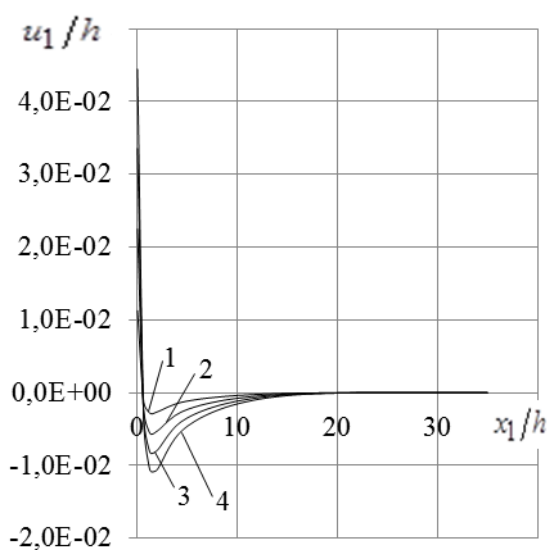
соответственно 1, 2, 3, 4, 5, 6. Значения координаты  $x_2$  и значения возмущений  $u_1$  отнесены к параметру структуры  $h = (l_1^1 + l_1^2)/2$ .



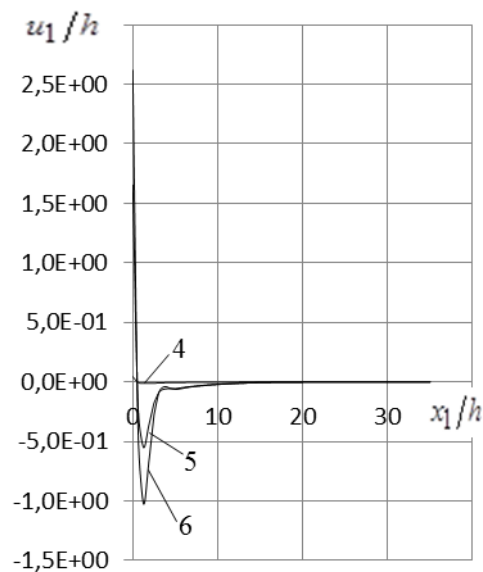
а



б



в



г

Рисунок 3 – Приповерхностные формы потери устойчивости в слоистом композитном материале при одноосном нагружении армирующих слоев при неоднородном (а, б) и однородном (в, г) докритическом состоянии

Представленные на графиках формы потери устойчивости имеют затухающий характер и характеризуют поверхностную неустойчивость композитного материала, соответствующую механизму смятия торцов. Эти формы локализуется вблизи поверхности материала и имеют вид синусоиды с затухающей амплитудой при удалении от поверхности. Для сравнения на рис.3, в и рис.3, г представлена аналогичная графическая информация для случая кусочно-однородного докритического состояния. При таком докритическом состоянии область локализации форм потери устойчивости (об-

ласть поверхностной неустойчивости) имеет значительно меньший размер, а максимальная амплитуда форм потери устойчивости характеризуется более высоким значением.

**Выводы.** Как видно из представленных результатов, потеря устойчивости в структуре слоистого композитного материала при одноосном поверхностном сжатии имеет характер приповерхностной потери устойчивости вблизи нагруженной поверхности с формами потери устойчивости, которые затухают при удалении от торцевой поверхности композитного материала. Неоднородность докритического состояния существенным образом влияет на амплитудные характеристики форм потери устойчивости и размеры области их локализации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Babich I.Yu. The Three-Dimensional Theory of Stability of Fibrous and Laminated Materials / Babich I.Yu., Guz A.N., Chechov V.N. // International Applied Mechanics. – 2001. – № 9 (37). – P.1103-1141.
2. Guz A.N. Setting up a theory of stability of fibrous an laminated composites / Guz A.N. // International Applied Mechanics. – 2009. – № 6 (45). – P.587-613.
3. Fleck N.A. Compressive failure of fiber composites / Fleck N.A. // Advances in Applied Mechanics. – 1997. – № 33. – P.43-117.
4. Naik N.K. Compressive strength of unidirectional composites: evaluation and comparison of prediction models / Naik N.K., Kumar R.S. // Composite Structures. – 1999. – № 46. – P.299-308.
5. Guz A.N. On study of nonclassical problems of fracture mechanics and related mechanisms / Guz A.N. // International Applied Mechanics. – 2009. – №1. – P.1-31.
6. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии / Гузь А.Н. – К.: Наукова думка, 1990. – 630с.
7. Гузь А.Н. Численное решение задач трехмерной теории устойчивости упругих тел / Гузь А.Н., Коханенко Ю.В. // Прикладная механика. – 2004.– № 11 (40). – С.117-126.
8. Быстров В.М. Затухание краевого эффекта Сен-Венана в слоистом композитном материале при наличии ненагруженных слоев наполнителя / Быстров В.М. // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С.55-59.
9. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
10. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. / Guz A.N. – Berlin –Heidelberg – New York: Springer, – 1999. – 555p.
11. Численные методы. В 12-и т. / Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др.; под общей ред. А.Н.Гузя. – Т.11. Механика композитов. – К.: “А.С.К.”, 2002. – 448с.
12. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии (обзор) / Гузь А.Н. // Прикладная механика. – 2012. – №3. – С.3-78.
13. Зеленский В.С. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении / Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В.М. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – № 2 (18). – С.49-53.
14. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельнов С.М. – М.: Наука, 1987. – 598с.
15. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Парлетт Б. – М.: Мир, 1983. – 384с.

Поступила в редколлегию 03.04.2014.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## К РАСЧЕТУ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК В ПРОЦЕССАХ ПЕРЕМЕННОГО НАГРУЖЕНИЯ С УЧЕТОМ ВТОРИЧНЫХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ И ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

**Введение.** Численному исследованию упругопластического осесимметричного напряженно-деформированного состояния (НДС) тонких оболочек посвящено много работ [1-3 и др.], в большинстве которых учитывается разгрузка по упругому закону. В некоторых работах [4] учитывается возможность появления вторичных пластических деформаций. В ряде исследований [5 и др.] упругопластическое НДС оболочки определяется с учетом вида напряженного состояния (ВНС) и упругой разгрузки. Работы, в которых приводится методика решения осесимметричной задачи пластичности с учетом вторичных пластических деформаций и ВНС, в настоящее время отсутствуют. В данной статье описан алгоритм определения упругопластического НДС тонкой оболочки в процессе знакопеременного нагружения с учетом вторичных пластических деформаций и ВНС.

**Постановка задачи и основные соотношения.** Рассмотрим оболочку вращения, первоначально находящуюся в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре  $T = T_0 = 20^0 C$ , а затем подвергнутую действию возрастающего равномерного внутреннего давления при этой же температуре. Предполагается, что оболочка изготовлена из изотропного материала, а меридиан оболочки может состоять из конечного числа звеньев разной геометрии. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат  $s, \theta, \zeta$ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью;  $s$  ( $s_a \leq s \leq s_b$ ) – меридиональная координата,  $s_a, s_b$  – координаты, соответствующие торцам оболочки;  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ) – окружная координата;  $\zeta$  ( $\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$ ) – координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности,  $\zeta_0$  соответствует внутренней поверхности оболочки, а  $\zeta_k$  – наружной ее поверхности; толщина оболочки  $h = \zeta_k - \zeta_0$ . В качестве координатной поверхности выбирается срединная либо одна из поверхностей оболочки. Предполагается, что в процессе нагружения материал оболочки деформируется в пределах и за пределами упругости; в возникших областях пластических деформаций может происходить разгрузка с возможным появлением вторичных пластических деформаций, после чего возможно повторное нагружение. В области вторичных пластических деформаций предполагается, что уменьшение предела текучести материала равно его увеличению в момент разгрузки при первоначальном нагружении. Деформации ползучести предполагаются пренебрежимо малыми по сравнению с упругими и пластическими составляющими. Задачу решаем в квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа-Лява и соотношений геометрически линейной теории оболочек [6].

Для описания деформирования материалов будем использовать вариант соотношений теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны с учетом ВНС [7, 8], линеаризованных методом дополнительных напряжений. В этих уравнениях связь между первыми инвариантами тензоров напряжений  $\sigma_0$  и деформаций  $\varepsilon_0$  принята в традиционном линейном виде

$$\sigma_0 = K\varepsilon_0,$$

где  $\sigma_0 = (\sigma_{ss} + \sigma_{\theta\theta})/3$ ,  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{ss} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\zeta\zeta})/3$ ,  $\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta}$  – компоненты тензора напряжений,  $\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{\zeta\zeta}$  – компоненты тензора деформаций,  $K = E/(1-2\nu)$  – модуль объемного расширения,  $E$  – модуль упругости материала. Входящая в определяющие уравнения [7, 8] нелинейная связь между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций предполагается зависящей от ВНС. В качестве параметра ВНС используется угол ВНС [9], который вычисляется через второй и третий инварианты девиатора напряжений. Под углом ВНС подразумевается угол  $\omega_\sigma$ , определяющий ориентацию октаэдрического касательного напряжения в октаэдрической плоскости относительно отрицательного направления проекции на эту плоскость главной оси, вдоль которой действует минимальное главное напряжение. Для конкретизации этой связи при активных процессах используются результаты опытов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов при различных значениях угла ВНС со скоростями, при которых не возникают деформации ползучести. Задачу о НДС оболочки будем решать методом последовательных приближений.

Для решения задачи процесс нагружения разбиваем на ряд малых этапов во времени таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала возможной разгрузки, повторного нагружения и перемены знака первого инварианта тензора напряжений. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия [6] элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения [6] и физические уравнения [7, 8]. Последние представим в произвольной точке оболочки в форме закона Гука с дополнительными напряжениями

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_2,\end{aligned}\quad (1)$$

где

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad A_1 = A_{11} \left( e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)} \right), \quad A_2 = A_{11} \left( e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)} \right). \quad (2)$$

В (1)  $E, \nu$  – соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала,  $e_{ss}^{(p)} = \varepsilon_{ss}^{(p)}$ ,  $e_{\theta\theta}^{(p)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}$ ,  $e_{\zeta\zeta}^{(p)} = -(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)})$  – пластические составляющие компонент деформации, вычисляемые как сумма приращений этих компонент

$$\varepsilon_{ss}^{(p)} = \sum_{m=1}^M \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)}, \quad \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)} = \langle c_{ss} \rangle_m \Delta_m \Gamma_p, \quad \langle c_{ss} \rangle_m = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{S} \right\rangle_m (s, \theta), \quad (3)$$

где угловые скобки означают средние на этапе значения заключенных в них величин,  $S$  – интенсивность касательных напряжений,

$$S = \left[ \frac{1}{3} \left( \sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss} \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4)$$

$\Gamma_p$  – интенсивность накопленной пластической деформации сдвига,

$$\Gamma_p = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma_p + \Delta_M \Gamma_p. \quad (5)$$

Для определения  $\Delta_M \Gamma_p$  используется предположение, что между  $S$ ,  $\Gamma$  и углом ВНС  $\omega_\sigma$  существует зависимость, которая при первоначальном нагружении имеет вид

$$S = \Phi(\Gamma, \omega_\sigma), \quad (6)$$

где

$$\omega_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \left[ -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{I_3(D_\sigma)}{S^3} \right] \quad \left( 0 \leq \omega_\sigma \leq \frac{\pi}{3} \right); \quad (7)$$

$I_3(D_\sigma) = |s_{ij}|$  – третий инвариант девиатора напряжений  $D_\sigma$ ,

$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений.

Для конкретизации зависимости (6) по результатам экспериментов на пропорциональное нагружение трубчатых образцов строятся зависимости  $S(\Gamma)$  для нескольких постоянных значений угла  $0 \leq \omega_\sigma \leq \pi/3$ ; для промежуточных значений этого угла зависимости  $S(\Gamma)$  находятся путем линейной интерполяции. Принимается предположение, что  $\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p$ ,  $G = E/2(1+\nu)$  – модуль сдвига материала. Предполагается, что при упругой разгрузке  $\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p^{(1)}$ , где  $\Gamma_p^{(1)}$  – интенсивность накопленной пластической деформации сдвига в момент разгрузки. В том случае, когда разгрузка сопровождается вторичными пластическими деформациями, используется зависимость

$$S = \Phi_1 \left( \Gamma, \Gamma_p^{(1)}, \omega_\sigma \right). \quad (8)$$

Зависимость (8) строим, используя (6), величину  $\Gamma_p^{(1)}$  и соответствующее значение  $S^{(1)}$  в момент разгрузки. При повторном нагружении используется зависимость

$$S = \Phi_2 \left( \Gamma, \Gamma_p^{(2)}, \omega_\sigma \right). \quad (9)$$

Зависимость (9) строим, используя (6), величину интенсивности накопленной вторичной пластической деформации  $\Gamma_p^{(2)}$  и соответствующее значение  $S^{(2)}$  в момент повторного нагружения. При построении зависимостей (8) и (9) предполагаем, что

$$S^{(1)} + S_T^{(2)} = S^{(2)} + S_T^{(3)} = 2S_T^{(1)}, \quad (10)$$

где  $S_T^{(1)}, S_T^{(2)}, S_T^{(3)}$  – значения интенсивности касательных напряжений, соответствующих пределам текучести материала в зависимостях (6), (8), (9). Один из способов построения зависимостей (8), (9) без учета ВНС описан в [10].

С использованием (6), (8), (9) приращение  $\Delta_M \Gamma_p$  за текущий этап нагружения определяется в процессе последовательных приближений.

Соотношения (1) используем для нахождения связи между усилиями  $N_s, N_\theta$ , моментами  $M_s, M_\theta$  и деформациями и изменениями кривизны  $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$  координатной поверхности оболочки. Полученные соотношения вместе с уравнениями равновесия и геометрическими соотношениями образуют систему 12 уравнений, которую приводим к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно

неизвестных функций  $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$ , где  $Q_s$  – перерезывающее усилие,  $u, w$  – перемещения точек координатной поверхности в меридиональном и нормальном направлениях,  $\vartheta_s$  – угол поворота нормали к координатной поверхности. Эта система имеет вид

$$\frac{d\bar{Y}}{ds} = P(s)\bar{Y} + \bar{f}(s) \quad (11)$$

при граничных условиях

$$B_1\bar{Y}(s_a) = \bar{b}_1, \quad B_2\bar{Y}(s_b) = \bar{b}_2, \quad (12)$$

где  $\bar{Y}$  – вектор-столбец разрешающих функций,  $\bar{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$ ,  $P(s)$  – матрица системы,  $\bar{f}(s)$  – вектор-столбец дополнительных слагаемых,  $B_1, B_2$  – заданные матрицы,  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – заданные векторы-столбцы граничных условий. Элементы матрицы  $P(s)$  и вектора  $\bar{f}(s)$  вычисляются по формулам [3]. Из этих формул следует, что элементы матрицы  $P(s)$  зависят от геометрии оболочки и упругих свойств материала, а компоненты вектора  $\bar{f}(s)$  – еще и от внешних нагрузок и пластических деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений.

Приведенные соотношения позволяют определить НДС оболочки с учетом ВНС на произвольном этапе нагружения. Эти же соотношения применяются для определения НДС оболочки и в том случае, когда ВНС не учитывается. В этом случае зависимость (6) не зависит от ВНС и конкретизируется по результатам экспериментов на простое растяжение образцов, а построенные с использованием (6) зависимости (8), (9) тоже не зависят от ВНС.

Для проведения вычислений необходимо задать геометрию оболочки, условия закрепления и нагружения, а также свойства ее материала. Последние задаются в виде зависимости (6) и коэффициента Пуассона. Разбиение на этапы удобно выполнить таким образом, чтобы на первом этапе оболочка деформировалась упруго.

В первом приближении на первом этапе нагружения в (2) полагаем  $A_1 = A_2 = 0$ . После вычисления элементов матрицы  $P(s)$  и компонент вектора-столбца  $\bar{f}(s)$  решаем краевую задачу (11),(12) путем сведения к задачам Коши, для решения которых используем метод Рунге-Кутты с дискретной ортогонализацией [11]. Получив в результате решения краевой задачи разрешающие функции, находим компоненты деформаций, а по ним – компоненты напряжений (1) и угол  $\omega_\sigma$  (7). Далее вычисляем интенсивность касательных напряжений (4) и находим

$$\Delta_{M\Gamma p} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_{M\varepsilon}^{(p)}, \quad \Delta_{M\varepsilon}^{(p)} = \sum_{i=1}^{L-1} \Delta_{Mi\varepsilon}^{(p)} + \Delta_{ML\varepsilon}^{(p)},$$

$$\Delta_{ML\varepsilon}^{(p)} = \frac{S\sqrt{3} - \sigma^{(d)}}{E}, \quad (13)$$

где  $L$  – номер текущего приближения на  $M$  – м этапе. Значение  $S$  вычисляется по формуле (4), а  $\sigma^{(d)}$  определяется из зависимостей (6), (8) и (9) соответственно при первоначальном нагружении, в области вторичных пластических деформаций и при повторном нагружении. Процесс последовательных приближений на этапе завершается при выполнении условия

$$\left| \Delta_{ML\varepsilon}^{(p)} \right| \leq \delta, \quad (14)$$

где  $\delta$  – наперед заданное число. В процессе последовательных приближений выполняется проверка условий, позволяющих определить, по которой из зависимостей (6), (8), (9) на данном этапе нагружения необходимо вычислять приращение  $\Delta_M \Gamma_p$ . На начальных этапах процесса нагружения используется зависимость (6). В том случае, когда  $\Gamma_p > 0$  и найденное в первом приближении приращение интенсивности пластических деформаций (13) в элементе отрицательно, это означает, что в данном элементе происходит разгрузка, и соответствующее приращение пластических деформаций на данном этапе считается равным нулю. При равенстве нулю приращения пластических деформаций и перемене знака первого инварианта тензора напряжений необходимо использовать зависимость (8). Аналогичным образом осуществляется и переход к использованию зависимости (9).

**Результаты решения задачи.** Описанный алгоритм реализован с помощью программного комплекса. Решена тестовая задача. Выполнен расчет однородного НДС тонкой цилиндрической оболочки, подвергнутой действию растягивающего усилия за пределом упругости, затем после снятия нагрузки последовало сжатие, сопровождающееся изменением пластических деформаций, далее была снята сжимающая нагрузка и приложено растягивающее усилие, а затем оболочка была полностью разгружена. Задача пластичности решалась с точностью  $\delta = 0.00001$ . Эта задача была также решена без применения процесса последовательных приближений, и результаты совпали с заданной точностью. Зависимость  $S \sim \Gamma$  в этом процессе изображена на рис. 1.

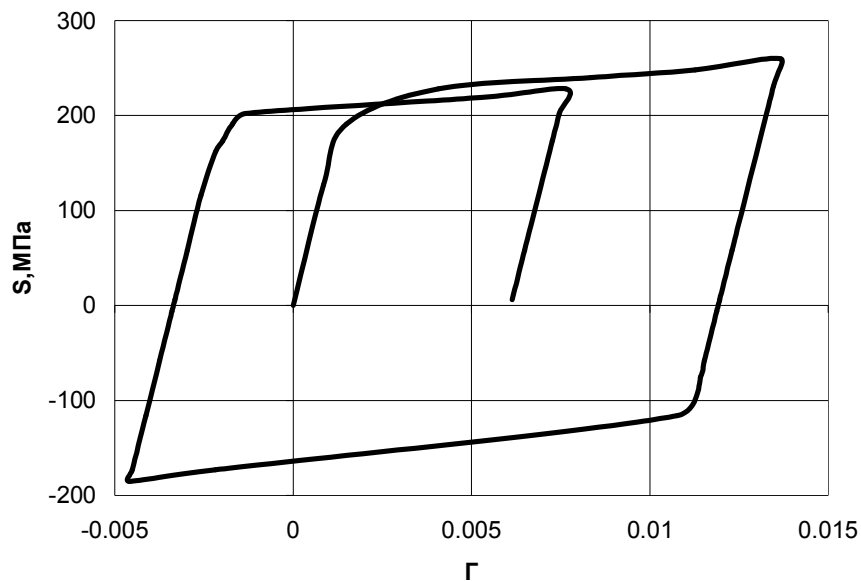


Рисунок 1

**Выводы.** Разработан алгоритм численного исследования упругопластического осесимметричного НДС тонких оболочек в процессах деформирования по траекториям малой кривизны с учетом ВНС и вторичных пластических деформаций. Эффективность алгоритма апробирована на тестовом примере.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шевченко Ю.Н. Теория упругопластических оболочек при неизотермических процессах нагружения. В 5 т. Т.3. / Шевченко Ю.Н., Прохоренко И.В. – К.: Наукова думка, 1981. – 296с.
2. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – Т.2. Термовязкопластичность. – К.: Наукова думка, 1987. – 264с.



3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1992. – 328с.
4. Шевченко Ю.Н. Методика решения осесимметричной задачи термовязкопластичности для тонких слоистых оболочек ЕС ЭВМ / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Прохоренко И.В. – К.: Наукова думка, 1981. – 68с.
5. Babeshko M.E. Describing the Thermoelastoplastic Deformation of Compound Shells under Axisymmetric Loading with Allowance for the Third Invariant of Stress Deviator / Babeshko M.E., Shevchenko Yu.N. // Int. Appl. Mech. – 2010. – № 12. – P.1362-1371.
6. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек / Новожилов В.В. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432с.
7. Shevchenko Yu.N. Constitutive Equations for Describing the Elastoplastic Deformation of Elements of a Body along Small-Curvature Paths in View of the Stress Mode / Shevchenko Yu.N., Terekhov R.G., Tormakhov N.N. // Int. Appl. Mech. – 2006. – № 4 (46). – P.421-430.
8. Бабешко М.Е. О приближенном описании процессов неупругого деформирования изотропного материала с учетом вида напряженного состояния / Бабешко М.Е., Шевченко Ю.Н., Тормахов Н.Н. // Прикладная механика. – 2010. – № 2 (46). – С.24-34.
9. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 324 с.
10. Шевченко Ю.Н. Термопластичность при переменных нагружениях / Шевченко Ю.Н. – К.: Наукова думка, 1970. – 288с.
11. Григоренко Я.М. Теория оболочек переменной жесткости / Григоренко Я.М., Василенко А.Т. – К.: Наукова думка, 1981. – 544с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.4).

Поступила в редколлегию 03.04.2014.

УДК 539.374

САВЧЕНКО В.Г., д.т.н., гол.наук.співроб.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

### ТЕРМОВ'ЯЗКОПЛАСТИЧНИЙ СТАН ТІЛ ОБЕРТАННЯ ПРИ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОМУ ТЕРМОСИЛОВОМУ НАВАНТАЖЕННІ ІЗ ВРАХУВАННЯМ ПОШКОДЖЕННЯ МАТЕРІАЛУ ПРИ ПОВЗУЧОСТІ

**Вступ.** Дане дослідження присвячене розрахунку термов'язкопружнопластичного просторового напружено-деформованого стану та міцності з врахуванням пошкодження матеріалу в осесиметричних елементах енергетичних установок при неосесиметричному навантаженні.

**Постановка задачі. Основні співвідношення.** Розглянемо в циліндричній системі координат  $z, r, \varphi$  нерівномірно нагріте тіло обертання, яке складається із не пружних ізотропних матеріалів, навантажене об'ємними  $\vec{K}(K_z, K_r, K_\varphi)$  і поверхневими  $\vec{t}_n(t_{nz}, t_{nr}, t_{n\varphi})$  силами. Навантаження таке, що в елементах тіла можуть виникати як пружні та пластичні деформації, так і деформації повзучості. Механічні характеристики матеріалів тіла залежать від температури. Навантаження і нагрівання тіла проходить таким чином, що в його елементах реалізуються процеси деформування по траєкторіях малої кривизни, які супроводжуються областями розвантаження.

Для врахування історії деформування увесь процес навантаження і нагрівання

розбивається на окремі досить малі за часом етапи таким чином, щоб їх кінці по можливості співпадали з моментами зміни напрямку процесу деформування окремих елементів тіла від навантаження до розвантаження. Розвантаження вважається пружним. Історія враховується шляхом послідовного розв'язку задачі на кожному етапі. На кожному етапі навантаження вплив пошкодження матеріалу на процеси деформування тіла здійснюється з допомогою параметра пошкодження  $\omega$ , що характеризує зменшення ефективного об'єму, на який діють відповідні компоненти напружень, і використанні замість умовних напружень їх справжніх значень. Цей параметр характеризує зміну протягом деформування початкової структури матеріалу, зародження, розвиток та злиття пор, утворення мікродефектів, що приводить до зменшення ефективною площі перетинів, по яких розподілені компоненти напружень. В цьому випадку дослідження напружено - деформованого стану та пошкодження таких тіл обертається до послідовного розв'язку задачі по визначенню компонентів зміщень  $u_i$ , деформацій  $\varepsilon_{ij}$ , напружень  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = z, r, \varphi$ ) та параметра пошкодження  $\omega$  при заданому силовому навантаженні і розподілі в тілі температури для фіксованих моментів часу. Температура може бути задана як шляхом розв'язування відповідної задачі теплопровідності, так і іншим способом. Тензор деформацій записується у вигляді суми тензорів пружної і пластичної деформації, та деформацій повзучості, при цьому при деформуванні припускається пружною зміна об'єму. При цьому залежності між компонентами напружень  $\sigma_{ij}$  і деформацій  $\varepsilon_{ij}$  після лінеаризації їх з допомогою методу додаткових напружень записуються у вигляді закону Гука з додатковими членами  $\sigma_{ij}^*$ , які враховують тепло-ву деформацію, відхилення матеріалу від пружного, залежність властивостей матеріалу від температури, а також повзучість матеріалу:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= (2G_0 + \lambda_0)\varepsilon_{zz} + \lambda_0(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}) - \sigma_{zz}^*, \\ \sigma_{zr} &= 2G_0\varepsilon_{zr} - \sigma_{zr}^*, \quad (z, r, \varphi), \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^* &= (1 - \omega) * (2G\varepsilon_{ij}^n + 2G_0\omega_1\varepsilon_{ij} + (K\varepsilon_T + 3\lambda_0\omega_1\varepsilon_0)\delta_{ij}), \\ \omega_1 &= 1 - \frac{G}{G_0}, \quad \lambda_0 = \frac{K_0 - 2G_0}{3}, \quad K = \frac{2G(1 + \nu)}{1 - 2\nu}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi})/3, \quad \varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0).$$

Тут  $G_0, G$  – модулі зсуву матеріалу при початковій та поточній температурі відповідно,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона.

В кінці  $m$ -го етапу навантаження нелінійні  $\varepsilon_{ij}^n$  (сума пластичних  $\varepsilon_{ij}^p$  деформацій та деформацій повзучості  $\varepsilon_{ij}^c$ ) складові компонентів деформацій визначаються співвідношеннями

$$\left(\varepsilon_{ij}^n\right)_m = \sum_{k=1}^m \Delta_k \varepsilon_{ij}^n, \quad \Delta_k \varepsilon_{ij}^n = \Delta_k e_{ij}^n = \left\langle \frac{S_{ij}}{S} \right\rangle \Delta_k \Gamma_n, \quad \Delta_k \Gamma_n = \Delta_k \Gamma_p + \Delta_k \Gamma_c. \quad (3)$$

Між інтенсивностями дотичних напружень  $S$  і деформацій зсуву  $\Gamma$ , температурою  $T$  та часом  $t$  існує функціональна залежність. Після лінеаризації визначальних рівнянь (1) для її конкретизації в кожному наближенні використовується миттєва термо-

механічна поверхня  $\sigma = F(\varepsilon^*, T)$ , яка є геометричним місцем діаграм розтягання циліндричних зразків, отриманих при різних фіксованих значеннях температури зі швидкостями навантаження, що не впливають на форму діаграм розтягання, і діаграм повзучості  $\varepsilon^c = \varepsilon^c(\sigma, T, t)$  до моменту руйнування зразка. Тут  $\sigma$  – напруження одновісного розтягання,  $\varepsilon^*$  – миттєва деформація зразка, яка дорівнює сумі пружної деформації  $\varepsilon^e$  та пластичної  $\varepsilon^p$ .

Скалярний параметр пошкодження  $\omega$  визначається з кінематичного рівняння, яке зв'язує швидкість зміни пошкодження з деяким еквівалентним напруженням, з використанням діаграм довготривалої міцності, які отримують також в експериментах на одновісне розтягання. Еквівалентне напруження визначається з допомогою одного із критеріїв міцності. При цьому припускається, що параметр пошкодження являється функціоналом процесу навантаження. Оцінку початку руйнування тіла в даній точці елемента можна проводити як з використанням значень параметру пошкодження, так і шляхом порівняння еквівалентних напружень та значень границь міцності.

В процесі побудови послідовних наближень при розв'язуванні крайових задач на основі цих експериментальних залежностей визначаються прирости інтенсивностей накопичених пластичних деформацій зсуву  $\Delta_k \Gamma_p$  та деформацій повзучості  $\Delta_k \Gamma_c$ , через які потім визначаються компоненти додаткових напружень  $\sigma_{ij}^*$ , які входять в визначальні рівняння (1),(2). Методики визначення цих величин з використанням термомеханічної поверхні  $\sigma = F(\varepsilon^*, T)$ , діаграм повзучості  $\varepsilon^c = \varepsilon^c(\sigma, T, t)$  та діаграм довготривалої міцності в кожному елементі тіла в процесі організації послідовних наближень детально описані в роботах [1, 2].

Як при розв'язку задачі теплопровідності по визначенню розподілу температури в тілі, так і при розв'язку задачі по визначенню напружено – деформованого стану тіла обертання буде використовуватись напіваналітичний метод скінчених елементів, в якому розв'язок шукається у вигляді тригонометричних рядів, коефіцієнти яких визначаються на основі варіаційного рівняння теплопровідності та варіаційного рівняння Лагранжа.

Приєднавши до варіаційного рівняння співвідношення Коші, кінематичні, граничні і початкові умови і враховуючи залежність інтенсивності дотичних напружень  $S$  від інтенсивності деформацій зсуву  $\Gamma$  і температури  $T$ , а також криві повзучості, отримаємо повну систему рівнянь, яка разом дозволяє поетапно прослідкувати весь процес деформування тіла і визначити температуру, зміщення, деформацію і напруження в довільній точці тіла. При такому підході початково тривимірні крайові задачі зводяться до розв'язку в меридіональному перетині тіла сукупності двовимірних варіаційних задач для кожної гармоніки окремо. Їх дискретизація проводиться на основі методу скінчених елементів. Алгоритм розв'язку просторової задачі термопластичності наведено в роботі [3].

**Числові результати.** Для апробації запропонованої методики був досліджений напружено-деформований стан та проведено оцінку міцності диска турбіни реактивного двигуна винищувача з врахуванням системи сил, які діють на диск від зльоту літака до його посадки. Його розрахункова схема приведена на рис.1.

В початковий момент часу диск знаходиться при температурі 20<sup>0</sup>С. Потім він піддається дії об'ємних сил, які виникають при обертанні та рівномірно розподілених по ободу диска поверхневих сил, величина яких визначається дією відкинутих лопаток і залежить від числа обертів наступним чином:  $t_{nr} = 174 * (n/n_{max})^2$  МПа, де n,

$n_{\max}$  – відповідно поточне значення числа обертів та його максимальне значення, яке дорівнює в даному випадку 13300 об/хв.

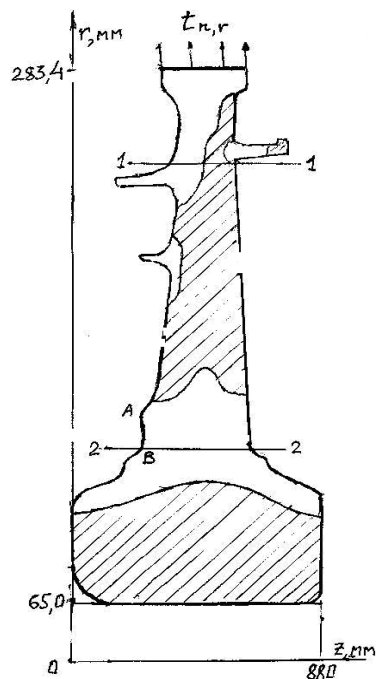


Рис. 1. Розрахункова схема диска

Програма зміни в часі числа обертів протягом циклу між злетом і посадкою літака приведена на рис. 2. Температурне поле для цього ж проміжку часу в чотирьох точках радіусу ( $r=65\text{мм}$ ,  $r=155\text{мм}$ ,  $r=230\text{мм}$ ,  $r=283,4\text{мм}$ ) було отримано експериментально з допомогою термопар. Температура для інших значень радіусу визначалась шляхом лінійної інтерполяції. Припускалось, що температура по товщині диска постійна. Розподіл температури по радіусу диска для трьох моментів часу, які на рис.2 позначені буквами  $b$ ,  $d$ ,  $e$ , наведено на рис.3. На поверхні АВ (рис.1) задавались граничні умови, які не дозволяли зміщенню диска вздовж осі обертання (осьові зміщення  $u_z$  та дотичні напруження  $t_{zr}$  приймались рівними нулю).

Весь проміжок часу між злетом літака і його приземленням розбивався у відповідності з програмою зміни обертів диска на 48 етапів. При цьому на останньому етапі обертви були рівними нулю при досить високій температурі диска. Залишкові напруження та зміщення визначались після повного охолодження двигуна, тобто при  $n=0$  і температурі диска  $T=20^0\text{C}$ . Номера етапів відмічені цифрами на рис.2.

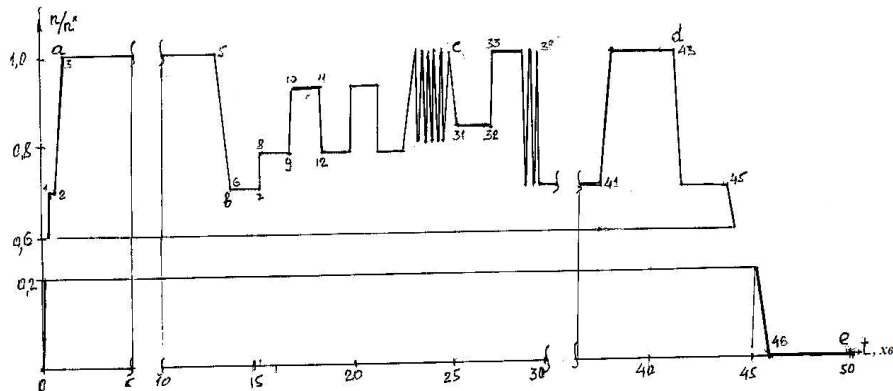


Рис. 2. Програма зміни в часі числа обертів диска.

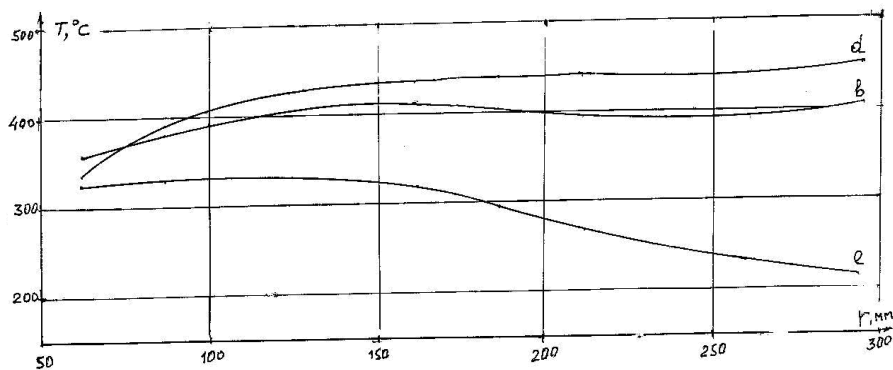


Рис. 3. Розподіл температури по радіусу диска.

Проведені розрахунки показали, що пластичні деформації в диску виникають уже в момент часу, який на рис.2 позначений буквою а, в перетині 1-1 (рис.1) біля правої бокової поверхні диску. З часом роботи двигуна вони розповсюджуються в глибину. На рис.1 заштрихована та частина поперечного перетину диска, де виникли пластичні деформації протягом всього циклу навантаження, тобто до 48 етапу. По формі області пластичності можна зробити висновок, що під дією відцентрових сил і прикладеного поверхневого навантаження відбувається згин диску.

Для оцінки зміни напружено-деформованого стану з ростом числа циклів було проведено розрахунок поведінки диску при циклічному навантаженні по спрощеній програмі. Спрощення програми проводилось таким чином, що на етапах 18-30 та 34-39 вилучались відрізки, на кінцях яких значення числа оборотів однакові, а різниця температур була меншою 5-7 градусів. Такі відрізки при проведенні розрахунків замінялись однією точкою з температурою, середньою по відрізку. Результати такого розрахунку в трьох циклах навантаження посередині меридіонального перетину диску біля внутрішнього отвору показали, що врахування циклічності навантаження проявляються тільки в другому та третьому циклі. Уже в четвертому циклі вплив попередньо накопичених пластичних деформацій не проявляється.

**Висновки.** Таким чином запропонована методика дозволила прослідити кінетику деформування диску при першому робочому запуску двигуна з врахуванням реальних умов навантаження, а також на модельній задачі оцінити вплив повторних запусків двигуна на напружено-деформований стан диску, що досліджується. По результатах цих досліджень можна зробити висновок, що напружено-деформований стан поблизу обода та в ступиці диска носить явно виражений просторовий характер. Тому дослідження напружено-деформованого стану на основі плоскої теорії або теорії оболонок внесе істотні похибки. Ще більшу похибку в результати внесе не врахування зміни числа обертів диска в процесі роботи двигуна при польоті. В той же час при повторному навантаженні диска, тобто при наступній роботі двигуна по цій самій програмі, уже після третього циклу напружено-деформований стан стабілізується. Оцінка міцності диска при даній програмі роботи двигуна показала, що відношення інтенсивності дотичних максимальних напружень до величини допустимого значення не досягає 0,6-0,7, що вказує на достатній запас міцності.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Галишин А.З. Определение термовязкопластического состояния оболочек вращения с учетом повреждаемости материала при ползучести / Галишин А.З. // Прикладная механика. – 2004. – № 5 (40). – С.71-79.
2. Savchenko V.G. Solution of nonaxisymmetric three-dimensional thermoplasticity problem by the secondary-stress method / Savchenko V.G., Babeshko M.E. // Int. Appl. Mech. – 1999. – № 12 (40). – P.1207-1213.
3. Успехи механики: В 6-ти томах / под общей редакцией А.Н.Гузя. Т.1. – Киев: “АСК”, 2005. – 776с. – Савченко В.Г., Шевченко Ю.Н. Пространственные задачи термовязкопластичности. – С.625-660.

*Надійшла до редколегії 09.04.2014.*

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКИМ ВОГНУТЫМ ШТАМПОМ, ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОГО ОПИСЫВАЕТСЯ ОБРАТНОЙ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

**Введение.** Изучению задач вдавливания жестких осесимметричных вогнутых штампов в упругие изотропные и трансверсально-изотропные тела посвящены работы [1, 2]. Проблемы контактного взаимодействия тел с начальными напряжениями с жесткими и упругими штампами исследованы в [3]. Для электроупругих тел проводилось изучение их контактного взаимодействия, в основном, с выпуклыми жесткими штампами [4, 5]. В статьях [6, 7] решены контактные задачи о вдавливании вогнутого сферического и конического жестких штампов в пьезоэлектрическое полупространство. Однако, контактное взаимодействие вогнутого жесткого штампа, поверхность которого описывается обратной степенной функцией, с электроупругим полупространством не изучено.

В данной статье рассмотрена осесимметричная задача электроупругости о вдавливании вогнутого жесткого штампа, поверхность которого характеризуется обратной степенной функцией, в пьезоэлектрическое полупространство (рис.1). Предполагается, что поверхность полупространства не имеет электродного покрытия, а также, что имеет место гладкий контакт со штампом. С помощью представления решения уравнений статики электроупругости для пьезоэлектрического тела задача сведена к решению интегрального уравнения. В явном виде получено соотношение для определения неизвестной площадки контакта вогнутого штампа с полупространством. Как частный случай из приведенных выражений следуют характеристики контакта вогнутого жесткого штампа с упругим трансверсально-изотропным полупространством.

**Постановка задачи.** Рассмотрим электроупругое трансверсально-изотропное полупространство, поверхность которого является плоскостью, перпендикулярной оси симметрии (поляризации) пьезоэлектрического материала.

Предполагаем, что имеет место гладкий контакт штампа с полупространством. Также считаем, что на поверхность полупространства не нанесено электродное покрытие. При сделанных предположениях граничные условия на поверхности контакта  $z = 0$  принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0, D_z = 0, z = 0; \sigma_{zz} = 0, (x, y) \notin \Omega; \sigma_{zz} = -p(x, y), (x, y) \in \Omega; \\ u_z = \delta - \varphi(x, y), (x, y) \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p(x, y)$  – контактное давление под штампом,  $D_z$  – нормальная компонента вектора электрической индукции,  $\Omega$  – неизвестная область контакта под штампом,  $\varphi(x, y)$  – функция, описывающая поверхность вогнутого штампа, является обратной степенной функцией [1].

**Основные соотношения.** Уравнения статики для электроупругого трансверсально-изотропного тела имеют вид [4]

$$\begin{aligned} c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,xz} + \\ + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,xz} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + \\
 & + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\
 & (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\
 & + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

В уравнениях (2)  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

Решение системы уравнений (2) можно выразить согласно [4] через четыре потенциальные функции  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1,4}$ )

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \tag{3}$$

где  $k_j, l_j$  – некоторые постоянные, а функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + v_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3, 5), \tag{4}$$

где  $v_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , значения  $v_i$  ( $i=1,2,3$ ) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка [4]:

$$\begin{aligned}
 & v^3(A_1 B_2 - C_1 D_2) + v^2(A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
 & + v(A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Значения  $k_j, l_j$  ( $j=1,2,3$ ) в формулах (3) связаны с величинами  $v_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = v_j \quad (j=1,2,3), \tag{6}$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j=1,2,3,4). \tag{7}$$

При введении обозначений  $z_j = z n_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1,4}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1)$ ,  $\Phi_2(x, y, z_2)$ ,  $\Phi_3(x, y, z_3)$ ,  $\Phi_4(x, y, z_4)$  становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат.

**Метод решения.** При рассмотрении задачи потенциальные функции  $\Phi_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) выберем в виде

$$\Phi_i^{(1)}(x, y, z_i) = \frac{1}{2\pi} \beta_i^* \iint_{\Omega} p(\xi, \eta) \ln(\rho_i + z_i) d\xi d\eta \quad (i=1,2,3), \tag{8}$$

где  $\rho_i = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_i^2}$  ( $i=1,2,3$ ),  $\beta_i^*$  – неизвестные постоянные. Также положим  $\Phi_4^{(1)} = 0$ . Значения  $\beta_i^*$  ( $i=1,2,3$ ) определим из системы трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \beta_1^* a_1 + \beta_2^* a_2 + \beta_3^* a_3 &= 1; \beta_1^* a_1 / \sqrt{v_1} + \beta_2^* a_2 / \sqrt{v_2} + \beta_3^* a_3 / \sqrt{v_3} = 0; \\ \beta_1^* d_1 + \beta_2^* d_2 + \beta_3^* d_3 &= 0. \end{aligned}$$

Откуда имеем

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \text{ при } z = 0;$$

$$u_z |_{z=0} = \frac{1}{2\pi} A^{Piezo} \iint_{\Omega} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}; \sigma_{zz} |_{z=0} = \begin{cases} -p(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

$$D_z |_{z=0} = 0 \text{ при } z = 0, \tag{9}$$

где  $A^{Piezo} = \left( \sum_{j=1}^3 \beta_j^* k_j / \sqrt{v_j} \right)$ .

Воспользовавшись далее результатами [1, 6], получаем связь силы вдавливания с параметрами контакта в виде

$$\frac{P}{2\pi} A^{Piezo} = \int_0^b G_0(t) dt + \int_b^\infty G_2(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_0^a G(t) \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) dt;$$

$$G_0(t) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\omega f_0(\omega) d\omega}{(t^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (0 \leq t < b)$$

$$G_2(t) = \frac{4}{\pi^2} \int_t^\infty (\omega^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{d}{d\omega} \int_a^\omega \left[ \frac{d}{ds} \int_s^\infty \frac{r f_1(r) dr}{(r^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{s ds}{(\omega^2 - s^2)^{\frac{1}{2}}} \right\} d\omega, \tag{10}$$

где  $G(t)$  является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned} G(t) + \frac{1}{\pi^2} \int_0^a \frac{G(s)}{(t^2 - s^2)} \left[ 2s \log\left(\frac{b-t}{b+t}\right) - 2t \log\left(\frac{b-s}{b+s}\right) \right] ds = \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^t (\omega^2 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\omega} \int_\omega^b \frac{s G_0(s) ds}{(s^2 - \omega^2)^{\frac{1}{2}}} d\omega - \frac{2t}{\omega} \int_b^\infty \frac{G_2(s) ds}{(t^2 - s^2)}. \end{aligned} \tag{11}$$

При рассмотрении контактной задачи электроупругости, как и в задаче теории упругости [1], используем разложение по малому параметру, где  $\varepsilon = a/b = c$ ,  $a$  – неизвестное значение радиуса площадки контакта (рис.1) с вогнутым жестким штампом.

Для вогнутого жесткого штампа (рис.1), поверхность которого описывается обратной степенной функцией, имеем



$$u(r) = (d + u_{-2}) - u_{-2}(b/r)^2;$$

$$f_1(r) = -u_{-2}(b/r)^2; f_0(r) = G_0(r) \equiv 0; G_2(t) = -\frac{u_{-2}b^2}{\pi^2} \log\left(\frac{t^2}{a^2} - 1\right). \quad (12)$$

Исходя из уравнений (10)-(12), в результате проведенных вычислений получаем

$$P(c) = \frac{4b}{A^{Piezo}} \left\{ (d + u_{-2}) \left( 1 - \frac{4c^3}{3\pi^2} - \frac{8c^5}{15\pi^2} - \frac{16c^6}{27\pi^4} - \frac{92c^7}{315\pi^2} - \frac{448c^8}{675\pi^4} + O(c^9) \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{u_{-2}}{2} \left( -2 + \frac{c^2}{3} - \frac{8c^3}{27\pi^2} + \frac{c^4}{10} + \frac{28c^5}{1125\pi^2} + \frac{32c^6}{243\pi^4} + \frac{c^6}{21} + \log c \left[ 2 + \frac{8c^3}{9\pi^2} + \frac{64c^5}{75\pi^2} - \frac{32c^6}{87\pi^4} \right] \right) \right\}. \quad (13)$$

Для определения неизвестного радиуса контакта вогнутого штампа аналогично [1, 6] используем условие экстремума  $\partial P(c) / \partial c = 0$ . Получаем

$$\frac{d}{u_{-2}} = -1 + \frac{\pi^2}{4c^3} \frac{1 + \frac{c^2}{3} + \frac{c^4}{5} + \frac{22c^5}{45\pi^2} - \frac{32c^6}{81\pi^4} + \frac{c^6}{7} + \frac{4c^3 \log c}{3\pi^2} \left( 1 + \frac{8c^2}{5} - \frac{8c^3}{9\pi^2} \right)}{1 + \frac{2c^2}{3} + \frac{8c^3}{9\pi^2} + \frac{23c^4}{45} + \frac{896c^5}{675\pi^2}}, \quad (14)$$

где  $d$  соответствуют обозначениям на рис.1,  $u_{-2}$  используется в формуле (12).

На основе полученных выражений (13), (14) находим неизвестный радиус области контакта пьезоэлектрического полупространства с жестким вогнутым штампом, поверхность которого описывается обратной квадратичной функцией. Из найденных формул предельным переходом следуют характеристики контакта упругого трансверсально-изотропного полупространства с вогнутым жестким штампом. При этом величину  $A^{Piezo}$  в указанных выражениях следует заменить значением  $A^{Elast}$ . Отношение  $A^{Piezo} / A^{Elast}$  для конкретных пьезоэлектрических материалов вместе с формулами (13), (14) позволяет дать оценку влияния связанности силовых и электрических полей на параметры контактного взаимодействия вогнутого жесткого штампа с электроупругим полупространством. Согласно данным работы [5] для пьезокерамических материалов PХЕ-5 и ВаТiО3  $A^{Piezo} / A^{Elast}$  принимало значение 0,735 и 0,854 соответственно. При последующем переходе к упругому изотропному материалу из выражений  $A^{Elast}$  получаем величину  $(1 - \nu) / \mu$ . Это означает, что и случай контакта с упругим изотропным полупространством [1] также следует из полученных в работе результатов.

**Анализ результатов численных исследований.** Рассмотрим контактное взаимодействие вогнутого жесткого штампа (рис.1) с электроупругим полупространством. При заданной силе вдавливания вогнутого штампа, численно решая уравнение (13) (с учетом (14)) относительно значения  $c = a/b$ , определяем неизвестный радиус области контакта. На рис. 2 показана связь между значением нагрузки  $P$  и размерами площадки контакта. При этом учет свойств электроупругого материала осуществлен через значение  $A^{Piezo}$ . Сравнивая значения  $A^{Piezo} / A^{Elast}$  для различных пьезоэлектрических материалов можно оценить влияние связанности силовых и электрических полей

на контактное взаимодействие вогнутого жесткого штампа, поверхность которого описывается обратной степенной функцией, с электроупругим полупространством.

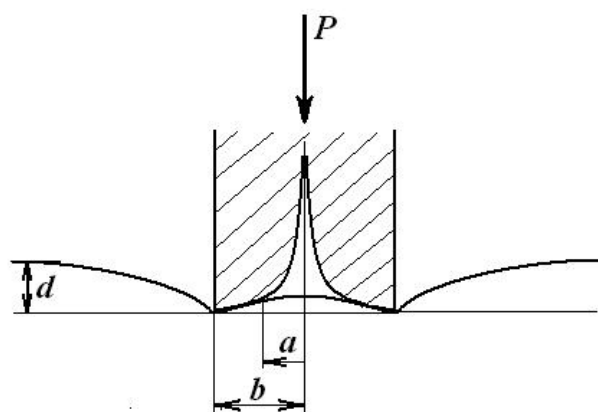


Рисунок 1

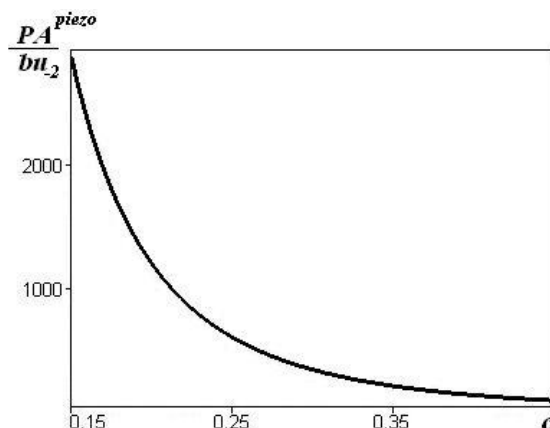


Рисунок 2

**Выводы.** Найдено аналитическое решение новой контактной задачи электроупругости о вдавливании вогнутого жесткого штампа, поверхность которого описывается обратной степенной функцией, в электроупругое полупространство с неэлектродированной поверхностью. На основе разложения по малому параметру в явном виде получено выражение, устанавливающее зависимость размеров площадки контакта от силы вдавливания и электроупругих свойств полупространства. Проведены численные исследования, найдены размеры области контакта при различных значениях силы вдавливания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Barber J.R. Indentation of the semi-infinite elastic solid by a concave rigid punch / Barber J.R. // Journal of Elasticity. – 1976. – Vol 6, № 2. – P.149-159.
2. Akiyama T. Elastic contact problem of a transversely isotropic half-space indented by a concave or convex rigid punch / Akiyama T., Hara T., Shibuya T. // Theoretical and Applied Mechanics Japan. – 2003. – V. 52. – P.31-40.
3. Babich S.Yu. Contact problems for prestressed elastic bodies and rigid and elastic punches / Babich S.Yu., Guz A.N., Rudnitskii V.B. // Int. Appl. Mech. – 2004. – 40, № 7. – P.744 – 765.
4. Podil'chuk Yu.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Podil'chuk Yu.N. // Int. Appl. Mech. – 2003. – Vol. 39, № 2. – P.132-170.
5. Кирилук В.С. Двумерная контактная задача электроупругости о вдавливании штампов в пьезокерамическую полуплоскость / Кирилук В.С., Левчук О.И. // Прикладная механика. – 2008. – Т.44, № 11. – С.55-70.
6. Левчук О.И. Контактное взаимодействие электроупругого полупространства с вогнутым осесимметричным жестким штампом / Левчук О.И. // Теоретическая и прикладная механика. – 2012. – № 5 (51). – С.73-80.
7. Левчук О.И. Контактная задача электроупругости о вдавливании вогнутого конического жесткого штампа в пьезоэлектрическое полупространство / Левчук О.И. // Теоретическая и прикладная механика. – 2013. – Вып. 6 (52). – С.107-114.

Поступила в редколлегию 09.04.2014.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК ИЗ СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ НЕСОВПАДЕНИИ НАПРАВЛЕНИЙ АРМИРОВАНИЯ С ОСЯМИ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

**Введение.** В настоящей работе разрабатывается инкрементальный подход к решению задачи о нелинейном деформировании оболочек, включая докритический этап, потерю устойчивости и закритическое поведение. В основу предлагаемого подхода положены нелинейные зависимости между деформациями и перемещениями, которые применимы при больших углах поворота. Они получены из соотношений нелинейной теории упругости, взятых в форме Новожилова [1], при использовании кинематической гипотезы Тимошенко-Миндлина. Уравнения равновесия записываются в проекциях на направления осей до деформации. Их отличительной особенностью является то, что они содержат проекции усилий и моментов, обусловленных нелинейностью кривизны и кручения  $k_{ij}$ , а также деформаций  $\varepsilon_{i3}$ . Выводится разрешающая система дифференциальных уравнений относительно скоростей разрешающих функций, представленная в операторной форме Коши [2]. Для решения краевой задачи относительно скоростей используется метод дискретной ортогонализации при равноправии искомым функций и нагрузки [3, 4]. Система дифференциальных уравнений дополняется условием нормировки, позволяющим находить решение в регулярных и предельных точках на кривой равновесных состояний. Изложенная процедура использована при решении задачи об устойчивости и закритическом поведении сферической анизотропной оболочки при внешнем давлении.

**Уравнения теории оболочек Тимошенко-Миндлина.** При формулировке указанных уравнений будем использовать определяющие уравнения в линеаризованном виде относительно приращений перемещений, деформаций и напряжений, возникающих в теле при бесконечно малых приращениях внешних воздействий. Если скорость изменения нагрузок мала, то реализуется квазистатический процесс. Параметром, по отношению к которому определяется скорость изменения разрешающих функций, будем считать длину дуги, которую описывает изображающая точка в пространстве равновесных состояний.

Полагаем, что оболочка отнесена к ортогональной системе координат  $\alpha_1, \alpha_2$ , совпадающей с главными линиями кривизны поверхности приведения и образующей правую тройку с осью  $z$ , перпендикулярной к этой поверхности и направленной к центру кривизны. Коэффициенты Ляме  $A_1, A_2$  и радиусы кривизны поверхности в направлении координатных линий  $R_1, R_2$  связаны известными соотношениями Гаусса-Кодацци. Согласно принятой кинематической гипотезе перемещения по координате  $z$  изменяются линейно:

$$u = u_0 + z\theta, \quad v = v_0 + z\psi, \quad w = w_0 + z\chi, \quad (1)$$

где  $u_0, v_0, w_0$  – перемещения координатной поверхности,  $\theta, \psi, \chi$  – отождествляются при малых деформациях с направляющими косинусами прямолинейного во-

локна, которое до деформации было нормальным к поверхности приведения [1]. В связи с этим между функциями  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  выполняется соотношение

$$\theta + \psi + (1 + \chi)^2 = 1. \quad (2)$$

Такое же равенство получим, если примем условие нерастяжимости нормального элемента. Из равенства (2) находим

$$\chi = \sqrt{1 - \theta^2 - \psi^2} - 1. \quad (3)$$

Использование этого выражения без каких-либо упрощений позволяет получить формулы для деформаций поперечного сдвига  $\varepsilon_{i3}$  и приращений кривизн и кручения  $k_{ij}$ , применимые в случае сильного изгиба оболочки. В теории оболочек Кирхгофа-Лява на этом пути возникают дополнительные трудности, если следовать подходу, предложенному в работе [1]. Прежде, чем записать эти формулы, введем обозначения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + a_1 v - \frac{w}{R_1}, & \omega_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - a u, \\ \theta_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_1}, & k_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_1}, & t_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_1}, & a_1 &= \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Будут использоваться также аналогичные величины с индексом «2». Они получаются из приведенных путем замены  $1 \rightarrow 2$ ,  $u \leftrightarrow v$ ,  $\theta \leftrightarrow \psi$ . Приняв во внимание выражения (4), представим нелинейные выражения деформаций  $\varepsilon_{ij}$ , приращений кривизн и кручения  $k_{ij}$  в таком виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_1 + \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \omega_1^2 + \theta_1^2), & \varepsilon_{13} &= (1 + \varepsilon_1) \theta + \theta_1 S_q + \psi \omega_1, \\ k_{11} &= (1 + \alpha_{11}) \kappa_1 + \alpha_{12} t_1 + a_1 \alpha_{13} + \frac{1}{R_1} \alpha_{14}, \\ (1 \rightarrow 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi) \\ k_{12} &= (1 + \alpha_{11}) \kappa_2 + (1 + \alpha_{22}) \kappa_1 + \alpha_{12} k_2 + \alpha_{21} k_1 - a_2 \alpha_{13} - a_1 \alpha_{23}, \\ \varepsilon_{12} &= \omega_1 (1 + \varepsilon_1) + \omega_2 (1 + \varepsilon_2) + \theta_1 \theta_2, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \varepsilon_1 - \frac{1}{S_q} \theta_1 \theta, & \alpha_{12} &= \omega_1 - \frac{1}{S_q} \theta_1 \psi, & \alpha_{13} &= (1 + \varepsilon_1) \psi - \omega_1 \theta, \\ \alpha_{14} &= 1 + 2\varepsilon_{11} - (1 + \varepsilon_1) S_q + \theta \theta_1, \\ (1 \rightarrow 2, \quad \theta \leftrightarrow \psi) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{25} &= \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \varepsilon_{12} + \frac{1}{R_1} \theta_2 (\theta + \theta_1) + \frac{1}{R_2} \theta_1 (\psi + \theta_2) - \left( \frac{\omega_2}{R_1} + \frac{\omega_1}{R_2} \right) S_q, \\ S_q &= \sqrt{1 - \theta^2 - \psi^2}. \end{aligned}$$

Для сокращения записи ниже будем использовать векторно-матричные операции. Введем векторы-столбцы  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{13}, k_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, k_{12}, k_{22})^T$ ,

$$\varepsilon_l = (\varepsilon_1, \omega_1, \theta_1, k_1, t_1, \varepsilon_2, \omega_2, \theta_2, k_2, t_2, \theta, \psi)^T.$$

Производные от компонентов вектора  $\varepsilon$  выражаются через производные от компонентов вектора  $\varepsilon_l$  следующим образом:

$$\dot{\varepsilon} = M_c \dot{\varepsilon}_l. \quad (7)$$

Матрица  $M_c$  состоит из 8 строк и 12 столбцов:

$$M_c = (c_{ij}), \quad i = 1, \dots, 8, \quad j = 1, \dots, 12. \quad (8)$$

Выражений для коэффициентов  $c_{ij}$  не приводим, так как их легко получить, дифференцируя формулы (5).

Полагаем, что тангенциальные деформации изменяются по толщине линейно

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij,0} + zk_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad (9)$$

а деформации поперечного сдвига  $\varepsilon_{13}$ ,  $\varepsilon_{23}$  от координаты  $z$  не зависят. Аналогичное представление имеют производные  $\dot{\varepsilon}_{ij}$ .

Чтобы получить зависимости между скоростями деформаций и усилий, моментов теории оболочек воспользуемся соотношениями упругости анизотропного тела

$$\dot{\varepsilon} = A_p \dot{\sigma}, \quad (10)$$

где  $A_p$  – матрица коэффициентов податливости анизотропного тела, вектор-столбец  $\varepsilon = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12})$ , ( $\varepsilon_{ij}$  – удвоенные тензорные  $i \neq j$ ) и вектор  $\sigma = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})$ . При этом учтено, что  $\varepsilon_{33} = 0$ , а  $\dot{\sigma}_{33}$  выражаются через  $\dot{\sigma}_{ij}$ . Вычисляя моменты нулевого и первого порядка от компонентов вектора  $\dot{\varepsilon}$  при учете разложения компонентов вектора  $\dot{\varepsilon}$  (9), получим

$$\dot{T} = A \dot{\varepsilon}, \quad (12)$$

где  $T = (T_{11}, T_{13}, M_{11}, T_{12}, T_{22}, T_{23}, M_{12}, M_{22})^T$ ,  $T_{ij}$  – моменты нулевого порядка (усилия),  $M_{ij}$  – моменты первого порядка (моменты), вектор  $\varepsilon$  совпадает с приведенным выше,  $A$  – матрица коэффициентов упругости оболочки. Для вычисления приведенных коэффициентов матрицы  $A$  можно воспользоваться известными формулами [5-7].

В нелинейной теории упругости уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях имеют такой же вид, как их аналоги в линейной теории упругости, если воспользоваться компонентами тензора напряжений Пиолы [8]. В теории оболочек, где вместо напряжений используются моменты от них нулевого и первого порядка, статически эквивалентными компонентам тензора Пиолы будут компоненты вектора

$$T^* = (T_{11}^*, T_{12}^*, T_{13}^*, M_{11}^*, M_{12}^*, T_{21}^*, T_{22}^*, T_{23}^*, M_{21}^*, M_{22}^*, \bar{T}_{13}, \bar{T}_{23})^T, \quad (13)$$

которые можно найти как

$$T^* = M_c^T T, \quad (14)$$

где  $M_c^T$  – транспонированная матрица (8). Продифференцировав выражение (14), получим

$$\dot{T}^* = (M_c^T A M_c + M_p) \dot{\varepsilon}_l, \quad (15)$$

где  $M_p$  – матрица, коэффициенты которой находятся из равенства  $M_p \dot{\varepsilon}_l = \dot{M}_c^T T$ . Обозначим их как  $P_{ij}$ , ( $i, j = 1, \dots, 12$ ). Учитывая то, что  $P_{ij} = P_{ji}$  и матрица  $A$  – симметрична, можем констатировать, что матрица  $(M_c^T A M_c + M_p)$  также симметрична.

Уравнения квазистатического состояния равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{T}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{T}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 (\dot{T}_{11}^* - \dot{T}_{22}^*) + a_1 (\dot{T}_{21}^* + \dot{T}_{12}^*) + \frac{1}{R_1} \dot{T}_{13}^* - \dot{q} \theta_1 - q \dot{\theta}_1 &= 0, \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix}, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{T}_{13}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{T}_{23}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 \dot{T}_{13}^* + a_1 \dot{T}_{23}^* + \frac{1}{R_1} \dot{T}_{11}^* + \frac{1}{R_2} \dot{T}_{22}^* + \dot{q}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) + q(\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2) &= 0, \\ \frac{1}{A_1} \frac{\partial \dot{M}_{11}^*}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \dot{M}_{21}^*}{\partial \alpha_2} + a_2 (\dot{M}_{11}^* - \dot{M}_{22}^*) + a_1 (\dot{M}_{21}^* + \dot{M}_{12}^*)_1 - \bar{T}_{131} &= 0, \quad \begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16)$$

Граничные условия формулируются относительно пяти функций, взятых по одной из пяти пар

$$(\dot{T}_{11}^*, \dot{u}), (\dot{T}_{12}^*, \dot{v}), (\dot{T}_{13}^*, w), (M_{11}^*, \theta), (M_{12}^*, \psi) \quad (17)$$

при  $\alpha_i = const$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ 1, 2 \\ \leftarrow \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ u, v \\ \leftarrow \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \rightarrow \\ \theta, \psi \\ \leftarrow \end{pmatrix}$ , если контурные линии совпадают с координатными линиями.

При независимых от скоростей механических характеристиках материала можно показать, что соотношение (15) и уравнения (16) находятся из условия стационарности функционала

$$\dot{I}_R = \iint \left[ \dot{T}^T M_c \dot{\varepsilon}_l + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_l^T M_p \dot{\varepsilon}_l - \frac{1}{2} \dot{T}^T A^{-1} \dot{T} - q \dot{N} T \dot{u} - \dot{q} (\dot{N}^T U + N^T \dot{U}) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (18)$$

где  $N^T U = \left[ -\frac{1}{2} \theta_1 u - \frac{1}{2} \theta_2 v + \left( 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 \right) w \right]$ ,  $\bar{u} = (u, v, w, \vartheta, \psi)^T$ .

В случае пологих оболочек вариационный принцип относительно скоростей разрешающих функций получен в работе [9]. Потенциал нагрузки, которая в данном случае является следящим внешним давлением интенсивности  $q$ , существует только при определенных типах граничных условий [10].

Условие стационарности примет вид

$$\begin{aligned} \iint \left[ \delta T^T (\varepsilon'(u_0) \dot{u} - A^{-1} \dot{T}) + \dot{T}^T \varepsilon'(u_0) \delta \dot{u} + T_0^T \varepsilon''(u_0) \dot{u} \delta \dot{u} - \right. \\ \left. - q_0 (\delta \dot{N}^T \dot{u} + N^T \delta \dot{u}) - \dot{q} (\delta \dot{N}^T \dot{u}_0 + N_0^T \delta \dot{u}) \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда получаем разрешающую систему дифференциальных уравнений в нормальном операторном виде. Первая группа уравнений имеет вид

$$\varepsilon'(u_0) \dot{u} - A^{-1} \dot{T} = 0. \quad (20)$$

Вторую группу уравнений также получим из вариационного уравнения (19), применив интегрирование по частям.

Дифференциальные уравнения квазистатического равновесия запишутся в виде (16). Для решения системы (16), (20) будем использовать метод дискретной ортогонализации [3], который лежит в основе развитых численных процедур, обеспечивающих высокую точность получаемых результатов [4, 7].

**Результаты расчета.** Рассматриваемые оболочки содержат множество структурных и геометрических параметров, которые существенно влияют на вид равновесных кривых и значения критических нагрузок. К таким параметрам относятся механические характеристики элементарных слоев, их количество в слоистом пакете, направления укладки армирующих волокон по отношению к осям оболочки, значения компонент метрического тензора.

В качестве примера рассмотрим нелинейное осесимметричное деформирование однослойной оболочки вращения в форме сферического сегмента (рис.1), изготовленную из волокнистого композита с параметрами  $E_1 = 44,5$  ГПа,  $E_2 = 10,6$  ГПа,  $G_{12} = 1,06$  ГПа,  $G_{13} = G_{12}$ ,  $G_{23} = 3,7$  ГПа,  $\nu = 0,327$ . На рис.2-4 показан вид диаграмм нагружения для пологой (рис.2) и непологих (рис.3-4) оболочек рассматриваемого вида. Для пологой оболочки отношение стрелы подъема  $H$  к толщине равнялось 4

при толщине 0,2см,  $c = 10$  см,  $R = \frac{c^2 + H^2}{2H}$ ,  $\beta = \arcsin\left(\frac{c}{R}\right)$  [9].

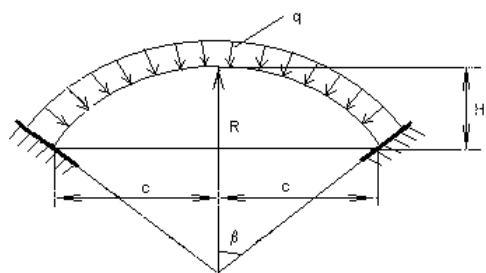


Рисунок 1

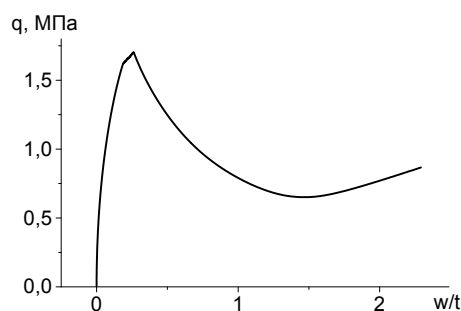


Рисунок 2

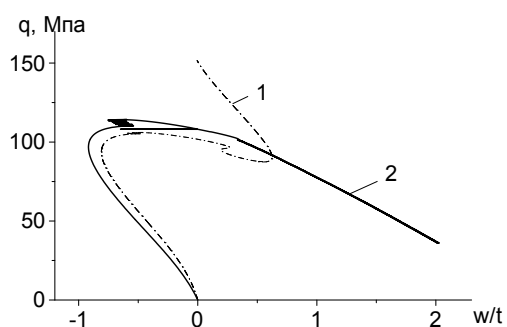


Рисунок 3

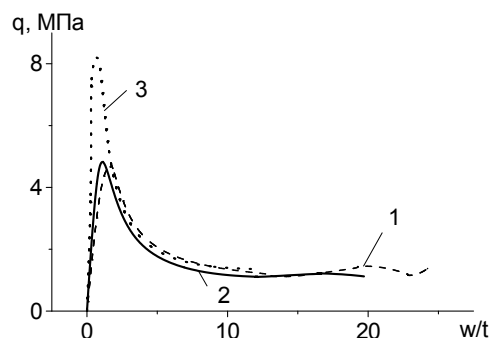


Рисунок 4

Для непологих оболочек в расчетах принято  $\beta = 40^\circ$ ,  $R = 100$  см, толщина 2 см, половина центрального угла в вершине сферы  $\pi / 540$ . На рис.2 показан вид равновесных кривых для ортотропной оболочки, на рис. 3, 4 - для анизотропных при различных углах  $\psi$  между меридианом и направлением армирования волокон. Так, на рис. 2 кривая 1 построена при  $\psi = 0^\circ$ , кривая 2 – при  $\psi = 15^\circ$ , на рис. 3 кривая 1 – при  $\psi = 45^\circ$ , кривая 2 – при  $\psi = 60^\circ$ , кривая 3 – при  $\psi = 90^\circ$ . На рис.5 показана зависимость кри-

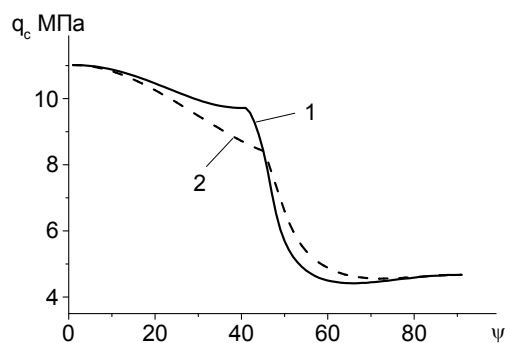


Рисунок 5

личие в поведении кривых (1) и (2) на рис.5 указывает на то, что пренебрежение анизотропией композитов при оптимизации структурных параметров оболочек не приведет к желаемому результату [5, 11-13].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости / Новожилов В.В. – М.-Л.: ОГИЗ, 1948. – 211с.
2. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры / Шульга Н.А. – К.: Наукова думка, 1981. – 200с.
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Годунов С.К. // Успехи математических наук. – 1961. – Том 16, вып. 3. – С.171-174.
4. Григолюк Э.И. Проблемы нелинейного деформирования: метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого тела / Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. – М.: Наука, 1988. – 232с.
5. Баженов В.Л. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок / Баженов В.Л., Семенюк М.П., Трач В.М. – К.: Каравела, 2010. – 352с.
6. Ванин Г.Л. Устойчивость оболочек из армированных материалов / Ванин Г.Л., Семенюк Н.П., Емельянов Р.Ф. – К.: Наукова думка, 1978. – 212с.
7. Григоренко Я.М. Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами / Григоренко Я.М., Крюков Н.Н. – К., Наукова думка, 1988. – 264с.
8. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Васидзу К. – М.: Мир, 1987. – 542с.
9. Кантор Б.Я. Змішаний варіаційний принцип теорії гнучких пружно пластичних пологих оболонок / Кантор Б.Я. // Доповіді АН УРСР, Сер.А. – 1970. – №12. – С.1095-1098.
10. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
11. Semenyuk N.P. On Stability and Postbuckling Behavior of Shells with Corrugated Cross Sections Under External Pressure / Semenyuk N.P., Morenko A.I., Smith mM.J.A. // J.Appl. Mech. – 2014. – 81, №1.
12. Семенюк Н.П. Устойчивость гофрированных арок при внешнем давлении / Семенюк Н.П. // Прикладная механика. – 2013. – Том 49, № 2. – С.90-98.
13. Семенюк Н.П. Устойчивость и закритическое поведение волнообразных цилиндрических панелей при внешнем давлении / Семенюк Н.П., Жукова Н.Б. // Прикладная механика. – 2013. – № 6. – С.86-95.

Поступила в редколлегию 09.04.2014.



Київський національний університет імені Тараса Шевченка

**КОНЦЕНТРАЦІЯ МЕХАНІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ В П'ЄЗОКЕРАМІЧНІЙ ПЛАСТИНІ ПРИ РІВНОМІРНОМУ РОЗТЯГУ**

**Вступ.** Широке застосування п'єзокерамічних пластин і оболонок, як активних елементів електромеханічного перетворення енергії, потребує розвитку підходів до побудови теорії їх статичного чи динамічного деформування. Вони можуть мати різні отвори, порожнини та інші дефекти, навколо яких виникають зони концентрації напружень. Цій проблемі приділяється достатньо уваги [1-5]. У роботах [5-7] редукція тривимірних задач теорії електропружності до двовимірних здійснюється за допомогою методу розвинення шуканих функцій у ряди Фур'є за поліномами Лежандра координати товщини. Дослідження напруженого стану трансверсально-ізотропних п'єзокерамічних пластин, послаблених круговими отворами, проведено в [8, 9]. В даній роботі цим самим способом сумісно з методом збурення форми границі [10] знаходиться розв'язок задачі про визначення концентрації механічних напружень біля еліптичного отвору в п'єзокерамічній пластині, що знаходиться під дією постійного усестороннього розтягу.

**Постановка задачі і основні співвідношення.** Розглянемо п'єзокерамічну пластину постійної товщини  $2h$  ( $h = const$ ), віднесена до декартової системи координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Будемо вважати, що граничні площини  $x_3 = \pm h$  неелектродовані та вільні від механічних напружень. Пластина послаблена криволінійним отвором і знаходиться під дією постійних розтягуючих сил. Для визначення просторового напруженого стану пластини використовується метод розвинення у ряд за поліномами Лежандра сумісно з методом збурення форми границі [10].

Представимо, наслідуючи [7, 8], компоненти вектора переміщень  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  і тензора напружень  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ , електричної індукції  $D_j(x_1, x_2, x_3)$  і діелектричного потенціалу  $\phi(x_1, x_2, x_3)$  у вигляді рядів Фур'є за поліномами Лежандра  $P_k(\xi)$ , тобто

$$\begin{aligned} \{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), h^{-1}\sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \\ \{\phi(x_1, x_2, x_3), D_j(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^N \{\phi^{(k)}(x), h^{-1}D_j^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $x = (x_1, x_2) \in S$ ,  $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1; 1]$ ,  $S$  – серединна площина пластини;  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$ ,  $\phi^{(k)}(x)$ ,  $D_j^{(k)}(x)$  – коефіцієнти розкладу;  $N$  – натуральне число, яке для зручності вважатимемо парним:  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots < \infty$ ).

Відносно коефіцієнтів розкладу як функцій двох незалежних змінних отримуємо рівняння рівноваги і відповідні граничні умови. Для трансверсально-ізотропних пластин вони розпадаються на дві групи рівнянь, що описують симетричне і косиметричне деформування пластини. При симетричному деформуванні загальний розв'язок рівнянь рівноваги представляється формулами [7]

$$c_{66}u_+^{(0)} = \kappa^* \varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m;$$

$$\begin{aligned}
 c_{66}u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} w_s ; \\
 c_{66}u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} w_s \quad (k = \overline{2, n}); \\
 c_{66}u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(1)} V_m ; \quad c_{66}u_3^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} c_m^{(2k-1)} V_m ; \\
 \phi^{(1)} &= -\tilde{\kappa}_1^* h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(1)} V_m ; \quad \phi^{(2k-1)} = \sum_{m=1}^{3n} \tilde{c}_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{1, n}),
 \end{aligned} \tag{2}$$

де  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – довільні аналітичні функції;  $V_m$  та  $w_s$  – метагармонічні функції, що задовольняють рівнянням

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta w_s - \lambda_s h^{-2} w_s = 0, \tag{3}$$

в яких  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $k_m$ ,  $\lambda_s$  – корені відповідних характеристичних рівнянь.

Введемо в області  $S$  полярні координати  $r, \theta$  і запишемо визначальні рівняння таким чином

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{(0)} + \sigma_{\theta\theta}^{(0)} &= 4h [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + 2 \sum_{m=1}^{3n} d_m^{(0)} V_m ; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} d_{3m}^{(2k)} V_m ; \\
 \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 4h \left[ -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right] e^{-2i\theta} ; \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= 2 \sum_{m=1}^{3n+2} d_m^{(2k)} V_m ; \quad \varepsilon_{11}^{-1} D_3^{(2k)} = \sum_{m=1}^{3n} \tilde{d}_{3m}^{(2k)} V_m ; \\
 \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} &= 4h \left[ \lambda_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi'''(z)} + h \sum_{m=1}^{3n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m \right] e^{-2i\theta} ; \\
 \sigma_{r3}^{(2k-1)} &= 2h \left[ \sum_{m=1}^{3n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right] e^{-i\theta} ; \\
 \varepsilon_{11}^{-1} \left( D_r^{(2k-1)} + iD_\theta^{(2k-1)} \right) &= 2 \left[ \kappa_D^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + \sum_{m=1}^{3n} \tilde{p}_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n \tilde{q}_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} w_s \right] e^{-i\theta} .
 \end{aligned} \tag{4}$$

На основі даного розв'язку розглянемо задачу про напружений стан п'єзокерамічної пластини, послабленої еліптичним отвором. Поверхня порожнини вільна від електричних і механічних навантажень, а на нескінченності пластини знаходиться під дією постійного всестороннього розтягу інтенсивності  $p$  ( $p = const$ ). Нехай пластинка ослаблена криволінійним циліндричним отвором, контур  $L$  якого на серединній площині  $S$  незначно відрізняється від кругового  $L_0$  радіуса  $R$ . Тоді контур  $L$  описується рівняннями [10]

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos \vartheta) ; \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin \vartheta), \tag{5}$$

в яких  $\varepsilon$  – параметр, що визначає форму отвору. Для еліптичного отвору  $\varepsilon = (a-b)(a+b)$ ;  $R = (a+b)/2$ , де  $a$  і  $b$  – півосі еліпса. Конформне відображення зовнішньої області одиничного круга на область, обмежену кривою  $L$ , задається формулою

$$z = x + iy = \omega(s) = \zeta + \varepsilon \zeta^{-1}, \quad (6)$$

де  $z = re^{i\theta}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ ;  $x = x_1/R$ ,  $y = x_2/R$ ;  $\rho$  і  $\vartheta$  – ортогональні криволінійні координати. Оскільки система координат  $(\rho, \vartheta, \xi)$  повернута на деякий кут  $\beta$  відносно  $(r, \theta, 3)$  навколо спільної осі  $\xi = x_3/h$ , то маємо співвідношення

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} - \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} - 2i\sigma_{\rho\vartheta}^{(2k)} &= \left( \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} - 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} \right) e^{2i\beta}; \\ \sigma_{\rho\rho}^{(2k)} + \sigma_{\vartheta\vartheta}^{(2k)} = \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)}; \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)} - i\sigma_{\vartheta\xi}^{(2k-1)} &= \left( \sigma_{r3}^{(2k-1)} - i\sigma_{\theta3}^{(2k-1)} \right) e^{i\beta}; \quad (7) \\ D_{\rho}^{(2k-1)} - iD_{\vartheta}^{(2k-1)} &= \left( D_r^{(2k-1)} - iD_{\theta}^{(2k-1)} \right) e^{i\beta}. \end{aligned}$$

Тут  $\sigma_{i'j'}^{(l)} = \sigma_{i'j'}^{(l)}(\rho, \vartheta)$  ( $i', j' = \rho, \vartheta, \xi$ );  $\sigma_{ij}^{(l)} = \sigma_{ij}^{(l)}(r, \theta)$  ( $i, j = r, \theta, 3$ ).

Граничні умови на кривій  $L$  області  $S$  записуються таким самим способом, як і для пластин із круговим отвором. Так, зокрема, для вільного від напружень отвору маємо умови

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho\nu'}^{(2k)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (\nu' = \rho, \vartheta; k = \overline{0, n}); \quad \sigma_{\rho\xi}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = 0, \\ D_{\rho}^{(2k-1)}(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} &= 0 \quad (k = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (8)$$

Необхідно зазначити, що основні рівняння (3) в змінних  $\rho$  і  $\vartheta$  будуть складними і знайти їх розв'язок з розділеними змінними досить важко. Тому розв'язок задачі шукатимемо у вигляді рядів за степенями малого параметра  $\varepsilon$  у вигляді

$$\sigma_{i'j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} \sigma_{i'j'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta); \quad u_{j'}^{(l)}(\rho, \vartheta) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(l, \tau)}(\rho, \vartheta). \quad (9)$$

Підставляючи (9) разом із розкладом в ряд функцій  $e^{i\beta}$ ,  $e^{2i\beta}$  у співвідношення (7) і прирівнюючи вирази при однакових степенях параметра  $\varepsilon$ , отримаємо значення для компонент  $\sigma_{i'j'}^{(l)}$ . Таким чином, у кожному наближенні по параметру  $\varepsilon$  приходимо до розв'язання задачі для кругового отвору.

Голоморфні функції  $\varphi'_j(\zeta)$ ,  $\psi'_j(\zeta)$  для зовнішньої крайової задачі представляємо у вигляді

$$\varphi'_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \zeta^{-n}; \quad \psi'_j(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(j)} \zeta^{-n}, \quad (10)$$

де  $a_n^{(j)}$ ,  $b_n^{(j)}$  – довільні постійні,  $a_0^{(j)} = b_0^{(j)} = 0$  ( $j > 0$ );  $a_0^{(0)}$ ,  $b_0^{(0)}$  – константи, які визначаються напруженнями, заданими на нескінченності, тобто

$$a_0^{(0)} = \frac{1}{4h} \left( \sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty} \right); \quad b_0^{(0)} = \frac{1}{4h} \left( \sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty} \right). \quad (11)$$

В залежності від значень коренів характеристичного рівняння, які можуть бути дійсними додатними ( $k_1$ ) чи комплексно – спряженими ( $k_2, k_3 = \overline{k_2}$ ), метагармонічні функції  $V_m$  записуються таким чином

$$V_1^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(j)} K_n(\rho x_1) e^{in\vartheta}, \quad V_2^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(j)} H_n^{(1)}(\rho x_2) e^{in\vartheta};$$

$$V_3^{(j)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(j)} H_n^{(2)}(\rho x_3) e^{in\vartheta}. \quad (12)$$

Тут  $K_n$ ,  $H_n^{(1)}$  і  $H_n^{(2)}$  – циліндричні функції Бесселя, Ханкеля першого і другого роду відповідно;  $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$ ,  $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{-k_2}$ ,  $x_3 = \overline{x_2}$ . Аналогічне представлення мають метагармонічні функції  $w_s$ . Довільні постійні даних функцій визначаються із граничних умов (8).

**Висновки.** Викладено результати числових досліджень напруженого стану біля еліптичного отвору в необмеженій п'єзокерамічній пластині, що знаходиться під дією усестороннього розтягу. Розрахунки проведені для пластини, виготовленої із матеріалу PZT- 4 [11]. Знайдені компоненти напружень з урахуванням трьох наближень за малим параметром  $\varepsilon$ .

У табл.1 наведено значення кільцевих напружень  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$  на контурі отвору ( $\rho = 1$ ) на серединній площині  $\xi = 0$  в точці  $\vartheta = 0$  для першого і другого наближень в залежності від відношення  $a/b$  півосей еліпса; при цьому прийняті деякі значення відношення  $b/h$ . Із збільшенням відношення  $a/b$  коефіцієнт концентрації зростає. Натомість із збільшенням  $b/h$  він зменшується.

Таблиця 1 – Значення кільцевих напружень  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$

$a/b \backslash b/h$		$a/b$					
		1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
1.0	1 набл.	2.0	2.2058	2.3892	2.5573	2.7110	2.8516
	2 набл.	2.0	2.2168	2.4281	2.6375	2.8418	3.0398
2.0	1 набл.	2.0	2.1972	2.3738	2.5348	2.6819	2.8163
	2 набл.	2.0	2.2079	2.4119	2.6128	2.8088	2.9984
3.0	1 набл.	2.0	2.1931	2.3661	2.5242	2.6690	2.8016
	2 набл.	2.0	2.2033	2.4036	2.5989	2.7904	2.9757
4.0	1 набл.	2.0	2.1913	2.3627	2.5181	2.6638	2.7960
	2 набл.	2.0	2.2012	2.3980	2.5921	2.7814	2.9645

На рис.1 представлені криві зміни напружень  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$  від зміни відносної товщини пластини  $b/h$  на серединній (крива 1) і граничній (крива 2) площинах відповідно. Як видно, із збільшенням  $b/h$  напруження на серединній площині спадають, а на граничній – зростають. При тих самих даних криві на рис.2 характеризують зміну

нормальних поперечних напружень  $\sigma_{33}/P$  на серединній і граничній площинах пластини.

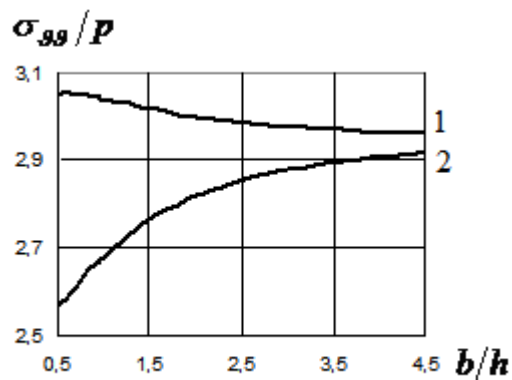


Рисунок 1

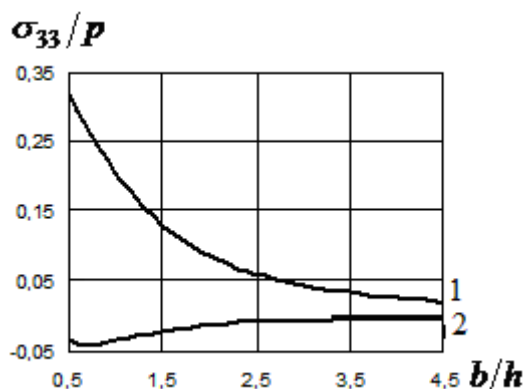


Рисунок 2

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Калоеров С.А. Приближенный метод определения электроупругого состояния слоя и полосы с отверстиями и трещинами / Калоеров С.А., Глущенко Ю.А. // Теоретическая и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С.115-126.
2. Podil'chuk Yu.N. The stress state of a piezoceramic medium with an elliptic inclusion under pure shear and pure bending / Podil'chuk Yu.N., Proshchenko T.M. // Inter. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 5. – P.573-582.
3. Fil'shtinskii L.A. Concentration of mechanic stresses near a hole in piezoceramic layer / Fil'shtinskii L.A., Kovalev U.D. // Mech. Comp. Matter. – 2002. – 38, № 2. – P.121-124.
4. Григолюк Э.И. Растяжение пьезокерамического слоя, ослабленного сквозными туннельными полостями / Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А., Ковалев Ю.Д. // Докл. РАН. – 2004. – Т. 385, № 1. – С.61-63.
5. Khoma I.Yu. Solving the equilibrium equations for a transversely isotropic piezoceramic plate / Khoma I.Yu., Proshchenko T.M., Kondratenko O.A. // Inter. Appl. Mech. – 2006. – 42, № 10. – P.96-106.
6. Khoma I.Yu. Thermopiezoelectric equations for nonthin ceramic shells / Khoma I.Yu. // Inter. Appl. Mech. – 2005. – 41, № 2. – P.118-128.
7. Хома И.Ю. О напряженном состоянии нетонкой пьезокерамической пластинки с круговым отверстием / Хома И.Ю. // Теоретическая и прикладная механика. – 2004. – Вып. 39. – С.48-58.
8. Хома И.Ю. Про напружений стан трансверсально-ізоотропного п'єзокерамічного шару з круговою циліндричною порожниною / Хома И.Ю., Прошенко Т.М. // Доп. НАН України. – 2005. – № 10. – С.64-69.
9. Хома И.Ю. Трехмерное распределение напряжений около кругового отверстия в нетонкой пьезокерамической пластине / Хома И.Ю., Хома Ю.И., Прошенко Т.М. // Теоретическая и прикладная механика. – 2005. – Вып. 40. – С.18-23.
10. Гузь О.М. Про наближений метод визначення концентрації напружень навколо криволінійних отворів в оболонках / Гузь О.М. // Прикладна механіка. – 1962. – 8, № 6. – С.605-612.
11. Гринченко В.Т. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – К.: 1989. – 290с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5т.; Т. 5)

Надійшла до редколегії 03.04.2014.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ И ДОЛГОВРЕМЕННАЯ МИКРОПОВРЕЖДАЕМОСТЬ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

**Введение.** Один из возможных механизмов разрушения материалов и элементов конструкций при нагружении связан с появлением и развитием во времени рассеянных микроповреждений, приводящих, как правило, к образованию магистральных трещин. Согласно физическим представлениям, поврежденность материала можно рассматривать как наличие рассеянных дефектов в виде микротрещин, микропустот или разрушенных микрообъемов, которые приводят к уменьшению эффективной или несущей части материала, оказывающей сопротивление нагрузкам. Экспериментальные данные и наблюдения за работой элементов конструкций и сооружений свидетельствуют о том, что повреждаемость может быть как кратковременной (мгновенной), соответствующей уровню напряжений или деформаций в момент их задания, так и длительной, проявляющейся в росте повреждений во времени после приложения нагрузки. Теория кратковременной и долговременной повреждаемости построена соответственно в [1, 2]. При достаточно высоких нагрузках у многих материалов появляется физическая нелинейность деформирования. Такой вид нелинейности характерен для металлов, а также для полимерных материалов при высоких температурах. Поэтому построение модели деформирования и длительной повреждаемости физически нелинейного материала представляется актуальным.

**Постановка задачи.** Рассмотрим физически нелинейное деформирование изотропного материала, описываемое зависимостью модулей объемного сжатия  $K$  и сдвига  $\mu$  от деформаций, которое сопровождается микроповреждаемостью в процессе нагружения. Микроповреждаемость материала моделируем образованием системы стохастически расположенных квазисферических микропор, возникающих в тех микрообъемах, где напряжения превосходят предельные значения микропрочности.

Зависимости между макронапряжениями и макродеформациями можно записать в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \left( K^* - \frac{2}{3} \mu^* \right) \langle \varepsilon_{rr} \rangle \delta_{ij} + 2\mu^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle, \quad (1)$$

где эффективные модули объемного сжатия  $K^*$  и сдвига  $\mu^*$  будут функциями пористости  $p$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$ . Определение эффективных модулей упругости пористого физически нелинейного материала сводится к итерационному алгоритму

$$K^{*(n)} = \frac{4K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})(1-p)^2}{3K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})p + 4\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})(1-p)};$$

$$\mu^{*(n)} = \frac{[9K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)}) + 8\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})]\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})(1-p)^2}{3K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})(3-p) + 4\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})(2+p)};$$

$$\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)} = \frac{1}{(1-p)} \left[ \frac{K^{*(n-1)}}{K(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} V_{ij\alpha\beta} + \frac{\mu^{*(n-1)}}{\mu(\langle \varepsilon_{ij}^1 \rangle^{(n)})} D_{ij\alpha\beta} \right] \langle \varepsilon_{\alpha\beta} \rangle, \quad (2)$$

где  $V_{ij\alpha\beta}$ ,  $D_{ij\alpha\beta}$  – объемная и девиаторная составляющие единичного тензора  $I_{ij\alpha\beta}$ , т.е.

$$I_{ij\alpha\beta} = V_{ij\alpha\beta} + D_{ij\alpha\beta}; \quad V_{ij\alpha\beta} = 1/3 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}; \quad D_{ij\alpha\beta} = 1/2 (\delta_{\alpha j} \delta_{j\beta} + \delta_{i\beta} \delta_{j\alpha} - 2/3 \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta}). \quad (3)$$

В качестве условия образования единичного микроповреждения в некотором микрообъеме неповрежденной части материала примем критерий прочности Губера – Мизеса

$$I_{<\sigma>}^1 = k, \quad (4)$$

где  $I_{<\sigma>}^1 = (<\sigma_{ij}^1>' <\sigma_{ij}^1>')^{1/2}$  – второй инвариант девиатора тензора средних напряжений  $<\sigma_{ij}^1>'$  по неповрежденной части материала;  $k$  – предел микропрочности, являющийся случайной функцией координат. Так как средние по неповрежденной части материала напряжения  $<\sigma_{ij}^1>$  связаны с макронапряжениями  $<\sigma_{ij}>$  зависимостями

$$<\sigma_{ij}^1> = \frac{1}{1-p} <\sigma_{ij}>, \quad (5)$$

то инвариант девиатора тензора средних напряжений по неповрежденной части материала  $I_{<\sigma>}^1$  связан с инвариантом девиатора тензора макронапряжений

$I_{<\sigma>} = (<\sigma_{ij}>' <\sigma_{ij}>')^{1/2}$  и с инвариантом девиатора тензора деформаций

$I_{<\varepsilon>} = (<\varepsilon_{ij}>' <\varepsilon_{ij}>')^{1/2}$  соответственно зависимостями

$$I_{<\sigma>}^1 = \frac{1}{1-p} I_{<\sigma>}; \quad I_{<\sigma>}^1 = \frac{2\mu^*}{1-p} I_{<\varepsilon>}. \quad (6)$$

Поэтому из (5), (6) получим критерий прочности в пространстве соответственно макронапряжений и макродеформаций

$$\frac{1}{1-p} I_{<\sigma>} = k; \quad \frac{2\mu^* (p, <\varepsilon_{ij}>)}{1-p} I_{<\varepsilon>} = k. \quad (7)$$

Если величина  $I_{<\sigma>}^1$  для некоторого микрообъема материала не достигает соответствующего предельного значения  $k$ , то согласно критерию длительной прочности разрушение произойдет по истечении некоторого промежутка времени  $\tau_k$ , длительность которого зависит от степени близости  $I_{<\sigma>}^1$  к предельному значению  $k$ . В общем случае эту зависимость можно представить в виде некоторой функции

$$\tau_k = \varphi(I_{<\sigma>}^1, k), \quad (8)$$

причем  $\varphi(k, k) = 0$ ,  $\varphi(0, k) = \infty$ .

Одноточечную функцию распределения  $F(k)$  предела прочности  $k$  микрообъема неповрежденной части материала можно аппроксимировать степенным законом на некотором отрезке

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ \left(\frac{k - k_0}{k_1 - k_0}\right)^\beta, & k_0 \leq k \leq k_1; \\ 1, & k > k_1 \end{cases} \quad (9)$$

или распределением Вейбулла

$$F(k) = \begin{cases} 0, & k < k_0; \\ 1 - \exp[-m(k - k_0)^\beta], & k \geq k_0. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь  $k_0$  – минимальная величина предельного значения  $k$ , с которого начинается разрушение в некоторых объемах материала;  $k_1, m, \beta$  – постоянные, выбираемые из условия аппроксимации разброса прочности в материале.

Примем, что случайное поле предела микропрочности материала  $k$  является статистически однородным, что характерно для реальных материалов, а размеры единичных микроразрушений и расстояний между ними пренебрежимо малы по сравнению с размерами включений и расстояний между ними. Тогда функция распределения  $F(k)$  определяет относительное содержание неразрушенной части материала, в котором предел микропрочности меньше значения  $k$ . Поэтому при ненулевых напряжениях  $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$  функция  $F(I_{\langle \sigma \rangle}^1)$  определяет согласно (4), (9), (10), относительное содержание мгновенно разрушенных микрообъемов материала. Так как разрушенные микрообъемы моделируются порами, то, принимая начальную пористость материала равной  $p_0$ , можем записать уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости материала при кратковременной повреждаемости [1]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F(I_{\langle \sigma \rangle}^1). \quad (11)$$

Для заданных однородных макронапряжений  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и макродеформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  согласно (7) уравнение баланса пористости (11) соответственно имеет вид

$$p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{1}{1 - p} I_{\langle \sigma \rangle}\right); \quad p = p_0 + (1 - p_0)F\left(\frac{2\mu^*(p, \langle \varepsilon_{ij} \rangle)}{1 - p} I_{\langle \varepsilon \rangle}\right). \quad (12)$$

Если напряжения в материале  $\langle \sigma_{ij}^1 \rangle$  действуют в течение некоторого времени  $t$ , то согласно критерию длительной прочности (8) за это время в материале разрушатся микрообъемы с такими значениями предела микропрочности  $k$ , для которых имеет место неравенство

$$t \geq \tau_k = \varphi(I_{\langle \sigma \rangle}^1, k), \quad (13)$$

где величина  $I_{\langle \sigma \rangle}^1$  определяется выражениями (6).

Время  $\tau_k$  хрупкого разрушения материала для реальных материалов при невысоких температурах имеет конечное значение, начиная только с некоторого значения  $I_{\langle \sigma \rangle}^1 > 0$ . В этом случае функцию долговечности материала  $\varphi(I_{\langle \sigma \rangle}^1, k)$  можно представить, например, дробно-степенной зависимостью



$$\varphi(I_{<\sigma>}^1, k) = \tau_0 \left( \frac{k - I_{<\sigma>}^1}{I_{<\sigma>}^1 - \gamma k} \right)^{n_1} \quad (\gamma k \leq I_{<\sigma>}^1 \leq k, \quad \gamma < 1), \quad (14)$$

где некоторое характерное время  $\tau_0$ , показатель  $n_1$  и коэффициент  $\gamma$  определяются из аппроксимации экспериментальных кривых долговечности материала.

Подставляя (14) в (13), приходим к неравенству

$$k \leq I_{<\sigma>}^1 \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}} \quad \left( \bar{t} = \frac{t}{\tau_0} \right). \quad (15)$$

Принимая во внимание определение функции распределения предела микропрочности  $F(k)$ , приходим к выводу, что функция  $F[(I_{<\sigma>}^1)\psi(\bar{t})]$ , где [2]

$$\psi(\bar{t}) = \frac{1 + \bar{t}^{1/n_1}}{1 + \gamma \bar{t}^{1/n_1}}, \quad (16)$$

определяет в момент времени  $\bar{t}$  относительное содержание разрушенных микрообъемов неразрушенной до нагружения части материала. Тогда с учетом (11) уравнение баланса разрушенных микрообъемов или пористости для материала при длительной повреждаемости можно представить в виде [2]

$$p = p_0 + (1 - p_0)F[(I_{<\sigma>}^1)\psi(\bar{t})] \quad (17)$$

или с учетом (5) в виде

$$p = p_0 + (1 - p_0)F \left[ \frac{I_{<\sigma>}^1 \psi(\bar{t})}{1 - p} \right], \quad (18)$$

где пористость  $p$  является функцией безразмерного времени  $\bar{t}$ , а величина  $I_{<\sigma>}^1$  определяется выражениями (6).

Уравнения баланса пористости (17) с учетом (9), (10) в начальный момент  $\bar{t} = 0$  определяют кратковременную (мгновенную) поврежденность материала. С ростом времени уравнения (17), (9), (10), (16) определяют длительную его поврежденность, которая состоит из кратковременной и дополнительной поврежденности, развивающейся во времени. Совместно с уравнениями (2), они образуют замкнутую систему, описывающую совместные процессы физически нелинейного деформирования и долговременной повреждаемости материала. Физическая нелинейность влияет на образование пористости материала при деформировании, изменение пористости в процессе деформирования влияет на кривую деформирования. Поэтому результирующая диаграмма деформирования обусловлена физической нелинейностью материала и нелинейностью, возникающей в результате роста пористости при физически нелинейном деформировании.

**Численные результаты.** В качестве конкретной задачи исследуем совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости материала, объемные деформации которого являются линейными, а сдвиговые деформации описываются диаграммой линейного упрочнения, т.е. в микрообъеме имеют место соотношения

$$\langle \sigma_{rr} \rangle = K \langle \varepsilon_{rr} \rangle; \quad \langle \sigma_{ij} \rangle' = 2\mu(S) \langle \varepsilon_{ij} \rangle'. \quad (19)$$

Здесь модуль объемного сжатия  $K$  не зависит от деформаций, а модуль сдвига  $\mu(S)$  описывается функцией

$$\mu(S) = \begin{cases} \mu_0, & T \leq T_0; \\ \mu' + \left(1 - \frac{\mu'}{\mu_0}\right) \frac{T_0}{2S}, & T \geq T_0, \end{cases} \quad (20)$$

причем

$$S = (\langle \varepsilon_{ij} \rangle' \langle \varepsilon_{ij} \rangle')^{1/2}; \quad T = (\langle \sigma_{ij} \rangle' \langle \sigma_{ij} \rangle')^{1/2}; \quad T_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0, \quad (21)$$

где  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle'$ ,  $\langle \sigma_{ij} \rangle'$  – девиаторы соответственно тензоров деформаций и напряжений;  $\sigma_0$  – предел пропорциональности на растяжение, который принимаем независимым от координат;  $\mu_0$ ,  $\mu'$  – постоянные материала.

На основе изложенной теории исследованы совместные процессы нелинейного деформирования и микроповреждаемости однородного материала, имеющего диаграмму линейного упрочнения (20), (21) с постоянными

$$K = 3,33 \text{ ГПа}; \quad \mu_0 = 1,11 \text{ ГПа}; \quad \mu' = 0,331 \text{ ГПа} \quad (22)$$

и пределами пропорциональности и минимальной микропрочности на растяжение  $\sigma_p = \sqrt{\frac{3}{2}} k_0$ ,

$$\sigma_0 = 0,003 \text{ ГПа}; \quad \sigma_p = 0,011 \text{ ГПа} \quad (23)$$

в случае заданных макропараметров

$$\langle \varepsilon_{11} \rangle \neq 0; \quad \langle \sigma_{22} \rangle = \langle \sigma_{33} \rangle = 0. \quad (24)$$

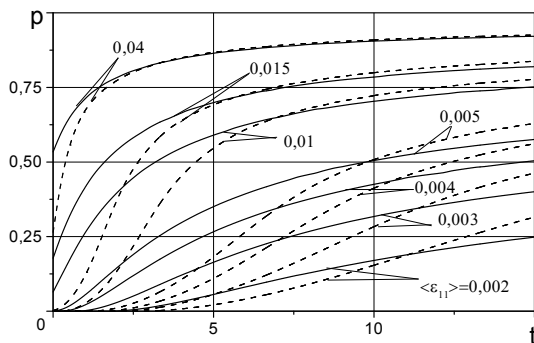


Рисунок 1 – Зависимость пористости материала от времени

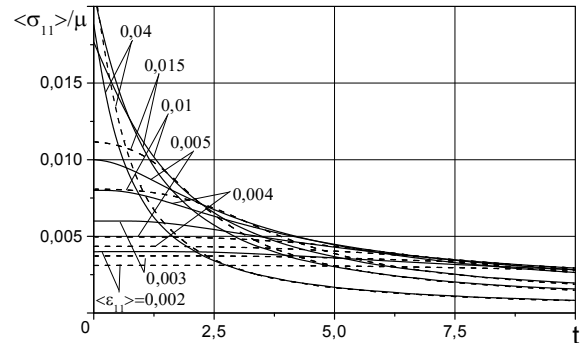


Рисунок 2 – Зависимость макронапряжения от времени

На рис.1 при различных значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  сплошными линиями изображены кривые зависимостей пористости материала  $p$  от времени  $\bar{t}$  для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности  $\psi(\bar{t})$ , определяемой формулой (16). На этих же графиках для сравнения штриховыми линиями приведены зависимости  $p$  от  $\bar{t}$  для линейного материала. Такие же обозначения приняты и на рис.2. Как видим, физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние на его микроразрушение. Графики показывают, что для линейно упрочняющегося материала микроразрушения начинаются при больших значениях времени  $\bar{t}$ , а в дальнейшем проходят более интенсивно, т.е. при достаточно больших значениях времени  $\bar{t}$  пористость линейно упрочняющегося материала выше, чем линейного.

На рис.2 при различных значениях макродеформации  $\langle \varepsilon_{11} \rangle$  сплошными линиями показаны кривые зависимостей макронапряжения  $\langle \sigma_{11} \rangle / \mu$  от времени  $\bar{t}$  для линейно упрочняющегося материала при дробно-степенной функции долговечности  $\psi(\bar{t})$ , определяемой формулой (16). Графики показывают, что для малых значений времени  $\bar{t}$  физическая нелинейность деформирования материала оказывает существенное влияние также и на его напряженное состояние. При достаточно больших значениях времени  $\bar{t}$  влияние нелинейности на напряженное состояние материала несущественно.

**Выводы.** Предложена теория длительной повреждаемости для физически нелинейных однородных материалов. Процесс повреждаемости материала моделируется образованием в нем стохастически расположенных микропор. Критерий разрушения единичного микрообъема характеризуется его длительной прочностью, обусловленной зависимостью времени хрупкого разрушения от степени близости эквивалентного напряжения к его предельному значению, что характеризует кратковременную прочность по критерию Гувера-Мизеса, которая принимается случайной функцией координат. Для произвольного момента времени сформулировано уравнение баланса поврежденности (пористости) физически нелинейного материала. Построены алгоритмы вычисления микроповрежденности материала от времени, макронапряжений от времени, а также соответствующие кривые. Исследовано влияние нелинейности материала на кривые его макродеформирования и повреждаемости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 1. Кратковременная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 1998. – №10. – С.120-127.
2. Хорошун Л.П. Основы микромеханики повреждаемости материала. 2. Длительная повреждаемость / Хорошун Л.П. // Прикладная механика. – 2007. – № 2. – С.108-121.

Поступила в редколлегию 10.04. 2014.

УДК 539.3

ХОМА И.Ю., д.физ.-мат.н.  
ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н.  
КОВАЛЕНКО И.Г., мл.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

**Введение.** Проблеме концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах уделяется достаточно внимания. На этом классе граничных задач апробируются разные подходы и методы. Широко известен метод однородных решений, асимптотический, разложения по толщине и др. Для решения краевых задач в [1], [2] используется метод разложения искоемых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины. Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, составляется система дифференциальных уравнений и естественные граничные условия. Излагается метод представления общего аналитического решения. Используя методику возмущения формы границы [3], в данной работе рассматривается задача о напряженном состоянии трансверсально-

изотропной пластины с эллиптическим отверстием, граничная поверхность которого подкреплена тонкой несжимаемой по образующей пленкой; вдали от отверстия пластина находится в поле всестороннего растяжения.

**Постановка задачи и метод решения.** Предположим, что пластина толщиной  $2h$  ( $h = const$ ), занимающая область  $\Omega = S \times [-h, h]$  трехмерного пространства, отнесена к декартовой системе координат  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), в которой переменные  $x_1, x_2$  расположены на плоскости  $S$ , а  $x_3 \in [-h, h]$ . Представим, следуя [4], компоненты вектора перемещений  $u_j(x_1, x_2, x_3)$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$  в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины

$$\{u_j(x_1, x_2, x_3), \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)\} = \sum_{k=0}^N \{u_j^{(k)}(x), \sigma_{ij}^{(k)}(x)\} P_k(\xi), \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in S$ ,  $\xi = h^{-1}x_3 \in [-1, 1]$ ;  $u_j^{(k)}(x)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x)$  – коэффициенты разложений, именуемые моментами,  $N$  – натуральное число, которое предполагается четным, т.е.  $N = 2n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots < \infty$ ). Относительно коэффициентов разложений, как функций двух независимых переменных, получаем систему уравнений равновесия и соответственные граничные условия. Общее решение системы уравнений при симметричном (относительно плоскости  $S$ ) деформировании пластины имеет вид [2]

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= k \varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_z V_m; \\ c_{66} u_+^{(2)} &= k_2 h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2)} \partial_z V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_z W_s; \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_z V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_z W_s \quad (k = \overline{2, n}); \\ c_{66} u_3^{(1)} &= -k_1 h \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + \sum_{s=1}^{2n} c_m^{(1)} V_m; \\ c_{66} u_3^{(2k-1)} &= \sum_{s=1}^{2n} c_m^{(2k-1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции;  $V_m$  и  $W_s$  – метатармонические функции, удовлетворяющие равенствам

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0; \quad (3)$$

$k, k_1, k_2$  и  $a_m^{(2k)}, b_s^{(2k)}, c_m^{(2k-1)}$  – безразмерные константы.

Моменты напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  в полярной системе координат  $r, \vartheta$  определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta r}^{(0)} + \sigma_{\theta \theta}^{(0)} &= 4 \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(0)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(0)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(0)} V_m; \\ \sigma_{rr}^{(0)} - \sigma_{\theta\theta}^{(0)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(0)} &= 4e^{-2i\theta} \left[ -z\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} + h \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(0)} \partial_z^2 V_m \right]; \end{aligned}$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} = 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_m^{(2k)} V_m; \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n} d_{3m}^{(2k)} V_m \quad (k = \overline{1, n}); \quad (4)$$

$$\sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = 4he^{-2i\theta} \left[ \mu^{(2k)} h \overline{\varphi^m(z)} + \sum_{m=1}^{2n} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + i \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s \right];$$

$$\sigma_{r3}^{(2k-1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k-1)} = 2e^{-i\theta} \left[ \sum_{m=1}^{2n} p_m^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} V_m + i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k-1)} \partial_{\bar{z}} W_s \right].$$

Отсюда получаем краевые условия на контуре  $L_0$  кругового отверстия радиуса  $R$  на срединной плоскости  $S$ . Пусть цилиндрическая поверхность  $R \times [-h, h]$  полости пластины свободна от напряжений и не деформируется вдоль образующих. Тогда на кривой  $L_0$  граничные условия будут иметь вид

$$\left| \sigma_{rr}^{(2k)}(r, \theta) + i\sigma_{r\theta}^{(2k)}(r, \theta) \right|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{0, n}); \quad u_3^{(2k-1)}(r, \theta) \Big|_{r=R} = 0 \quad (k = \overline{1, n}). \quad (5)$$

Для бесконечной области  $S$ , ограниченной контуром  $L_0$ , голоморфные функции  $\varphi'(z)$  и  $\psi'(z)$  примем в виде

$$\varphi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}; \quad \psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (6)$$

где  $a_n, b_n$  ( $n > 0$ ) – произвольные постоянные;  $a_0, b_0$  – константы, определяемые напряжениями, заданными на бесконечности, т.е.

$$a_0 + \bar{a}_0 = \frac{1}{4} (\sigma_{11}^{(0)\infty} + \sigma_{22}^{(0)\infty}); \quad b_0 = \frac{1}{4} (\sigma_{22}^{(0)\infty} - \sigma_{11}^{(0)\infty} + 2i\sigma_{12}^{(0)\infty}).$$

Вид метагармонических функций  $V_m$  зависит от значений корней  $k_m$  характеристического уравнения, которые могут быть вещественными положительными

$$V_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n^{(l)} K_n(rh^{-1}\sqrt{k_l}) e^{in\theta}, \quad l \in [1, 2n_l] \quad (7)$$

и комплексно-сопряженными

$$V_{2l+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n^{(l)} H_n^{(1)}(rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+1}}) e^{in\theta}; \quad V_{2l+2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n^{(l)} H_n^{(2)}(rh^{-1}\sqrt{-k_{2l+2}}) e^{in\theta}, \quad l \in [n_l, n-1]. \quad (8)$$

Здесь  $K_n, H_n^{(1)}$  и  $H_n^{(2)}$  – цилиндрические функции Бесселя, Ханкеля первого и второго рода. Аналогичные представления имеют функции  $W_s$ .

**Результаты числовых исследований.** Подставляя значения функций (6), (7), (8) в равенства (2), (4) и учитывая граничные условия (5), найдем решение задачи для пластины с круговой полостью. Предположим, что пластина ослаблена полостью в виде эллиптического цилиндра, контур  $L$  которого на плоскости  $S$  незначительно отличается от кругового  $L_0$ . В этом случае для решения задачи воспользуемся методом возмущения формы границы, предложенного А.Н. Гузем в работе [3]. Будем считать, что гладкий криволинейный контур  $L$  описывается уравнениями

$$x_1 = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos m\vartheta); \quad x_2 = R(\sin \vartheta - \varepsilon \sin m\vartheta), \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  и  $m$  – параметры, характеризующие форму отверстия. При определенных значениях  $m$  и  $\varepsilon$  получаем соответствующие формы отверстия: эллиптического, квадратного и треугольного с закругленными углами. Функция, конформно отображающая внешнюю область единичного круга на бесконечную область, ограниченную кривой (9), задается формулой

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (10)$$

в которой  $z = re^{i\theta}$ ,  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$ ,  $f(\zeta) = \zeta^{-m}$ ,  $\rho$  и  $\vartheta$  – ортогональные криволинейные координаты. Для эллиптического отверстия функция  $f(\zeta)$  и его параметры имеют вид [5]

$$f(\zeta) = \zeta^{-1}; R = (a+b)/2; \varepsilon = (a-b)/(a+b),$$

где  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса.

Поскольку в криволинейной системе координат  $\rho, \vartheta$  основные уравнения (3) будут достаточно сложными и найти их точное аналитическое решение с разделяющимися переменными весьма трудно, то предполагается искать решение в виде рядов по положительным степеням малого параметра  $\varepsilon$ .

$$u_{j'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} u_{j'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta); \sigma_{ij'}^{(k)}(\rho, \vartheta) = \sum_{(\tau)} \varepsilon^{\tau} \sigma_{ij'}^{(k, \tau)}(\rho, \vartheta).$$

В результате такого разложения в каждом из приближений по параметру  $\varepsilon$  приходим к решению задачи для кругового отверстия. Рассмотрено три приближения по параметру  $\varepsilon$  и найдены выражения для компонент тензора напряжений. Так, в частности, окружные напряжения  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  определяются формулой

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{\vartheta\vartheta} = 1 + \frac{1}{\rho^2} - \sum_{k=0}^N \left\{ t_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(0, 2k)} + \varepsilon T_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(1, 2k)} \cos 2\vartheta + \varepsilon^2 \left[ t_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(2, 2k)} + T_{\vartheta\vartheta(\rho)}^{(2, 2k)} \right] \cos 4\vartheta \right\} P_{2k}(\xi),$$

где  $t_{\vartheta\vartheta}^{(j, 2k)}$ ,  $T_{\vartheta\vartheta}^{(j, 2k)}$  – составляющие, содержащие цилиндрические функции.

**Выводы.** Изложены результаты числовых исследований напряженного состояния около эллиптического отверстия в трансверсально-изотропной пластине, находящейся под действием постоянного всестороннего растяжения интенсивности  $p$ . Расчеты проведены для пластины с коэффициентами Пуассона  $\nu = 0,25$ ;  $\nu' = 0,15$  и отношениями модулей упругости  $E/E' = 0,75$ ;  $E/G' = 5,0$ . В работе представлены кривые изменения окружных напряжений  $\sigma_{\vartheta\vartheta}/p$  для двух приближений в точках  $\rho = 1$ ,  $\vartheta = 0$  на срединной (кривые 1) и граничной (кривые 2) плоскостях пластины в зависимости от отношения полуосей эллипса  $a/b$ . С возрастанием  $a/b$  коэффициент концентрации напряжений увеличивается. При этом максимальных значений им достигается на граничной плоскости. Получена связь, характеризующая изменения  $\sigma_{\vartheta\vartheta}$  по угловой координате.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Хома И.Ю. Об одном способе построения общего решения уравнений равновесия нетонких пластин / Хома И.Ю. // Прикладная механика. – 2001. – Т. 37, № 4. – С.65-75.
2. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / Khoma I.Yu. // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577-3584.

3. Гузь О.М. Про приближений метод визначення концентрації напружень навколо криволинійних отворів в оболонках / Гузь О.М. // Прикладная механика. – 1962. – 8, № 6. – С.605-612.
4. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. // Тр. Тбилис. матем. ин-та – 1965. – 30. – С.3-103.
5. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. и др. – К.: Наукова думка, 1980. – 686с. (Методы расчета оболочек: В 5-и томах.; Т. 1).

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед.науч. сотр.  
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст.науч.сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПОД ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ (С УЧЕТОМ ОРИЕНТАЦИИ ТРЕЩИНЫ)

**Введение.** Исследования пространственных задач механики разрушения о напряженном состоянии упругого изотропного тела с дискообразными или эллиптическими трещинами проводились в ряде классических работ и монографий [1-3] и др. Значительно меньшее число работ посвящено изучению распределения напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем плоские трещины круговой или эллиптической формы [4, 5] и др. При этом существенным ограничением в этих работах являлось предположение о расположении плоских трещин в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Получение замкнутых решений упомянутых задач основано на известных представлениях общих решений трехмерных уравнений для изотропного и трансверсально-изотропного материалов через гармонические (квазигармонические) функции. Для упругого ортотропного материала такие представления не получены. Также для изотропного и ортотропного материалов фундаментальное решение (функция Грина для бесконечной среды) выражается в явном виде через элементарные функции, что принципиально отличает их от случая упругого ортотропного материала. Дополнительные математические трудности, связанные с упомянутыми обстоятельствами, не позволяют при рассмотрении трехмерных задач теории упругости для ортотропных материалов использовать методы и подходы, успешно применяемые при исследовании пространственных задач механики разрушения для изотропных и трансверсально-изотропных тел с плоскими трещинами.

Задачи о распределении напряжений в ортотропных материалах вблизи круговых или эллиптических трещин, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, изучены в [6, 7] на основе применения тройного преобразования Фурье, Фурье-образа функции Грина для ортотропной среды, теоремы о вычетах Коши и численного интегрирования на основе квадратур Гаусса. В настоящей работе этот подход усложнен для проведения расчетов напряженного состояния и КИН вдоль фронта эллиптической трещины с учетом ее ориентации в ортотропном материале. Даны рекомендации по применению аналитико-численного алгоритма решения задач при различных отношениях полуосей эллиптической трещины (под внутренним давлением).

**Постановка задачи.** Пусть ортотропная упругая среда (с осями ортотропии  $Ox$ ,

$0y, 0z$  в системі координат  $(x, y, z)$  содержит еліптичну тріщину, орієнтація котрої зв'язана з локальною системою  $(x^1, y^1, z^1)$ . Припустимо, що від системи  $(x, y, z)$  можна перейти до системи  $(x^1, y^1, z^1)$  з допомогою вращень осей  $0x, 0y, 0z$  на кути  $\alpha, \beta, \gamma$  відповідно. Еластичні властивості ортотропного матеріалу в системі  $(x, y, z)$  характеризуються дев'ятьма незалежними постійними  $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ . Еластичні постійні  $C_{ijkl}$  зв'язані з величинами  $c_{mn}$  залежностями

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; & C_{1122} &= C_{2211} = c_{12}; & C_{1133} &= C_{3311} = c_{13}; \\ C_{2233} &= C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}. \end{aligned} \quad (1)$$

При цьому інші компоненти тензора  $C_{ijkl}$  рівні нулю. Орієнтацію тріщини можна урахувати, переходячи до рішення задачі про еліптичну тріщину (під внутрішнім тиском) в анізотропному еластичному матеріалі (в системі  $(x^1, y^1, z^1)$ ), властивості якого знаходимо з допомогою перетворення тензора четвертого порядку

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}, \quad (2)$$

де  $T_{ij}$  – матриця перетворення

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ця матриця  $T_{ij}$  є результатом послідовного множення трьох матриць, що відображають праві вращення навколо кожної з осей координат.

Граничні умови на поверхні еліптичної тріщини при рівномірному тиску приймають вигляд

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0; \sigma_{23}^{\pm} = 0; \sigma_{33}^{\pm} = -P_0 \quad (x \in S); \bar{u}(\bar{x}) \rightarrow 0, |\bar{x}| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

де  $S$  – двохстороння поверхня тріщини,  $P_0$  – задане значення тиску.

**Метод рішення.** Використаємо інтегральне вираження функції Грина для анізотропного еластичного простору [8]

$$G_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\bar{x} - \bar{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5)$$

де  $N_{ij}(\bar{\xi})$  – відповідні алгебраїчні доповнення елементів матриць виду

$$\{K_{ki}(\bar{\xi})\} = \{C_{kjil}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\bar{\xi})\}, \quad (6)$$

а  $D(\bar{\xi})$  – її визначник. Для еліптичної тріщини поле переміщень представимо з допомогою скачків переміщень [9] через поверхню тріщини



$$u_i(\bar{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} b_m(\bar{x}') \xi_l N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\bar{\xi} dx'_1 dx'_2, \quad (7)$$

где неизвестный вектор  $\vec{b}(\bar{x})$  принимает вид  $\vec{b}(\bar{x}) = \vec{b} \left( 1 - x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 \right)^{1/2}$ . С помощью теоремы Коши о вычетах далее имеем

$$u_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{jlm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l^M N_{ij}(\bar{\xi}^M)}{\partial D(\bar{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\bar{x}') e^{i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2, \quad (8)$$

где суммирование проводится для  $\xi_3^M$  – корней уравнения  $D(\bar{\xi}) = 0$  с отрицательной мнимой частью, а вектор  $\bar{\xi}^M$  принимает вид  $\bar{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$ . Поле напряжений получаем в виде

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q^M \xi_l^M N_{kp}(\bar{\xi}^M)}{\partial D(\bar{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\bar{x}') e^{i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2$$

Проводя дальнейшие упрощения, согласно [9] имеем

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \frac{\eta_1}{a_1}, \frac{\eta_2}{a_2}, \xi_3^M(\eta_1/a_1, \eta_2/a_2) \right) b_m d\varphi, \quad (9)$$

где  $\eta_1 = \cos \varphi$ ;  $\eta_2 = \sin \varphi$ , а функция  $F_{ijm}$  имеет вид

$$F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm3}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q \xi_l N_{kp}(\bar{\xi})}{\partial D(\bar{\xi}) / \partial \xi_3}. \quad (10)$$

При вычислении контурных интегралов воспользуемся методом квадратур Гаусса, и, удовлетворив граничным условиям на поверхности трещины, определим неизвестные значения скачков перемещений. Из анализа асимптотических выражений напряжений в плоскости трещины приходим к следующим выражениям КИН:

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi} (x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{-1/4} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \xi_3^M(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2) \right) b_m;$$

$$K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1, \quad (11)$$

где компоненты нормали в плоскости трещины к ее границе имеют вид  $n_1 = (x_1/a_1^2)/(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}$ ,  $n_2 = (x_2/a_2^2)/(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}$ . Полученные выражения служат для оценки КИН эллиптической трещины (с учетом ее ориентации в ортотропном материале).

**Анализ результатов численных исследований.** Изучим распределение коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины, расположенной в ортотропном материале при различных ориентациях трещины. Упругие свойства ортотропного материала возьмем такими, что соответствуют ортогонально арми-

рованному стеклопластику (2:1) согласно [10]. На рис.1 приведено изменение КИН  $K_I$  вдоль границы эллиптической трещины с учетом ее ориентации в ортотропном материале. При расчетах значения полуосей эллипса полагались такими:  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 0,5$ .

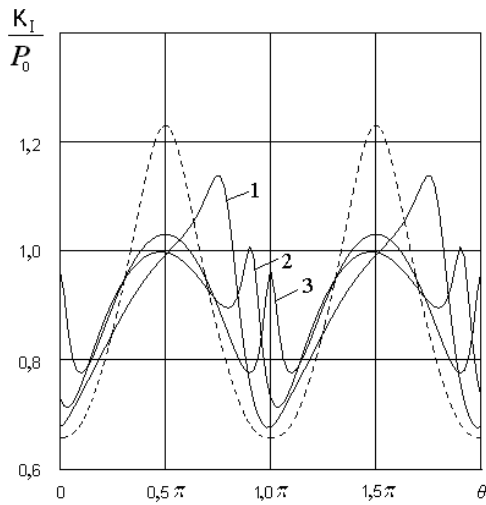


Рисунок 1

на рисунке линии 1, 2, 3 соответствовали значениям углов поворота  $\gamma = 30^0; 60^0; 90^0$ . Видно, что ориентация трещины в анизотропном материале влияет не только на сами значения КИН, но и на характер их распределения вдоль фронта трещины. На рис.2, 3 показано изменение коэффициентов интенсивности напряжений  $K_{II}$  и  $K_{III}$  вдоль границы эллиптической трещины при расположении трещины не в главных плоскостях ортотропии. Линии 1, 2 на этих рисунках соответствовали значениям углов поворота  $\beta = 30^0; 60^0$ . Отметим, что в случае расположения эллиптической трещины (под постоянным внутренним давлением) в плоскостях симметрии ортотропного материала, значения  $K_{II}$  и  $K_{III}$  равны нулю.

Ненулевые значения этих величин для плоской трещины под внутренним давлением (при отсутствии касательных нагрузок) вызваны исключительно ее ориентацией не в главных плоскостях в ортотропном материале. Также отметим, что при численном нахождении контурных интегралов и вычислении КИН, использовались квадратурные формулы Гаусса различных порядков, начиная от  $n=12$  и до  $n=96$ . Численный анализ результатов исследований показал, что при отношении полуосей эллиптической трещины  $0,5 \leq b/a \leq 1$  (при различных ее ориентациях) достаточно ограничиться порядком квадратурной формулы  $n=24$ , в то же время для отношений  $0,08 \leq b/a \leq 0,1$  в отдельных случаях возникала необходимость применения порядка  $n=96$ .

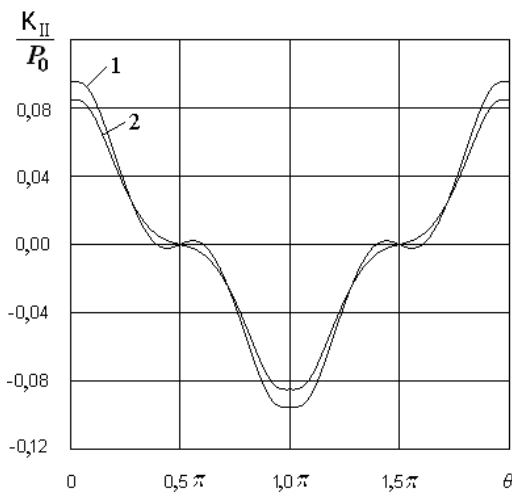


Рисунок 2

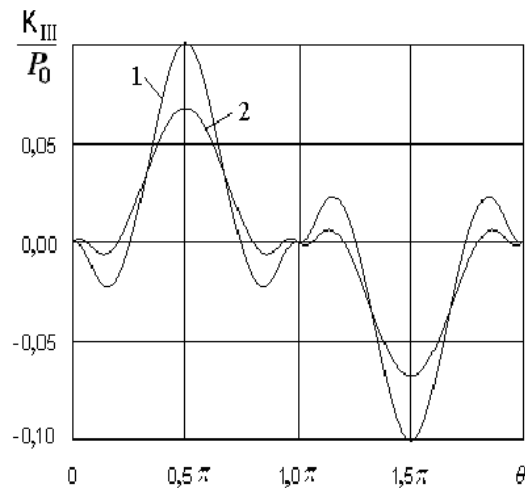


Рисунок 3

**Выводы.** Таким образом, в работе проведен аналитико-численный анализ коэффициентов интенсивности напряжений вдоль фронта эллиптической трещины (под однородным внутренним давлением) с учетом ее ориентации в упругом ортотропном материале. Установлены закономерности распределения КИН вдоль границы трещины

при різних її орієнтаціях. Показано, що орієнтація тріщини може значительним образом повліяти не тільки на значення КІН, але і на сам характер їх розподілення вздовж фронту тріщини. Виявлені суттєві ефекти, викликані орієнтацією тріщини в анізотропному упругому матеріалі.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости / Лурье А.И. – М.: Наука, 1970. – 939с.
2. Kassir M.K., Sih G. Three-dimensional crack problems / Kassir M.K., Sih G. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
3. Shan R.C. and Kobayashi A.S. Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract.Mech. – 1971. – № 3. – P.71-96.
4. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) / Подильчук Ю.Н. // Прикладная механика. – 1997. – № 10 (33). – С.3-30.
5. Chiang C.-R. Some crack problems in transversely isotropic solids / Chiang C.-R. // Acta Mechanica. – 2004. – № 1 (170). – P.1-9.
6. Kirilyuk V.S. On the stress state of the orthotropic medium with penny-shape crack // Int. Appl. Mech. – 2004.– 40, № 12.– P. 84–91.
7. Kirilyuk V.S. The stress state of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under tension and shear / Kirilyuk V.S. // Int. Appl. Mech. – 2005. – № 4 (41). – P.358-366.
8. Mura T. Micromechanics of defects in solids / Mura T. – Boston, London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587p.
9. Willis L.J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium / Willis L.J. // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – Т. 6, № 5. – P.253-263.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 415с.

Поступила в редколлегию 10.04.2014.

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор  
КРАВЧУК Т.В., аспірант

Дніпродзержинський державний технічний університет  
Черкаський національний університет ім. Б.Хмельницького

### ПОБУДОВА БАЗИСНОГО ТРИВИМІРНОГО СПЛАЙНА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**Вступ.** Сплайн-інтерполяція, на сьогодні, є одним із найточніших методів наближення, який широко застосовується для розв'язування задач математичного моделювання. І тому останнім часом дослідження різних способів сплайн-апроксимації є досить актуальним.

В сучасних умовах дизайнерська та інженерна діяльність тісно пов'язана з використанням електронно-обчислювальної техніки. Перед конструкторами, дизайнерами, інженерами завжди постає необхідність мати системи для точного моделювання, візуалізації та аналізу моделей. І чим простіші та ефективніші ці моделі, тим краще. Для цього і виникає необхідність побудови багатовимірних сплайн-функцій, що допоможе спростити процес моделювання, забезпечуючи при цьому високу точність. Протягом останніх років дослідженнями сплайнів та розв'язанням різноманітних задач з допомо-

гою сплайн-функцій займалося багато, як зарубіжних, так і українських вчених. Зокрема, в публікації [6] запропоновано новий підхід до розв'язування задачі для циліндричної оболонки обертання зі змінною жорсткістю, в [5] запропоновано новий варіант методу розв'язку нестационарних двовимірних задач термоупругопластичності з допомогою сплайн-функцій, в [4] представлено побудову та дослідження просторових кубічних сплайнів, та їх практичне застосуванням в задачах механіки та математичної фізики, а також в [7] запропоновано побудову двовимірного базисного сплайну. Приставка О.П. в [3] представив дослідження двовимірних поліноміальних сплайнів на основі В-сплайнів п'ятого порядку, а також запропонував спосіб відтворення поверхонь та гіперповерхонь заснований на використанні В-сплайнів. Зеленський А.С. описав методику автоматизованого оконтурення рудних тіл з використанням В-сплайнів [2]. В посібнику Ашкеназі В.О. [1] обговорюється сучасний математичний апарат і обчислювальні алгоритми побудови сплайн-поверхонь.

**Метою** даної роботи є представлення побудови тривимірного базисного сплайну, утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку.

**Постановка задачі.** Для представлення тривимірного базисного сплайну скористаємося наступною формулою:

$$S = (a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0)(b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0)(c_3\zeta^3 + c_2\zeta^2 + c_1\zeta + c_0). \quad (1)$$

Щоб досягти поставленої мети необхідно знайти коефіцієнти  $a_i, b_j, c_k$  ( $i, j, k=0,1,2,3$ ).

На рис.1 зображено куб, в якому необхідно побудувати базисний тривимірний сплайн (1).

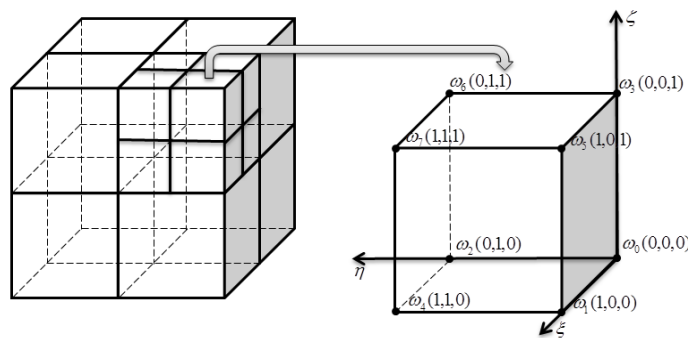


Рисунок 1

**Результати роботи.**

Знайдемо перші похідні по всім змінним сплайна (1):

$$\begin{aligned} S_\xi &= (3a_3\xi^2 + 2a_2\xi + a_1)(b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0)(c_3\zeta^3 + c_2\zeta^2 + c_1\zeta + c_0); \\ S_\eta &= (a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0)(3b_3\eta^2 + 2b_2\eta + b_1)(c_3\zeta^3 + c_2\zeta^2 + c_1\zeta + c_0); \\ S_\zeta &= (a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0)(b_3\eta^3 + b_2\eta^2 + b_1\eta + b_0)(3c_3\zeta^2 + 2c_2\zeta + c_1). \end{aligned} \quad (2)$$

Використаємо формули (1) і (2), підставляючи координати точок  $\omega_i$  ( $i=0,1,2,\dots,7$ ) (рис.1), і утворимо систему (3) з 32-х рівнянь із 12-ма невідомими:

- |  |  |
|--|--|
| 1) $\omega_0 = S(0,0,0) = a_0 b_0 c_0$ ,   | 2) $\omega_1 = S(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) b_0 c_0$ ,                     |
| 3) $\omega_2 = S(0,1,0) = a_0 (b_3 + b_2 + b_1 + b_0) c_0$ ,                     | 4) $\omega_3 = S(0,0,1) = a_0 b_0 (c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,                     |
| 5) $\omega_4 = S(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) (b_3 + b_2 + b_1 + b_0) c_0$ , | 6) $\omega_5 = S(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) b_0 (c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ , |

- 7)  $\omega_6 = S(0,1,1) = a_0(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ , 8)  $\omega_7 = S(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 9)  $\omega_{0\xi} = S_\xi(0,0,0) = a_1 b_0 c_0$ , 10)  $\omega_{0\eta} = S_\eta(0,0,0) = a_0 b_1 c_0$ ,  
 11)  $\omega_{0\zeta} = S_\zeta(0,0,0) = a_0 b_0 c_1$ , 12)  $\omega_{1\xi} = S_\xi(1,0,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)b_0 c_0$ ,  
 13)  $\omega_{1\eta} = S_\eta(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)b_1 c_0$ , 14)  $\omega_{1\zeta} = S_\zeta(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)b_0 c_1$ ,  
 15)  $\omega_{2\xi} = S_\xi(0,1,0) = a_1(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)c_0$ , 16)  $\omega_{2\eta} = S_\eta(0,1,0) = a_0(3b_3 + 2b_2 + b_1)c_0$ ,  
 17)  $\omega_{2\zeta} = S_\zeta(0,1,0) = a_0(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)c_1$ , 18)  $\omega_{3\xi} = S_\xi(0,0,1) = a_1 b_0(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 19)  $\omega_{3\eta} = S_\eta(0,0,1) = a_0 b_1(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ , 20)  $\omega_{3\zeta} = S_\zeta(0,0,1) = a_0 b_0(3c_3 + 2c_2 + c_1)$ ,  
 21)  $\omega_{4\xi} = S_\xi(1,1,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)c_0$ , 22)  $\omega_{4\eta} = S_\eta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(3b_3 + 2b_2 + b_1)c_0$ ,  
 23)  $\omega_{4\zeta} = S_\zeta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)c_1$ , 24)  $\omega_{5\xi} = S_\xi(1,0,1) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)b_0(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 25)  $\omega_{5\eta} = S_\eta(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)b_1(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ , 26)  $\omega_{5\zeta} = S_\zeta(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)b_0(3c_3 + 2c_2 + c_1)$ ,  
 27)  $\omega_{6\xi} = S_\xi(0,1,1) = a_1(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ , 28)  $\omega_{6\eta} = S_\eta(0,1,1) = a_0(3b_3 + 2b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 29)  $\omega_{6\zeta} = S_\zeta(0,1,1) = a_0(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(3c_3 + 2c_2 + c_1)$ ,  
 30)  $\omega_{7\xi} = S_\xi(1,1,1) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 31)  $\omega_{7\eta} = S_\eta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(3b_3 + 2b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0)$ ,  
 32)  $\omega_{7\zeta} = S_\zeta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)(3c_3 + 2c_2 + c_1)$ .

Потрібно виразити невідомі коефіцієнти  $a_i, b_j, c_k$  ( $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ ) через наперед задані  $\omega_m, \omega_{m\xi}, \omega_{m\eta}, \omega_{m\zeta}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, 7$ ), для цього із системи (3) виберемо 10 рівнянь, утворивши нову систему (4) (оскільки інші 22 рівняння можна виразити через рівняння системи (4), наприклад  $\omega_7 = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3}{\omega_0^2}$ , при  $\omega_0 \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \omega_0 = S(0,0,0) = a_0 b_0 c_0 \\ \omega_1 = S(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1 + a_0) b_0 c_0 \\ \omega_2 = S(0,1,0) = a_0 (b_3 + b_2 + b_1 + b_0) c_0 \\ \omega_3 = S(0,0,1) = a_0 b_0 (c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \\ \omega_{0\xi} = S_\xi(0,0,0) = a_1 b_0 c_0 \\ \omega_{0\eta} = S_\eta(0,0,0) = a_0 b_1 c_0 \\ \omega_{0\zeta} = S_\zeta(0,0,0) = a_0 b_0 c_1 \\ \omega_{1\xi} = S_\xi(1,0,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1) b_0 c_0 \\ \omega_{2\eta} = S_\eta(0,1,0) = a_0 (3b_3 + 2b_2 + b_1) c_0 \\ \omega_{3\zeta} = S_\zeta(0,0,1) = a_0 b_0 (3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{cases} \quad (4)$$

Розв'яжемо систему (4) відносно невідомих коефіцієнтів  $a_i, b_j, c_k$  ( $i, j, k = 0, 1, 2, 3$ ), причому  $a_0, b_0, c_0$  – візьмемо за параметри. В результаті проведених розрахунків при  $\omega_0 \neq 0$  отримаємо:

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega_{0\xi} \frac{a_0}{\omega_0}; & a_2 &= (3\omega_1 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}) \frac{a_0}{\omega_0}; & a_3 &= (-2\omega_1 + 2\omega_0 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}) \frac{a_0}{\omega_0}; \\ b_1 &= \omega_{0\eta} \frac{b_0}{\omega_0}; & b_2 &= (3\omega_2 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\eta} - \omega_{2\eta}) \frac{b_0}{\omega_0}; & b_3 &= (-2\omega_2 + 2\omega_0 + \omega_{0\eta} + \omega_{2\eta}) \frac{b_0}{\omega_0}; \\ c_1 &= \omega_{0\zeta} \frac{c_0}{\omega_0}; & c_2 &= (3\omega_3 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\zeta} - \omega_{3\zeta}) \frac{c_0}{\omega_0}; & c_3 &= (-2\omega_3 + 2\omega_0 + \omega_{0\zeta} + \omega_{3\zeta}) \frac{c_0}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

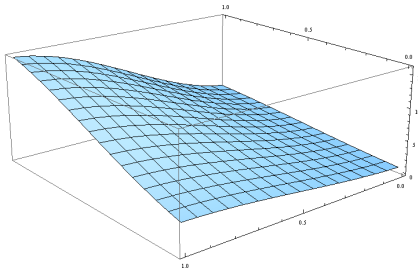
Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \omega_{0\xi}; & A_2 &= (3\omega_1 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}); & A_3 &= (-2\omega_1 + 2\omega_0 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}); \\
 B_1 &= \omega_{0\eta}; & B_2 &= (3\omega_2 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\eta} - \omega_{2\eta}); & B_3 &= (-2\omega_2 + 2\omega_0 + \omega_{0\eta} + \omega_{2\eta}); \\
 C_1 &= \omega_{0\zeta}; & C_2 &= (3\omega_3 - 3\omega_0 - 2\omega_{0\zeta} - \omega_{3\zeta}); & C_3 &= (-2\omega_3 + 2\omega_0 + \omega_{0\zeta} + \omega_{3\zeta});
 \end{aligned} \tag{6}$$

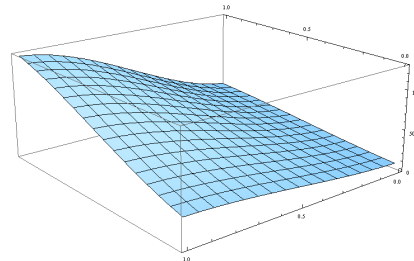
Підставимо вирази знайдених коефіцієнтів (5) в (1), використавши позначення (6). В результаті маємо загальний вигляд базисного тривимірного сплайна (7), утвореного як добуток трьох поліномів третього порядку в кубі  $[0;1] \times [0;1] \times [0;1]$  (рис. 1).

$$S = (A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + \omega_0)(B_3\eta^3 + B_2\eta^2 + B_1\eta + \omega_0)(C_3\zeta^3 + C_2\zeta^2 + C_1\zeta + \omega_0) \frac{1}{\omega_0^2}, \text{ при } \omega_0 \neq 0. \tag{7}$$

**Наведемо приклад для отриманої формули 7.** Для того, щоб побудувати графік поверхні за допомогою отриманого сплайна, зафіксуємо змінну  $\zeta$ , і побудуємо дві поверхні при  $\zeta=0$  (рис.2, а) та при  $\zeta=1$  (рис.2, б).



а (графік поверхні при  $\zeta=0$ )



б (графік поверхні при  $\zeta=1$ )

Рисунок 2

На рис.3 зображено задану поверхню при зміні  $\zeta$  від 0 до 1.

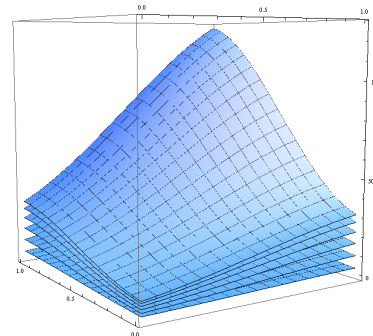
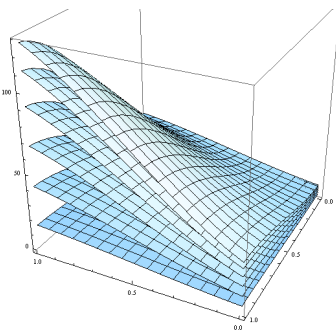


Рисунок 3

Необхідно зазначити, що утворена система (4) доцільна лише при  $\omega_0 \neq 0$ , в протилежному випадку із системи (3) вибираються інші рівняння і, відповідно, вигляд утвореного базисного сплайна (7) зміниться. Розглянемо всі можливі випадки, при яких  $\omega_0=0$ :

1.  $a_0=0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0$

Оскільки в системі (4)  $\omega_0=\omega_2=\omega_3=\omega_{0\eta}=\omega_{0\zeta}=\omega_{2\eta}=\omega_{3\zeta}=0$ , то із системи (3) вибираємо інші рівняння, в результаті утвориться система (8):

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = S(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1)b_0c_0 \\ \omega_4 = S(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1 + b_0)c_0 \\ \omega_5 = S(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1)b_0(c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \\ \omega_{0\xi} = S_\xi(0,0,0) = a_1b_0c_0 \\ \omega_{1\xi} = S_\xi(1,0,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)b_0c_0 \\ \omega_{1\eta} = S_\eta(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1)b_1c_0 \\ \omega_{1\zeta} = S_\zeta(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1)b_0c_1 \\ \omega_{4\eta} = S_\eta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1)c_0 \\ \omega_{5\zeta} = S_\zeta(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1)b_0(3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{array} \right. \quad (8)$$

Розв'язуючи систему (8) за параметри візьмемо  $b_0, c_0$ . Отже із системи (8) при  $\omega_1 \neq 0$  маємо:

$$\begin{array}{lll} a_1 = \omega_{0\xi} \frac{1}{b_0c_0}; & a_2 = (3\omega_1 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}) \frac{1}{b_0c_0}; & a_3 = (-2\omega_1 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}) \frac{1}{b_0c_0}; \\ b_1 = \omega_{1\eta} \frac{b_0}{\omega_1}; & b_2 = (3\omega_4 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}) \frac{b_0}{\omega_1}; & b_3 = (-2\omega_4 + 2\omega_1 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}) \frac{b_0}{\omega_1}; \\ c_1 = \omega_{1\zeta} \frac{c_0}{\omega_1}; & c_2 = (3\omega_5 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\zeta} - \omega_{5\zeta}) \frac{c_0}{\omega_1}; & c_3 = (-2\omega_5 + 2\omega_1 + \omega_{1\zeta} + \omega_{5\zeta}) \frac{c_0}{\omega_1}. \end{array} \quad (9)$$

Введемо позначення:

$$\begin{array}{lll} A_1^1 = \omega_{0\xi}; & A_2^1 = (3\omega_1 - 2\omega_{0\xi} - \omega_{1\xi}); & A_3^1 = (-2\omega_1 + \omega_{0\xi} + \omega_{1\xi}); \\ B_1^1 = \omega_{1\eta}; & B_2^1 = (3\omega_4 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}); & B_3^1 = (-2\omega_4 + 2\omega_1 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}); \\ C_1^1 = \omega_{1\zeta}; & C_2^1 = (3\omega_5 - 3\omega_1 - 2\omega_{1\zeta} - \omega_{5\zeta}); & C_3^1 = (-2\omega_5 + 2\omega_1 + \omega_{1\zeta} + \omega_{5\zeta}). \end{array} \quad (10)$$

Підставимо (9) в (1), використавши позначення (10). В результаті маємо:

$$S = (A_3^1 \xi^3 + A_2^1 \xi^2 + A_1^1 \xi) (B_3^1 \eta^3 + B_2^1 \eta^2 + B_1^1 \eta + \omega_1) (C_3^1 \zeta^3 + C_2^1 \zeta^2 + C_1^1 \zeta + \omega_1) \frac{1}{\omega_1^2}, \quad \text{при } \omega_1 \neq 0. \quad (11)$$

Так як  $\omega_1 \neq 0$ , то, відповідно до розглядуваного випадку, і  $a_3 + a_2 + a_1 \neq 0$ . А за умови, що  $a_0 = 0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0$  і  $a_3 + a_2 + a_1 = 0$  виразити невідомі із системи (3) неможливо.

На рис.4 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (11), при зміні  $\zeta$  від 0 до 1.

2.  $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0$

Утворюємо систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_4 = S(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)c_0 \\ \omega_7 = S(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1 + c_0) \\ \omega_{1\eta} = S_\eta(1,0,0) = (a_3 + a_2 + a_1)b_1c_0 \\ \omega_{2\xi} = S_\xi(0,1,0) = a_1(b_3 + b_2 + b_1)c_0 \\ \omega_{4\xi} = S_\xi(1,1,0) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)c_0 \\ \omega_{4\eta} = S_\eta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1)c_0 \\ \omega_{4\zeta} = S_\zeta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)c_1 \\ \omega_{7\zeta} = S_\zeta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{array} \right. \quad (12)$$

Розв'язуємо систему (12) при  $\omega_4 \neq 0$ ,  $a_1, b_1, c_0$  – параметри.

$$\begin{aligned} a_2 &= (3\omega_4 - 2\omega_{2\xi} - \omega_{4\xi}) \frac{a_1}{\omega_{2\xi}}; & a_3 &= (-2\omega_4 + \omega_{2\xi} + \omega_{4\xi}) \frac{a_1}{\omega_{2\xi}}; \\ b_2 &= (3\omega_4 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}) \frac{b_1}{\omega_{1\eta}}; & b_3 &= (-2\omega_4 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}) \frac{b_1}{\omega_{1\eta}}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$c_1 = \omega_{4\zeta} \frac{c_0}{\omega_4}; \quad c_2 = (3\omega_7 - 3\omega_4 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}) \frac{c_0}{\omega_4}; \quad c_3 = (-2\omega_7 + 2\omega_4 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}) \frac{c_0}{\omega_4}.$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} A_1^2 &= \omega_{2\xi}; & A_2^2 &= (3\omega_4 - 2\omega_{2\xi} - \omega_{4\xi}); & A_3^2 &= (-2\omega_4 + \omega_{2\xi} + \omega_{4\xi}); \\ B_1^2 &= \omega_{1\eta}; & B_2^2 &= (3\omega_4 - 2\omega_{1\eta} - \omega_{4\eta}); & B_3^2 &= (-2\omega_4 + \omega_{1\eta} + \omega_{4\eta}); \\ C_1^2 &= \omega_{4\zeta}; & C_2^2 &= (3\omega_7 - 3\omega_4 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}); & C_3^2 &= (-2\omega_7 + 2\omega_4 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}). \end{aligned} \quad (14)$$

Підставимо (13) в (1), використавши позначення (14). В результаті маємо:

$$S = (A_3^2 \xi^3 + A_2^2 \xi^2 + A_1^2 \xi) (B_3^2 \eta^3 + B_2^2 \eta^2 + B_1^2 \eta) (C_3^2 \zeta^3 + C_2^2 \zeta^2 + C_1^2 \zeta + \omega_4) \frac{1}{\omega_4}, \text{ при } \omega_4 \neq 0. \quad (15)$$

Тобто даний випадок можливий, коли  $(a_3 + a_2 + a_1) \neq 0$  і  $(b_3 + b_2 + b_1) \neq 0$ , якщо ж  $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0$  і  $(a_3 + a_2 + a_1) = 0$  або  $(b_3 + b_2 + b_1) = 0$ , систему (3) розв'язати неможна.

На рис.5 зображено приклад побудови поверхні за допомогою отриманого в даному випадку тривимірного кубічного базисного сплайну (15), при зміні  $\zeta$  від 0 до 1.

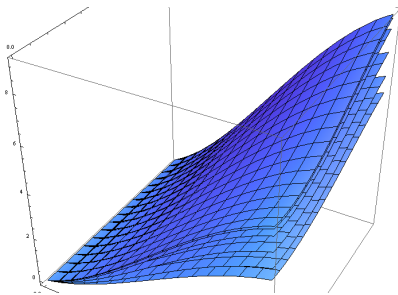


Рисунок 4

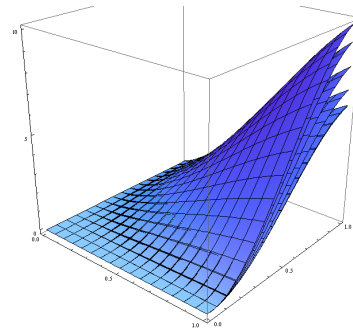


Рисунок 5

### 3. $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0$

В цьому випадку маємо наступну систему рівнянь, оскільки всі інші рівняння системи (3) дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \omega_7 = S(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{4\zeta} = S_\zeta(1,1,0) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)c_1 \\ \omega_{5\eta} = S_\eta(1,0,1) = (a_3 + a_2 + a_1)b_1(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{6\xi} = S_\xi(0,1,1) = a_1(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\xi} = S_\xi(1,1,1) = (3a_3 + 2a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\eta} = S_\eta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(3b_3 + 2b_2 + b_1)(c_3 + c_2 + c_1) \\ \omega_{7\zeta} = S_\zeta(1,1,1) = (a_3 + a_2 + a_1)(b_3 + b_2 + b_1)(3c_3 + 2c_2 + c_1) \end{cases} \quad (16)$$

Розв'язавши систему (16) при  $\omega_7 \neq 0$ , прийнявши за параметри  $a_1, b_1, c_1$ , маємо:



$$\begin{aligned}
 a_2 &= (3\omega_7 - 2\omega_{6\xi} - \omega_{7\xi}) \frac{a_1}{\omega_{6\xi}}; & a_3 &= (-2\omega_7 + \omega_{6\xi} + \omega_{7\xi}) \frac{a_1}{\omega_{6\xi}}; \\
 b_2 &= (3\omega_7 - 2\omega_{5\eta} - \omega_{7\eta}) \frac{b_1}{\omega_{5\eta}}; & b_3 &= (-2\omega_7 + \omega_{5\eta} + \omega_{7\eta}) \frac{b_1}{\omega_{5\eta}}; \\
 c_2 &= (3\omega_7 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}) \frac{c_1}{\omega_{4\zeta}}; & c_3 &= (-2\omega_7 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}) \frac{c_1}{\omega_{4\zeta}}.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}
 A_1^3 &= \omega_{6\xi}; & A_2^3 &= (3\omega_7 - 2\omega_{6\xi} - \omega_{7\xi}); & A_3^3 &= (-2\omega_7 + \omega_{6\xi} + \omega_{7\xi}); \\
 B_1^3 &= \omega_{5\eta}; & B_2^3 &= (3\omega_7 - 2\omega_{5\eta} - \omega_{7\eta}); & B_3^3 &= (-2\omega_7 + \omega_{5\eta} + \omega_{7\eta}); \\
 C_1^3 &= \omega_{4\zeta}; & C_2^3 &= (3\omega_7 - 2\omega_{4\zeta} - \omega_{7\zeta}); & C_3^3 &= (-2\omega_7 + \omega_{4\zeta} + \omega_{7\zeta}).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Підставимо (17) в (1), використавши позначення (18). В результаті маємо:

$$S = (A_3^3 \xi^3 + A_2^3 \xi^2 + A_1^3 \xi) (B_3^3 \eta^3 + B_2^3 \eta^2 + B_1^3 \eta) (C_3^3 \zeta^3 + C_2^3 \zeta^2 + C_1^3 \zeta) \frac{1}{\omega_7^2}, \text{ при } \omega_7 \neq 0.
 \tag{19}$$

Наведемо приклад побудованої поверхні за допомогою сплайну (19) у третьому випадку (рис.6) при зміні  $\zeta$  від 0 до 1.

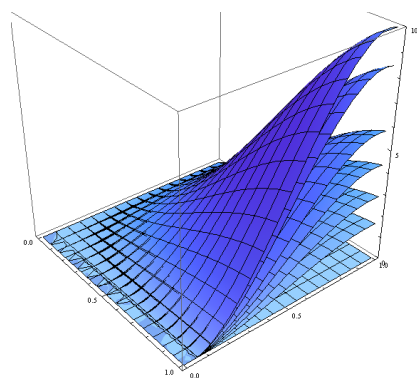


Рисунок 6

Зауважимо, що даний випадок можливий, коли  $(a_3 + a_2 + a_1) \neq 0$  і  $(b_3 + b_2 + b_1) \neq 0$ , і  $(c_3 + c_2 + c_1) \neq 0$ , якщо ж  $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0$  і  $(a_3 + a_2 + a_1) = 0$ , або  $(b_3 + b_2 + b_1) = 0$ , або  $(c_3 + c_2 + c_1) = 0$ , систему (3) розв'язати неможна.

**Обговорення результатів.** Представлений вище тривимірний базисний сплайн є нескладним в застосуванні при розв'язуванні задач математичного моделювання і, як свідчать деякі проведені дослідження, дають високу точність. До кожного розглянутого випадку додаються приклади побудови сплайнової поверхні. При чому, як можна побачити з наведених прикладів, в кожному випадку

отримується частина базисного сплайну розміщена в одному з чотирьох різнотипних кубиків, поданого куба на рис.1. Необхідно зазначити, що побудова здійснювалась з розрахунку на те, що одна зі змінних є константою, але такою, що належить проміжку  $[0;1]$ , і, якщо її змінювати від 0 до 1, то будуть отримуватись еквівалентні поверхні, але "видовжені" або "стиснуті", це можна спостерігати на малюнках 3-6, де  $\zeta$  набуває кількох різних значень, а саме  $\{0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1\}$ .

Оскільки побудований сплайн є залежним від трьох змінних то, щоб отримати повний графік даної сплайнової поверхні, його побудову слід здійснювати в чотирьох-вимірному просторі, зважаючи на це на рис.2-6 подано зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

**Висновки.** Було побудовано тривимірний базисний сплайн як добуток трьох поліномів третього порядку, а також розглянуть випадки побудови сплайну в залежності від наявності вільного коефіцієнта в кожному із многочленів  $i$ , до кожного випадку подано приклади побудови поверхні сплайну, при зафіксованій одній із змінних, тобто дано різні зображення поверхні сплайну в різних просторових перетинах.

Даний базисний сплайн можна застосовувати при розв'язуванні інтерполяційних

задач та задач математичного моделювання, при дослідженні різноманітних поверхонь та для прогнозування їх форми. Причому побудований базисний сплайн не є громіздким, займаючи небагато машинного часу під час обрахунків, і його використання дає високу точність при розрахунках, що є важливим для розв'язування різноманітних задач інтерполяції та задач математичного моделювання.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Ашкеназы В.О. Сплайн-поверхности. Основы теории и вычислительные алгоритмы: учебное пособие / Ашкеназы В.О. – Тверь: Тверской гос. ун-т, 2003. – 82с.
2. Зеленский А.С. Оконтуривание рудных тел с использованием В-сплайнов / А.С.Зеленский, С.С.Пуханов, Т.А.Подойницына // Вісник КТУ. – К. – 2011. – Вип. 27. – С.3-5.
3. Приставка П.О. Дослідження двовимірного сплайна на основі В-сплайнів п'ятого порядку / П.О.Приставка, О.Г.Чолишкіна // Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій: зб. наук. праць. – Д.: Вид-во Дніпропетр. ун-ту. – 2008. – Т. 12. – С.14-27.
4. Стеблянюк П.А. Применение двухмерного кубического сплайна для описания геометрических объектов / Стеблянюк П.А. // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 3 (44). – С.107-111.
5. Стеблянюк П.О. Аналіз обчислювальної ефективності наближених методів при дослідженні нестационарного напружено-деформованого стану тіл з використанням двовимірних сплайнів / Стеблянюк П.О. // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла: Збірник наукових праць ДНУ. – Дніпропетровськ. – 2005. – Вип.7. – С.73-87.
6. Стеблянюк П.О. Застосування двовимірного напруженого сплайну в задачах механіки / П.О. Стеблянюк // Системні технології: регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2006. – Вип. 5(46). – С.17-26.
7. Стеблянюк П.О. Побудова та аналіз стикування поверхонь, побудованих за допомогою двовимірних сплайн-функцій / П.О.Стеблянюк, Т.В.Кравчук // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки): тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Вип. 2 (22). – С.75-82.

Надійшла до редколегії 09.04.2014

УДК 539.3

ПЕТРОВ А.Д.

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

### РАСЧЕТ ПОЛЕЙ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

**Введение.** При эксплуатации конструкций очень большое влияние на их поведение может оказывать температура, поэтому определение термо-напряженного состояния достаточно важно. Нахождение термо-напряженного состояния в элементах конструкций в большинстве случаев представляет сложную и трудоемкую задачу. Это связано с влиянием на температурное состояние тела сложного, в том числе и циклического нагружения, когда в нем могут возникнуть и развиваться пластические деформации. Существующие численные методы, которые используются в таких задачах, приводят, как правило, к большим вычислительным трудностям, которые обусловлены решением больших систем алгебраических уравнений. В связи с этим рационально прибегать к

программным комплексам, позволяющим быстро решать большие объемы вычислений. В этой работе представлен комплекс ANSYS, использующий для вычислений метод конечных элементов.

**Постановка задачи.** Рассматривается квадратная пластинка со стороной  $a$ , которая ослаблена круговым отверстием радиуса  $R$ . Пластинка находится под действием растягивающих усилий интенсивности (рис.1) и температурного поля  $T$ . Массовыми силами пренебрегаем. Нужно определить влияние температуры на напряженно-деформированное состояние пластинки, которая находится в рамках пластичности.

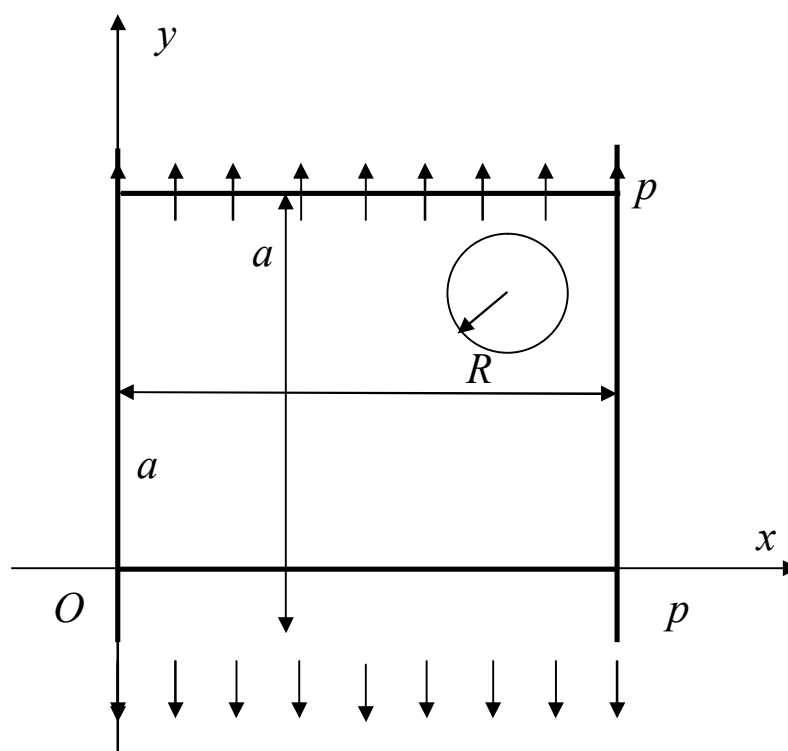


Рисунок 1 – Квадратная пластинка с круговым отверстием

Рассматриваются два случая, которые отличаются температурой на внутреннем контуре. В первом случае  $T = 300$  градусов Кельвина, во втором  $-500$ . Для расчета было использовано нелинейное изотропическое мультилинейное упрочнение по Мизесу. Пластина изготовлена из материала сталь 20. Длина пластины  $a=20$ см, радиус отверстия  $R=2$ см, координаты центра отверстия (14,14). Участки пластичности задаются в виде таблицы (табл.1).

**Расчетные формулы.** Кусочно-линейная аппроксимация диаграммы материала на отрезках  $\varepsilon_u \in [\varepsilon_{n-1}; \varepsilon_n]$ ,  $\sigma_u \in [\sigma_{n-1}; \sigma_n]$  имеет вид  $\sigma_u = K_n \varepsilon_u + b_n$ ;  $n = 1; 2; \dots; N$ ,

где  $K_n = \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}$ ;  $b_n = \sigma_{n-1} - K_n \varepsilon_{n-1}$ .

Пластическая деформация на каждом участке рассчитывается так  $(\varepsilon_p)_n = \varepsilon_n - \frac{\sigma_n}{K_1}$ .

Коэффициент пропорциональности на первом участке тождественно равен модулю Юнга  $K_1 \equiv E$ .

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, что любую непрерывную величину (перемещение, температура, давление и т. п.) можно аппроксимировать

моделью, состоящей из отдельных элементов (участков). На каждом из этих элементов исследуемая непрерывная величина аппроксимируется кусочно-непрерывной функцией, которая строится на значениях исследуемой непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемого элемента.

Таблица 1

n	T=273					T=473				
	$\varepsilon_u$	$\sigma_u$	$K_n$	$\nu_n$	$\varepsilon_p$	$\varepsilon_u$	$\sigma_u$	$K_n$	$\nu_n$	$\varepsilon_p$
0	0	0	203,125	0		0	0	187,5	0	
1	0,00064	0,13	202,6786	0,000286	0	0,00064	0,12	185,7143	0,001143	0
2	0,0012	0,2435	202,5	0,0005	1,23E-06	0,0012	0,224	126,6667	0,072	5,33E-06
3	0,0018	0,365	8,888889	0,3245	3,08E-06	0,0018	0,3	16,25	0,27075	0,0002
4	0,0026	0,383	1,639344	0,359889	0,000714	0,0026	0,313	5,185185	0,299519	0,000931
5	0,00395	0,395	0	0,388525	0,002005	0,00395	0,32	4,918033	0,300574	0,002243
6	0,007	0,4	0	0,4	0,005031	0,007	0,335	3,666667	0,309333	0,005213
7	0,01	0,4	0	0,4	0,008031	0,01	0,346	5,8	0,288	0,008155
8	0,015	0,4	0	0,4	0,013031	0,015	0,375	7,6	0,261	0,013
9	0,02	0,4	0	0,4	0,018031	0,02	0,413	7,6	0,261	0,017797
10	0,06	0,4				0,06	0,717			

**Математическая постановка.** Так как пластинка находится в условиях плоского напряженного состояния математически сформулированная выше задача может быть сведена к определению компонентов напряженно-деформированного состояния пластинки  $u_x, u_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}, \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$1) \text{ уравнения равновесия } \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$2) \text{ соотношения Коши } \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (2)$$

$$3) \text{ соотношения закона Гука } \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x), \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1+\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Граничные условия: в левом нижнем углу пластины запрещены все перемещения по ОУ. Температура во всем теле равна нулю, кроме внутреннего контура (там она задается отдельно).

**Метод решения. Алгоритм решения задачи по МКЭ.** Воспользуемся методом конечных элементов в форме метода перемещений. В этом случае последовательность проведения расчета по МКЭ:

1. Разбиение тела на конечные элементы и назначение узлов, в которых определяется перемещение.
2. Построение матрицы жесткости.
3. Составление и решение системы алгебраических уравнений.
4. Определение напряженно-деформированного состояния тела.

**Вырождение четырехугольных элементов в треугольные.** При построении сеток конечных элементов часто бывает выгодно вместо четырехугольных элементов использовать несколько треугольных. При вырождении четырехугольных элементов в треугольные, одна из сторон четырехугольника стягивается в точку (рис.2).

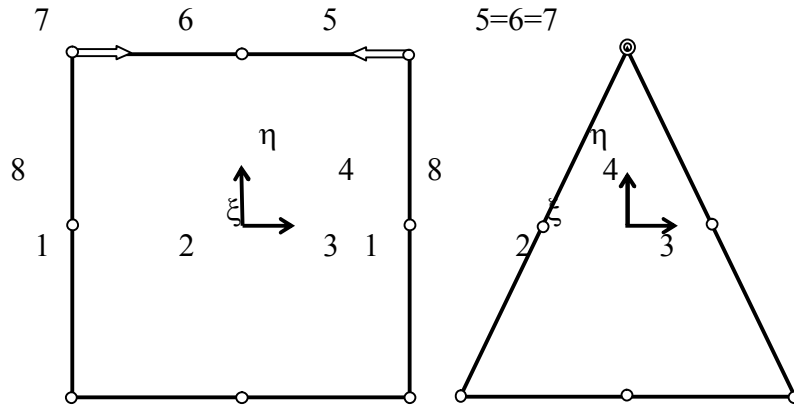


Рисунок 2 – Вырождение четырехугольных элементов в треугольные

При этом должны быть изменены функции формы (2.3), (2.4). Пусть в точку стягивается сторона 5-6-7 элемента, изображенного на рис.2. Тогда должны быть модифицированы функции  $N_1, N_2, N_3, N_5$ , которые для вырожденного элемента обозначены звездочкой:  $N_1^* = N_1 + \Delta N, N_2^* = N_2 - 2\Delta N, N_3^* = N_3 + \Delta N, N_5^* = N_5 + N_6 + N_7$ , где  $\Delta N = \frac{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}{8}$ . Пластина разбита 374 узлами, стороны разбиты 19 узлами, на внутреннем контуре 40 узлов.

Пластина разбита базовым изопараметрическим четырехугольным элементом Solid 182, который может вырождаться в треугольный. При численном решении МКЭ стороны пластины разбивались на 25 элементов.

В результате численного решения были получены графики зависимостей компонент тензоров остаточных напряжений ( $S_{11}, S_{22}, S_{12}$ ) и пластических деформаций ( $PE_{11}, PE_{22}, PE_{12}$ ), зависящих от температуры, вдоль оси  $X$ , а также распределение остаточных напряжений (рис.3-5).

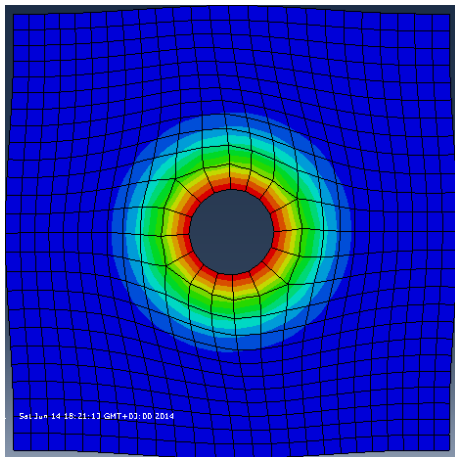


Рисунок 3 – Распределение температуры в пластине

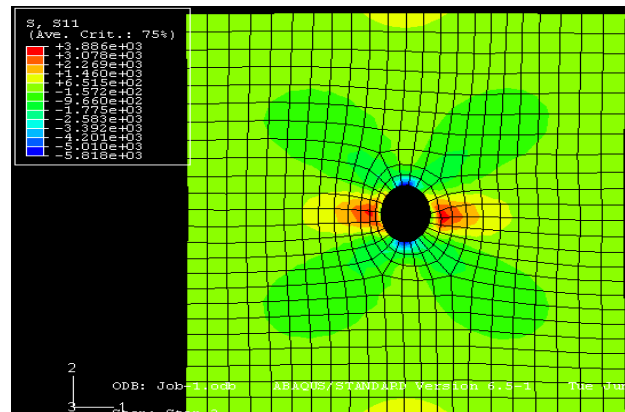


Рисунок 4 – Распределение остаточных напряжений в пластине

**Выводы.** Для построения решения повышенной точности уравнения теплопроводности и полной системы уравнений механики деформируемого твердого тела можно воспользоваться сплайнами [2, 3]. Все неизвестные величины представляются в виде сплайн-функций (использовались как кубические В-сплайны, так и напряженные сплайны). Применение аппарата сплайн-функций дает возможность записать более точные разностные выражения для дифференциальных операторов, входящих в состав схем

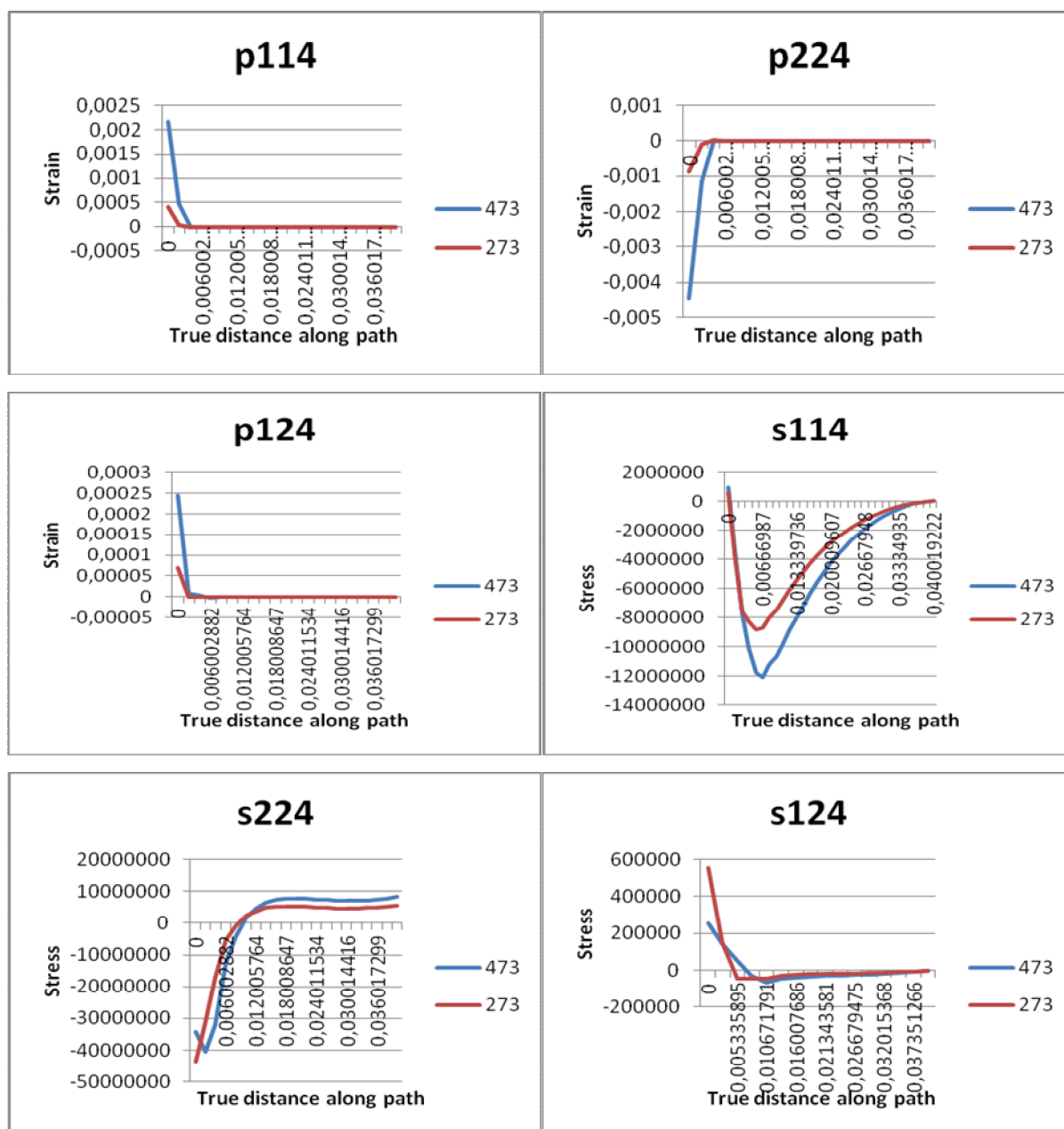


Рисунок 5 – Распределение остаточных напряжений и деформаций вдоль оси  $X$

расщепления. Это позволяет в целом повысить, как минимум на порядок, точность вычислений по координатам.

При условии соблюдения одинаковой точности вычислений с классическим конечно-разностным методом данный метод позволяет быстрее получать результаты в силу выбора более крупных шагов интегрирования по координатам, что приводит к существенному уменьшению количества используемых узлов пространственной сетки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352с.
2. Марчук Г.И. Методы расщепления / Марчук Г.И. – Москва: Наука, 1988. – 263с.
3. Стеблянко П.А. Методы расщепления в пространственных задачах теории пластичности / Стеблянко П.А. – Киев: Наукова думка, 1998. – 304с.

4. Шевченко Ю.Н. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности / Шевченко Ю.Н., Стеблянка П.А. // Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць. – Дніпропетровськ. – 2012. – Випуск 18. – С.211-226.
5. Шевченко Ю.Н. Физические уравнения термовязкопластичности / Шевченко Ю.Н., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1982. – 238с.
6. Шевченко Ю.Н. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность / Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. – Киев: Наукова думка, 1987. – 264с.
7. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наукова думка, 1992. – 328с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Яненко Н.Н. – Новосибирск: Наука, 1967. – 195с.

*Надійшла до редколегії 29.03.2014.*

УДК 539.3

ДЗЮБА В.А., аспірантка  
СТЕБЛЯНКО П.О., д.фіз.-мат.н., професор

Дніпродзержинський державний технічний університет

### **ПОБУДОВА МЕТОДУ ПІДВИЩЕНОЇ ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ОСНОВІ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ**

**Вступ. Актуальність дослідження.** Оболонки широко використовуються у різноманітних галузях техніки. У зв'язку з великою різноманітністю оболонок достатньо важко визначити єдиний спосіб їх розрахунку, оскільки кожний вид оболонок потребує окремого підходу. Якщо елементи конструкції виконані у вигляді циліндричних оболонок, то умови використання цих елементів, та відповідно, їх розрахунків тісно пов'язані з урахуванням довільного поперечного перерізу. Зміна товщини та форми поперечного перерізу оболонок описується системою диференціальних рівнянь в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами.

Останнім часом вийшла велика кількість публікацій по даній темі. Зокрема, отримані нові результати в цьому достатньо актуальному напрямі можна знайти в роботах Григоренка Я.М., Григоренка А.Я., Влайкова Г.Г., Тимошенка С.П., Василенка А.Т., Стеблянка П.О., Кільчевського М.О., Лур'є А.І., Муштарі Х.М. та ін. [2, 5]. Інженерний напрямок дослідження пластин і оболонок належить В.З.Власову [1]. Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості, стійкості, оскільки вони відіграють найважливішу роль у процесі створення новітніх конструкцій. Варто відмітити, що застосування сучасних методів досліджень напружено-деформованого стану [7] (варіаційні методи, реалізовані на ЕМО) дозволяє розглядати теорію оболонок з позиції узагальненої тривимірної задачі теорії пружності. Такий підхід не потребує введення додаткових гіпотез (прямих нормалей, відсутності поперечного тиск тощо), але натомість пов'язаний з великим об'ємом інформації, що потребує опрацювання.

На сучасному етапі розвитку теорії оболонок постає необхідність до пошуку нових підходів під час експлуатації споруджень, машин їхні елементи схильні до дії різних

за природою сил.

Аналіз відомих методів обчислень показує необхідність формування загального підходу до розрахунку циліндричних оболонок змінної товщини [4, 6], який дав би змогу і створив умови для широкого використання. Тобто виникає необхідність до розв'язання задач у просторовій постановці. При цьому з'являються математичні та обчислювальні труднощі при виконанні граничних умов з достатньою точністю. Описані проблеми, які з'явилися на новітньому шляху розвитку є наслідком недостатньо розробленого методичного апарату для розрахунку оболонок.

Методи розрахунку циліндричних оболонок здобувають велику популярність у сучасній науці та техніці. При обчисленні оболонок вкрай актуальною задачею є отримання ефективного методу обчислення. Особливо важливо, щоб цей метод був якомога точніше та відповідав усім поставленим умовам. У зв'язку з цим в статті запропоновані наближені (ітераційні) методи розв'язання задач теорії оболонок для циліндричних тіл на основі методу Зейделя.

**Постановка задачі.** Розглядається напружено-деформований стан навантаженої циліндричної оболонки кругового поперечного перерізу радіусу  $R$  у серединній поверхні. У формулюванні допускається, що товщина оболонки може змінюватись. Ключовими невідомими даної задачі є:  $U, V, W$  – переміщення за твірною, направляючою та нормаллю до серединної поверхні. Метою роботи є розробка ефективного методу розрахунку підвищеної точності вище описаних систем. Пропонується дослідити наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{\partial U}{\partial x} &= -\frac{W}{R_1} + \varepsilon_1; & 2. \quad \frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + \varepsilon_{12}; & 3. \quad \frac{\partial W}{\partial x} &= W'; & 4. \quad \frac{\partial W'}{\partial x} &= -\chi_1; \\
 5. \quad \frac{\partial N_1}{\partial x} &= -\frac{\partial S}{\partial y}; & 6. \quad \frac{\partial S}{\partial x} &= -\frac{\partial N_2}{\partial y}; & 7. \quad \frac{\partial M_1}{\partial x} &= -\frac{\partial H}{\partial y} + Q_1; \\
 8. \quad \frac{\partial H}{\partial x} &= H'; & 9. \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} &= -\frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{N_2}{R_2} - q_z; & 10. \quad H' &= 2\frac{\partial D_{66}}{\partial x}\chi_{12} + 2D_{66}\frac{\partial \chi_1}{\partial y}; \\
 11. \quad N_2 &= c_{12}\varepsilon_1 + c_{22}\varepsilon_2; & 12. \quad M_2 &= D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2; & 13. \quad Q_2 &= H' + \frac{\partial M_2}{\partial y}; \\
 14. \quad \varepsilon_1 &= \frac{1}{c_{11}}(N_1 - c_{12}\varepsilon_2); & 15. \quad \varepsilon_2 &= \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R_2}; & 16. \quad \varepsilon_{12} &= \frac{S}{c_{66}} \\
 17. \quad \chi_1 &= \frac{1}{D_{11}}(M_1 - D_{11}\chi_2); & 18. \quad \chi_2 &= -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; & 19. \quad \chi_{12} &= -\frac{\partial W'}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Теорія розрахунку представлена в даній роботі будується на основі ґрунтовного аналізу поставленої задачі, із врахуванням крайових умов, властивостей оболонки, що знаходиться під дією навантаження, та разом з цим здатна зберігати початкові дані (на практиці – експлуатаційні якості). Даний метод базується на використанні кінцево-різницевої апроксимації похідних. Метод розрахунку зводиться до розв'язання СЛАР із використанням ітераційних методів, а саме методу Зейделя.

**Матеріали і результати дослідження.** У статті [3] розроблено новий підхід для розв'язання вище наведених систем із використанням методу Зейделя, отримані явні розрахункові формули. У випадку незастосовності даного методу, необхідно розгляну-



ти загальну систему рівнянь (1)-(19) яка складається із диференціальних (1)-(9) та алгебраїчних (10)-(19) рівнянь. Загальний принцип розв'язку такий: спочатку знаходимо розв'язок диференціальних рівнянь, а саме – здійснюючи перехід від неперервної до дискретної задачі заміною похідних по координаті  $y$  різницевиими співвідношеннями. На кожній ітерації знаходимо значення по вже відомим із алгебраїчної системи, оскільки в правій частині розташована попередня ітерація в лівій наступна. Розв'язок системи рівнянь (1)-(19) передбачає наступні етапи:

1. Нульова ітерація  $i = 0$ , оболонка (пластинка) не навантажена, маємо тривіальний розв'язок у всьому полі  $Y \equiv 0$ .
2. Знаходимо значення змінних  $\chi_{12}$  з (19),  $\chi_2$  з (18),  $\varepsilon_{12}$  з (16),  $\varepsilon_2$  з (15).
3. Знаходимо  $\chi_1$  із (17) та  $\varepsilon_1$  з (14).
4. Знаходимо  $M_2$  з (12),  $N_2$  з (11),  $H'$  з (10).
5. Знаходимо  $Q_2$  з (13).
6. Простим інтегруванням знаходимо змінні рівнянь (1)-(9), а саме на даному етапі –  $H, W, W', S, Q_1$  із рівнянь (8), (3), (4), (6), (9).
7. Знаходимо  $N_1, \dot{I}_1, U$  із рівнянь (5), (7), (1).
8. Знаходимо  $V$  із рівняння (2).

Для підтвердження роботи запропонованого підходу наведений конкретний приклад розв'язку якого з легкістю можна обчислити вручну.

Введемо до розгляду найпростішу функцію, задану таблично (по точках  $N = 5$ )

$$y' = \cos(\pi x), \quad y(x_0) = a. \quad (1)$$

Візьмемо  $h = 0,2$ ,  $x_i = h \cdot i$ ,  $i = \overline{0, N}$ , матимемо  $x_i = [0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1]$ .

$$\begin{aligned} f_0 &= f(x_0) = \cos 0 = 1 \\ f_1 &= f(x_1) = \cos(0,2\pi) = 0,80901699437 \\ f_2 &= f(x_2) = \cos(0,4\pi) = 0,30901699437 \\ f_3 &= f(x_3) = \cos(0,6\pi) = -0,30901699437 \\ f_4 &= f(x_4) = \cos(0,8\pi) = -0,80901699437 \\ f_N &= f(x_5) = \cos(\pi) = -1 \end{aligned}$$

Запишемо формули апроксимації для  $y'$ , перше рівняння замінимо граничною умовою  $y_0 = a$  (для зручності міркувань вважатимемо  $a = 1$ )

$$\begin{aligned} y_0 &= a, \\ y_2 - y_0 &= 2hf_1 \\ y_3 - y_1 &= 2hf_2 \\ y_4 - y_2 &= 2hf_3 \\ y_5 - y_3 &= 2hf_4 \\ y_5 - y_4 &= hf_5 \end{aligned} \quad (2)$$

Застосуємо метод Зейделя для системи (2), запишемо матрицю  $A$  цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виділимо головний елемент в рядку для цього виконаємо елементарні перетворення над матрицею  $A$  і в результаті матимемо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Побудуємо ітераційну схему на основі отриманої матриці:

$$\begin{aligned} (y_1)_{k+1} &= hf_0 + (y_0)_k \\ (y_2)_{k+1} &= 2hf_1 + (y_0)_k \\ (y_3)_{k+1} &= 2hf_2 + (y_1)_k \\ (y_4)_{k+1} &= 2hf_3 + (y_2)_k \\ (y_5)_{k+1} &= 2hf_4 + (y_3)_k \\ (y_0)_{k+1} &= h(f_5 - f_0) + (y_1)_k + (y_4)_k - (y_5)_k \end{aligned}$$

Дана ітераційна схема при кількості ітерацій  $k = 4$  дає можливість отримати наближений розв'язок. Занесемо отримані розв'язки до табл.1 з метою проведення оцінки відхилення від точного розв'язку.

Таблиця 1

Наближений розв'язок	Метод Зейделя	Відхилення, %	Точний розв'язок
$y_0 = 1$	$y_0 = 1$	0%	$y_0 = 1$
$y_1 = 1,200000001$	$y_1 = 1,2$	1,1%	$y_1 = 1,18709785676$
$y_2 = 1,323606798$	$y_2 = 1,3236068$	1,6%	$y_2 = 1,30273069146$
$y_3 = 1,323606798$	$y_3 = 1,323606806$	1,6%	$y_3 = 1,30273069146$
$y_4 = 1,2$	$y_4 = 1,200000015$	1,1%	$y_4 = 1,18709785676$
$y_5 = 1$	$y_5 = 1,000000018$	0%	$y_5 = 1$

Порівняльний аналіз отриманих результатів подано на рис.1.

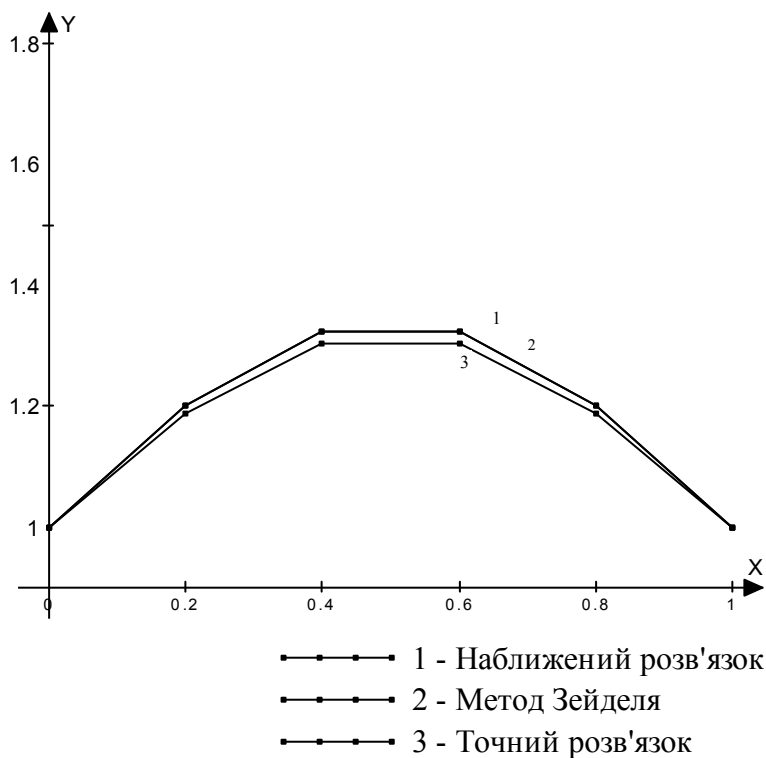


Рисунок 1

Порівнюючи отриманий методом Зейделя, наближений та точний розв'язок і оцінюючи похибку відхилення наближеного від точного розв'язку, можна стверджувати, що в середньому похибка складає не більше 1%. Відхилення розв'язку, отриманого методом Зейделя від наближеного розв'язку є незначним. Даний метод є ефективний для задач механіки, оскільки дає змогу з підвищеною точністю обчислень переважно більшість задач звести до розв'язання СЛАР.

Пропонується новий підхід для покращення збіжності методу Зейделя, а саме – по-іншому апроксимувати похідну із використанням коефіцієнтів  $\alpha$  та за рахунок роботи над матрицею системи.

$$y'_i = \sum_{\alpha=A}^F \alpha_i (y'_i)_{A,B,C,D,E,F}, \text{ де } \alpha_i \geq 0 \text{ та } \sum_{i=0}^N \alpha_i = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} & A_{79} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{86} & A_{87} & A_{88} & A_{89} & A_{8 \times 10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{97} & A_{98} & A_{99} & A_{9 \times 10} & A_{9 \times 11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10 \times 7} & A_{10 \times 8} & A_{10 \times 9} & A_{10 \times 10} & A_{10 \times 11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11 \times 7} & A_{11 \times 8} & A_{11 \times 9} & A_{11 \times 10} & A_{11 \times 11} \end{pmatrix}.$$

$$A_{11} = 8(12\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4), A_{12} = -12\alpha_1, A_{13} = -6\alpha_2, A_{14} = -4\alpha_3, A_{15} = -3\alpha_4. \\ A_{21} = 6\alpha_1 + 3\alpha_4, A_{22} = 9(6\alpha_1 - 6\alpha_2 - 3\alpha_3 - 2\alpha_5), A_{23} = -(6\alpha_2 + 3\alpha_4), A_{24} = -3\alpha_3, \\ A_{25} = -2\alpha_5.$$

$$\begin{aligned}
 A_{31} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{32} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{33} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{34} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{35} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{42} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{43} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{44} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{45} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{46} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{53} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{54} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{55} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{56} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{57} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{64} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{65} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{66} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{67} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{68} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{75} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{76} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{77} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{78} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{79} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{86} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{87} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{88} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{89} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{8 \times 10} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{97} &= \alpha_2 + 2\alpha_5, A_{98} = 2\alpha_1 + 4\alpha_3, A_{99} = 9(4\alpha_3 - 4\alpha_4 + 2\alpha_5 - 2\alpha_6), \\
 A_{9 \times 10} &= -(2\alpha_1 + 4\alpha_4), A_{9 \times 11} = -(\alpha_2 + 2\alpha_6). \\
 A_{10 \times 7} &= 2\alpha_5, A_{10 \times 8} = 3\alpha_2, A_{10 \times 9} = 6\alpha_1 + 3\alpha_4, A_{10 \times 10} = 9(6\alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_3 + 2\alpha_5), \\
 A_{10 \times 11} &= 6\alpha_3 + 3\alpha_4. \\
 A_{11 \times 7} &= 3\alpha_4, A_{11 \times 8} = 4\alpha_3, A_{11 \times 9} = 6\alpha_2, A_{11 \times 10} = 12\alpha_1, A_{11 \times 11} = 9(12\alpha_1 + 6\alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4).
 \end{aligned}$$

**Висновки.** Наведено новий підхід для покращення збіжності в методі Зейделя. Проведено порівняльний аналіз результатів показав високу точність при застосуванні запропонованого методу на конкретному прикладі. Перевагою методу є те, що можна отримати результати максимально наближені до точних за рахунок дискретного подання апроксимації.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / Власов В.З. – М. - Л.: Гостехиздат, 1949. – 784с.
2. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Григоренко Я.М., Влайков Г.Г., Григоренко А.Я. – Киев: Академперіодика, 2006. – 472с.
3. Дзюба В.А. Ітераційні методи в задачах математичного моделювання технічних процесів /Дзюба В.А., Стеблянко П.О. // Математичне моделювання: міжнар.наук.конф., квітень 2014 р.: матеріали. – Сімферополь, 2014. – С.3-5.
4. Крылов В.И. Вычислительные методы. В 2-х томах. Т. 1. / В.И.Крылов, В.В.Бобков, И.И.Монастырный. – М.: Наука, 1976. – 216с.
5. Рудаков К.М. Чисельні методи аналізу в динаміці та міцності конструкцій: навч. посіб. / Рудаков К.М. – К: НТУУ «КПІ», 2007. – 379с.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1984. – 272с.
7. Стеблянко П.А. Применение напряженных сплайнов при построении решения задачи для цилиндрической оболочки постоянной толщины / Стеблянко П.А., Сафронов О.О. // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 15. – С.170-182.

Надійшла до редколегії 29.03.2014.

Дніпродзержинський державний технічний університет

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА КОНТРОЛЬ УСПІШНОСТІ НАВЧАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

**Вступ.** Реформування вищої освіти в Україні набуло системного характеру, так як перехід до нової парадигми викликав значні зміни у структурі та функціонуванні вищої школи. Зокрема, модульно-рейтингова система організації навчального процесу призводить до зміни системи оцінювання успішності навчання. Для забезпечення виконання вимог об'єктивності та валідності контролю доцільно використовувати математичні моделі успішності. У відповідності з прийнятим поділом кожної з навчальних дисциплін на модулі природно розглянути модель успішності саме для модуля. Завершується перехід від традиційних форм контролю й оцінювання знань студентів до тестування, що відповідає сучасним тенденціям і загальній концепції модернізації системи освіти. Його ефективність багато в чому залежить, насамперед, від специфіки самої навчальної дисципліни і цілі навчання, від якості контролюючих матеріалів і доцільності їх використання для конкретних навчальних цілей, а також від форм представлення навчальної інформації.

Порівняно з традиційними формами контролю тестування має ряд переваг:

- швидке отримання результатів випробувань та звільнення викладача від трудомісткої роботи з обробки результатів тестування;
- об'єктивність в оцінці;
- конфіденційність при анонімному тестуванні;
- тестування психологічно є більш привабливим порівняно з традиційними формами опитування, що створює позитивну мотивацію у студентів.

З огляду на зазначені переваги, актуальна розробка різноманітних засобів для тестування.

**Постановка задачі.** Говорячи про об'єктивність в оцінці, слід визначити загальні для вибраного процесу контролю фактори, що сприяють більш об'єктивному (незалежному від суб'єктивних установок викладачів) підходу до процедури оцінювання:

- однакові інструкції для всіх студентів;
- однакова система оцінки результатів тестування;
- спрощений підрахунок балів.

Для визначеності вибирається моделювання успішності математичної підготовки. Процес навчання вищої математики спрямований на набуття студентами певного обсягу знань, формування умінь використовувати математичні методи для вирішення різних завдань, розвитку математичного мислення та компетенцій, виховання професійної культури. За структурою і тривалістю навчальний процес поділяється на змістові модулі, що завершуються контрольними роботами. Потім з урахуванням усіх видів роботи студенти набирають бали успішності. Специфіка вищої математики як навчальної дисципліни, а також специфіка методів викладання і оцінювання результатів навчання накладають ряд обмежень на використання тестового контролю. Головним чином, ці обмеження пов'язані зі складнощами перевірки вірності символічної інформації. Початковий етап організації роботи полягає в розробці методики проведення тестування і припускає велику методичну роботу, що полягає у визначенні змісту тестових завдань, у розподілі їх за типами і рівнями складності, а також у створенні збалансованого варіанту тесту. Зміст і постановка питань повинні забезпечувати валідність і надійність тестових завдань і всього тесту в цілому. На кафедрі вищої математики ДДТУ авторами

було розроблено шість тематичних тестів, на основі яких здійснюється проміжний контроль для всіх змістових модулів першого, другого і третього семестрів курсу вищої математики [1].

**Результати роботи.** Метою аналізу модульної та підсумкової успішності є знаходження механізмів управління успішністю навчання з допомогою її моделі та в межах прийнятої в університеті системи. Потрібно прийняти до уваги суб'єктивні та об'єктивні складові навчального процесу, які впливають на конкретні показники успішності і її можливі межі. Відомо, що розподіл балів успішності вибірки студентів можна описати методами математичної статистики. Тоді змістовні модулі утворюють блоки системи, надійність якої вимірюється кількістю отриманих балів та їх статистичним розподілом.

Специфіка дисципліни допускає формулювання теоретичних питань і практичних завдань у вигляді завдань трьох основних типів:

1. Тип А (закритий однозначний) - це тип тестових завдань з вибором єдиної правильної відповіді з декількох запропонованих варіантів.
2. Тип В (питання на відповідність) - тип тестових питань з підбором пар відповідності, зіставлення або протиставлення елементів двох представлених множин.
3. Тип С (відкритий однозначний) - це тип тестових завдань із записом (впровадженням) однієї правильної відповіді.

Як правило, має місце адитивна (накопичувальна) система розрахунків, при якій отримані протягом семестру бали підсумовуються. Для того щоб забезпечити умови об'єктивності рейтингу, потрібно проаналізувати межі досяжної успішності для різних форм контролю. Для фундаментальних дисциплін, наприклад, математичного циклу, модуль, за часовими рамками відповідного семестру навчання, поділяється на два змістовних модуля. По кожному з них, як і по модулю в цілому, проводиться контроль успішності з виставленням оцінок. Доцільно теоретично проаналізувати статистичні розподіли оцінок студентів. Для стохастичної моделі репрезентативною буде вибірка у об'ємі потоку студентів факультету, наприклад, першого або другого курсів навчання. Для аналізу вибирається діюча змішана шкала оцінок, представлена в табл.1. Часто використовується і більш детальна шкала з підрозділом на рівні В, С, D, E, FX і F окремо. Однак тенденцій динаміки розподілу оцінок такий підхід не змінює.

Таблиця 1 – Система оцінок успішності

Національна відмінно добре задовільно незадовільно	ECTS A BC DE F, FX	Бали 90 - 100 75 - 89 60 - 74 0 - 59

Відомо, що для адекватної та достовірної системи тестів або задач, які виконуються одноразово в умовах налагодженого навчального процесу для репрезентативних вибірок студентів, є приблизно 15% оцінок рівня, 35% оцінок рівня BC, 35% оцінок рівня DE та інші незадовільні оцінки [2]. Передбачається, що ці оцінки студенти отримують незалежно від виду контролю і один від одного, тобто можна вважати їх незалежними випадковими величинами. Пропонуються схеми надійності для моделювання успішності навчання. Для скорочення викладок докладно розглядаються моделі систем оцінки якісної успішності. Аналіз проводиться на прикладі одного семестру викладання курсу вищої математики, який розрахований на два змістовних модуля. Тоді маємо для порівняння дві схеми. За першою з них рейтинг визначається за результатами, які були отримані по змістовним модулям (підсумкова атестація не проводиться). Для елемента

А (сумарна кількість балів 90-100 і оцінка «відмінно» за національною шкалою) ймовірність отримання дорівнює 0,15, для елемента ВС (сумарна кількість балів 75-89 та оцінка «добре» за національною шкалою) – 0,35, а для елемента DE (студент набрав сумарна кількість балів 60-74 та оцінку «задовільно» за національною шкалою) – 0,35 відповідно до прийнятих допущеннях (рис.1).

Блок I+II

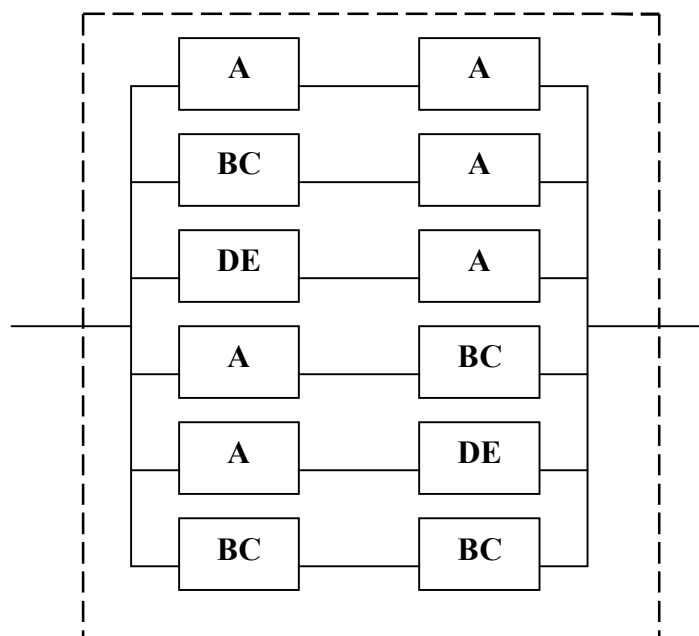


Рисунок 1 – Можливі шляхи отримання якісної успішності (без підсумкової атестації)

Позначимо для зручності цю схему як блок (I + II) можливих шляхів досягнення якісної успішності. Ймовірність отримання такої успішності дорівнює

$$P(I+II) = 1 - (1 - 0,35 \cdot 0,15)^4 \cdot (1 - 0,15^2) \cdot (1 - 0,35^2) = 0,309.$$

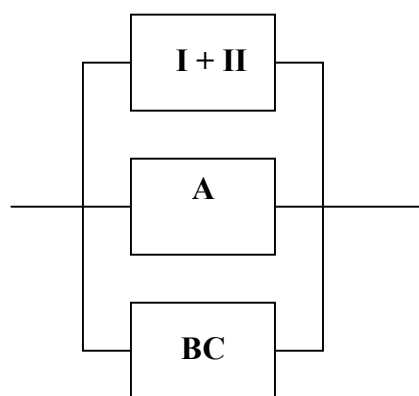


Рисунок 2 – Можливі шляхи отримання якісної успішності при підсумковій атестації

Таким чином, знайдена верхня межа якісної успішності – 30,9%. На наш погляд, при такому підході оцінки успішності не виправдано жорстко обмежені зверху, стримують студентів в успішності навчання, тому слід перейти до альтернативних схем. Розглянемо організаційну схему з використанням підсумкової атестації. Схема надійності для такого підходу наведена на рис.2.

Ймовірність отримання якісної успішності за схемою, яка складається з трьох паралельних блоків, дорівнює

$$P(ЯУ) = 1 - (1 - 0,309) \cdot (1 - 0,15) \cdot (1 - 0,35) = 0,618.$$

Отже, ми бачимо, що наявність підсумкової атестації розширює межі ймовірності досягнення показників якісної успішності практично в два рази і є дієвим інструментом управління навчальним процесом [3]. Моделювання та отримані оцінки вказують на

необхідність і важливість підсумкової атестації, як інструменту управління загальними якісними показниками успішності.

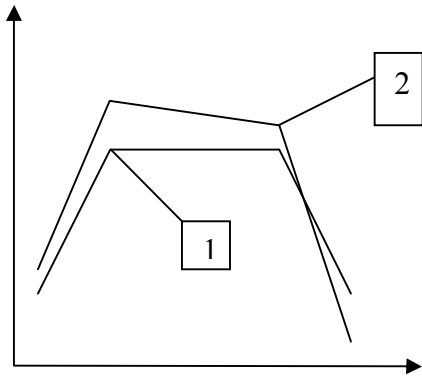


Рисунок 3 – Полігони

Відомо, що при організації контролю в багатьох університетах застосовується також схема (60+40), коли максимальна кількість балів за роботу студента в семестрі – 60 і при підсумковому контролі – 40. Приймається, що система оцінок успішності в цілому і їх розподілу в кожному окремому випробуванні для репрезентативних вибірок зберігаються. Доцільно розглянути отримані розподіли (рис.3). Полігон 1 показує розподіл для кожного з випробувань, а полігон 2 – один з імовірних для підсумкових оцінок.

Результати показують можливість зниження якісного показника успішності навчання і, в особливості, частки відмінних оцінок.

На нашу думку, провідний викладач повинен виконувати функції експерта, який утримує процес оцінювання від крайнощів.

**Висновки.** За результатами обчислювальних експериментів з моделями оцінювання успішності навчання вищої математики знайдені можливі межі якісної та загальної успішності. Встановлена залежність цих меж не тільки від рівня підготовки студентів, але і від застосовуваних схем оцінювання. Важливою є роль викладача, як експерта в процесі оцінювання, контролюючого стійкість результатів тестування, а також оцінювання успішності у цілому.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Шумейко О.О. Модульне і підсумкове оцінювання: тести з вищої математики / О.О.Шумейко, Т.В.Наконечна, О.В.Нікулін. – Жовті Води, 2009. – 156с.
2. Бодряков В.Ю. Простая вероятностно-статистическая модель количественной оценки уровня знаний учащихся / В.Ю.Бодряков, Н.Г.Фомин // *Alma mater.* – 2008. – С.55-61.
3. Нікулін О.В. Моделювання якісної успішності за семестр/ О.В.Нікулін, Т.В.Наконечна // *Проблеми математичного моделювання: Міждерж. наук.-метод. конф., 27-29 травня 2011р.: тези доповідей.* – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. – С.196-198.

*Надійшла до редколегії 29.03.2014.*