Полилов Е.В. ***Украина***
Солдатенко Н.А. ***Алчевск***
Щёлоков А.Г.

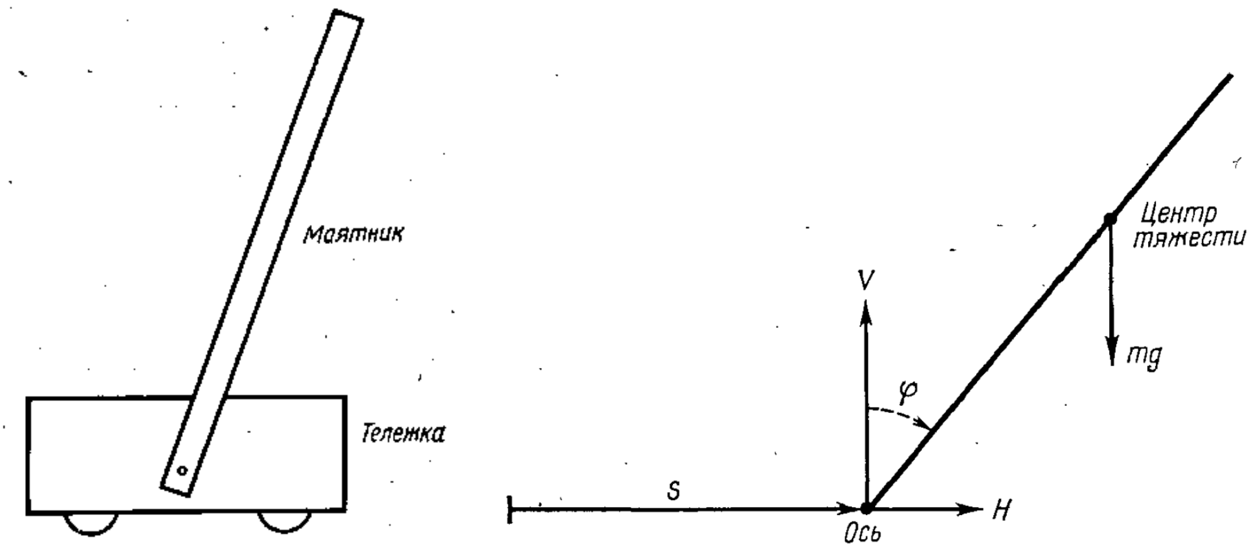
Донбасский государственный технический университет

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТЕЛЕЖКА - ОБРАТНЫЙ МАЯТНИК

Введение. Новые задачи управления сложными кинематическими механизмами обусловлены появлением робототехнических систем нетривиальной конструкции, к которым относятся роботы избыточной структуры, шагающие и многоколесные механизмы, маятнико-подобные и гироскопические системы. Несмотря на ограниченные функциональные возможности таких систем, они оказываются вполне пригодны для решения целого ряда специфических задач. К последним относятся задачи стабилизации положения неуправляемого конечного звена манипуляционного робота [2],[3].[4] или робота нетривиальной конструкции (типа маятника на подвижной основе, например, маятника Фуруты), задачи стабилизации центра тяжести шагающего механизма, стабилизации положения многоканальной гироскопической системы, а также соответствующие задачи поддержания их колебательных движений или траекторного управления. В качестве объекта управления рассматривается перевернутый или обратный маятник (ОМ) (рис. 1), т.е. стержень, зафиксированный относительно тележки с возможностью колебаний в продольно-вертикальной плоскости. Тележка способна перемещаться вдоль горизонтальной плоскости под действием управляющей силы.

Постановка задач исследования. Цель работы - получение математического описания перевёрнутого маятника, пригодного для разработки эффективных алгоритмов и структур релейных систем автоматического регулирования положения и угла отклонения обратного маятника (САРП-ОМ и САРУ-ОМ), обеспечивающих высокую точность удержания стержня маятника в вертикальном положении во всех возможных режимах позиционирования тележки (минимизация статической и динамической ошибок), а также квазиинвариантность к координатным и параметрическим возмущениям.

Материалы исследования. Рассмотрим перевёрнутый маятник, показанный на рис. 1, а [1]. Ось маятника монтируется на тележке, которая может перемещаться в горизонтальном направлении. Тележка приводится в движение небольшим двигателем, который в момент времени *t* прикладывает к тележке силу $\mu(t)$, являющуюся входной переменной системы. На рис. 1, б представлены силы и перемещения. В момент времени t перемещение оси характеризуется функцией $s(t)$, а угловое отклонение маятника - функцией $\varphi(t)$. Масса маятника обозначена буквой m, L - расстояние между осью и центром тяжести, J - момент инерции относительно центра тяжести, M - масса тележки. К маятнику приложена сила mg в центре тяжести, а также горизонтальная $H(t)$ и вертикальная $V(t)$ силы реакции у оси маятника. Здесь g - ускорение силы тяжести.



а) б)

Рис. 1. Перевёрнутый маятник

Для системы справедливы следующие уравнения:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(s(t)+L\sin\varphi(t))=H(t)\ ; \tag{1}$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(L\cos\varphi(t))=V(t)-mg\ ; \tag{2}$$

$$J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}=LV(t)\sin\varphi(t)-LH(t)\cos\varphi(t)\ ; \tag{3}$$

$$M\frac{d^2s(t)}{dt^2}=\mu(t)-H(t)-F\frac{ds(t)}{dt}\ . \tag{4}$$

Трение учитывается только при движении тележки; в уравнении (4) F - коэффициент трения. Трение оси маятника не учитывается. После преобразования дифференциальных уравнений (1) и (2) имеем

$$m\ddot{s}(t)+mL\ddot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)-mL\varphi^2(t)\sin\varphi(t)=H(t)\ ; \tag{5}$$

$$-mL\ddot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)-mL\dot{\varphi}^2(t)\cos\varphi(t)=V(t)-mg\ ; \tag{6}$$

$$J\ddot{\varphi}(t)=LV(t)\sin\varphi(t)-LH(t)\cos\varphi(t)\ ; \tag{7}$$

$$M\ddot{s}(t)=\mu(t)-H(t)-F\dot{s}(t)\ . \tag{8}$$

С целью упрощения уравнений предположим, что масса m мала по сравнению с M, и поэтому пренебрежем горизонтальной реакцией $H(t)$ на движение тележки. Это позволяет заменить (8) уравнением

$$M\ddot{s}(t)=\mu(t)-F\dot{s}(t)\ . \tag{9}$$

Исключая $H(t)$ и $V(t)$ из уравнений (5) -(7), получим

$$(J+mL^2)\ddot{\varphi}(t)-mgL\sin\varphi(t)+mL\ddot{s}(t)\cos\varphi(t)=0\ . \tag{10}$$

Производя почленное деление на $J+mL^2$, найдём

$$\ddot{\varphi}(t)-\frac{g}{L'}\sin\varphi(t)+\frac{1}{L'}\ddot{s}(t)\cos\varphi(t)=0\ , \tag{11}$$

где

$$L'=\frac{J+mL^2}{mL}\ . \tag{12}$$

Эта величина называется эффективной длиной маятника, так как движение математического маятника длиной L' также описывается уравнением (11).

Выберем в качестве номинального решение $\mu(t)\equiv 0$, $s(t)\equiv 0$, $\varphi(t)\equiv 0$. Линеаризацию легко выполнить, разлагая $\sin\varphi(t)$ и $\cos\varphi(t)$ в ряды Тейлора и подставляя в уравнение (11) только первые члены рядов. Линеаризация (11) приводит к уравнению

$$\ddot{\varphi}(t)-\frac{g}{L'}\varphi(t)+\frac{1}{L'}\ddot{s}(t)=0\ . \tag{13}$$

В качестве компонент вектора состояния $\mathbf{x}(t)$ выбираем

$$\begin{cases}\xi_1(t)=s(t)+L'\varphi(t);\\ \xi_2(t)=\dot{s}(t)+L'\dot{\varphi}(t);\\ \xi_3(t)=s(t);\\ \xi_4(t)=\dot{s}(t).\end{cases} \tag{14}$$

Первая компонента состояния представляет собой линеаризованную аппроксимацию перемещения точки маятника, находящейся на расстоянии L' от оси. Функцию ξ_1 рассматривают как перемещение маятника. При выбранных обозначениях из (9) и (13) определим линеаризованное уравнение состояния

$$\begin{cases}\dot{\xi}_1(t)=\xi_2(t);\\ \dot{\xi}_2(t)=\dfrac{g}{L'}(\xi_1(t)-\xi_3(t));\\ \dot{\xi}_3(t)=\xi_4(t);\\ \dot{\xi}_4(t)=\dfrac{1}{M}\mu(t)-\dfrac{1}{M}H(t)-\dfrac{F}{M}\xi_4(t),\end{cases} \tag{15}$$

которое в векторно-матричной форме имеет вид:

$$
\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{g}{L'} & 0 & -\frac{g}{L'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{F}{M} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}\mu(t)\,. \tag{16}
$$

Ниже параметрам системы присваиваются следующие значения:

$M = 0,9$ - масса тележки, кг; $m = 0,1$ - масса маятника, кг; $L_{\text{ì}} = 0,47$ - длина маятника, м;

$L = 0,235$ - расстояние от конца маятника до его центра масс, м; $J = 0,0053$ - момент инерции маятника, кг·м^2; $F = 0,05$ - коэффициент трения, Н/м·сек.

В соответствии с полученными параметрами ОУ и его математическим описанием с использованием пакетов расширения системы Matlab (Matrix Laboratory - матричная лаборатория) проведём предварительное исследование нелинейной динамической системы тележка - обратный маятник. Для этого в пакете моделирования динамических систем Simulink в соответствии с нелинейными дифференциальными уравнениями (5) - (8) составим цифровые математические модели механической системы тележка - обратный маятник. На рис. 2 представлена указанная модель.

Осуществляя линеаризацию созданной модели, а также средства пакета Control System Toolbox системы Matlab, получим диаграммы логарифмических амплитудно- и фазо-частотных характеристик (ЛАЧХ и ЛФЧХ), диаграммы Найквиста, карты распределения нулей и полюсов, а также переходные характеристики динамической системы тележка - обратный маятник от входа $\mu(p)$ к выходам $s(p)$ и $\varphi(p)$. Указанные характеристики представлены на рис. 3 - рис. 6 соответственно.

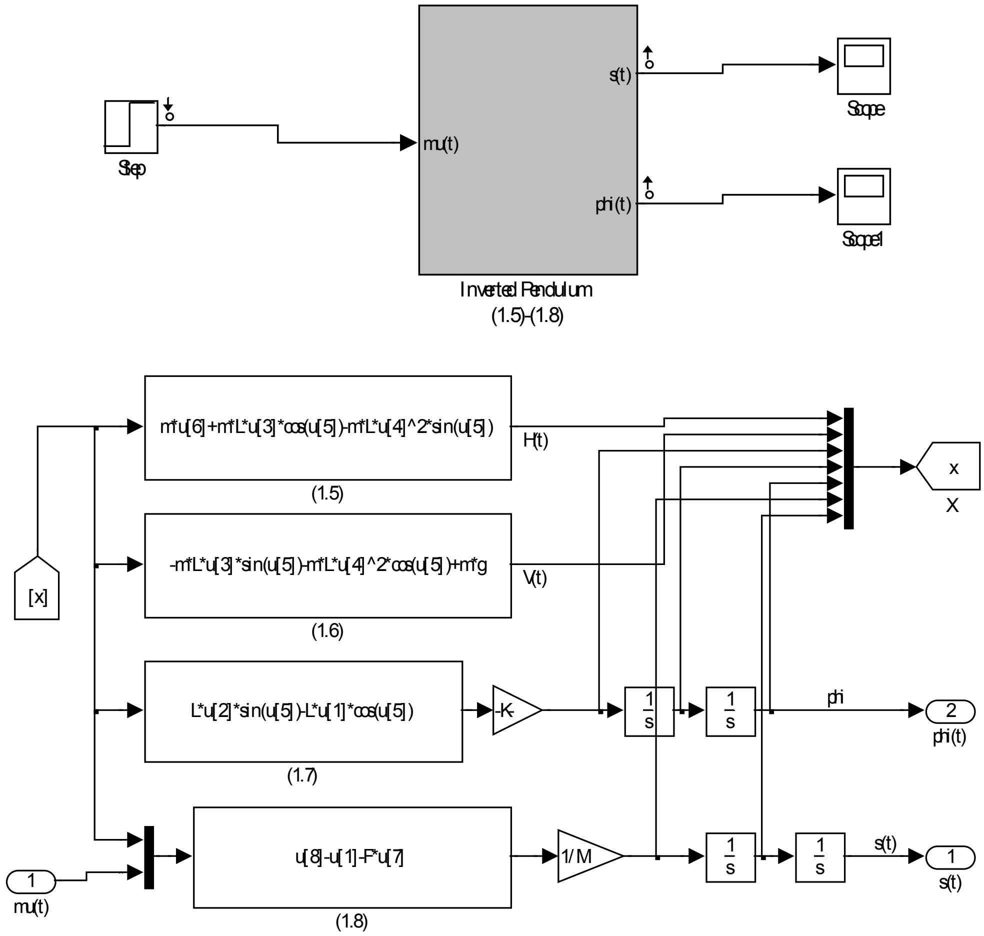


Рис. 2. Цифровая математическая модель
системы тележка - обратный маятник

Наличие правого полюса, отсутствие запасов устойчивости по амплитуде и фазе, а также расходящаяся переходная характеристика позволяют однозначно судить о том, что система тележка - перевёрнутый маятник как объект управления является неустойчивой.

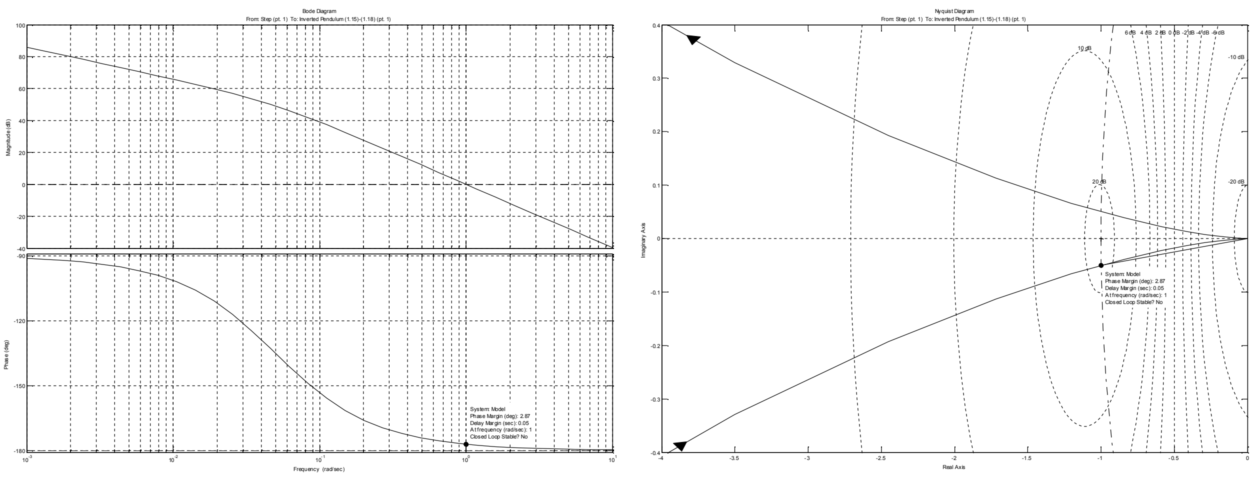


Рис. 3. ЛАЧХ, ЛФЧХ и диаграмма Найквиста системы по выходу s

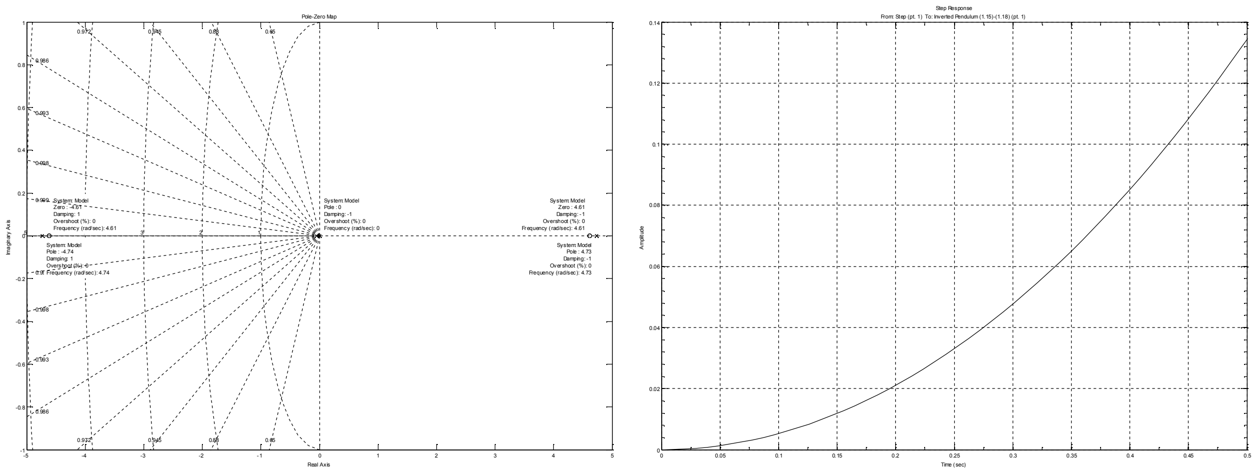


Рис. 4. Карта распределения корней и ПХ системы по выходу s

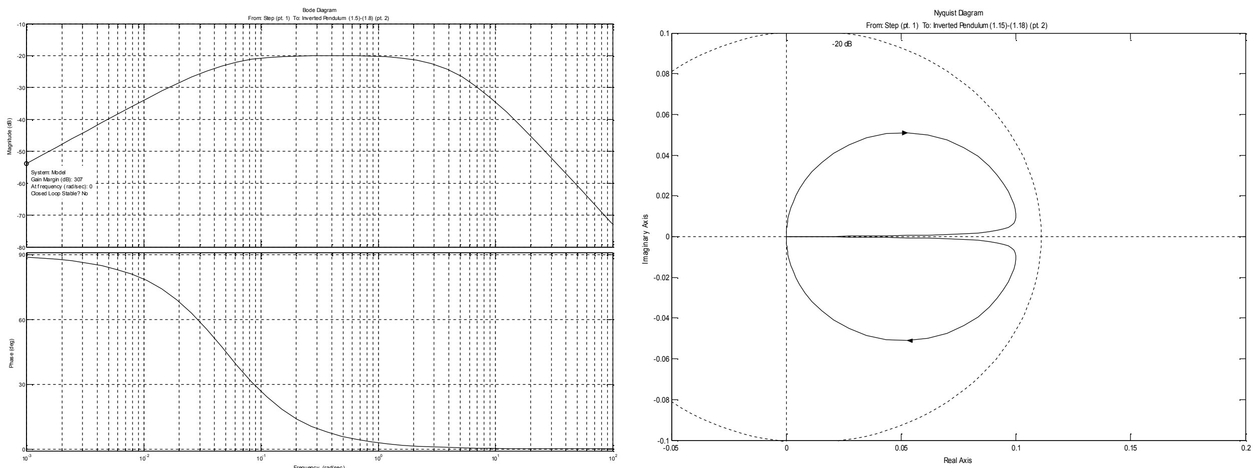


Рис. 5. ЛАЧХ, ЛФЧХ и диаграмма Найквиста системы по выходу φ

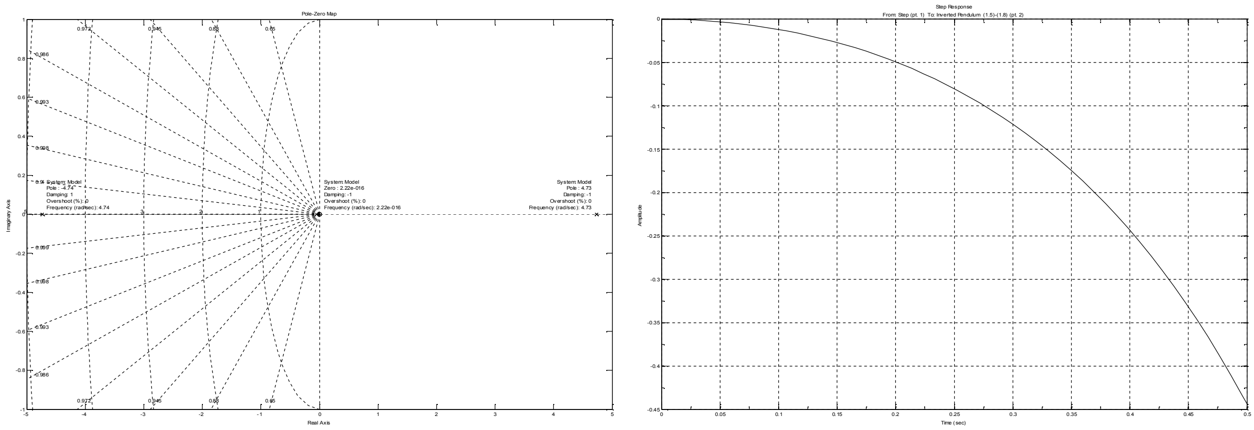


Рис. 6. Карта распределения корней и ПХ системы по выходу φ

Следует отметить, что если в качестве управляемых координат выбрать не компоненты вектора $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} s(p) + L'\varphi(p) \\ \dot{s}(p) + L'\dot{\varphi}(p) \\ s(p) \\ \dot{s}(p) \end{bmatrix}$ (см. (14)), а координаты вектора $\mathbf{x} = \left[s(p) \quad \dot{s}(p) \quad \varphi(p) \quad \dot{\varphi}(p)\right]^{T}$, как это делают большинство разработчиков систем регулирования, то это, во-первых, усложняет математическое описание линеаризованной системы

$$\begin{bmatrix} \dot{s}(p) \\ \ddot{s}(p) \\ \dot{\varphi}(p) \\ \ddot{\varphi}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\left(J + ml^2\right)b}{J\left(M+m\right) + Mml^2} & \dfrac{m^2gl^2}{J\left(M+m\right) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dfrac{-mlb}{J\left(M+m\right) + Mml^2} & \dfrac{mgl\left(M+m\right)}{J\left(M+m\right) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(p) \\ \dot{s}(p) \\ \varphi(p) \\ \dot{\varphi}(p) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{J + ml^2}{J\left(M+m\right) + Mml^2} \\ 0 \\ \dfrac{ml}{J\left(M+m\right) + Mml^2} \end{bmatrix} \mu(p)$$

и саму процедуру синтеза, основанную на этой модели, поскольку матрица $\mathbf{A}$ менее разрежена, и что не менее важно вектор управлений $\mathbf{b}$ имеет два ненулевых компонента; во-вторых, как это следует из «физики» внутренних процессов самой системы, стабилизация положения тележки s, а не положения центра масс маятника $\xi_1 = s + L'\varphi$ неизбежно приведёт к ухудшению качества переходных процессов внутренних координат, в том числе и угла отклонения маятника, вызывая их повышенную колебательность. Кроме того, сама процедура синтеза релейных алгоритмов управления, которые будут использованы в дальнейшем для стабилизации выбранных координат системы, вообще не разработана для систем, имеющих в векторе управлений $\mathbf{b}$ более одного ненулевого компонента.

Выводы. По результатам проделанной работы можно сказать, что:

1.Объектом управления САРП-ОМ и САРУ-ОМ является нелинейная нестационарная динамическая система тележка - обратный маятник.

2. Получены матричные дифференциальные уравнения и структурные схемы, описывающие движение перевёрнутого маятника. Эти уравнения являются исходными для структурного синтеза релейной САРП-ОМ и САРУ-ОМ.

3.Полученные распределения нулей и полюсов, диаграммы ЛАЧХ и ЛФЧХ, диаграммы Найквиста, а также переходные характеристики позволяют говорить о том, что исследуемая система без контуров регулирования как объект управления по обоим выходам является неустойчивой.

Литература.

1.Квакернаак Х, Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 653 с.

2.Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Управление роботами. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2000.

3.Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э. Системы управления движением колесных роботов. СПб: Наука. 2001.

4.Мирошник И.В., Никифоров В.О., Шиегин В.В. Управление движением кинематически избыточных манипуляционных роботов // Изв. РАН: Теория и системы управления. 2001. №1.