

## РАЗДЕЛ «ПРОКАТНОЕ ПРОИЗВОДСТВО»

УДК 621.771.01

ИЗМАЙЛОВА М.К., к.т.н, доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ  
ПРИ ПЛОСКОМ ТЕЧЕНИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА  
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*Розглянуто методику рішення задач обробки металів тиском при плоскому плинні металу з використанням методу кінцевих елементів. Заготівля розділена на кінцеве число чотирикутних елементів. Для рішення задачі використовується функціонал Лагранжа, заснований на методі штрафних функцій.*

*Рассмотрена методика решения задач обработки металлов давлением при плоском течении металла с использованием метода конечных элементов. Заготовка разделена на конечное число четырехугольных элементов. Для решения задачи используется функционал Лагранжа, основанный на методе штрафных функций.*

*The technique of the decision of tasks of processing of metals is considered by pressure at flat current of metal with use of a method of finite elements. Preparation is divided into finite number of quadrangular elements. For the decision of a task it is used Lagrange's functional, based on a method of penal functions.*

**Введение.** Метод конечных элементов (МКЭ) включает различные подходы, в которых для определения напряженно-деформированного состояния материал условно разбивают на отдельные элементы, соединенные в узловых точках. В настоящее время МКЭ находит все более широкое применение при исследовании процессов ОМД. При решении задач ОМД с помощью МКЭ наибольшее распространение получили два алгоритма, различающиеся по способу удовлетворения условию несжимаемости металла. В одном случае решение определяется из условия минимума функционала Лагранжа в сочетании с методом штрафных функций для удовлетворения условия несжимаемости, в другом – из условия стационарности функционала Маркова на полях скоростей течения и среднего гидростатического напряжения [1].

Целью работы является определение деформированного состояния при обработке металлов давлением с использованием метода конечных элементов.

**Постановка задачи.** Рассмотрим, для простоты изложения, применение метода конечных элементов для плоской задачи обработки металлов давлением. Представим, что заготовка в состоянии плоской деформации разделена на конечное число четырехугольных элементов. В случае изопараметрического четырехугольного элемента (рис.1) координаты Эклера-Декарта переходят в новую координатную систему  $\xi$  и  $\eta$  [2].

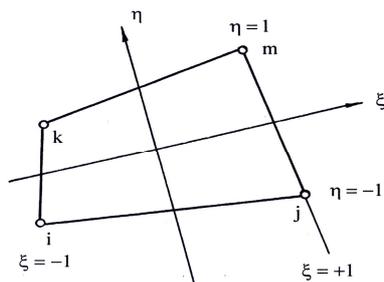


Рисунок 1 – Изопараметрический четырехугольник

Новые координаты выбраны так, что линии постоянных  $\xi$  и  $\eta$  являются прямыми в плоскости  $x - y$  и принимают значения  $\pm 1$  на сторонах четырехугольника. Интерполяционные формулы двух систем координат представляются двумя уравнениями с координатами четырех узлов  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$ ,  $(x_m, y_m)$ ,  $(x_k, y_k)$  по формулам:

$$x = N_i x_i + N_j x_j + N_m x_m + N_k x_k, \quad y = N_i y_i + N_j y_j + N_m y_m + N_k y_k, \quad (1)$$

где

$$N_i = (1 - \xi)(1 - \eta)/4; \quad N_j = (1 + \xi)(1 - \eta)/4; \quad N_m = (1 + \xi)(1 + \eta)/4; \quad N_k = (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \quad (2)$$

Те же формулы используются для определения компонент скорости элемента:

$$v_x = N_i v_{x_i} + N_j v_{x_j} + N_m v_{x_m} + N_k v_{x_k}, \quad v_y = N_i v_{y_i} + N_j v_{y_j} + N_m v_{y_m} + N_k v_{y_k}. \quad (3)$$

В матричной форме поле скоростей в элементе определяется формулой:

$$\{v\} = [N]\{V\}, \quad (4)$$

где функции формы  $[N]$  не зависят от декартовых координат  $x, y$ , а столбец  $\{V\}$  содержит узловые параметры элемента:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}; \quad [N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_k \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\{V\}^T = \{v_{x_i} \quad v_{y_i} \quad v_{x_j} \quad v_{y_j} \quad v_{x_m} \quad v_{y_m} \quad v_{x_k} \quad v_{y_k}\}. \quad (6)$$

Скорости деформации равны:

$$\{\xi\} = [B]\{V\} = [B_i \quad B_j \quad B_m \quad B_k]\{V\}, \quad (7)$$

$$\text{где } [B_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Производные функций формы  $\partial[N]/\partial x$ ,  $\partial[N]/\partial y$ , входящие в выражение (7), связаны с производными в системе координат  $\xi, \eta$  соотношениями

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [I]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix}, \quad [I] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}; \quad [I]^{-1} = \frac{1}{|I|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$|I| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Из (9)–(10) следует, что

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{|I|} \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right); \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{|I|} \left( -\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right). \quad (11)$$

После дифференцирования и соответствующих преобразований имеем:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{8|I|} \left[ (y_j - y_k) - (y_m - y_k)\xi - (y_j - y_m)\eta \right];$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{1}{8|I|} \left[ -(x_j - x_k) + (x_m - x_k)\xi + (x_j - x_m)\eta \right];$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{1}{8|I|} \left[ -(y_i - y_m) + (y_m - y_k)\xi + (y_i - y_k)\eta \right];$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial y} = \frac{1}{8|I|} \left[ (x_i - x_m) - (x_m - x_k)\xi - (x_i - x_k)\eta \right].$$

Производные  $\frac{\partial N_k}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial N_k}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial N_m}{\partial x}$  и  $\frac{\partial N_m}{\partial y}$  находятся аналогичным образом.

Введем обозначения:  $\frac{\partial N_i}{\partial x} = A_i$ ;  $\frac{\partial N_i}{\partial y} = C_i$ ; ...;  $y_{im} = y_i - y_m$ ; ...;  $x_{im} = x_i - x_m$ .

Тогда матрица [B] будет иметь вид [3]:

$$[B] = \begin{bmatrix} A_i & 0 & A_j & 0 & A_m & 0 & A_k & 0 \\ 0 & C_i & 0 & C_j & 0 & C_m & 0 & C_k \\ C_i & A_i & C_j & A_j & C_m & A_m & C_k & A_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

где

$$\begin{cases} A_i \\ A_j \\ A_m \\ A_k \end{cases} = \frac{1}{8|I|} \begin{cases} y_{jk} - y_{mk}\xi - y_{jm}\eta \\ -y_{im} + y_{mk}\xi + y_{ik}\eta \\ -y_{jk} + y_{ij}\xi - y_{ik}\eta \\ y_{im} - y_{ij}\xi + y_{jm}\eta \end{cases}; \quad \begin{cases} C_i \\ C_j \\ C_m \\ C_k \end{cases} = \frac{1}{8|I|} \begin{cases} -x_{jk} + x_{mk}\xi + x_{jm}\eta \\ x_{im} - x_{mk}\xi - x_{ik}\eta \\ x_{jm} - x_{ij}\xi + x_{jk}\eta \\ -x_{im} + x_{ij}\xi - x_{im}\eta \end{cases}; \quad (13)$$

$$|I| = \frac{1}{16} \left\{ \left[ (-y_{jm} + y_{ki}) + (y_{ij} + y_{mk})\xi \right] \times \left[ (-x_{ij} + x_{mk}) + (x_{ij} + x_{mk})\eta \right] - \right. \\ \left. - \left[ (-x_{jm} + x_{ki}) + (x_{ij} + x_{mk})\xi \right] \times \left[ (-y_{ij} + y_{mk}) + (y_{ij} + y_{mk})\eta \right] \right\}. \quad (14)$$

**Результаты работы.** Для решения задачи используем функционал, основанный на методе штрафных функций [1]:

$$J = \left( \iiint_V \frac{1}{2} \mu H^2 + t \xi_0^2 \right) dV - \int \sigma_\tau \nu_\tau dS, \quad (15)$$

где  $\mu$  – условная вязкость металла, определяемая по формуле  $\mu = T(H, \Lambda, \theta) / H$  ;  
 $T(H, \Lambda, \theta)$  – зависимость интенсивности касательных напряжений  $T$  от интенсивности скоростей деформации сдвига  $H$ , деформации сдвига  $\Lambda$  и температуры  $\theta$  (реологическая кривая материала);  
 $V$  – объем деформируемого тела;  
 $\xi$  – скорость относительного изменения объема;  
 $\sigma_\tau$  и  $\nu_\tau$  – напряжение трения и скорость скольжения металла по инструменту;  
 $t$  – штрафной коэффициент на невыполнение условия несжимаемости.

Среднее гидростатическое напряжение  $\sigma$  рассчитывается по асимптотической формуле

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow \infty} t \xi.$$

Из-за особенностей учета граничных условий в различных процессах ОМД рассмотрим функционал  $J$  в виде суммы двух функционалов  $J_1$  и  $J_2$  (соответственно первый и второй интегралы в выражении (15)) и ограничимся в данном случае получением матрицы жесткости для функционала  $J_1$ .

Минимизацию функционала можно выполнить, дифференцируя его по скоростям узлов каждого элемента.

Условия минимума записываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial V_{xn}} = \frac{\partial J_1}{\partial V_{xn}} + \frac{\partial J_2}{\partial V_{xn}} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial V_{yn}} = \frac{\partial J_1}{\partial V_{yn}} + \frac{\partial J_2}{\partial V_{yn}} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (16)$$

где  $n$  – номер соответствующего узла сетки.

Уравнения (16) можно записать в виде:

$$[K]\{v\} = \{f\}, \text{ или } ([K_1] + [K_2])\{v\} = \{f\}, \quad (17)$$

где  $[K_1]$  – матрица жесткости для функционала  $J_1$ .

Рассмотрим дискретную форму функционала  $J_1$ :

$$J_1 = \sum_{e=1}^N J^{(e)}, \quad (18)$$

где  $N$  – общее число элементов;

$e$  – номер текущего элемента;

$J^{(e)}$  – значение функционала, вычисленное на элементе  $e$ .

При численном интегрировании величина  $J^{(e)}$  определяется по формуле:

$$J^{(e)} = \sum_{p=1}^{\ell} \left( \frac{1}{2} \mu H^2 + t \xi_0^2 \right) / |I|, \quad (19)$$

где  $|I|$  – определить матрицы Якоби для данного элемента (e) в точке интегрирования p.

Определим вклад в матрицу жесткости  $[K_1]$  для отдельного элемента.

Из (7) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{xx} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{xi} + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_{xj} + \frac{\partial N_m}{\partial x} v_{xm} + \frac{\partial N_k}{\partial x} v_{xk}; \quad \xi_{yy} = \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{yi} + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_{yj} + \frac{\partial N_m}{\partial y} v_{ym} + \frac{\partial N_k}{\partial y} v_{yk}; \\ \xi_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} v_{xi} + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_{yi} + \frac{\partial N_j}{\partial y} v_{xj} + \frac{\partial N_j}{\partial x} v_{yj} + \frac{\partial N_m}{\partial y} v_{xm} + \frac{\partial N_m}{\partial x} v_{ym} + \frac{\partial N_k}{\partial y} v_{xk} + \frac{\partial N_k}{\partial x} v_{yk} \right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\text{Для плоской деформации} \quad H^2 = \frac{2}{3} \left[ (\xi_{xx} - \xi_{yy})^2 + \xi_{yy}^2 + \xi_{xx}^2 + 6 \xi_{xy}^2 \right].$$

Продифференцируем  $H^2$  по скоростям  $V_{xn}$  и  $V_{yn}$  узла n:

$$\frac{\partial H^2}{\partial V_{xn}} = \frac{4}{3} \left[ (\xi_{xx} - \xi_{yy}) \left( \frac{\partial \xi_{xx}}{\partial V_{xn}} - \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial V_{xn}} \right) + \xi_{yy} \cdot \frac{\partial \xi_{yy}}{\partial V_{xn}} + \xi_{xx} \cdot \frac{\partial \xi_{xx}}{\partial V_{xn}} + 6 \cdot \xi_{xy} \cdot \frac{\partial \xi_{xy}}{\partial V_{xn}} \right].$$

Учитывая, что  $\frac{\partial \xi_{xx}}{\partial V_{xn}} = \frac{\partial N_n}{\partial x}$ ;  $\frac{\partial \xi_{yy}}{\partial V_{xn}} = 0$ ;  $\frac{\partial \xi_{xy}}{\partial V_{xn}} = \frac{1}{2} \frac{\partial N_n}{\partial y}$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (H^2)}{\partial V_{xn}} &= \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xi} + \left( 2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yi} + \\ &+ \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xj} + \left( 2 \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yj} + \\ &+ \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xm} + \left( 2 \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{ym} + \\ &+ \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} + 2 \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xk} + \left( 2 \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yk}. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (H^2)}{\partial V_{yn}} &= \left( 2 \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xi} + \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} + 2 \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yi} + \\ &+ \left( 2 \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xj} + \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} + 2 \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yj} + \\ &+ \left( 2 \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xm} + \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} + 2 \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{ym} + \\ &+ \left( 2 \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} - \frac{4}{3} \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) v_{xk} + \left( \frac{8}{3} \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} + 2 \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) v_{yk}. \end{aligned} \quad (22)$$

Производные от  $\xi_0^2$  ( $\xi_0 = \xi_{xx} + \xi_{yy}$ ) по скоростям узлов имеют вид:

$$\frac{\partial \xi_0^2}{\partial V_{xn}} = 2(\xi_{xx} + \xi_{yy}) \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi_0^2}{\partial V_{yn}} = 2(\xi_{xx} + \xi_{yy}) \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y}, \quad (23)$$

где  $\xi_{xx}$  и  $\xi_{yy}$  определены в (20).

Вклад в матрицу жесткости  $[k_1^{(e)}]$  для отдельного элемента можно записать в соответствии с (19) в виде:

$$\left. \begin{aligned} k_{xixn} &= \sum_{p=1}^{\ell} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) + 2t \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right] \cdot |I|; \\ k_{xiyn} &= \sum_{p=1}^{\ell} \left[ \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right) + 2t \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right] \cdot |I|; \\ k_{yixn} &= \sum_{p=1}^{\ell} \left[ \mu \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) + 2t \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right] \cdot |I|; \\ k_{yiy n} &= \sum_{p=1}^{\ell} \left[ \mu \left( \frac{4}{3} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial x} \right) + 2t \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_n}{\partial y} \right] \cdot |I|, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $k_{xiyn}$  – коэффициент при скорости  $v_{xi}$  (скорость  $v_x$  в узле  $i$ ), полученный дифференцированием функционала  $J^{(e)}$  по скорости  $v_{yn}$  (скорости  $v_y$  узла  $n$ );  
 $p$  – номер точки интегрирования.

Матрица  $[k_1^{(e)}]$  – это квадратная матрица  $8 \times 8$ .

Первая строка получается дифференцированием  $J^{(e)}$  по скорости  $v_{xi}$ , вторая – по скорости  $v_{yi}$ , третья – по  $v_{xj}$  и, последняя – по  $v_{yk}$ .

Коэффициенты  $k_{xixn}, k_{yiyi}, k_{xjxj}, k_{yjyj}, k_{xmxm}, k_{ymym}, k_{xkxk}, k_{ykyk}$  располагаются по диагонали матрицы.

**Выводы.** Разработан алгоритм решения задач обработки металлов давлением при плоском течении металла с использованием метода конечных элементов. Получены формулы для определения деформированного состояния.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Данченко В.Н., Миленин А.А., Кузьменко В.И., Гриневич В.А. Компьютерное моделирование процессов обработки металлов давлением. Численные методы. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2005. – 448с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 392с.
3. Теория пластических деформаций металлов /Е.П. Унксов, У. Джонсон, В.Л. Колмогоров и др.: Под. ред. Е.П. Унксова, А.Г. Овчинникова. – М.: Машиностроение, 1983. – 598с.

Днепродзержинский государственный технический университет

**ВЛИЯНИЕ ОПЕРЕЖЕНИЯ НА КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ ПРИ  
КОНТАКТНО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТРЕНИЯ  
В ОЧАГЕ ДЕФОРМАЦИИ**

*У статті теоретично обґрунтована стійкість режиму холодної прокатки при однозонному ковзанні металу. Отримані рівняння, які дозволяють розробити технологію холодної прокатки з технологічними мастилами в умовах «негативного» випередження.*

*В статье теоретически обоснована устойчивость режима холодной прокатки при однозонном скольжении металла. Получены уравнения, позволяющие разработать технологию холодной прокатки с технологическими смазками в условиях «отрицательного» опережения.*

*In paper the stability of a cold rolling condition is theoretically justified at one-zonal slipping of metal. The equations permitting to develop a cold-rolling practice with technological lubrications in requirements of a "negative" advancing are obtained.*

**Введение.** Исследования, приведенные в работах [1, 2 и др.], показывают, что процесс холодной прокатки с эффективными технологическими смазками может протекать устойчиво, без частичных пробуксовок, при однозонном скольжении металла в очаге деформации. Этому способствует зависимость удельных сил трения от скорости скольжения и толщины слоя смазки. Как известно, прокатка без подпирającego действия сил трения ведется при минимальных энергозатратах [3], следовательно, изучение закономерностей прокатки при однозонном скольжении имеет четкую практическую направленность.

**Постановка задачи.** Проведен теоретический анализ напряженного состояния металла в очаге деформации с использованием гидродинамической модели трения, в условиях тяжело нагруженного контакта и тонкопленочной смазки. Методика расчета радиальных давлений при гидродинамическом режиме трения приведена в работах [4, 5 и др.] Уравнение распределения нормальных давлений, с учетом введенных нами параметра  $A$  и опережения  $S$ , имеет вид:

$$\frac{p_x}{\beta \sigma_T} = 1 + \ln \frac{h_x}{h_0} - A \sqrt{\frac{R}{h_1}} \left\{ (1-S) \left[ \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{h_x - h_1}{h_1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta h}{h_1}} \right] - (S+1) \left[ \frac{\sqrt{(h_x - h_1)h_1}}{h_x} - \frac{\sqrt{\Delta h h_1}}{h_0} \right] \right\}, \quad (1)$$

где  $p_x$  – текущее значение нормального давления по очагу деформации;

$\beta$  – угол трения;

$\sigma_T$  – предел текучести деформируемого металла;

$h_x$  – текущая высота образца по очагу деформации;

$h_0$  – высота образца на входе в очаг деформации;

$A$  – безразмерная величина;

$R$  – радиус валков;  
 $h_1$  – высота образца на выходе из очага деформации;  
 $\Delta h$  – абсолютное обжатие.

При прокатке наклепанных сталей и других труднодеформируемых сплавов динамическая вязкость смазки существенно зависит от давления и возможен её переход в твердое фазовое состояние. В таких условиях закон Барруса не отражает реального изменения реологии смазки под воздействием нагрузки. Поэтому в исследовании вязкость смазки выразили через другие известные в обработке давлением параметры, предполагая, что среднее значение удельной силы трения при ньютоновской и кулоновской моделях трения одинаковы.

Тогда:

$$t_{cp} = \frac{\eta_{cp} v_{ск.ср}}{\xi_{cp}} = f_{cp} P_{cp}$$

или

$$\eta_{cp} = \frac{f_{cp} P_{cp} \xi_{cp}}{v_{ск.ср}}, \quad (2)$$

где  $t_{cp}$  – средняя удельная сила трения в очаге деформации;  
 $\eta_{cp}$  – среднее значение динамической вязкости смазки в очаге деформации;  
 $v_{ск.ср}$  – средняя скорость скольжения металла в валках;  
 $\xi_{cp}$  – средняя толщина смазочной пленки;  
 $f_{cp}$  – среднее значение коэффициента трения в условиях гидродинамического трения;  
 $P_{cp}$  – среднее давление в очаге деформации.

Подставляя в закон трения Ньютона усредненное значение динамической вязкости, имеем:

$$\frac{t_x}{\beta \sigma_T} = \frac{f_{cp} P_{cp} \xi_{cp}}{v_{ск.ср} \beta \sigma_T} \cdot \frac{v_B - v_x}{\xi_x}, \quad (3)$$

где  $t_x$  – текущее значение удельной силы трения в очаге деформации;  
 $v_x, v_B$  – средняя скорость металла в текущем сечении очага деформации и линейная скорость поверхности валков, соответственно;  
 $\xi_x$  – текущее значение толщины слоя смазки в очаге деформации.

Учитывая, что  $v_x = v_1 \frac{h_x}{h_1}$ ;  $S = \frac{v_1}{v_B} - 1$ ;  $v_{ск.ср} = v_B \frac{\Delta h}{3h_1}$  и  $\frac{\xi_{cp}}{\xi_x} \approx 1$ ,

получаем

$$\frac{t_x}{\beta \sigma_T} = \frac{f_{cp} P_{cp}}{\beta \sigma_T} \cdot \frac{3h_1}{\Delta h} \cdot \left[ 1 - (1-S) \frac{h_x}{h_1} \right]. \quad (4)$$

Если обозначить

$$\frac{f_{cp} P_{cp}}{\beta \sigma_T} \cdot \frac{3h_1}{\Delta h} = A, \quad (5)$$

то окончательно имеем:

$$\frac{t_x}{\beta\sigma_T} = A \cdot \left[ 1 - (1-S) \frac{h_x}{h_1} \right]. \quad (6)$$

Подставляя значение (6) в дифференциальное уравнение Кармана и решая его, получили выражение (1). Заметим, что это уравнение получено с учетом граничного условия на входе в очаг деформации.

Из уравнения (1) с учетом граничного условия на выходе металла из валков (при  $h_x = h_1$  значение  $p_x = \beta\sigma_T$ ), найдем значение опережения в условиях холодной прокатки с эффективными технологическими смазками:

$$S = \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta h}{h_1}} - \frac{\sqrt{\Delta h \cdot h_1}}{h_0} - \frac{1}{A_1 \cdot \sqrt{\frac{R}{h_1}}} \cdot \ln \frac{h_0}{h_1}}{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\Delta h}{h_1}} + \frac{\sqrt{\Delta h \cdot h_1}}{h_0}}. \quad (7)$$

Задаваясь значением опережения металла, из уравнения (7) можно получить величину параметра А. Этот параметр определяет геометрические и силовые характеристики, при которых возможен процесс прокатки с заданным опережением.

Проанализируем распределение давления и удельных сил трения при однозонном очаге деформации. Пусть прокатка осуществляется в рабочих валках диаметром 200мм;  $h_0 = 1$  мм;  $h_1 = 0,64$  мм;  $\alpha_y = 0,06$  рад.

**Результаты работы.** Результаты исследования распределения контактных напряжений представлены графиками на рис.1. Обратим внимание на то, что ни в одном из сечений очага деформации при нулевом опережении относительное давление  $p_x/\beta\sigma_T$  не меньше единицы (рис.1а). Как известно, при  $S = 0$  и кулоновской модели трения давление практически по всей длине очага деформации гораздо меньше вынужденного предела текучести. На наш взгляд с энергетической точки зрения распределение нормального давления при ньютоновской модели трения является более реальным, так как с учетом потерь на трение среднее давление в контакте валков и полосы должно быть больше вынужденного предела текучести. Удельные силы трения во входном сечении очага деформации принимают максимальное значение, в выходном – равны нулю (рис.1б).

Кроме того, следует отметить, что при прокатке с нулевым опережением и гидродинамической моделью трения в очаге деформации отсутствуют продольные нормальные растягивающие напряжения.

На рис.1г, д показаны эпюры контактных напряжений при прокатке с однозонным скольжением металла в валках (опережение  $S = -0,02$ ). В этом случае на участке, примыкающем к выходу из очага деформации, нормальное давление  $p_x/\beta\sigma_T < 1$ . Заметим, что напряжение  $\sigma_x/\beta\sigma_T$  на этом участке является растягивающим. Хотя давление металла на валки при прокатке с «отрицательным» опережением несколько меньше, чем с нулевым, однако относительное среднее давление  $p_x/\beta\sigma_T > 1$ . Величину  $p_x/\beta\sigma_T$  определяли с помощью выражения

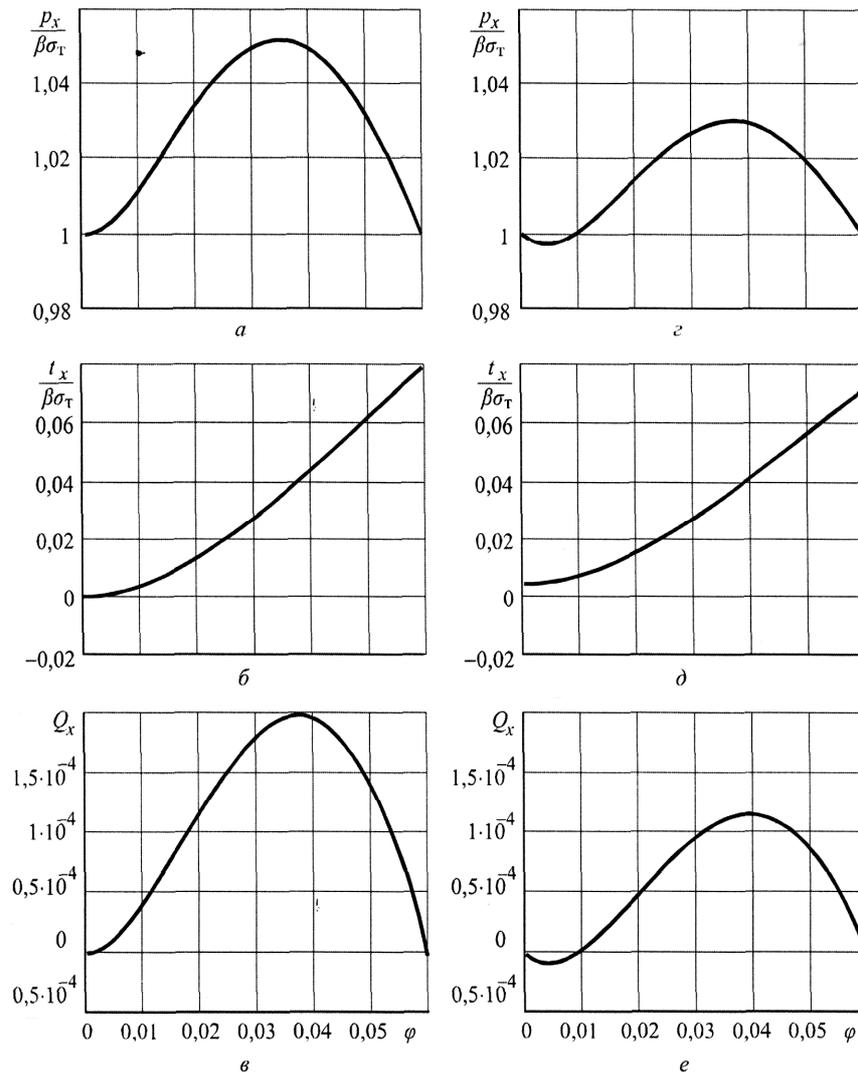
$$\frac{p_{cp}}{\beta\sigma_T} = \frac{1}{l_d} \int_0^\alpha \frac{p_x}{\beta\sigma_T} R d\varphi, \quad (8)$$

где  $l_d$  – длина очага деформации;  
 $\alpha$  – угол захвата;  
 $\varphi$  – текущий угол в очаге деформации.

Устойчивость процесса холодной прокатки со смазкой при однозонном скольжении металла можно объяснить, если проанализировать изменение текущей результирующей втягивающих и выталкивающих сил  $Q_x$  в зоне контакта полосы с валками:

$$Q_x = \int_{\varphi}^{\alpha} \frac{t_x \cos \varphi - p_x \sin \varphi}{\beta \sigma_T} d\varphi. \quad (9)$$

Изменение этой силы по длине очага деформации показано на графиках (рис. 1в,е).



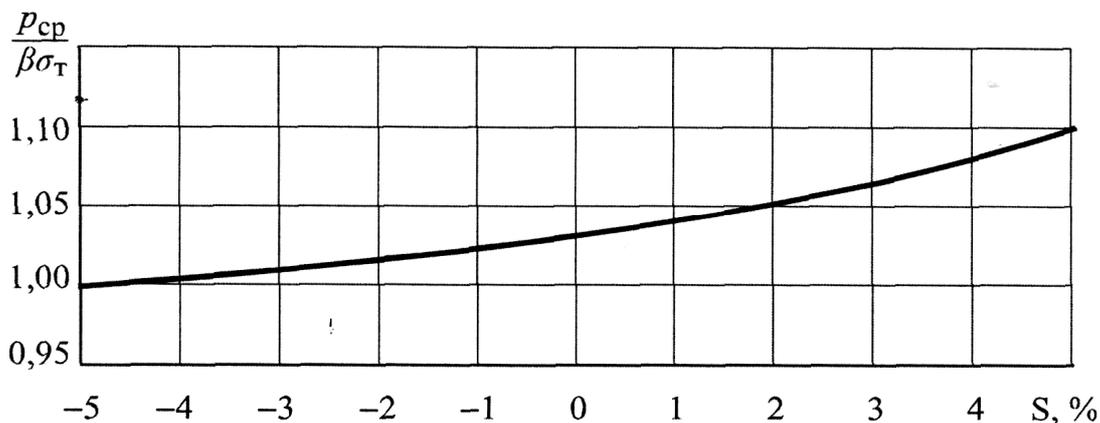
а, б, в –  $S = 0$ ; г, д, е –  $S = -2\%$

Рисунок 1 – Распределение контактных напряжений и интеграла разности их горизонтальных проекций по длине очага деформации

При нулевом опережении  $Q_x$  принимает положительное значение практически по всей длине очага деформации. Сравнивая это распределение текущей результирующей с аналогичными данными при кулоновской модели трения, необходимо отметить, что оно противоположное. При кулоновской модели и  $S = 0$  силы  $Q_x$  в сечении входа и выхода из очага деформации равны нулю, а в остальных сечениях отрицательны. Отсю-

да следует вывод, что при нулевом опережении и ньютоновской модели трения эти условия прокатки не являются предельными, так как практически по всей длине очага деформации силы  $Q_x$  направлены в сторону прокатки металла.

При «отрицательном» опережении сила  $Q_x$  на большей части зоны контакта является также положительной и только вблизи выхода металла из валков меняет своё направление. Поэтому и при опережении  $S = -0,02$  можно считать, что процесс прокатки будет протекать устойчиво. Этот факт подтверждается экспериментально.



$$h_0 = 1 \text{ мм}; \Delta h = 0,36 \text{ мм}; R = 100 \text{ мм}$$

Рисунок 2 – Зависимость давления от опережения

На рис.2 приведена зависимость среднего давления металла на валки от опережения при ньютоновской модели трения в очаге деформации. Из графика видно, что минимальные значения среднего давления возникают в области отрицательных значений опережения. Поэтому прокатку с небольшим отрицательным опережением (по абсолютной величине) можно рекомендовать для практического применения. При определении параметров такого процесса прокатки можно воспользоваться уравнением (7).

В заключение, обратим внимание на то, что если при прокатке с гидродинамическим режимом трения условие  $S = 0$  не является предельным для установившегося процесса, то, исходя из вышесказанного, эти условия по-видимому наступают при  $P_{ср} = \beta\sigma_T$ .

**Выводы.** Теоретически обоснована устойчивость режима холодной прокатки с технологической смазкой при однозонном скольжении металла.

Полученные уравнения могут быть рекомендованы для использования в расчетах технологических режимов прокатки в условиях отрицательного опережения с целью снижения энергозатрат.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов И.М., Белосевич В.К. К вопросу об отрицательном опережении при прокатке// Изв. вузов. Черная металлургия. 1961, №10. – С.46-49.
2. Грудев А.П. Захватывающая способность прокатных валков. – М: СП Интермет инжиниринг. – 1998. – 283с.
3. Грудев А.П. Теория прокатки. – М.: Металлургия. – 1988. – 346с.
4. Целиков А. И. Теория расчета усилий в прокатных станах. – М: Металлургиздат, 1962. – 494с.
5. Чекмарев А.П., Токарев В.А. Анализ формул для определения удельного давления металла на валки.// Труды института черной металлургии т. XV. Прокатное производство, 1961, №3. – С.16-45.

Днепродзержинский государственный технический университет

## СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА В ОБЛАСТИ ДЕФЕКТООБРАЗОВАНИЯ ПРИ СОРТОВОЙ ПРОКАТКЕ

*В статті зроблено огляд дослідницьких робіт в галузі дефектоутворення при прокатуванні. Виконано аналіз існуючих підходів до дослідження теорії виникнення і формозміни поверхневих дефектів.*

*В статье сделан обзор исследовательских работ в области дефектообразования при прокатке. Выполнен анализ существующих подходов к изучению теории образования и формоизменения поверхностных дефектов.*

*In the article is reviewed of research works in the field of a defect formation at rolling. The analysis of the existing approaches to analysis of the theory of formation and transformation of surface defects is executed.*

**Введение.** Качество готового проката определяется точностью геометрических размеров, параметрами структуры металла и качеством поверхности. Изучение дефектообразования позволяет получить информацию, необходимую для разработки технологии производства, применение которой повышает качество поверхности готового проката, уменьшает количество брака и затраты на отделку.

Дефекты образуются по различным причинам. Некоторые из них являются следствием дефектов исходного металла. Причиной образования других являются условия нагрева, настройка валков, состояние прокатной арматуры и течение металла в калибре.

**Постановка задачи.** Выполнить анализ существующего положения в области дефектообразования при производстве продукции методами обработки металлов давлением.

**Результаты работы.** Анализ публикаций, посвященных изучению дефектообразования, показал, что в настоящее время существуют два направления в исследованиях дефектообразования.

В первом случае занимаются исследованием влияния на дефектообразование параметров не связанных с деформацией, таких как: химический состав металла, его неоднородность, режим нагрева, время подачи раската на стан и др.

Во втором случае исследуют влияние на качество поверхности технологических параметров прокатки: вида калибровки, величины неравномерности деформации в калибре, режима обжатий и очередности кантовок. При этом ведутся работы двух типов. Во-первых, изучается влияние параметров прокатки на дефектообразование, с целью недопущения образования дефектов поверхности. Во-вторых, изучается формоизменение уже образовавшихся поверхностных дефектов, с целью определения таких режимов деформации, при которых вероятность выработки этих дефектов максимальна.

Примерами работ по изучению влияния на дефектообразование параметров не связанных с деформацией являются исследования Д.С.Качурина [1], Е.А.Мильмана [2] для случая прокатки высоких полос. В этих работах отмечается, что качество прокатаваемого металла, в первую очередь, зависит от технологии сталеплавильного производства, где зарождаются большинство металлургических дефектов. Более подробно описание дефектов сталеплавильного производства представлено в книге А.Н.Смирнова [3].

Существуют случаи, когда дефекты в исходном металле не обнаружены, но появляются на готовом прокате из-за перегрева металла [2]. Как показали исследования [1], устранение причин появления таких дефектов возможно при применении оптимальной технологии нагрева.

В некоторых случаях отмечается, что возникновение рванин в 70% случаев установлено присутствие неметаллических включений или газовых пузырей. Однако достаточно часто появление дефектов не связано с качеством исходного металла [2]. Например, установлено, что на возникновение дефектов сильное влияние оказывает локальное охлаждение отдельных участков полосы. В случае, когда угол блюмов (без поверхностных дефектов) перед задачей в клеть охлаждался водой в течение 4—4,5 с на всех прокатанных круглых осевых заготовках на охлажденном участке возникали рванины. Кроме этого, в работе [2] показано, что термические напряжения могут возникать не только в углах слитка, но и на любом участке поверхности, которая подвергалась локальному охлаждению.

Что касается изучения влияния параметров прокатки на дефектообразование, с целью недопущения образования дефектов поверхности, то такие работы проводили И.С.Кузнецов [4], Л.И.Шлейнинг [5]. В ходе этих исследований варьировались величины абсолютных обжатий на гладкой бочке и в ящичных калибрах, количество и очередность кантовок, максимальное отношение ширины раската к его высоте перед кантовкой. В результате было доказано, что изменение режима обжатий (в особенности очередности кантовок), может значительно улучшить качество поверхности блюма. Было показано [5], что для прокатки качественного металла режимы деформации следует разрабатывать для каждой марки стали отдельно.

Примерами исследований формоизменения уже имеющихся дефектов являются работы Ю.М.Чижикова [6], Г.Д.Дуплия [7], Ю.В.Зильберга [8], для случаев прокатки железнодорожных рельсов, холоднокатаных труб и сортовых профилей простого сечения.

Так в работе [6] была применена методика прокатки заготовок с искусственными дефектами различной глубины на поверхности в виде продольных трещин, расстояние между стенками которых незначительно. Было установлено, что интенсивность выработки дефектов зависит от неравномерности деформации по высоте полосы, глубины дефектов и места их расположения на контактной поверхности. В результате проведения исследований были получены формулы для определения степени выработки дефектов в процессе прокатки на гладкой бочке, в ящичных, фасонных и рельсовых калибрах.

Степень выработки поверхностного дефекта начальной глубиной  $S_0$  определяется как степень деформации дефектного слоя  $\varepsilon_{cl}$ . В большинстве случаев эта степень деформации не равна суммарной степени деформации  $\varepsilon_{\Sigma}$ .

$$S_{\Delta} = (S_0 - S) / S_0 = \varepsilon_{cl} = k_s \varepsilon_{\Sigma},$$

где  $S$  – глубина дефекта после деформации;

$k_s$  – эмпирический коэффициент.

Тогда глубина дефекта может быть определена по формуле:

$$S = S_0(1 - k_s \varepsilon_{\Sigma}).$$

Авторы считают, что коэффициент  $k_s$  учитывает неравномерность распределения обжатия по сечению полосы и зависит, следовательно, от всех тех факторов, которые определяют характер распределения деформации по сечению. Кроме того, они считают, что этот коэффициент учитывает начальную глубину дефекта и его положение на поверхности контакта. Для определения  $k_s$  были получены зависимости:

1. Гладкая бочка,  $l/H_{cp}=0,2 \div 0,5$ :

$$k_s = 1 + \frac{0,64}{\varepsilon_{\Sigma}} \{ e^{0,8y/B} [1,5 - 1,2(S_0 / H)^{0,2}] - 1 \},$$

где  $H, B$  – высота и ширина полосы до деформации;  
 $y$  – удаление дефекта от центра контактной поверхности.

2. Гладкая бочка,  $l/H_{cp}=0,6 \div 0,8$ :

$$k_s = 1 + \frac{1}{\varepsilon_\Sigma} (0,49 - 0,55e^{-\left[\left(\frac{y}{B}\right) \cdot \frac{1}{0,25+25S_0/H}\right]}).$$

3. Ящичный калибр  $H/B=4$ ,  $l/H_{cp}=0,2 \div 0,5$ :

$$k_s = 1 + \frac{0,63(1,03 - B/b_k)}{\varepsilon_\Sigma(1,22B/b_k - 1)},$$

где  $b_k$  – ширина калибра.

4. Рельсовые калибры:

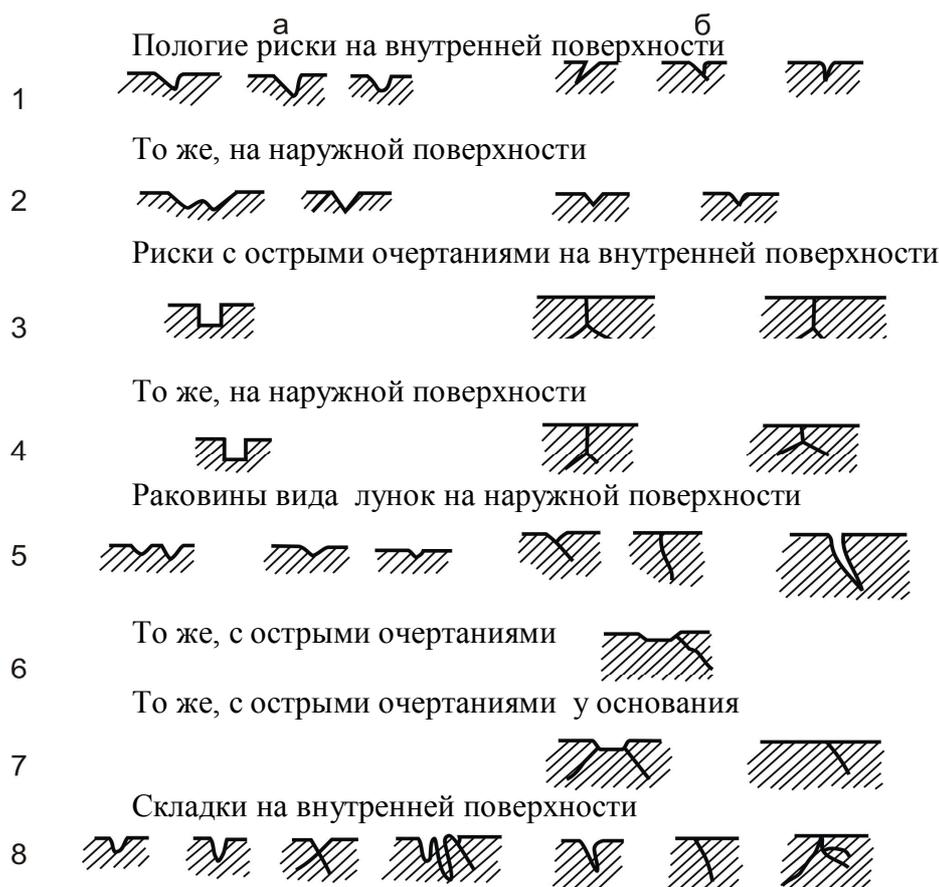
а) головка рельса

$$k_s = 0,53 + 0,19(S_0/H)^{-0,3};$$

б) подошва рельса

$$k_s = 1,4 + 2,2(S_0/H)^{0,8}.$$

Существуют исследования и для условий холодной деформации. Так, для случая холодной прокатки труб исследовалось формоизменение наиболее часто встречающихся дефектов типа рисок, раковин и складок [7]. Результаты исследований видоизменения дефектов разной формы в графическом виде представлены на рис. 1.



а – дефект до прокатки (в поперечном сечении); б – после прокатки  
 Рисунок 1 – Изменение характера и вида дефектов в процессе деформации при прокатке труб

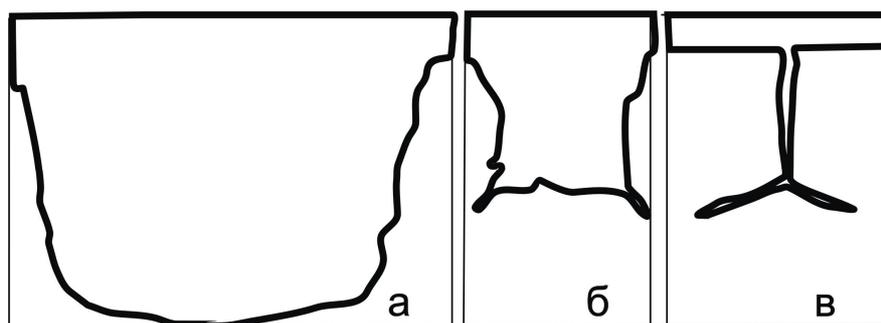
Различные условия формоизменения трубы в очаге деформации оценивали по изменению соотношения деформации по стенке и по диаметру  $\epsilon_t/\epsilon_d$ . По мере увеличения этого отношения (т.е. уменьшения  $\epsilon_d$ ) число знакопеременных сплюсчиваний трубы уменьшается. По мнению авторов, это способствует лучшим условиям раскатки дефектов.

Исследования показали, что риски прямоугольной формы на наружной и на внутренней поверхности (рис.2) видоизменяются в дефект типа трещины с разветвлением. При одинаковых исходных размерах ( $b/h$ ) и деформации в одинаковых условиях, риски на наружной поверхности раскатываются более интенсивно, чем на внутренней. Дефекты типа пологих раковин с просматриваемым дном на горячекатаной заготовке при соотношении деформации по стенке и диаметру  $\epsilon_t \geq \epsilon_d$ , как правило, уменьшаются, а при  $\epsilon_t < \epsilon_d$  становятся глубже, превращаясь в дефект вида трещины.

Применение маршрутов с увеличенными обжатиями по стенке позволило снизить брак по поверхностным дефектам с 5,07 до 2,73%.

Дефект типа раковин с острым очертанием дна в процессе прокатки превращается в дефект вида трещины с разветвлением в глубь сечения трубы, причем его первоначальная глубина может и уменьшаться и увеличиваться. Пологие риски с отношением ширины к глубине  $b/h \geq 1$  в процессе холодной деформации уменьшаются по глубине в 1,5-2 раза; риски с соотношением размеров  $b/h < 1$ , наоборот, углубляются.

Складки при холодной деформации не раскатываются и, как правило, превращаются в дефект типа трещин.



а – дефект на заготовке; б – начало образования трещины на рабочем конусе;  
в – закатанная риска на готовой трубе

Рисунок 2 – Видоизменение риски прямоугольной формы на наружной поверхности труб в процессе холодной прокатки

Приведенные данные, а так же результаты работы [6] показывают, что наличие полостей в приконтактных слоях полосы изменяет напряженно-деформированное состояние в этих объемах металла.

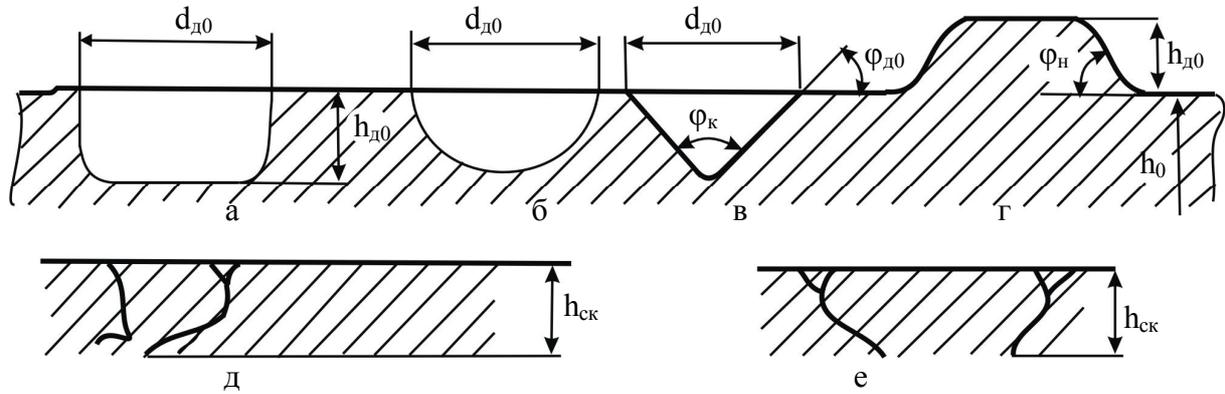
Исследования формоизменения дефектов в виде полостей, для случаев прокатки сортовых профилей простого сечения были проведены Ю.В.Зильбергом. Работы проводились как в лабораторных условиях, при прокатке свинцовых образцов, так и при горячей прокатке стали на промышленных станах [8]. На поверхность заготовки наносились дефекты в виде впадин, выступов и трещин (складок). Впадины имели форму цилиндров с плоским дном (рис.3, а), а так же углублений шаровых (рис.3, б) и конических (рис.3, в) с разными углами конусности  $\phi_k$ .

После прокатки определялись глубина и форма видоизменившихся дефектов. Единичными считались дефекты, местная деформация которых не влияет на трансформацию соседних. Эксперименты проводились в условиях, когда в очаге деформации

находился только один дефект[8]. Относительные размеры впадин характеризовали фактором формы дефекта:

$$\Phi_{д0} = \frac{d_{д0}}{h_{д0}},$$

где  $d_{д0}$  – минимальная исходная протяженность впадины;  
 $h_{д0}$  – начальная глубина дефекта.



а – прямоугольные (цилиндрические); б – шаровые; в – конические впадины;  
 г – выступы; д – складки; е – складки заката

Рисунок 3 – Искусственные дефекты перед прокаткой

Результатом работы Ю.В.Зильберга были эмпирические формулы для расчета глубины дефектов на готовом профиле. Например, максимальная глубина складки, возникающей при трансформации дефектов прямоугольного и шарового сечения, может быть приближенно определена с использованием выражения:

$$h_{ск}^{max} = h_{д0} h_{зап} / h_0,$$

где  $h_{зап}$  – высота полосы соответствующая степени деформации, при которой впадина заполняется металлом либо полностью исчезает при условии, что  $\phi_k > 120^0$ ;  
 $h_0$  – начальная толщина полосы.

Для складок конического сечения

$$h_{ск}^{max} = h_{д0} [1 - \exp(-0,275\varepsilon)] / \Phi_{д0},$$

где  $\varepsilon$  – относительное обжатие; при  $\Phi_{д0} \geq 4,0-4,5$  складки не образуются.

Исследования показали, что глубина складок, образованных при трансформации объемных дефектов, меньше половины высоты (глубины) исходного дефекта и уменьшается с ростом степени деформации. Подчеркивается, что дефекты, глубина которых на готовом профиле 3-5мм, не могут иметь прокатное (деформационное) происхождение. Отмечается, что для существенного уменьшения глубины дефектов по всему периметру профилей, прокатываемых в простых калибрах, необходимо чередовать кантовку раската на  $90^0$  и  $45^0$ . На рис.4 приведены результаты формоизменения дефектов конического и цилиндрического сечения.

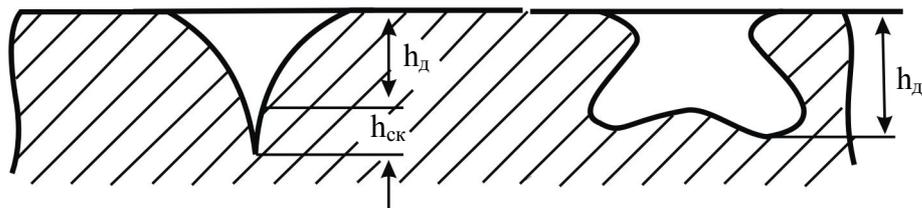


Рисунок 4 – Вид дефекта после формоизменения первоначально конических (I) и цилиндрических (II) впадин

**Выводы.** В настоящее время проведено большое количество работ, которые позволили выявить некоторые закономерности процесса образования и трансформации поверхностных дефектов. Установлен факт значительного влияния режимов деформации на вероятность образования поверхностных дефектов и их последующее видоизменение в ходе деформации.

Большинство исследований носит описательный характер, их результаты могут быть применены лишь в частных случаях прокатки конкретного профиля и конкретной марки стали. Некоторые исследования позволили установить математическую зависимость между параметрами технологии и параметрами поверхностных дефектов. Однако, эти исследования связывают параметры дефектообразования в большинстве случаев только с общей степенью деформации металла без учета особенностей течения металла для различных схем формоизменения и течения металла в области самих поверхностных дефектов.

Описанная ситуация затрудняет анализ процесса дефектообразования для исследованных схем деформации и делает практически невозможным научно обоснованный анализ дефектообразования для неисследованных вариантов деформирования.

Поэтому необходимо выполнение экспериментальных и теоретических исследований дефектообразования для выявления общих закономерностей образования и трансформации дефектов с учетом всех факторов, оказывающих влияние на течение металла в отдельных зонах очага деформации.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Качурин Д.С., Кобызев В.К. Пути повышения качества металла на Кузнецком металлургическом комбинате. Сталь. – 1967, №12. – С.1112-1115.
2. Мильман Е.А., Постольник Ю.С., Калюжный И.Ф., Литвиненко В.Н., Сафина О.А. Причины образования поверхностных дефектов при прокатке на блюминге. Сталь. – 1979, №2. – С.125-127.
3. Смирнов А.Н. Минаев А.А. Процессы непрерывной разливки. – Донецк. – 2002. – 396с.
4. Кузнецов И.С., Морозов С.И., Голубев В.М., Сафронов А.А., Сапрыкин В.А. Совершенствование технологии производства проката в обжимном цехе/ Сталь. – 1999. -№5. – С.50-53.
5. Шлейнинг Л.И., Савиных Н.Г. Влияние режимов прокатки сортовых слитков на качество поверхности блюмов/ Сталь. – 1995. – №10. – С.45-46.
6. Чижиков Ю. М., Кондрашин С. Е. Влияние формы и размеров исходного слитка на качество поверхности железнодорожных рельсов/ Сталь. – 1972, 11. – С.1009-1111.
7. Дуплий Г.Д., Вильямс О.С., Хаустов Г.И. Видоизменение дефектов горячекатаных труб в результате холодной деформации/ Сталь. – 1972, №2. – С.151-153.
8. Зильберг Ю.В. Исследование закономерностей формоизменения поверхностных дефектов при прокатке/ Сталь. – 1997. – №10. – С.44-46.
9. Зильберг Ю.В., Гнездилов Б.В. Сталь. – 1984. – №9. – С.59-61.

Днепродзержинский государственный технический университет

**МЕТОД РАСЧЕТА РАЗГОННО-РАЗРЕЗНЫХ КАЛИБРОВ**

*У статті описано метод розрахунку разгінно-розрізного калібру, який застосовується при прокатуванні листових профілів з потовщенням по краях.*

*В статье описан метод расчета разгонно-разрезного калибра, применяемого при прокатке листовых профилей с утолщением по краям.*

*There is the account method of calibre for expansion and cutting used at rolling of strip profiles with a thickening on edges is described in article.*

**Введение.** Прокатка фасонных профилей спецназначения началась с начала прошлого столетия. Это были в основном профили, которые применялись в строительстве при сооружении промышленных и жилых зданий. И только с начала 50-х годов фасонные профили спецназначения начали применять в машиностроении. Важное значение при прокатке профилей спецназначения на станах с малым количеством клетей имеет правильный расчет формоизменения металла в первом формообразующем калибре.

**Постановка задачи.** Полосовые профили с утолщениями по краям (рис.1) широко применяют в автомобильной промышленности при изготовлении звеньев дверных и кузовных петель, распорных колец колес автомобилей и обычно прокатывают в сдвоенном виде. В отдельных случаях профили этой группы симметричны относительно обеих осей (вертикальной и горизонтальной). Утолщения на профилях для деталей с шарнирами имеют преимущественно круглую форму или же близкую к ней.

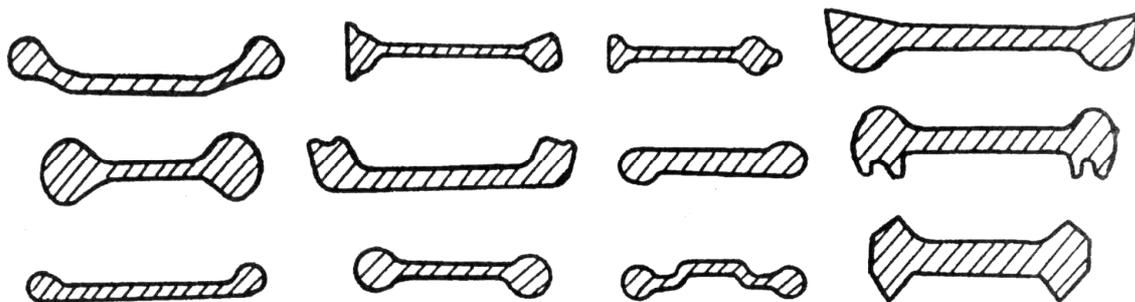


Рисунок 1 – Сортамент листовых профилей с круглыми утолщениями по краям и вертикальной осью симметрии

При прокатке в сдвоенном виде обеспечивается симметрия профиля (калибров) относительно вертикальной оси и значительно упрощается технология прокатки. Исключается изгиб полос при прокатке и, особенно, при охлаждении на холодильнике.

Для получения точного листового профиля с утолщениями по краям за малое число проходов и при использовании заготовок круглого сечения необходимо, в первую очередь, правильно определить конфигурацию и размеры первого разгонно-разрезного калибра.

**Результаты работы.** При прокатке фасонных спецпрофилей малотоннажными партиями на малоклетевых станах важное значение имеет правильное заполнение металлом первого разрезного калибра.

Размеры и конфигурация полосы, которая должна поступать из первого разрезного калибра, определяются при расчете калибровки спецпрофиля, которая производится, как правило, против хода прокатки.

После определения размеров чистового и промежуточных калибров при расчете калибровки полосового профиля с утолщениями по краям рассчитываем конфигурацию и построочные размеры разгонно-разрезного калибра (рис.2) по формулам [1]:

$$\begin{aligned} b_i &= (1,02 \dots 1,06) b_{i-1}; & B_{\text{кн}} &= b_n + 2 (h_n + 2 \dots 5) \operatorname{tg} \psi_n; \\ N &= Q = (0,55 \dots 0,58) b; & b_{\Gamma} &= (0,33 \dots 0,41) N; \\ h_{\Gamma} &= 0,5 (N - b_{\Gamma}) \operatorname{tg} \alpha; & h_3 &= h_{\Gamma} + t_n - h; \\ r_1 &= 5 \dots 10 \text{ мм}; & R &= 8 \dots 15 \text{ мм}; & r_2 &= 3 \dots 7 \text{ мм}, \end{aligned} \quad (1)$$

при этом, чем больше размер профиля, тем больше значения радиусов.

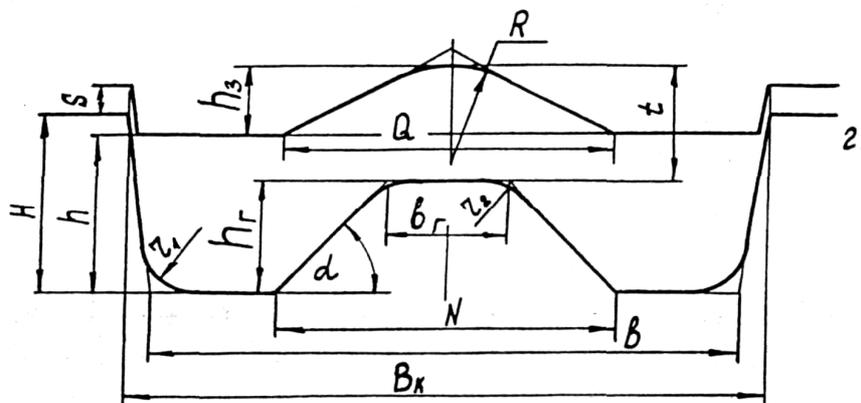


Рисунок 2 – Конфигурация разгонно-разрезного калибра

После определения построочных размеров калибра рассчитывается диаметр исходной круглой заготовки по следующей формуле [1]:

$$\frac{d}{B_0} = 0,973 - 0,117 \frac{d}{t} + 0,014 \frac{d}{b_{\Gamma}} - 0,002 \frac{d}{D}. \quad (2)$$

Решая уравнение (2) относительно  $d$ , получаем зависимость для окончательного определения диаметра исходной заготовки:

$$d = \frac{0,973}{\frac{1}{B_0} + \frac{0,117}{t} + \frac{0,014}{b_{\Gamma}} + \frac{0,002}{D}}, \quad (3)$$

где  $B_0$  – ширина разрезного калибра по дну;  
 $t$  – толщина полотна полосы в разрезном калибре;  
 $b_{\Gamma}$  – ширина верхней площадки разрезающего гребня;  
 $D$  – диаметр валков.

После определения диаметра исходной заготовки рассчитывается уширение  $\Delta b$  и  $h_{\text{пр}}$  по формулам:

$$\Delta b = \left( 0,548 + 0,829 \frac{\Delta t}{d} - 0,034 \frac{d}{b_{\Gamma}} - 1,424 \frac{d}{D} \right) \Delta t; \quad (4)$$

$$h_{\text{пр}} = 3,139 + 25,578 \frac{\Delta t}{d} - 0,943 \frac{D}{d} + 0,252 \frac{d}{b_u}, \quad (5)$$

где  $\Delta t$  – абсолютное обжатие по полотну в разрезном калибре.

Рассчитывается ширина полосы:

$$B_{\Pi} = d + \Delta b. \quad (6)$$

Проверяется заполнение калибра по ширине и высоте. Если  $B_{\Pi} < B_0$ , а  $h_{\Pi\Gamma} < h_{\Gamma}$ , необходимо размер заготовки увеличить и снова рассчитать уширение  $\Delta b$  и  $h_{\Pi\Gamma}$  и проверить заполнение калибра. Окончательные размеры исходной заготовки принимаются при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} B_0 < B_{\Pi} < B_K; \\ h_{\Pi\Gamma} \geq h_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (7)$$

Исходя из геометрических соображений (рис.3,а), получаем формулу для расчета площади калибра:

$$F_K = (B_0 + h_2 \operatorname{tg} \psi) h_2 + 0,5 [Qh_3 - (N + b_{\Gamma}) h_{\Gamma}] \quad (8)$$

Если в процессе расчета заполнения калибра по ширине или при проведении прокатки установлено, что калибр по ширине заполняется не полностью, то необходимо вместо ширины калибра по дну  $B_0$  принимать действительную ширину полосы.

Рассчитывается коэффициент вытяжки:

$$\lambda = \frac{F_{\text{заг}}}{F_K}, \quad (9)$$

где  $F_{\text{заг}} = 0,785d^2$  – площадь исходной заготовки круглого сечения;

$F_K$  – площадь калибра или полосы, определяемая по формуле (8).

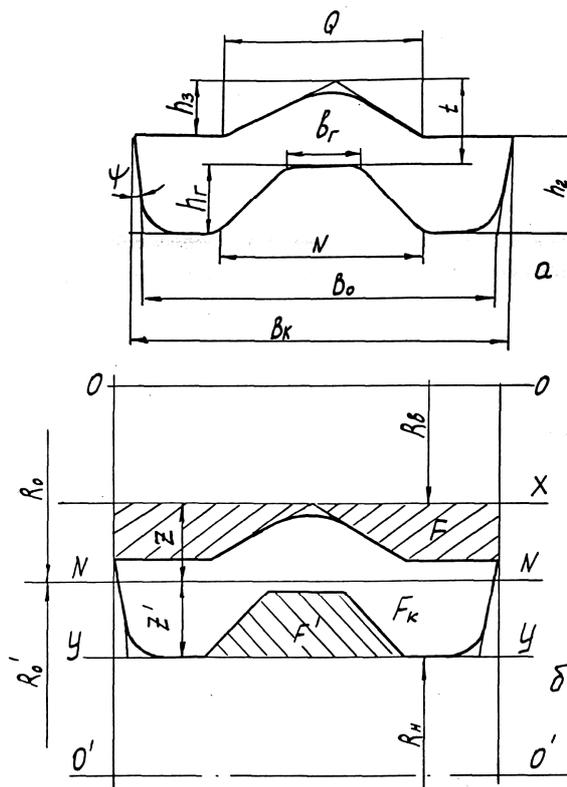


Рисунок 3 – Схема к расчету площади (а) и расположения нейтральной линии (б) калибра

Нейтральную линию калибра можно определять по методу Старченко Д.И. [2], которую определяют из условия равенства средних окружных скоростей по ручьям верхнего и нижнего валков. Проведя горизонтальные линии  $x-x$  и  $y-y$  через крайние

выступающие верхние и нижние точки калибра по высоте (рис.3,б), определяем расстояние от них до нейтральной линии калибра:

$$z = \frac{F + 0,5 F_K}{B_K}; \quad z' = \frac{F' + 0,5 F_K}{B_K}, \quad (10)$$

где  $F$  и  $F'$  – площади, ограниченные осями  $x-x$  и  $y-y$  и контуром калибра;

$F_K$  – площадь калибра, определяемая по формуле (8);

$z$  и  $z'$  – расстояние от вершин калибра до нейтральной линии калибра.

По конфигурации калибра судят, какую площадь удобнее определять: верхнюю  $F$  или нижнюю  $F'$ .

Нижнюю площадь, ограниченную осями  $y-y$  и контуром калибра, определяем по формуле:

$$F' = 0,5 (N + b_r) h_3 + (B_K - B_0) h_2. \quad (11)$$

Верхнюю площадь, ограниченную осью  $x-x$  и контуром калибра, рассчитываем по формуле:

$$F = h_3 [0,5 Q + (B_K - Q)] \quad (12)$$

Средние катающие радиусы верхнего и нижнего ручьев рассчитываются по формулам:

$$R_{КВ} = R_0 - z + \frac{F}{B_K}; \quad R_{КН} = R_0 - z' + \frac{F'}{B_K}. \quad (13)$$

Рассчитывается угол захвата по формуле:

$$\alpha_3 = \arccos \left( 1 - \frac{\Delta h}{2R_K} \right). \quad (14)$$

Усилие прокатки и крутящий момент рассчитываются по любому из известных методов [3] и сравниваются с допустимыми значениями.

Если при расчете усилия прокатки и крутящего момента будет установлено, что их значения превышают допустимые значения, необходимо выполнить перерасчет калибровки профиля с целью изменения схемы прокатки.

**Выводы.** Применение метода расчета разгонно-разрезных калибров позволит сократить количество пробных прокаток и тем самым повысить производительность станов при освоении новых фасонных спецпрофилей.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вихрев Н.А., Есипов В.Д., Капелюшный В.П. и др. Унифицированный разрезной калибр для прокатки круглых заготовок. – Сталь. – 1986. – №7. – С.75-77.
2. Старченко Д.И. Развернутая калибровка фасонных профилей. – М.: Металлургиздат, 1952. – 248с.
3. Целиков А.И., Никитин Г.С., Рокотян С.Е. Теория продольной прокатки. Справочник. – М.: Металлургия, 1982. – 335с.

Днепродзержинский государственный технический университет

## ЗАДАЧА КОШИ: ПРИБЛИЖЕННОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Для задачі Коші при наближеному аналітичному моделюванні встановлено, що за методом Ейлера можна отримати практичну оцінку похибки розв'язку, якщо використовувати інверсне перетворення і початкові умови.*

*Для задачи Коши при приближенном аналитическом моделировании установлено, что по методу Эйлера можно получить практическую оценку погрешности решения, если использовать инверсное преобразование и начальные условия.*

*For Cauchy's problem at the approached analytical modeling is established, that on a method Euler it is possible to receive a practical estimation of an error of the decision if to use inverse transformation and initial conditions.*

**Введение.** Одной из ведущих тенденций развития науки и техники в последние десятилетия была их математизация, обусловленная многовариантностью анализа принимаемых решений и предполагающая компьютерное моделирование[1]. В большинстве случаев научной основой принимаемых решений является математическая модель и аналитическое моделирование. Возникает потребность активного и широкого применения результатов различных разделов математики, как самых современных, так и, казалось бы, давно изученных. Для того чтобы математизация и компьютеризация инженерной деятельности проводились эффективно, необходимо усиливать творческую составляющую процесса. Представляется целесообразным применить методы активизации мышления в процессе математического моделирования.

**Постановка задачи.** Предлагаемый подход иллюстрируется модификацией численных методов решения. При исследовании многих процессов и явлений природы и техники математические модели приводят к необходимости решения задачи Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y); \\ y(a) = y_0; \quad x \in [a; b] \end{cases}$$

При использовании традиционного подхода приближенные значения  $y_k$  решения уравнения получаются в табличном виде по формуле

$$y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \cdot h,$$

где  $h$  – шаг интегрирования, производимого «вперед», от точки с меньшей абсциссой  $x_0 = a$  к точке с большей абсциссой  $x_n = b$ . Однако при таком подходе для оценки погрешности решения необходимо проводить дополнительное аналитическое исследование, доказывать теорему[2]. Представляется интересным и результативным совместить решение задачи с исследованием погрешности, получить практические оценки точности.

Аналогично ставится задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}); \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0; \quad x \in [a; b], \end{cases}$$

где  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}'$ ,  $\bar{f}$  –  $n$ -мерные вектор-функции.

С помощью введения новых неизвестных в задаче Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений можно свести к ней соответствующие задачи для уравнений высших порядков. Получение практических оценок точности решения задачи для системы или уравнения второго и выше порядков не менее актуально.

При получении оценок точности представляется целесообразным применить активизацию творческого мышления. Известны различные методики активизации творческой деятельности человека: мозговой штурм, синектика, метод фокальных объектов, метод контрольных вопросов, ТРИЗ и т.д. [3]. С учетом специфики решения математических задач, вслед за Д. Пойа, предлагается использовать метод контрольных вопросов.

**Результаты работы.** В списке контрольных вопросов А. Осборна имеется вопрос об инверсном преобразовании объекта. При решении дифференциальных уравнений такое преобразование используется в форме изменения направления интегрирования ( $x_n = b \rightarrow x_0 = a$ ). В результате выкладки выполняются по формуле

$$y_{k-1} = y_k - f(x_k, y_k) \cdot h,$$

причем производится переход от точек с большей абсциссой к точкам с меньшей абсциссой [4]. Преимущество сочетания прямого и обратного хода метода Эйлера заключается в том, что, вернувшись в исходную точку, и, сравнивая найденное значение с начальным условием, получаем оценку точности решения  $\Delta$ .

В качестве тестовых, с помощью ПК были решены две задачи:

**первая:**  $y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$ ;  $y(1) = 0$  с шагом  $h = 0,001$ . При инверсии получили  $y^*(1) = -0,0012$   $\Delta = |y(x_0) - y^*(x_0)| \approx 0,001$ ;

**вторая:**  $y' - y + x = 0$ ;  $y(0) = 2$  с шагом  $h = 0,002$ . При обратном ходе имеем  $y^*(0) = 1,9960$ ,  $\Delta \approx 0,004$ . Погрешность решений  $\Delta = O(h)$  и оценка совпадает с известной оценкой [2], но получена непосредственно.

Далее рассматривается модификация численных методов решения задачи Коши для дифференциальных уравнений высших порядков и их систем. В векторной форме задача приводится к виду:

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(x, \bar{y}); \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0; x \in [a; b] \end{cases}$$

где  $\bar{y}$ ,  $\bar{y}'$ ,  $\bar{f}$  –  $n$ -мерные векторы.

По методу Эйлера приближения решения задачи получаются в табличном виде по формуле:

$$\bar{y}_k = \bar{y}_{k-1} + h \cdot \bar{f}(x_{k-1}, \bar{y}_{k-1}),$$

где  $h$  – шаг интегрирования, производимого «вперед», от точки с меньшей абсциссой  $x_0 = a$  к точке с большей абсциссой  $x_n = b$ . Однако при таком подходе для оценки погрешности решения необходимо проводить дополнительное аналитическое исследование [2]. Предлагается также совместить решение задачи с исследованием погрешности, получить практические оценки точности.

В результате инверсного преобразования направления интегрирования в процессе решения задачи приходим к формуле

$$\bar{y}_{k-1} = \bar{y}_k - h \cdot \bar{f}(x_k, \bar{y}_k),$$

причем переходим от точек с большей абсциссой к точкам с меньшей координатой ( $x_n = b \rightarrow x_0 = a$ ). Преимущество сочетания прямого и обратного хода численного метода заключается в том, что, вернувшись в исходную точку и, сравнивая найденное значение с начальным условием, получим оценку точности решения в сравнении с шагом интегрирования. В качестве тестовых с помощью ПК были решены задачи Коши для дифференциальных уравнений второго порядка, систем дифференциальных уравнений. Погрешность решений  $\Delta = O(h)$  и оценка совпадает с известной теоретической оценкой[2], но получена непосредственно.

Предлагаемое приближенное аналитическое моделирование протестировано при решении прикладных задач механики, например, анализа процессов обработки давлением. Анализируется применение приближенного аналитического моделирования процесса волочения прутка круглого сечения через коническую волоку. Для нахождения усредненного по поперечному сечению осевого напряжения  $q(s)$  решается задача Коши[5]:

$$\frac{dq}{ds} + (\alpha + m)q = 1 + \alpha;$$

$$q(0) = 0.$$

Известно точное решение этой задачи:  $q(s) = \frac{1+\alpha}{m+\alpha} \cdot (1 - e^{-(m+\alpha)s})$ . Для оценки погрешности решения задачи Коши методом Эйлера она решалась интегрированием в прямом направлении и в обратном. Результаты сопоставления с точным решением представлены в табл.1 и на рис.1 ( $\alpha = 1,1$ ,  $m = 0,5$ ).

Таблица 1 – Данные для сравнения точного и приближенных решений

S	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
q прямое	0,0000	0,3595	0,6205	0,8100	0,9476	1,0475	1,1201	1,1728
q инверсное	0,0003	0,3596	0,6206	0,8101	0,9476	1,0476	1,1201	1,1728
q точное	0,0000	0,3594	0,6204	0,8100	0,9476	1,0475	1,1201	1,1728

Для того, чтобы наглядно изобразить соответствие между точным и приближенными решениями задачи Коши построены эпюры продольного напряжения по длине канала волоки. Чтобы сделать разность в значениях заметной, на рис.1 шаг интегрирования увеличен ( $y_k$  – прямое приближенное решение,  $v(t)$  – инверсное приближенное решение,  $y^1(t)$  – точное решение).

Уменьшая шаг разбиения  $h$ , можно добиться, чтобы кривые на рисунке слились в одну линию, то есть результаты расчетов практически совпадут. В рамках инженерного подхода к точности решений устанавливается не только ее повышение в результате дробления шага, но и допустимость применения предложенных практических оценок.

**Выводы.** Применение контрольных вопросов и других методик в процессе решения математических и технических задач способствует активизации творческой деятельности и получению новых результатов. Большая полнота и практичность полученных результатов усиливают их обоснованность и адекватность, как для математики, так и для ее приложений в механике и технике. В частности, использование инверсного преобразования пошагового решения задачи Коши с возвращением к начальным условиям, позволяет получить практическую оценку погрешности, продолжив процесс решения и не доказывая теорем. Такая оценка погрешности решения задачи Коши может оказаться целесообразной в инженерных исследованиях движения тел и механических систем, процессов обработки металлов давлением.

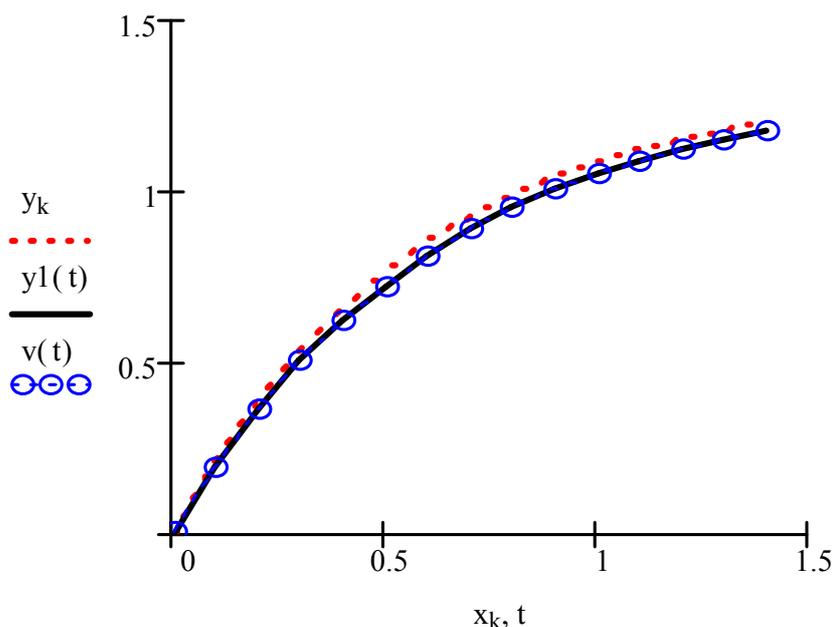


Рисунок 1 – Продольные напряжения по точному и приближенным решениям

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука. – 1997. – 320с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т.2. 12 – е изд. М.: Наука, 1978. – 576с.
3. Чус А.В., Данченко В.Н. Основы технического творчества. – К.: Вища школа, 1983. – 184с.
4. Никулин А.В., Никулин А.А. Активизация творческой составляющей обучения в курсе высшей математики/ Третя міжнародна науково – практична конференція Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: Тези доповідей. Дніпропетровськ: Вид – во ДНУ. – 2005. – С.125-126.
5. Гун Г.Я. Теоретические основы обработки металлов давлением. М.: Metallurgy, 1980. – 456с.