

РОЗДІЛ «МЕХАНІКА ДЕФОРМОВАНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА, МЕХАНІКА РІДИНИ, ГАЗУ ТА ПЛАЗМИ»

УДК 539.3

GALISHIN A.Z.¹⁾
STEBLYANKO P.A.²⁾
SHEVCHENKO Yu.N.¹⁾

¹⁾S.Timoshenko Institute of Mechanics of Ukrainian Academy of Sciences, Kiev
²⁾Dneprodzerzhinsk State Technical University

THERMAL STRESS-STRAIN STATE OF THIN LAMINATED SHELLS OF REVOLUTION UNDER CONVECTIVE HEAT EXCHANGE WITH THE ENVIRONMENT

1 Formulation of the Problem

The thin stratified shells of rotation are examined. At the intensive heating in initial moments of time in these constructions there are large gradients temperatures that can cause the origin of flowages. For the estimation of durability of constructions it is necessary most exactly to determine arising up in them distribution of temperature in time.

Considered thin layered shell, for which the hypothesis of linear element for the entire package of layers [1]. As the governing equations used the ratio of non-isothermal deformation processes along the trajectories of small curvature. [2] Deviatoric strain components are represented as the sum of elastic and plastic components. The former are determined by Hooke's law. Components of plastic components are defined as the sum of increments for all stages of loading

$$e_{ij}^n = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^n ; \quad \Delta_k e_{ij}^n = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma_n ,$$

where S – intensity of tangential stresses; the angle brackets denote averaging over the second stage; $\Delta_k \Gamma_n$ – the increment of accumulated plastic component of the intensity of shear strain, which is determined by the instantaneous thermomechanical surface [2]. Problems thermoplasticity at each stage of loading is reduced to the integration of a system of ordinary differential equations.

In a lecture methodology of decision of axisymmetrical non-stationary task of heat conductivity is expounded for thin shells with the layers of variable thickness, thermophysical properties of that depend on a temperature. For the decision of task the method of eventual differences, allowing to get the values of temperature in the same system of coordinates and in the same knots of difference net, is used, what at the decision of task about the tensely-deformed state of shell.

As a test example we will define the temperature field of double-layer cylindrical shell with the layers of arcwise-variable thickness. Results we will confront with a decision on the method of eventual elements in the axisymmetrical spatial raising, got on the methodology expounded in-process [3, 4]. The geometrical sizes of shell following: radius of middle surface $r=20$ sm; length formative $L=10$ sm; thicknesses of layers $h_1(s_0)=h_2(s_0)=1$ sm; $h_1(s_n)=h_2(s_n)=0,5$ sm. Initial temperature $T=20$ C. Coefficients of heat emission and temperature of washings a shell environments $\alpha_1=0,5$, $\alpha_2=0,3 \frac{\text{cal}}{\text{c}\cdot\text{sm}^2\cdot\text{C}}$, $\Theta_1=600$ C, $\Theta_2=200$ C. On the butt ends of shell a temperature and coefficients of heat emission on a thickness change on a linear law. The coefficients of heat conductivity and diffusivity

arcwise depend on a temperature. At the decision of task on an offer methodology the amount of knots of breaking up along a meridian was accepted $n=201$, and on the thickness of every layer $k_1=k_2=11$. At the use of method of eventual elements the meridional section of shell was approximated by quadrangles, each of that divided diagonals by four three-cornered eventual elements with linear distribution of temperature into each of them. In the total the meridional section of shell was covered by a net consisting of $K_e=2000$ eventual elements and $K_u=1061$ key points. As a result of decision tasks are set that the temperature field of shell is practically set to the moment of time $t=30$ s. In spite of the fact that the examined shell not thin, results of calculation on difference method and method of eventual elements coincided practically. It testifies to high exactness of the worked out methodology.

In the second example we will define the temperature field of double-layer shell the coordinate meridian of that is represented on a fig. 1. Geometrical sizes of shell : $R=14$ sm, $r=4$ sm. Thickness of internal layer $h_1=0,4$ sm, outward $h_2=0,2$ sm. A shell consists of cylindrical link with length formative and two lines as a torus, each of that has length of arc L . Links mark on a figure the Roman numerals *I-III* and fluently united between itself without the break of derivative. Ambient temperatures $\Theta_1=350$ C, $\Theta_2=20$ C. Initial temperature $T_0=20$ C.

The coefficient of heat emission arcwise changes along the meridian of shell, taking on the borders of links next values: $\alpha_1=0,01$; $0,01$; $0,009$; $0,008$. Coefficient $\alpha_2=0,0001$ (the same system of units is here accepted, what in a previous example). Butt ends are heat-insulated ($\alpha_3=\alpha_4=0$).

Material of internal layer is steel of 12X1MΦ [5], coefficient of diffusivity of that for the values of temperature $T=0$; 200 ; 400 C takes on values $a_1=0,1225$; $0,1233$; $0,1131$.

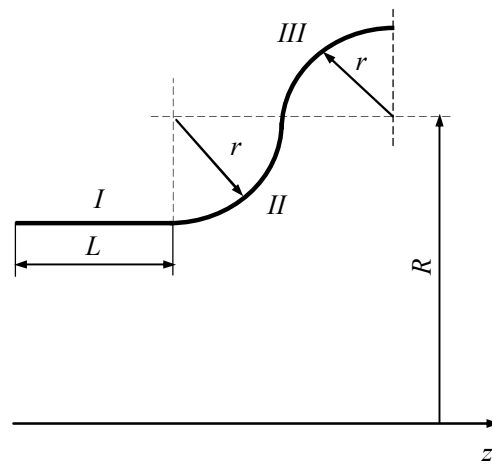


Figure 1 – Meridian of double-layer shell

The coefficient of heat conductivity is accepted by незалежним from a temperature $\lambda_1=0,1051$. Material of periblast – Izolat -4 [6], thermophysical descriptions of that are determined by values $a_2=0,0812$; $\lambda_2=4,78 \cdot 10^{-6}$.

At the decision of task the amount of knots of breaking up along the meridian of every link was accepted $n_l=201$, and on the thickness of layers $k_1=11$, $k_2=6$.

As a result of decision tasks are set that in every layer of shell distribution of temperature on a thickness is near to linear and in time this character does not change. A temperature is set to the moment of time $t=300$ s.

On a fig. 2 the charts of change of temperature are shown along a coordinate $\zeta^* = \zeta + h_1$ in a section $s = s_n$. Increasing lines on a picture correspond to the moments of time $t = 1; 5; 10; 30; 60; 120; 300$ s. On a fig. 3 for the same moments of time the charts of change of temperature are represented along the meridian of shell at $\zeta^* = 0$. From a picture evidently, that at $t = 300$ s temperature practically does not change along a meridian.

Thus, methodology of determination is worked out in the real lecture

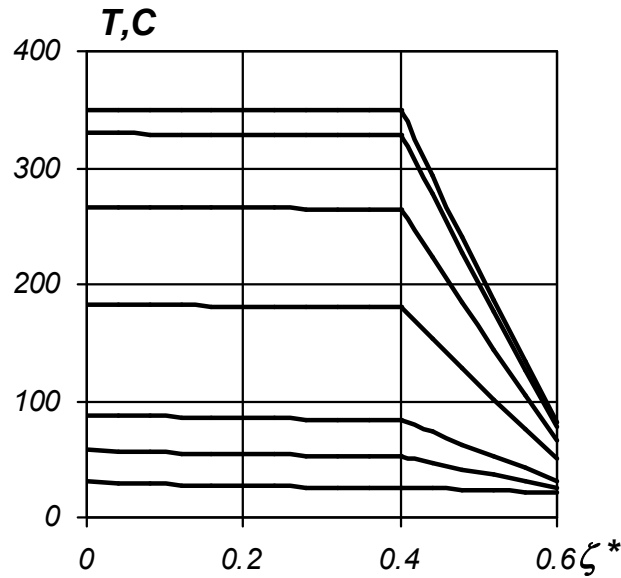


Figure 2 – Variation of temperature along the coordinates ζ^*

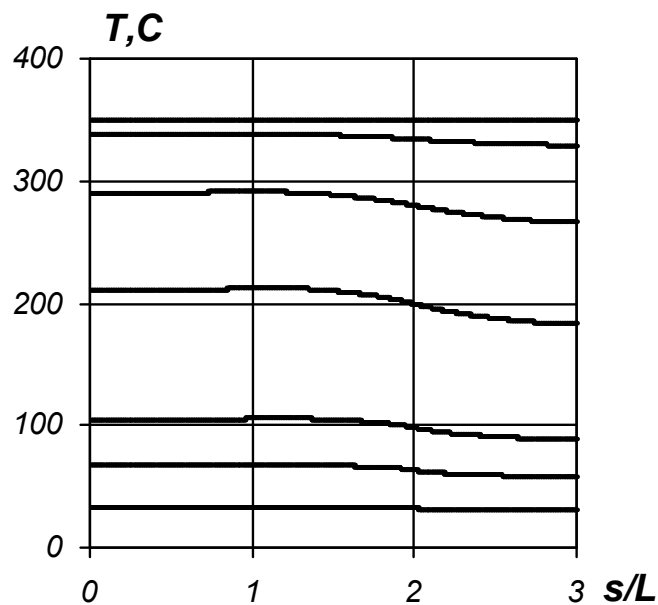


Figure 3 – Variation of temperature along the meridian of shell

In basis of methodology the method of eventual differences, and obvious разностная chart, is fixed at times. Efficiency of methodology is confirmed by the decision of test example.

2 Stress State

As an example we will define temperature tense state of double-layer shell the co-ordinate meridian of that is represented on a fig. 1.

A shell consists of cylindrical and two links, each of that has length of arc L . Geometrical sizes have next values: $R=0.14$ m, $r=0.04$ m. A thickness of internal layer $h_1=0.004$ m, external $h_2=0.002$ m. As a co-ordinate surface the interphase of layers is chosen.

Initial temperature of shell $T_0=293$ K. of Temperature of environments $\Theta_1=673$ K, $\Theta_2=293$ K; coefficients of heat emission $\alpha_1=1000$, $\alpha_2=100 \frac{Vt}{m^2 \cdot K}$. Butt ends s_0, s_n are heat-insulated ($\alpha_3 = \alpha_4 = 0$). A shell is subject to the action of intrinsic pressure, the axial squeezing and moving efforts operating at $s=s_0$. Intrinsic pressure in time changed by law $q_c = 0.02f(t)$, where $f(t)=1-\exp(-100t)$. Border terms on butt ends: at $s=s_0$ $N_s = -0.002f(t)$, $N_{\phi s} = -0.001f(t)$, $M_s = Q_s = \psi_{\phi s} = 0$; at $s=s_n$ $Q_s = u = v = \psi_s = \psi_{\phi} = 0$.

Material of internal layer is steel of EI437, physical and mechanical descriptions of that are accepted by the following: $\nu=0.28$, $\alpha_T=12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $a_1=0.0158 \frac{m^2}{h}$, $\lambda_2=19.5 \frac{Vt}{m \cdot K}$. A external layer is made from the carbide of tantalum, possessing next properties: $\nu=0.17$, $\alpha_T=12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$, $a_2=0.031 \frac{m^2}{h}$, $\lambda_2=22.2 \frac{Vt}{m \cdot K}$.

On a fig. 4-11 for two values of temperature stroke lines are show the diagrams of deformation of material of internal layer, and continuous - loading.

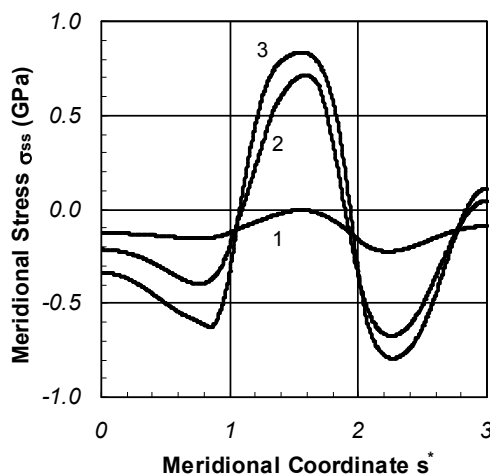


Figure 4 – Inner Surface

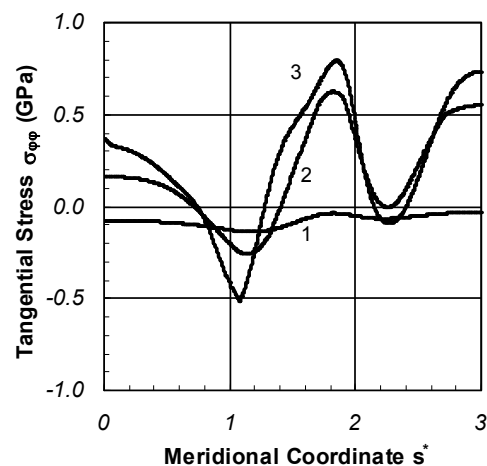


Figure 5 – Outer Surface

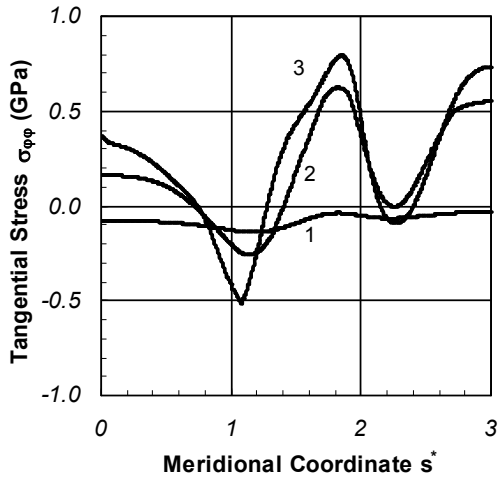


Figure 6 – Inner Surface

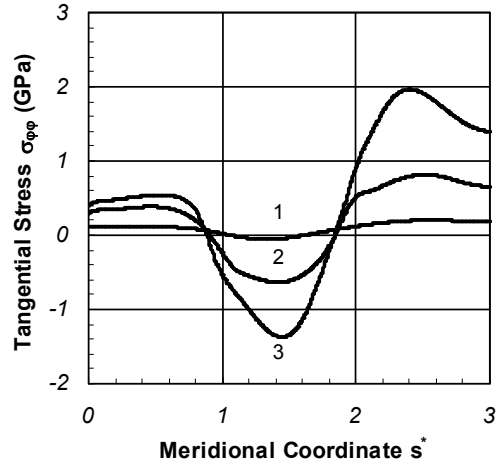


Figure 7 – Outer Surface

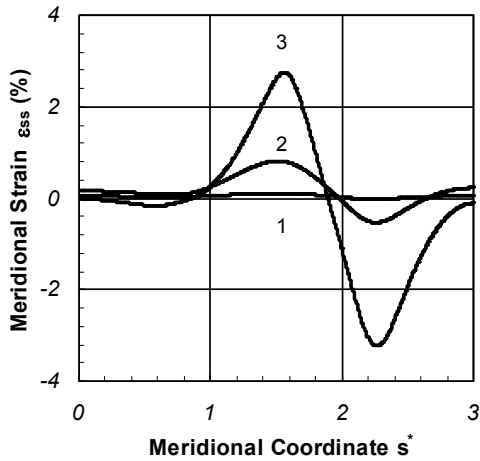


Figure 8 – Inner Surface

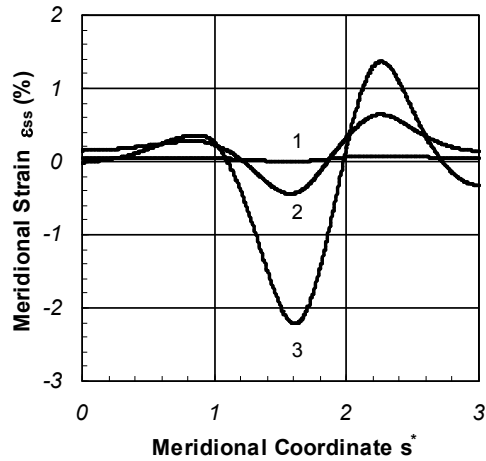


Figure 9 – Outer Surface

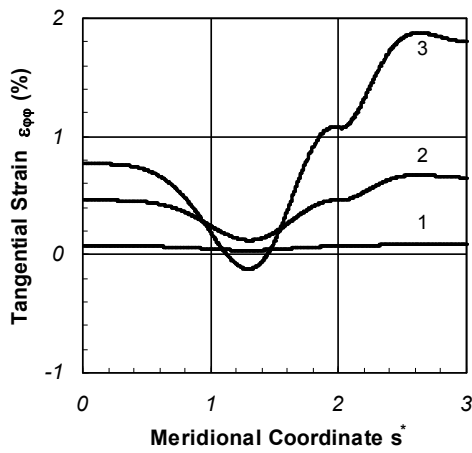


Figure 10 – Inner Surface

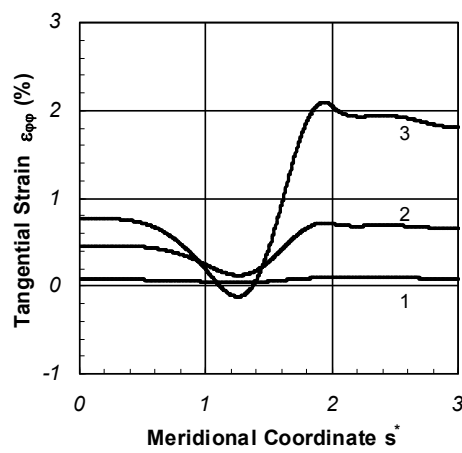


Figure 11 – Outer Surface

The amount of knots of breaking up along the meridian of every link was accepted $n_l=201$, and on the thickness of layers $k_1=11$, $k_2=9$.

As a result of decision tasks are set that the prospected process of ladening an active ladening will be realized in every point of shell.

Conclusions

Thus, in the real lecture the methodology for determination of the axisymmetrical non-stationary temperature fields and thermoelastoplastic stress-strain state in the thin laminated shells of revolution with the layers of variable thickness is worked out. Dependence on a temperature of thermophysical properties of material is taken into account.

REFERENCES

1. Galishin AZ (2003) Determining the axisymmetric geometrically nonlinear thermoviscoelastoplastic state of laminated shells by the theory of deformation along paths of small curvature. International Applied Mechanics, Vol. 39, No. 7, 2003
2. Shevchenko YN, Babeshko ME, Terehov (1992) Thermoviscoelastoplastic processes of the combined deformation of structural elements. 329P. (in Russian)
3. Шевченко Ю.Н., Стебляк П.А. Вычислительные методы в стационарных и нестационарных задачах теории термопластичности/ Проблемы обчислювальної механіки і міцності конструкцій. Збірник наукових праць.- Випуск 18.- Дніпропетровськ, 2012.- С. 211-226.
4. Галишин А.З., Стебляк П.А., Шевченко Ю.Н. Определение нестационарных температурных полей в тонких слоистых оболочках вращения при осесимметричном нагреве/ Математичні проблеми технічної механіки (тематичний випуск). Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету.- Випуск 2 (19).- Дніпродзержинськ, 2012.- С. 3-12.
5. http://www.splav.kharkov.com/mat_start.php name_id=3
6. <http://www.penetrion.odessa.ua/catalogue/14>

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.374

БАБЕШКО М.Е., д. физ.-мат.н.
САВЧЕНКО В.Г., д.т. н.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ОТЖИГА ЛИСТОВОЙ СТАЛИ 25ХГСА НА ПРОЧНОСТЬ СОСУДОВ ВЫСОКОГО ДАВЛЕНИЯ

Введение. Наиболее часто тонкостенные сосуды высокого давления являются конструктивными элементами транспортных установок как емкости для топлива, используются в тормозных системах автомобильного и железнодорожного транспорта в качестве резервуаров для сжатого воздуха. В летательных аппаратах с ЖРД тонкостенными сосудами являются баки с окислителем и горючим, а с ТРД - корпуса двигателей, заполненные твердым топливом. Назначение сосуда и условия его работы определяют требования к материалу, конструктивному оформлению и технологии изготовления. Прочность емкостей, работающих в условиях высокого давления, зависит от многих факторов, в частности, от геометрии, свойств материала, режима

нагрузки и др. Прочностные характеристики материала конструкции значительно отличаются при разных температурах отжига при снятии сварочных напряжений, возникающих в процессе изготовления. В данной работе определяются значения разрушающей нагрузки тонкостенного элемента ответственной конструкции, моделируемого оболочкой вращения, в зависимости от температуры отжига.

Для определения разрушающего давления необходимо поэтапно решать осесимметричную задачу пластичности для тонкой изотропной оболочки, моделирующей исследуемый конструктивный элемент, увеличивая уровень нагрузки на каждом следующем этапе. Необходимо на каждом этапе использовать полученные в результате расчета компоненты напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки для проверки выбранного критерия прочности. Тот уровень нагрузки, при котором выполняется критерий прочности

$$\sigma_e = \sigma_n, \quad (1)$$

где σ_e - эквивалентное напряжение, а σ_n - предел прочности материала, будет соответствовать разрушению. В качестве эквивалентного напряжения будем использовать три известных из литературы [1] выражения, а именно

$$\sigma_e = \sigma_{\max}, \quad (2)$$

где $\sigma_{\max} = \sigma_1$ - максимальное главное нормальное напряжение, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$;

критерий Сдобырева [2]

$$\sigma_e = (\sigma_i + \sigma_{\max})/2, \quad (3)$$

где σ_i - интенсивность напряжений;

критерий Мизеса

$$\sigma_e = S\sqrt{3}, \quad (4)$$

где S - интенсивность касательных напряжений [3],

$$S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}; \quad (5)$$

s_{ij} - компоненты девиатора напряжений, $\sigma_i = S\sqrt{3}$.

В общем случае главные нормальные напряжения определяются выражениями, приведенными например в [3]

При наличии массивных частей конструкции необходимо решать задачу в пространственной постановке [4].

Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим оболочку вращения, первоначально находящуюся в ненапряженном и недеформированном состоянии при температуре $T = T_0 = 20^0 C$, а затем подвергнутую действию возрастающего равномерного внутреннего давления при этой же температуре. Предполагается, что оболочка изготовлена из изотропного материала, а меридиан оболочки может состоять из конечного числа звеньев разной геометрии. Оболочка отнесена к криволинейной ортогональной системе координат s, θ, ζ , связанной с недеформированной непрерывной координатной поверхностью; s ($s_a \leq s \leq s_b$) - меридиональная координата, s_a, s_b - координаты, соответствующие торцам оболочки; θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) - окружная координата; ζ ($\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_k$) - координата, отсчитываемая по нормали к координатной поверхности, ζ_0 соответствует внутренней поверхности оболочки, а ζ_k - наружной ее поверхности; толщина оболочки $h_i = \zeta_k - \zeta_0$. В качестве координатной поверхности выбирается срединная либо одна из поверхностей

оболочки. Предполагается, что в процессе нагружения материал оболочки деформируется в пределах и за пределами упругости, а деформации ползучести пренебрежимо малы по сравнению с упругими и пластическими составляющими. Задачу будем решать в квазистатической постановке с использованием гипотез Кирхгофа - Лява и соотношений геометрически линейной теории оболочек [5]. Для описания деформирования изотропных материалов будем использовать соотношения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны [3,4], линеаризованные методом дополнительных напряжений. Задачу о НДС оболочки будем решать методом последовательных приближений.

Следует заметить, что методы решения осесимметричной задачи пластичности для тонких изотропных оболочек в такой постановке описаны в ряде работ [3,4,6-8 и др.] и неоднократно применялись к определению упругопластического НДС конкретных оболочек, однако в этих работах не проводилась оценка прочности исследуемых объектов. В отличие от этого в данной работе при поэтапном определении упругопластического НДС оболочки оценивается ее прочность с помощью выбранных критериев (1) – (4).

Для решения задачи процесс нагружения разбиваем на ряд малых этапов во времени таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы, как можно лучше совпадали с моментами начала возможной разгрузки. На каждом этапе используем дифференциальные уравнения равновесия [5] элемента осесимметрично нагруженной оболочки вращения при отсутствии кручения, геометрические соотношения [5] и физические уравнения [3,4]. Последние представим в виде связи между компонентами тензоров напряжений σ_{ss} , $\sigma_{\theta\theta}$ и деформаций ε_{ss} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}$ в произвольной точке рассматриваемой оболочки в форме закона Гука с дополнительными напряжениями.

$$\begin{aligned}\sigma_{ss} &= A_{11}\varepsilon_{ss} + A_{12}\varepsilon_{\theta\theta} - A_1, \\ \sigma_{\theta\theta} &= A_{12}\varepsilon_{ss} + A_{22}\varepsilon_{\theta\theta} - A_2,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$A_{11} = A_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad A_{12} = \nu A_{11}; \quad A_1 = A_{11}\left(e_{ss}^{(p)} + \nu e_{\theta\theta}^{(p)}\right), \quad A_2 = A_{11}\left(e_{\theta\theta}^{(p)} + \nu e_{ss}^{(p)}\right). \quad (6)$$

В (6) E, ν - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона материала, $e_{ss}^{(p)} = \varepsilon_{ss}^{(p)}$, $e_{\theta\theta}^{(p)} = \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}^{(p)} = -(\varepsilon_{ss}^{(p)} + \varepsilon_{\theta\theta}^{(p)})$ - пластические составляющие компонент деформации, вычисляемые как сумма приращений этих компонент

$$\varepsilon_{ss}^{(p)} = \sum_{m=1}^M \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)}, \quad \Delta_m \varepsilon_{ss}^{(p)} = \langle c_{ss} \rangle_m \Delta_m \Gamma_p^*, \quad \langle c_{ss} \rangle_m = \left\langle \frac{2\sigma_{ss} - \sigma_{\theta\theta}}{S} \right\rangle_m (s, \theta), \quad (7)$$

где угловые скобки означают средние на этапе значения заключенных в них величин,

$$S = \left[\frac{1}{3} \left(\sigma_{ss}^2 - \sigma_{ss}\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\theta\theta}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

Γ_p^* - интенсивность накопленной пластической деформации сдвига,

$$\Gamma_p^* = \sum_{m=1}^{M-1} \Delta_m \Gamma_p^* + \Delta_M \Gamma_p^*. \quad (9)$$

Предполагается, что между интенсивностями касательных напряжений S и накопленной пластической деформации сдвига Γ_p^* существует зависимость вида

$$S = \Phi(\Gamma_p^*), \quad (10)$$

которую необхідно конкретизировать на основе экспериментально полученных мгновенных диаграмм одноосного растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ с использованием соответствующих формул [3,4] перехода от одноосного НДС к сложному

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, \quad \Gamma_p^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E} \right). \quad (11)$$

Приращение интенсивности накопленной пластической деформации $\Delta_M \Gamma_p^*$ за текущий этап нагружения определяется в процессе последовательных приближений.

Используем соотношения (5) для получения связи между усилиями N_s, N_θ , моментами M_s, M_θ и деформациями и изменениями кривизны $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta, \kappa_s, \kappa_\theta$ координатной поверхности оболочки. Получим

$$\begin{aligned} N_s &= C_{11}^{(0)} \varepsilon_s + C_{12}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(1)} \kappa_s + C_{12}^{(1)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(0)}, \\ N_\theta &= C_{12}^{(0)} \varepsilon_s + C_{22}^{(0)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(1)} \kappa_s + C_{22}^{(1)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(0)}, \\ M_s &= C_{11}^{(1)} \varepsilon_s + C_{12}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{11}^{(2)} \kappa_s + C_{12}^{(2)} \kappa_\theta - N_{1D}^{(1)}, \\ M_\theta &= C_{12}^{(1)} \varepsilon_s + C_{22}^{(1)} \varepsilon_\theta + C_{12}^{(2)} \kappa_s + C_{22}^{(2)} \kappa_\theta - N_{2D}^{(1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

где
$$C_{mn}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mn} \zeta^j d\zeta, \quad N_{mD}^{(j)} = \int_{\zeta_0}^{\zeta_k} A_{mD} \zeta^j d\zeta \quad (m, n = 1, 2; j = 0, 1, 2). \quad (13)$$

Соотношения (12) вместе с уравнениями равновесия и геометрическими соотношениями образуют систему 12 уравнений. Выбрав в качестве основных неизвестных функции $N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s$, где Q_s - перерезывающее усилие, u, w - перемещения точек координатной поверхности в меридиональном и нормальном направлениях, ϑ_s - угол поворота нормали к координатной поверхности, приведем эту систему к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{Y}}{ds} = P(s)\vec{Y} + \vec{f}(s) \quad (14)$$

при граничных условиях

$$B_1 \vec{Y}(s_a) = \vec{b}_1, \quad B_2 \vec{Y}(s_b) = \vec{b}_2, \quad (15)$$

где \vec{Y} - вектор-столбец разрешающих функций, $\vec{Y} = \{N_s, Q_s, M_s, u, w, \vartheta_s\}$, $P(s)$ - матрица системы, $\vec{f}(s)$ - вектор-столбец дополнительных слагаемых, B_1, B_2 - заданные матрицы, \vec{b}_1, \vec{b}_2 - заданные векторы-столбцы граничных условий. Ненулевые элементы матрицы $P(s)$ и вектора $\vec{f}(s)$ вычисляются по формулам [3]. Из этих формул видно, что элементы матрицы разрешающей системы зависят от геометрии оболочки и упругих свойств материала, а компоненты вектора $\vec{f}(s)$ зависят еще и от внешних нагрузок и пластических деформаций, которые необходимо уточнять в процессе последовательных приближений.

Для проведения вычислений необходимо задать геометрию оболочки, условия закрепления и нагружения, а также свойства ее материала. Последние задаются в виде диаграммы растяжения $\sigma \sim \varepsilon$ и коэффициента Пуассона. Разбиение на этапы удобно выполнить таким образом, чтобы на первом этапе оболочка деформировалась в пределах упругости.

В первом приближении на первом этапе нагружения принимаем $A_1 = A_2 = 0$. После вычисления элементов матрицы $P(s)$ и компонент вектора-столбца $\vec{f}(s)$ решаем краевую задачу (14),(15) путем сведения к задачам Коши, для решения которых используем метод Рунге – Кутты с дискретной ортогонализацией [9]. Получив в результате решения краевой задачи разрешающие функции, находим компоненты деформаций, а по ним – компоненты напряжений (5). Далее вычисляем интенсивность касательных напряжений (8). Затем находим приращение интенсивности пластической деформации сдвига по формулам

$$\Delta_M \Gamma_p^* = \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta_M \varepsilon^{(p)}, \quad \Delta_M \varepsilon^{(p)} = \sum_{i=1}^{L-1} \Delta_{Mi} \varepsilon^{(p)} + \Delta_{ML} \varepsilon^{(p)},$$

$$\Delta_{ML} \varepsilon^{(p)} = \frac{S\sqrt{3} - \sigma^{(d)}}{E}, \quad (16)$$

где L – номер текущего приближения на M – м этапе, а $\sigma^{(d)}$ определяется из зависимости (10) с использованием (11) по вычисленному в предыдущем приближении значению Γ_p^* (9). Процесс последовательных приближений на этапе завершается при выполнении условия

$$\left| \Delta_{ML} \varepsilon^{(p)} \right| \leq \delta, \quad (17)$$

где δ - наперед заданное число. В процессе последовательных приближений выполняется проверка направленности процесса нагружения. Если найденное в первом приближении приращение интенсивности пластических деформаций (16) в элементе отрицательно, это означает, что в данном элементе происходит разгрузка, и соответствующее приращение на данном этапе считается равным нулю.

Для оценки величины разрушающей нагрузки на каждом этапе нагружения необходимо проверить выполнение критериев прочности (1) –(4). В осесимметрично нагруженной тонкой оболочке главными напряжениями являются меридиональное σ_{ss} и окружное $\sigma_{\theta\theta}$, поэтому в (1)-(4) следует учитывать, что $\sigma_{\max} = \max(\sigma_{ss}, \sigma_{\theta\theta})$, а S определяется формулой (8).

Результаты решения задачи. Выполнено определение разрушающей нагрузки для оболочки, моделирующей корпус двигателя, нагруженной возрастающим внутренним давлением. Материал оболочки - сталь 25ХГСА. Расчеты проводились для трех значений температуры отжига $T_1 = 200^0 C$; $T_2 = 480^0 C$, $T_3 = 580^0 C$. Диаграммы растяжения [10,11] представлены на рис.1; цифры 1, 2, 3 соответствуют значениям

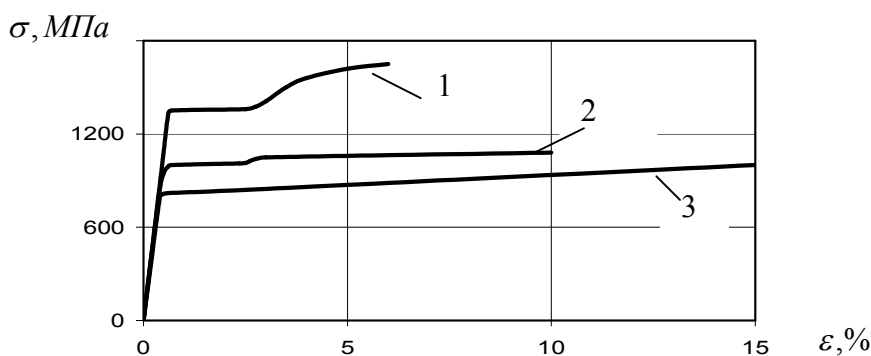


Рисунок 1

температуры отжига T_1, T_2, T_3 ; пределы прочности материала при соответствующих температурах отжига равны 1650 МПа, 1080 МПа, 1000 МПа. В качестве координатной поверхности выбрана ее внутренняя поверхность. Меридиан оболочки показан на рис.2, где $L = 52,6\text{см}$; $R_1 = 6,63\text{см}$; $R_2 = 8,5\text{см}$; толщина оболочки $h = 0,15\text{см}$.

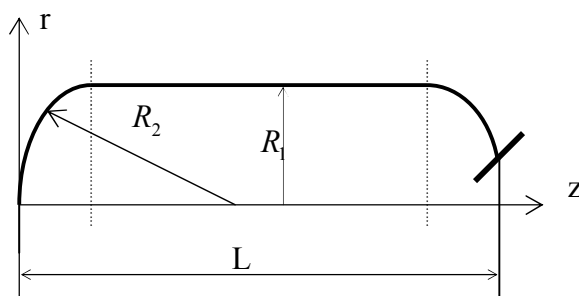


Рисунок 2

В результате вычислений было установлено, что в начальной стадии нагружения при упругом деформировании материала максимальными являются меридиональные напряжения, которые возникают в тороидальной части оболочки у контура $s = s_b$, но не достигают критического уровня. При дальнейшем возрастании нагрузки и развитии пластических деформаций максимальными становятся окружные напряжения в цилиндрической части оболочки. Это означает, что разрушение оболочки происходит по образующей. Разрушающие нагрузки приведены в таблице.

Таблица

	$T_1 = 200^0 C$	$T_2 = 480^0 C$	$T_3 = 580^0 C$
Критерий (2)	36,8 МПа	23,1 МПа	22,6 МПа
Критерий (3)	38,9 МПа	25,9 МПа	24,1 МПа
Критерий (4)	42,5 МПа	28,2 МПа	25,6 МПа

Как видно из таблицы, величины разрушающей нагрузки существенно зависят от температуры отжига материала и могут различаться в полтора раза.

Следует заметить, что были выполнены заводские испытания тонкостенной конструкции указанной геометрии, изготовленной из стали 25 ХГСА, температура отжига которой $T_2 = 480^0 C$. Разрушение произошло при давлении 25,56 МПа, что отличается менее чем на 2% от значения, полученного в расчете для этой температуры отжига по критерию Сдобырева (4), и от усредненного по трем критериям значения.

Выводы. Разработана методика численного определения разрушающей нагрузки тонкостенных элементов конструкций в виде оболочек вращения, работающих в условиях возрастающего давления. Методика основана на использовании соотношений геометрически линейной теории тонких оболочек, теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны и известных из литературы критериев прочности. Работоспособность методики показана на конкретном примере. Показано, что величина разрушающей нагрузки существенно зависит от температуры отжига материала исследуемой оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. К.: Наукова думка, 1988. – 102с.
2. Сдобырев В.П. Длительная прочность сплава ЭИ 437Б при сложном напряженном состоянии// Изв. АН СССР, ОТН. – 1958, №4. –С. 92-97.

3. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – К.: Наук. думка, 1992. – 328с.
4. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.2. Термовязкопластичность. – К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
5. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 432 с.
6. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Пискун В.В., Прохоренко И.В., Савченко В.Г. Решение осесимметричной задачи термопластичности для тонкостенных и толстостенных тел вращения на ЕС ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1980. – 196 с.
7. Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Прохоренко И.В. Методика решения осесимметричной задачи термовязкопластичности для тонких слоистых оболочек ЕС ЭВМ. – К.: Наук. думка, 1981. – 68 с.
8. Шевченко Ю.Н., Савченко В.Г., Ищенко Д.А., Павлычко В.М. Расчеты и испытания на прочность. Метод и пакет прикладных программ расчета на ЭВМ нестационарной теплопроводности и упругопластического напряженно-деформированного состояния элементов конструкций типа тел вращения при осесимметричных силовых и тепловых нагрузках. Рекомендации Р54 – 284 – 90. – М.: ВНИИНМАШ Госстандарта СССР, 1990. - 56с.
9. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жесткости. – К.: Наук. думка, 1981. – 544 с. – (Методы расчета оболочек: В 5-ти т.; Т.4).
10. Демина Н.И., Волков А.К., Застольская З.К. Влияние формы концентратора напряжения на механические свойства тонколистовой стали 25ХГСА при двухосном растяжении.//Пробл. прочности, 1980, №3. – С.51-53.
11. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И. и др. Расчеты на прочность, устойчивость и колебаний в условиях высоких температур. – М.: Машиностроение, 1965. – 568с.

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.3

ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н.
БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н.
ДЕКРЕТ В. А. к.физ.-мат.н.

Институт Механики НАН Украины

ВЛИЯНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СЛОИСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

Введение. В работах [4,5] исследовано влияние геометрических параметров на критическую нагрузку для изотропных и анизотропных пластин. В работе [3] рассмотрена устойчивость матричного композитного материала регулярной структуры, находящегося под действием одноосной нагрузки.

В настоящей работе с использованием общих уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1] (математическая модель) и модели кусочно-однородной среды (механическая модель) в пространственной постановке исследуются влияние геометрических параметров на величину критической нагрузки слоистой прямоугольной пластины. Указанный подход является наиболее строгим и позволяет оценить точность результатов, полученных с применением различных приближенных теорий и расчетных схем.

Пластина представляє елемент конструкції из матричного слоистого двухкомпонентного композитного метериала с изотропными слоями (Рис.1).

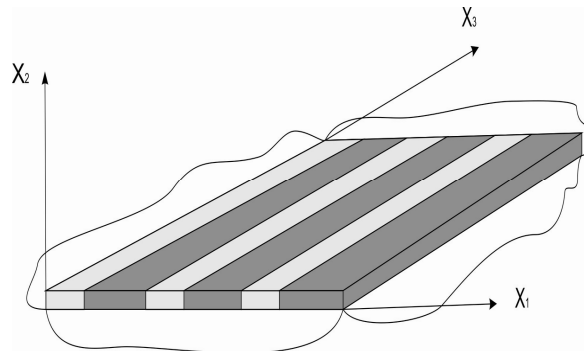


Рисунок 1

Постановка задачи. Рассматривается пространственная задача устойчивости слоистой двухкомпонентной прямоугольной пластины сжимаемой вдоль оси Ox_1 усилиями интенсивности P_{11}^0 (рис.2). Слои пластины имеют различные геометрические и механические характеристики. Торцы пластины $x_1 = 0$ и $x_1 = l_1$ жестко зацементированы в направлении x_2 и x_3 и допускают смещение в направлении x_1 . Стороны $x_2 = 0, l_2$ и $x_3 = 0, l_3$ свободны от напряжений. Пластина находится в состоянии простого нагружения. В этом случае уравнения и граничные условия ТЛТУДТ для каждого слоя k ($k=1,2$) пластины запишутся в виде (индекс k опускаем).

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k})_{,i} = 0 \quad (1)$$

$$(\sigma_{11} + \lambda \sigma_{1j}^0 u_{1,j}) = 0; u_2 = u_3 = 0, \text{ при } x_1 = 0 \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3)$$

$$(\sigma_{11} + \lambda \sigma_{1j}^0 u_{1,j}) = 0; u_2 = u_3 = 0, \text{ при } x_1 = l_1 \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3)$$

$$\sigma_{im} = 0; \text{ при } x_2 = 0, l_2 \vee (0 \leq x_1 \leq l_1 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3) \quad (2)$$

$$\sigma_{im} = 0; \text{ при } x_3 = 0, l_3 \vee (0 \leq x_1 \leq l_1 \vee 0 \leq x_2 \leq l_2),$$

и условиями на контакте

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3) \quad (3)$$

Интенсивность критической нагрузки определяется по формуле.

$$P_{kp} = \min |\lambda| \left| \frac{1}{l_2 l_3} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} P_{11}^0(x_2, x_3) dx_2 dx_3 \right|_{x_1 = const.}, \quad (4)$$

где $\min |\lambda|$ - минимальное по модулю собственное число задачи (1)-(3),

P_{11}^0 - интенсивность начальной нагрузки, приложенной к торцам пластины.

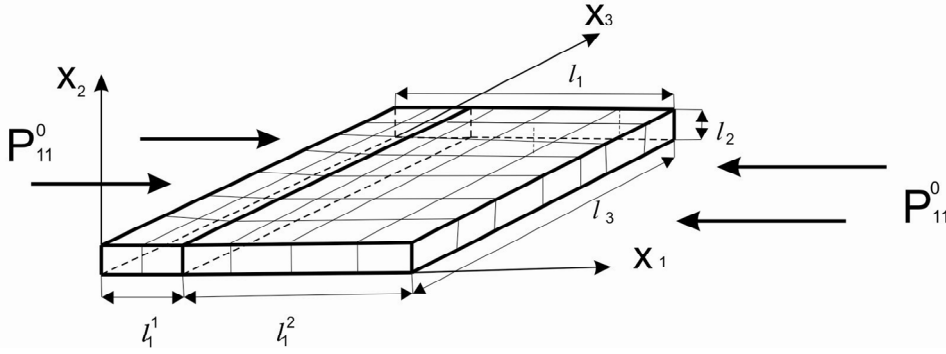


Рисунок 2

В рассматриваемом случае начальное состояние неоднородное и компоненты начального состояния определяются из уравнений линейной теории упругости

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0 \quad (5)$$

С граничными условиями

$$\begin{aligned} \sigma_{im} &= 0 \text{ при } x_2 = 0, l_2 \vee (0 \leq x_1 \leq l_1 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{im} &= 0 \text{ при } x_3 = 0, l_3 \vee (0 \leq x_1 \leq l_1 \vee 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ \sigma_{11}^0 &= P_{11}^0, u_2 = u_3 = 0 \text{ при } x_1 = 0, l_1 \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3) \end{aligned} \quad (6)$$

и условиями на контакте

$$[u_m] = 0, [\sigma_{im}] = 0 \text{ при } x_1 = l_1 \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 \vee 0 \leq x_3 \leq l_3) \quad (7)$$

В пределах каждого слоя пластины закон Гука имеет вид

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} u_{k,k}^0 + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad (8)$$

где A_{ij}, G_{ij} -коэффициенты упругости и модули сдвига изотропного тела; $[]$ - скачек функции $f(x)$.

В области занятой пластиной вводится неравномерная сетка $\bar{\omega} = \omega + \gamma$, состоящая из множества ω внутренних и множества γ граничных узлов. Граница γ , в свою очередь, состоит из участков $\gamma_{\tau_i} \gamma_{y_i}$, на которых по m -ой составляющей заданы, соответственно, разностные аналоги граничных условий в напряжениях и перемещениях. Сетка $\bar{\omega}$ разбивает расчетную область на M прямоугольных ячеек, (рис.2) и содержит N узлов, нумерация которых осуществляется слева направо и снизу-вверх. Для m -ой ячейки определены номера узлов $n^m, (n^m = \overline{1, N})$. В каждом узле строится дискретная аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)-(3),(5-8) Дифференциальным задачам (1)-(3),(5-8) на сетке $\bar{\omega}$ ставится в соответствие разностные задачи:

$$Ay = \mu By \text{ или } A_m y = \mu B_m y, x \in \bar{\omega} \quad (9)$$

$$Ay = \Phi \text{ или } A_m y = \Phi_m, \quad (10)$$

Составляющие A_m, B_m разностных операторов A и B и составляющие Φ_m вектора правой части Φ определяются из соотношений:

$$A_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} a_i(\xi) y & x \in \bar{\omega} \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases}, \quad B_m y = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} b_i(\xi) y & x \in \bar{\omega} \setminus \gamma_{y_i} \\ \sum y_i & x \in \gamma_{y_i} \end{cases},$$

$$\Phi_m = \begin{cases} \sum_{\xi \in x} \varphi_i(\xi) & x \in \varpi \setminus \gamma_{y_i} \\ 0 & x \in \gamma_{y_i} \end{cases}$$

где $a_m(\xi), b_m(\xi)$ – базовые операторы, $\varphi_m(\xi)$ – базовая функция, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – мультииндекс, идентифицирующий узлы произвольной ячейки сетки. Построение базовых операторов и базовой функции осуществляется в соответствии с методикой, изложенной в работе [6]. Знак $\sum_{\xi \in x}$ означает суммирование по всем ячейным узлам ξ ,

принадлежащим сеточному узлу x , причем, если узел принадлежит границе сеточной области ($x \in \gamma$), то по m - компоненте в этом узле должно быть задано естественное граничное условие. Разностным операторам \mathbf{A} , \mathbf{B} , действующим в пространстве размерности $2N$ соответствует матрицы $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}, \mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ размерности $2N \times 2N$. В силу этого задачам (9),(10) на сетке ϖ поставим в соответствие алгебраические задачи:

$$\mathbf{A}y = \mu \mathbf{B}y, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}y = \Phi, \quad (12)$$

где $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}, \mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ представляют собою блочные матрицы порядка $2N$, блоки которых получаются как суммы блоков a_{ij}, b_{ij} базовых матриц a и b по всем ячейкам сетки ϖ , а составляющая Φ_m вектора Φ представляет сумму составляющих φ_m базового вектора φ . Разностные задачи (9,10) самосопряженные и положительно-определенные ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0$), ($\mathbf{B} = \mathbf{B}^* > 0$). Для решения задач (11) и (12) применялись эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой работы [6]. В рассматриваемом случае алгебраическая задача (12) решалась прямым методом- методом Холецкого [2], а после сгущения разностной сетки применялся итерационный метод сопряженных градиентов [2]. При этом, решение полученное методом Холецкого интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения задачи (11) итерационным методом.

Результаты работы. В качестве примера рассмотрена устойчивость двухкомпонентной пластины с излтротными слоями, имеющими следующие механические постоянные: связующее: $E = 520 \text{ ГПа}; G = 200 \text{ ГПа}, \nu = 0,3$, наполнитель: $E = 52 \text{ ГПа}; G = 20 \text{ ГПа}, \nu = 0,3$. Размеры пластины нормированы к ее ширине

($l_1 = 1; l_1^1 = 0.2; l_1^2 = 0.8;$) и изменяются в таких пределах $0.1 \leq l_2 \leq 0.3$; $0.1 \leq l_3 \leq 1.2 = l$. Величина $l = 1.2$ получена из вычислительного эксперимента. При $l_2 = 0.1$ критическая нагрузка полученная для $l_3 = 0.1$ (P_n^{kp}) сравнивалась с критическими нагрузками P_m^{kp} , полученными для значений $l_3 = 0.2; 0.3 \dots 0.8$ и вычислялась относительная погрешность

$$\delta = \frac{P_n^{kp} - P_m^{kp}}{P_n^{kp}} \cdot 100\%$$

Выводы. В результате расчетов установлено, что при указанных геометрических параметрах $\delta_{\max} = 7\%$ и с увеличением $l_3 (l_3 \geq l_2)$ значение δ уменьшается, причем при $l_3 \geq 0.8$, $\delta \leq 1\%$. При $l_2 = 0.2; 0.3$ соответственно $\delta_{\max} = 8\%; \delta_{\max} = 8.5\%$, а $\delta \leq 1\%$

соответственно при $l_3 \geq 0.9$. Таким образом, для конкретных значений параметра тонкостенности $\alpha = \pi l_3 / 2l_1$ исследована зависимость критической нагрузки от длины пластины и вычислено значение δ . Установлено, что начиная с некоторого значения l_3 , полученного в результате вычислительного эксперимента для каждого значения α при дальнейшем увеличении параметра l_3 величина δ при данных механических характеристиках изменяется не более чем на 1%. Результаты, полученные в данной работе качественно согласуются с результатами работы [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – К: Вища шк., 1986. – 512 с.
2. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П. Численные методы. – М.: Наука. 1987. – 598 с.
3. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В. М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении.-Збірник наукових праць Дніпродзержинського держ. техніч.університету. -Випуск 2(19)- 2012.- С. 49–53.
4. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости). // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С. 48–51.
5. Коханенко Ю. В., Зеленский В. С. Влияние геометрических параметров на критическую нагрузку в задачах трехмерной устойчивости прямоугольных пластин и стержней. // Прикл. механика. – 2003. – № 6. – С. 74–78.
6. Статика материалов /Под ред. А. Н. Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453 с. (Механика композитов: в 12 т. Т.3)

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 539.3

ПАНАСЮК О.М., к.фіз.-мат.н., н. с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ ПОШИРЕННЯ КВАЗІПОПЕРЕЧНИХ ХВИЛЬ У НЕСТИСЛИВОМУ КОМПОЗИТНОМУ МАТЕРІАЛІ З ПОЧАТКОВИМИ НАПРУЖЕННЯМИ

Вступ. У роботі [2] було досліджено поширення хвиль вздовж нестисливих шарів композитного матеріалу з початковими напруженнями. В цій статті отримано, зокрема, дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль. Дослідження проведено у рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності, яка викладена в [1], де також наведено результати дослідження [2]. Тому нижче будемо дотримуватися позначень та термінів використаних в [1].

Оскільки, в статті [2] аналіз дисперсійного рівняння для квазіпоперечних хвиль проводився асимптотично, тобто фазові швидкості хвиль знайдено лише при довгохвильовому наближенні, то в даній роботі проведено числове дослідження цього характеристичного рівняння. Нижче наведемо основні співвідношення [1, 2], які необхідні для одержання дисперсійного рівняння.

Постановка задачі. Основні рівняння. Розглядається шаруватий композитний матеріал, що складається з двох компонентів, шари яких чергуються. Матеріали шарів вважаються нестисливими ізотропними з довільною формою пружного потенціалу. Всі величини, що відносяться до кожного з компонентів позначаються вгорі індексом в

дужках. В природному стані з кожним шаром пов'язано лагранжеву систему координат (x_1, x_2, x_3) , яка співпадає з декартовою. Оскільки видовження в кожному з шарів можуть бути різними, то й координатні системи будуть різними. Тому в початковому стані введено загальну для обох шарів декартову систему координат (y_1, y_2, y_3) . Прийнято, що вісь oy_3 перпендикулярна до шарів, а площина $y_3 = 0$ співпадає з площиною розділу шарів.

Вважається, що початковий напружено-деформівний стан в кожному з шарів є однорідним, переміщення в якому визначаються з виразів

$$u_m^{0(j)} = (\lambda_m^{(j)} - 1)x_m^{(j)}; \quad y_m = \lambda_m^{(j)}x_m^{(j)} \quad (j=1, 2; m=1, 2, 3), \quad (1)$$

де $\lambda_m^{(j)}$ – коефіцієнт видовження вздовж координатної вісі. Початковим переміщенням (1) відповідають початкові напруження у вигляді

$$S_{im}^{0(j)} = \delta_{im}S_{mm}^{0(j)}; \quad S_{mm}^{0(j)} = const \quad (j=1, 2; i, m=1, 2, 3). \quad (2)$$

Товщини шарів в природному стані $h^{(j)}$ та початковому стані $h'^{(j)}$ пов'язані співвідношенням $h'^{(j)} = \lambda_3^{(j)}h^{(j)}$. Густина компонентів позначено $\rho^{(j)}$.

Основні рівняння в системі координат (y_1, y_2, y_3) мають вигляд [1]:

- рівняння руху для j -го шару

$$N_{m\alpha}^{(j)}u_{\alpha}^{(j)} = 0; \quad N_{m\alpha}^{(j)} = \left(\kappa_{im\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \rho^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) (1 - \delta_{m4})(1 - \delta_{\alpha 4}) + \\ + \delta_{\alpha 4}(1 - \delta_{m4}) \frac{\partial}{\partial y_m} + \delta_{m4}(1 - \delta_{\alpha 4}) \frac{\partial}{\partial y_\alpha}; \quad (3)$$

$$\kappa_{im\alpha\beta}^{(j)} = \lambda_i^{(j)} \lambda_\beta^{(j)} \kappa_{im\alpha\beta}^{(j)}; \quad u_4^{(j)} \equiv p'^{(j)} \quad (m, \alpha = 1, 2, 3, 4; i, \beta = 1, 2, 3),$$

пружні сталі $\kappa_{im\alpha\beta}^{(j)}$ визначаються відповідно до роботи [1];

- вирази для визначення складових тензора напружень на поверхнях кожного з шарів

$$Q_{3m}^{(j)} = \kappa_{3m\alpha\beta}^{(j)} \frac{\partial u_{\alpha}^{(j)}}{\partial y_\beta} + \delta_{3m} p'^{(j)}.$$

Розв'язок задачі. Розглядаються хвилі поляризовані в площині $y_1 o y_3$ ($u_2^{(j)} \equiv 0$), хвильовий вектор яких має вид $\vec{k}(k, 0, 0)$. Розв'язок системи (3) прийнято у вигляді [1]

$$u_{\alpha}^{(j)} = u_{\alpha}^{(j)(0)} e^{i(ky_1 - \omega\tau)}; \quad u_3^{(j)(0)} = A^{(j)} e^{i\alpha^{(j)}y_3}; \quad (4)$$

$$u_1^{(j)(0)} = \gamma^{(j)} u_3^{(j)(0)}; \quad u_4^{(j)(0)} \equiv p'^{(j)(0)} = i\theta^{(j)} u_3^{(j)(0)},$$

де $A^{(j)}, \alpha^{(j)}, \gamma^{(j)}, \theta^{(j)}$ – сталі. Індексом (0) позначено амплітудні величини, які залежать лише від y_3 .

Шляхом підстановки (4) в (3) отримано

$$\begin{aligned} \gamma^{(j)} (\kappa'_{1111} k^2 + \kappa'_{3113} \alpha^{(j)2} - \rho^{(j)} \omega^2) + k\alpha^{(j)} (\kappa'_{1313} + \kappa'_{1133}) + k\theta^{(j)} &= 0; \\ \gamma^{(j)} (\kappa'_{1313} + \kappa'_{1133}) k\alpha^{(j)} + \kappa'_{1331} k^2 + \kappa'_{3333} \alpha^{(j)2} - \rho^{(j)} \omega^2 + \theta^{(j)} \alpha^{(j)} &= 0; \\ k\gamma^{(j)} + \alpha^{(j)} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

З (5) одержано чотири розв'язки для $\alpha^{(j)}$: $\alpha_2^{(j)} = -\alpha_1^{(j)}$, $\alpha_4^{(j)} = -\alpha_3^{(j)}$, а також $\gamma_2^{(j)} = -\gamma_1^{(j)}$, $\gamma_4^{(j)} = -\gamma_3^{(j)}$. Після цього вирази (4) переписано у вигляді

$$\begin{aligned} u_3^{(j)(0)} &= A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} + A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} + A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} + A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3}; \\ u_1^{(j)(0)} &= \gamma_1^{(j)} \left(A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} - A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} \right) + \gamma_3^{(j)} \left(A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} - A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3} \right); \\ u_4^{(j)(0)} &= i\theta_1^{(j)} \left(A_1^{(j)} e^{i\alpha_1^{(j)} y_3} - A_2^{(j)} e^{-i\alpha_1^{(j)} y_3} \right) + i\theta_3^{(j)} \left(A_3^{(j)} e^{i\alpha_3^{(j)} y_3} - A_4^{(j)} e^{-i\alpha_3^{(j)} y_3} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Далі розглядаються два сусідні шари, які займають по вісі $0y_3$ області $0 \leq y_3 \leq h^{(1)}$ та $-h^{(2)} \leq y_3 \leq 0$. При $y_3 = 0$ виконуються умови неперервності

$$u_m^{(1)(0)}(0) = u_m^{(2)(0)}(0); \quad Q_{3m}^{(1)(0)}(0) = Q_{3m}^{(2)(0)}(0) \quad (m = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Внаслідок періодичності структури матеріалу також виконуються умови періодичності

$$u_m^{(1)(0)}(h^{(1)}) = u_m^{(2)(0)}(-h^{(2)}); \quad Q_{3m}^{(1)(0)}(h^{(1)}) = Q_{3m}^{(2)(0)}(-h^{(2)}) \quad (m = 1, 2, 3). \quad (8)$$

З формул (7) та (8) отримано однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь восьмого порядку. З умови існування нетривіального розв'язку цієї системи виводиться дисперсійне рівняння.

Частинний випадок. *Квазіпоперечна хвиля.* Для такої хвилі переміщення ($u_3^{(j)}$) симетричні, а ($u_1^{(j)}$) антисиметричні відносно середини відповідних шарів. У зв'язку з цим переміщення (6) записано відносно середини кожного з шарів [1]

$$u_1^{(1)(0)} = \gamma_1^{(1)} \left(B_1^{(1)} e^{i\alpha_1^{(1)}(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2})} - B_2^{(1)} e^{-i\alpha_1^{(1)}(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2})} \right) + \gamma_3^{(1)} \left(B_3^{(1)} e^{i\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2})} - B_4^{(1)} e^{-i\alpha_3^{(1)}(y_3 - \frac{h^{(1)}}{2})} \right); \quad (9)$$

$$u_1^{(2)(0)} = \gamma_1^{(2)} \left(B_1^{(2)} e^{i\alpha_1^{(2)}(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2})} - B_2^{(2)} e^{-i\alpha_1^{(2)}(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2})} \right) + \gamma_3^{(2)} \left(B_3^{(2)} e^{i\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2})} - B_4^{(2)} e^{-i\alpha_3^{(2)}(y_3 + \frac{h^{(2)}}{2})} \right),$$

і т. д. для $u_3^{(1)(0)}$, $u_3^{(2)(0)}$, $u_4^{(1)(0)}$, $u_4^{(2)(0)}$ та прийнято $B_1^{(j)} = B_2^{(j)}$; $B_3^{(j)} = B_4^{(j)}$. В цьому випадку умови контакту та періодичності співпадають, і з формул (7) та (8) одержано систему чотирьох алгебраїчних рівнянь. Прирівнявши визначник цієї системи до нуля отримано дисперсійне рівняння [1].

Числові результати. Дисперсійне рівняння для квазіпоперечних хвиль одержано для довільної форми пружного потенціалу. Для встановлення впливу початкових напружень на закономірності поширення хвиль числове дослідження дисперсійного співвідношення виконаємо в рамках пружного потенціалу типу Трелоара [1]

$$w^{(j)} = c_{10}^{(j)} A_1^{(j)},$$

де $c_{10}^{(j)}$ – пружна стала; $A_1^{(j)}$ – перший алгебраїчний інваріанти тензора деформацій Гріна.

Розрахунки проведемо при наступному початковому стані

$$S_{11}^{0(1)} \neq 0; \quad S_{11}^{0(2)} \neq 0; \quad S_{22}^{0(1)} = S_{33}^{0(1)} = S_{22}^{0(2)} = S_{33}^{0(2)} = 0,$$

та таких відношеннях характеристик шарів

$$\frac{c_{10}^{(1)}}{c_{10}^{(2)}} = 5; \quad \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} = 0,7; \quad m = 1 \text{ та } m = 4,$$

де $m = h^{(2)} / h^{(1)}$ – параметр шаруватості.

Результати розрахунків представлені на рисунках 1–6 для перших п'яти мод. Так на рис. 1 зображено криві, які характеризують залежність величини $C^0 / C_S^{0(2)}$ від параметра $\bar{h} = k_S^{(2)} h^{(2)}$, де $k_S^{(2)}$ та $C_S^{0(2)}$ – це відповідно хвильове число та швидкість поперечних хвиль, що поширюються в ізотропному матеріалі другого шару без початкових напружень; C^0 – фазова швидкість квазіпоперечних хвиль, що поширюються у напрямку вісі ou_1 вздовж шарів нестисливого композитного матеріалу без початкових напружень, який складається із шарів з товщинами $h^{(1)}$ і $h^{(2)}$.

Цифрами 0–4 позначено номери мод. Штриховій лінії відповідає довгохвильове наближення [1].

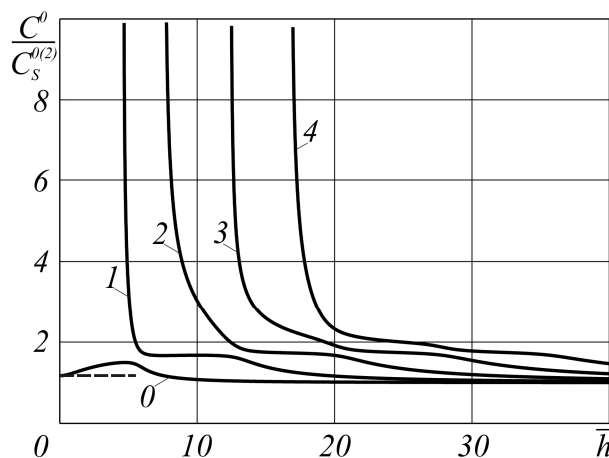


Рисунок 1

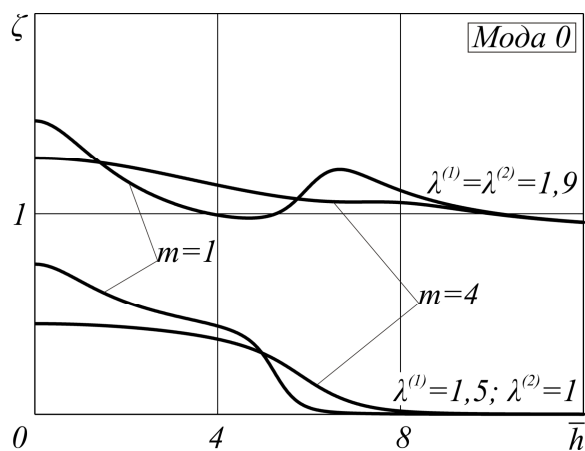


Рисунок 2

На рис. 2–6 відносна зміна фазової швидкості $\zeta = (C^0 - C)C^{0-1}$, викликана початковими напруженнями, зображена як функція параметра \bar{h} , де C – фазова швидкість хвиль в композитному матеріалі з початковими напруженнями. Розрахунки проводилися як у випадку сумісного деформування шарів $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = 1,9$, так і у випадку деформування лише першого шару $\lambda^{(1)} = 1,5; \lambda^{(2)} = 1$. Тут $\lambda^{(1)}$ та $\lambda^{(2)}$ це коефіцієнти видовження у напрямку вісі o_1 у першому та другому шарі відповідно.

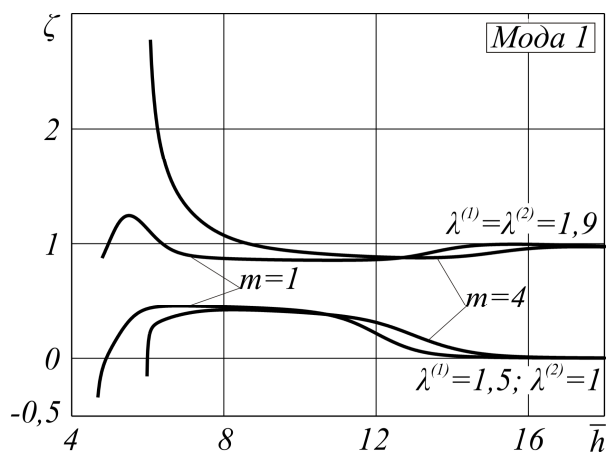


Рисунок 3

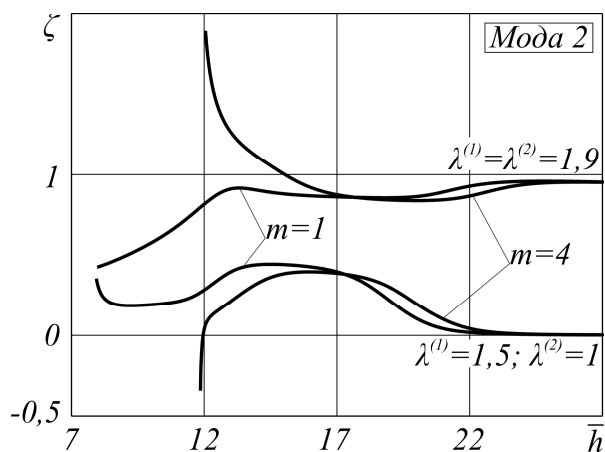


Рисунок 4

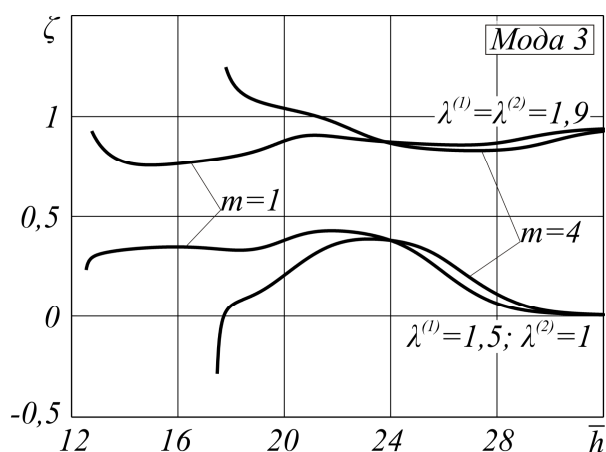


Рисунок 5

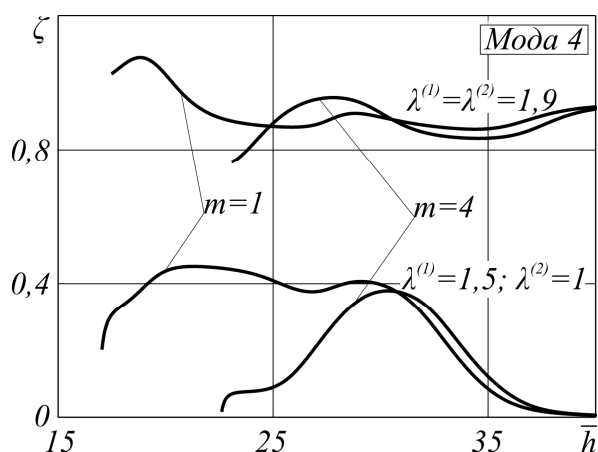


Рисунок 6

Висновки. Проаналізувавши наведені результати можна зробити такі висновки: початкові напруження значно впливають на фазові швидкості хвиль, які зароджуються; кожна мода має діапазон частот, в якому відносна зміна фазової швидкості, викликана початковими напруженнями, істотно залежить від частоти, та існують діапазони, де зміна швидкості мало залежить від частоти; при зміні відношення товщин шарів, змінюються як критичні частоти, так і характер залежності фазової швидкості від початкових напружень та від частоти; при суттєвій зміні коефіцієнтів видовження у випадку сумісного деформування шарів, відбувається значна зміна швидкостей поширення хвиль не лише в околі критичних частот, але й у всьому частотному діапазоні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
2. Ле Минь Кхань. Распространение волн вдоль слоев в слоистых несжимаемых материалах с начальными деформациями // Прикл. механика. – 1976. – 12, № 12. – С. 69-72.

Поступила в редколлегию 29.01.2013

УДК 534.075

НАЗАРЕНКО В.М., д.т.н., професор
ДОВЖИК М.В., провідний інженер

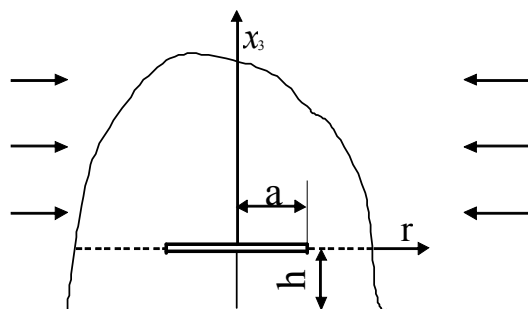
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

РУЙНУВАННЯ ПІВПРОСТОРУ ПІД ЧАС СТИСКУ ВЗДОВЖ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ДИСКОПОДІБНОЇ ТРІЩИНИ, КОЛИ ВІДСТАНЬ МІЖ ТРІЩИНОЮ ТА ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ МАЛА

Вступ. Останнім часом інтенсивно розвивається дослідження руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин. У випадку навантаження матеріалу вздовж площини розташування тріщини використовуються два підходи. Перший базується на використанні наближених розрахункових схем і наближених теорій, в рамках цього підходу найбільше застосування отримало так зване «балочне наближення» [1]. Другий

запропонований в роботах О.М. Гузя [2]. В якості критерію руйнування в цьому випадку використовується критерій локальної втрати стійкості матеріалу в околі тріщини, в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності. У відповідності з цим підходом, процес руйнування ініціюється моментом локальної втрати стійкості матеріалу поблизу тріщини, а критичні параметри стиску визначаються з розв'язання відповідних задач на власні значення, в рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл.

В роботах [2, 3] для різних схем розташування взаємодіючих тріщин визначені критичні укорочення і напруження стиску в залежності від відстаней між тріщинами або тріщиною та вільною поверхнею. Наприклад, для приповерхневої дископодібної тріщини рис.1 $\beta = ha^{-1}$, (h - відстань між вільною поверхнею і площиною тріщини, a - радіус тріщини), в роботі [3] для різних типів потенціалів отримані залежності між β і критичними укороченнями, (напруженнями).



Рисунк 1

При цьому також важливо знати поведінку критичних параметрів для асимптотичних випадків $\beta \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow 0$. У випадку $\beta \rightarrow \infty$, подібна асимптотика отримана в ряді работ, наприклад [3]. В цьому випадку критичні значення напружень стиску прямують до значень, що відповідають ізольованій тріщині.

Для $\beta \rightarrow 0$ в роботах [4, 5] була запропонована аналітично чисельна методика розв'язання таких задач в рамках тривимірної лінеаризованої теорії пружності. Використання наближених розрахункових схем в цьому випадку не дозволяє дослідити це питання, так як для виділеної тріщинами тонкої пластини умови закріплення обираються від вільного опирання до жорсткого закріплення, що дає відмінності в 3.5 рази для круглї пластини під час рівномірного двохвісного стиску.

Постановка задачі. Робота присвячується дослідженню в осесиметричній постановці $S_{33}^0 = 0$, $S_{11}^0 = S_{22}^0 \neq 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, $\lambda_j = const$, задач про руйнування пружного півпростору $x_3 \geq -h$ з приповерхневою дископодібною тріщиною радіуса a у площині $x_3 = 0$, паралельній вільній площині, підчас стиску вздовж площини тріщини рис. 1.

За загальною методикою, запропованою та розвинутою в роботі [3], виконано строгу математичну постановку відповідних граничних задач за допомогою представлення загальних розв'язків через гармонічні потенціальні функції, які за допомогою інтегральних перетворень Ганкеля нульового порядку як у випадку рівних коренів характеристичного рівняння, так і у випадку нерівних коренів характеристичного рівняння зведено до розв'язуючих систем інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду з додатковою умовою

$$\begin{aligned}
 f(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_1(\xi, \eta) f(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_1(\xi, \eta) g(\eta) d\eta &= 0; \\
 g(\xi) + \frac{1}{\pi k} \int_0^1 M_2(\xi, \eta) g(\eta) d\eta - \frac{2}{\pi k} \int_0^1 N_2(\xi, \eta) f(\eta) d\eta + \tilde{C}_1 &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

$$\int_0^1 g(\xi) d\xi = 0 \quad (0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1),$$

де \tilde{C}_1 – невідома стала, пов'язана з допоміжною умовою.

Ядра інтегральних рівнянь мають вигляд

$$\begin{aligned} M_1(\xi, \eta) &= R_1(\eta + \xi) - R_1(1 + \xi) + R_1(\eta - \xi) - R_1(1 - \xi); \\ N_1(\xi, \eta) &= S_1(\eta + \xi) + S_1(\eta - \xi); \quad M_2(\xi, \eta) = S_2(\eta + \xi) + S_2(\eta - \xi); \\ N_2(\xi, \eta) &= R_2(\eta + \xi) - R_2(1 + \xi) + R_2(\eta - \xi) - R_2(1 - \xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Функції, що входять в ядра, обраховуються наступним чином:

- для нерівних коренів характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= 2 \left\{ 2 \frac{k_2}{k} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_2}{k_1} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}; \\ S_1(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left\{ I_1(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_1(2\beta_1, \zeta) + I_1(2\beta_2, \zeta)] \right\}; \\ S_2(\zeta) &= 2 \left\{ 2 \frac{k_1}{k_2} I_0(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left[\frac{k_1}{k_2} I_0(2\beta_2, \zeta) + I_0(2\beta_1, \zeta) \right] \right\}; \\ R_2(\zeta) &= \frac{(k_1 + k_2)}{k} \left\{ I_{-1}(\beta_1 + \beta_2, \zeta) - \frac{1}{2} [I_{-1}(2\beta_1, \zeta) + I_{-1}(2\beta_2, \zeta)] \right\}; \\ I_0(\rho, \zeta) &= \rho(\zeta^2 + \rho^2)^{-1}; \quad I_{-1}(\rho, \zeta) = -\frac{1}{2\beta} \ln(\zeta^2 + \rho^2); \end{aligned} \quad (3)$$

$$I_1(\rho, \zeta) = \beta(\rho^2 - \zeta^2)(\zeta^2 + \rho^2)^{-2}; \quad \beta = ha^{-1}; \quad \beta_i = \beta(n_i^0)^{-1/2}, \quad i = 1, 2;$$

- для рівних коренів характеристичного рівняння

$$\begin{aligned} R_1(\zeta) &= -2 \left[\frac{k}{2} L_0(\zeta) + \frac{1}{k} L_2(\zeta) + L_1(\zeta) \right]; \quad R_2(\zeta) = -\frac{1}{k} L_1(\zeta); \\ S_1(\zeta) &= -\frac{1}{k} L_3(\zeta); \quad S_2(\zeta) = -2 \left[\frac{k}{2} L_0(\zeta) + \frac{1}{k} L_2(\zeta) - L_1(\zeta) \right]; \quad L_0(\zeta) = \frac{\beta_1}{\beta_1^2 + \zeta^2}; \\ L_1(\zeta) &= \frac{\beta_1}{2} \frac{\beta_1^2 - \zeta^2}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^2}; \quad L_2(\zeta) = \frac{\beta_1^3}{2} \frac{4\beta_1^2 - 3\zeta^2}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^3}; \quad L_3(\zeta) = \frac{\beta_1}{2} \frac{\zeta^4 - 6\beta_1^2\zeta^2 + \beta_1^4}{(\beta_1^2 + \zeta^2)^4}; \\ \beta_1 &= 2(n_1^0)^{-1/2} \beta, \quad \beta = ha^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Методи обчислення. Для подальших досліджень використовувався метод запропонований в роботах [4, 5]. Для пошуку критичних укорочень, видовжень і напружень з інтегральних рівняннях (1) розроблено процедуру, побудовану на методі Бубнова-Гальоркіна. В якості системи координатних функцій використовувались степеневі функції

$$f(x) = \sum_{i=0}^N F_i x^i, \quad g(x) = \sum_{i=0}^N G_i x^i. \quad (5)$$

На відміну від попередніх робіт [2, 3], де після підстановки координатних функцій (5) у систему інтегральних рівнянь (1) при подальшому дослідженні відразу проводилось чисельне інтегрування системи, запропонована чисельно-аналітична методика, яка дозволяє, використовуючи сучасний пакет символічних розрахунків,

аналітично порахувати інтеграли від ядер інтегральних рівнянь для обраної системи координатних функцій. Це дозволило при подальших розрахунках отримати більшу точність за рахунок виключення похибок чисельного інтегрування, та того, що чисельні обрахунки проводились на самому останньому етапі дослідження.

Для збільшення швидкості розрахунків інтегралів було використано алгоритм, який використовує рекурентні співвідношення. Для подальших розрахунків використано наступні функції:

$$\begin{aligned} L(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x+y)^2)^2} dx; & V(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x-y)^2)^2} dx; \\ LL(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x+y)^2)^4} dx; & VV(n) &= \int_0^1 \frac{x^n}{(a^2 + (x-y)^2)^4} dx, \end{aligned} \quad (6)$$

для обрахунку яких отримано наступні рекурентні співвідношення

$$\begin{aligned} L(n) &= \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1+y)^2} - 2y(n-2)L(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)L(n-2) \right); \quad (n \neq 3) \\ V(n) &= \frac{1}{n-3} \left(\frac{1}{a^2 + (1-y)^2} + 2y(n-2)V(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)V(n-2) \right); \quad (n \neq 3) \\ LL(n) &= \frac{1}{n-7} \left(\frac{1}{(a^2 + (x+y)^2)^3} - 2y(n-4)LL(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)LL(n-2) \right); \quad (n \neq 7) \\ VV(n) &= \frac{1}{n-7} \left(\frac{1}{(a^2 + (1-y)^2)^3} + 2y(n-4)VV(n-1) - (a^2 + y^2)(n-1)VV(n-2) \right). \quad (n \neq 7) \end{aligned}$$

Використання рекурентних співвідношень дозволило суттєво скоротити час, який витрачає математичний пакет на обрахунки інтегралів з функцій (3), (4), які входять в ядра (2) системи інтегральних рівнянь (1).

Після підстановки координатних функцій (2) в парні інтегральні рівняння (1) та використання функцій (6), для інтегрування ядер інтегральних рівнянь Фредгольма, систему інтегральних рівнянь (1) як у випадку рівних коренів, так і в випадку нерівних коренів, було зведено до системи з $2(N+1)+1$ рівнянь з такою самою кількістю невідомих величин $F_i, G_i, \tilde{C}_1, i \in [0, N]$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N F_i F_{1ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{1ji} = 0; & \quad \sum_{i=0}^N F_i F_{2ji} + \sum_{i=0}^N G_i G_{2ji} + \tilde{C}_1 = 0; \\ \sum_{i=0}^N \frac{1}{i+1} G_i = 0, & \quad 0 \leq j \leq N, \end{aligned} \quad (7)$$

де F_{kji}, G_{kji} – точні вирази, пораховані використовуючи символні розрахунки, які залежать від безрозмірної відстані між тріщиною і вільною поверхнею $\beta = ha^{-1}$ та величин $n_1^0, n_2^0, k_1, k_2, k$.

Результати роботи. На прикладі різних матеріалів наводяться результати чисельних досліджень системи (7), отримані для випадку *нерівних коренів* – матеріал з потенціалом Трелоара; випадку *рівних коренів* – матеріали з потенціалом Бартенєва-Хазановича. У всіх випадках під час розрахунків використовувалось 20 координатних функцій.

Таблиця 1

β	ε_{Tr}	A_{Tr}	ε_B	A_B
$9 \cdot 10^{-2}$	$5.961 \cdot 10^{-3}$	-8.831	$5.960 \cdot 10^{-3}$	-2.248
$8 \cdot 10^{-2}$	$4.761 \cdot 10^{-3}$	-8.928	$4.761 \cdot 10^{-3}$	-2.264
$7 \cdot 10^{-2}$	$3.685 \cdot 10^{-3}$	-9.025	$3.685 \cdot 10^{-3}$	-2.281
$6 \cdot 10^{-2}$	$2.737 \cdot 10^{-3}$	-9.125	$2.737 \cdot 10^{-3}$	-2.300
$5 \cdot 10^{-2}$	$1.922 \cdot 10^{-3}$	-9.228	$1.922 \cdot 10^{-3}$	-2.320
$4 \cdot 10^{-2}$	$1.244 \cdot 10^{-3}$	-9.333	$1.244 \cdot 10^{-3}$	-2.342
$3 \cdot 10^{-2}$	$7.081 \cdot 10^{-4}$	-9.442	$7.081 \cdot 10^{-4}$	-2.365
$2 \cdot 10^{-2}$	$3.184 \cdot 10^{-4}$	-9.553	$3.184 \cdot 10^{-4}$	-2.391
$1 \cdot 10^{-2}$	$8.057 \cdot 10^{-5}$	-9.669	$8.057 \cdot 10^{-5}$	-2.418
$1 \cdot 10^{-3}$	$8.146 \cdot 10^{-7}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-7}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-4}$	$8.151 \cdot 10^{-9}$	-9.781	$8.151 \cdot 10^{-9}$	-2.445
$1 \cdot 10^{-5}$	$8.148 \cdot 10^{-11}$	-9.777	$8.148 \cdot 10^{-11}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-6}$	$8.146 \cdot 10^{-13}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-13}$	-2.444
$1 \cdot 10^{-9}$	$8.146 \cdot 10^{-19}$	-9.775	$8.146 \cdot 10^{-15}$	-2.444

Так, в другій та четвертій колонках таблиці 1 наведені результати чисельного розрахунку залежностей критичних укорочень ($\varepsilon = 1 - \lambda_1$) від малих безрозмірних відстані між вільною площиною та площиною тріщини $\varepsilon(\beta)$ в матеріалі з потенціалом Трелоара та потенціалом Бартенєва-Хазановича.

При використанні наближених розрахункових схем критичні напруження для плоскої пластини підчас стиску мають наступний вигляд:

$$\sigma_{кр} = K \frac{E}{12(1-\nu^2)} \frac{b^2}{a^2}, \quad (8)$$

де a – товщина пластини, b – радіус пластини, K – коефіцієнт, який залежить від способу закріплення пластини.

Так, для тонкої пластини критичні напруження (8) можна знайти у вигляді $\sigma_{кр} = A_{кр} \beta^2 C_{10}$ для матеріалу з потенціалом Трелоара, де $A_{кр}$ – коефіцієнт, який залежить від способу закріплення пластини: для жорстко закріпленої пластини $A_{кр} = -9.787$, для вільно опертої пластини $A_{кр}^* = -2.8$. Для матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича відповідно $\sigma_{кр} = (2\mu) A_{кр} \beta^2$, для жорстко закріпленої пластини $A_{кр} = -2.447$, для вільно опертої пластини $A_{кр}^* = -0.700$.

Із припущення, що для малих β критичні напруження σ_{11}^0 поводять себе, як $\sigma_{11}^0 = A_{Tr} \beta^2 C_{10}$ - для матеріалу з потенціалом Трелоара або $\sigma_{кр} = (2\mu) A_B \beta^2$ - для матеріалу з потенціалом Бартенєва-Хазановича, в таблиці 1 визначені значення коефіцієнту A .

Наведені в таблиці 1 результати показують, що вже при $\beta < 0.01$ розбіжність отриманих результатів та результатів для наближених розрахункових схем у випадку жорсткого закріплення кругової пластини буде менше 1%.

Найменші значення безрозмірної відстані β , для якої були проведені розрахунки, дорівнює 10^{-9} , при цьому різниця в значеннях між отриманими значеннями коефіцієнта A і $A_{кр}$ не перевищила 0.2%.

Висновки. Для тіла з при поверхневою тріщиною отримані критичні параметри руйнування для малих значень відносних відстаней між тріщиною та вільною поверхнею аж до 10^{-9} . Показано, що при малих β різниця між критичними напруженнями для приповерхневої дископодібної тріщини і критичними напруженнями для жорстко закріпленої пластини, якою моделюють матеріал з тріщиною в наближених розрахункових схемах для всіх типів розглянутих потенціалів менше 1% для відстаней менших 0.01.

З аналізу отриманих результатів можна визначити критерії застосовності наближених розрахункових схем як з точки зору тонкостінності елемента, що відокремлюється: – наближені розрахункові схеми працюють для $\beta < 0.01$, так і з точки зору умов закріплення: – в наближених розрахункових схемах для приповерхневої дископодібної тріщини необхідно обирати жорстке закріплення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Obreimoff I.W. The splitting strength of mica / Obreimoff I.W. // Proc. Roy. Soc. of London. – 1930. – 127 A. – P. 290–297.
2. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1983. – 296 с.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения материалов при сжатии вдоль трещин (обзор). Высокоэластичные материалы / Гузь А.Н., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 1989 – 25, №9. – С 3–32.
4. Гузь А.Н. Разрушение материалов при сжатии вдоль приповерхностной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Гузь А.Н., Довжик М.В., Назаренко В.М. // Прикл. механика. – 2011. – 47, №6. – С. 28 – 37.
5. Довжик М.В. Разрушение полупространства при сжатии вдоль приповерхностной дискообразной трещины для малых расстояний между свободной поверхностью и трещиной / Довжик М.В. // Прикл. механика. – 2012. – 48, №3. – С. 79 – 88.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 519.6

ТОНКОНОГ Е.А. ассистент
ХУДАЯ Ж.В. к.физ.-мат.н., доцент
СТЕБЛЯНКО П.А. д.физ.-мат.н., профессор

Днепродзержинский государственный технический университет

ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ СПЛАЙНОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, МОДЕЛИРУЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ С ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Введение. Рассматривается задача о движении тела с вязким трением. Сила вязкого трения пропорциональна скорости относительного движения тела. При увеличении скорости тела меняется сопротивление. Рассмотрим ситуацию, когда с увеличением скорости сопротивление уменьшается, а когда скорость достигает определенного значения ситуация меняется. Скорость начинает падать, а сила сопротивления начинает увеличиваться. Моделью описанного процесса является задача Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, характеризующими состояние динамического объекта. На первом этапе находится решение задачи, в которой слагаемое характеризующее

силу трения представляет собой убывающую функцию. При этом вводится дополнительное условие - ограничение скорости. В момент времени, когда скорость достигает нужного предела, мы переходим ко второму этапу. Снова решаем задачу Коши, но теперь слагаемое, характеризующее силу трения, представляет собой возрастающую функцию, а в качестве начальных условий используем значения, полученные на предыдущем этапе.

Постановка задачи. Рассматривается модель колебательного процесса вида

$$x'' - p(t)x' + q(t)x = f(t), \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad (2)$$

где $p(t), q(t), f(t)$ - дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Нужно найти приближенное решение данной задачи до момента t^* , когда скорость достигает определенного значения

$$x'(t^*) = x^*. \quad (3)$$

Далее вычислить значение t^* , для которого выполнено условие (3), а затем найти приближенное решение задачи

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t), \quad (4)$$

$$y(t^*) = x(t^*), \quad y'(t^*) = x^*. \quad (5)$$

Идея построения метода нахождения решения поставленной задачи, изложена в работах [1], [2]. Для решения этого вопроса разработана сплайн-коллокационная схема, позволяющая найти приближенное решение в аналитическом виде в произвольной точке области определения уравнений (1), (4) и при этом повысить точность найденного решения по сравнению с классической коллокационной схемой.

Результаты работы. Приближенное решение задачи (1) – (2) будем искать в виде кубического сплайна по равномерному разбиению Δ
 $\Delta = \{t_i | t_i = ih, \quad h > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots\}$

$$S_3(t) = \sum_{i=-1}^{\infty} C_i B_3\left(\frac{t}{h} - i\right), \quad (6)$$

где $B_3\left(\frac{t}{h} - i\right)$ – нормализованный кубический В-сплайн.

При построении дискретной модели будем руководствоваться условиями совпадения приближенного решения $S_3(t)$ с точным решением задачи (1) – (2) в узлах равномерного разбиения Δ . Тогда дискретную модель можно записать в виде

$$\begin{cases} S(0) = y_0, \quad S'(0) = y'_0 \\ S''(t_i)\left(1 + \frac{h^2}{12}\eta_i\right) + S'(t_i)\left(p_i + \frac{h^2}{12}\alpha_i\right) + \\ + S(t_i)\left(q_i + \frac{h^2}{12}\beta_i\right) = f_i + \frac{h^2}{12}\theta_i; \quad (i \geq 1) \end{cases} \quad (7)$$

где $p_i = p(t_i), q_i = q(t_i), f_i = f(t_i)$,

$$\begin{aligned} \eta_i &= \mu_i(p_i^2 - 2p_i' - q_i); \quad \alpha_i = \mu_i(p_i q_i + p_i p_i' - p_i'' - 2q_i'); \\ \beta_i &= \mu_i(q_i' p_i - q_i''); \quad \theta_i = \mu_i(p_i f_i' - f_i''), \quad (i \geq 1) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mu_1 = \frac{11}{6}; \quad \mu_2 = \frac{4}{6}; \quad \mu_3 = \mu_4 = \dots = 1.$$

Целесообразность выбора добавок (8) обоснована в работе [2]. Для определения коэффициентов сплайна (6) используем известные значения В-сплайна и его производных в узлах разбиения Δ . Поскольку сплайн (6) является решением дискретной модели (7), то после подстановки значений В-сплайна и его производных в узлах приходим к расчетной схеме относительно коэффициентов сплайна

$$\begin{cases} C_{-1} + 4C_0 + C_1 = y_0, \\ C_1 - C_{-1} = 2h y'_0, \\ C_1 - 2C_0 + C_{-1} = h^2(f_0 - q_0 y_0 - p_0 y'_0), \\ (1 + \eta_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i-1} - 2C_i - C_{i+1}}{h^2} + (p_i + \alpha_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i+1} - C_{i-1}}{2h} + \\ + (q_i + \beta_i \frac{h^2}{12}) \frac{C_{i+1} + 4C_i + C_{i-1}}{6} = f_i + \theta_i \frac{h^2}{12}; \quad (i \geq 1) \end{cases} \quad (9)$$

где добавки $\eta_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i$ вычисляются по формулам (8).

Для удобства вычисления коэффициентов C_i сплайна (6) вместо системы (9) предлагается использовать схему типа Адамса:

$$C_0 = y_0 - \frac{h^2}{6}(f_0 - q_0 y_0 - p_0 y'_0),$$

$$C_1 = y_0 + h y'_0 + \frac{h^2}{3} y''_0,$$

$$C_{i+1} = K_i \cdot C_i - M_i C_{i-1} + G_i, \quad (i \geq 1), \quad (10)$$

где

$$K_i = \frac{2 + \frac{1}{6} \eta_i h^2 - \frac{2}{3} q_i h^2 - \beta_i \frac{h^4}{18}}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (11)$$

$$M_i = \frac{1 - \frac{1}{2} p_i h + \frac{1}{6} q_i h^2 + \frac{1}{12} \eta_i h^2 - \frac{1}{24} \alpha_i h^3 + \frac{1}{72} \beta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (12)$$

$$G_i = \frac{f_i h^2 + \frac{1}{12} \theta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (13)$$

Преимущество предложенной нами схемы в том, что, обладая той же устойчивостью, что и схемы типа Адамса она имеет более высокую точность.

Подставляя значения коэффициентов C_i сплайна (6), найденные по схеме (10)-(13) и явный вид В-сплайнов на каждом участке $[t_v, t_{v+1}]$, $v = 0, 1, 2, \dots$, учитывая, что

$z = \frac{t}{h} - v$, ($z \in [0, 1]$), сплайн-решение (6) запишем в виде

$$S(t) = C_V \left(\frac{2}{3} - z^2 + \frac{z^3}{2} \right) + C_{V+1} \left(\frac{2}{3} - (1-z)^2 + \frac{(z-1)^3}{2} \right) + C_{V+2} \cdot \frac{z^3}{6} + C_{V-1} \cdot \frac{(1-z)^3}{6}. \quad (14)$$

Вычислив производную сплайна (14) и приравняв ее заданному значению скорости x'_* , находим искомое значение t^* , при достижении которого переходим к решению задачи (4)-(5).

Приближенное решение задачи (4) – (5) будем искать в виде кубического сплайна по равномерному разбиению Δ ($\Delta = \{t_i | t_i = t^* + ih, h > 0, i = 0, 1, 2, \dots\}$)

$$\tilde{S}_3(t) = \sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{C}_i B_3 \left(\frac{t-t^*}{h} - i \right), \quad (15)$$

где $B_3 \left(\frac{t-t^*}{h} - i \right)$ – нормализованный кубический В-сплайн.

Проводя аналогичные рассуждения, как и для задачи (1) – (2) приходим к системе

$$\begin{cases} \tilde{S}(0) = S(t^*), & \tilde{S}'(0) = x'_*, \\ \tilde{S}''(t_i) \left(1 + \frac{h^2}{12} \eta_i \right) + \tilde{S}'(t_i) \left(p_i + \frac{h^2}{12} \alpha_i \right) + \\ + \tilde{S}(t_i) \left(q_i + \frac{h^2}{12} \beta_i \right) = f_i + \frac{h^2}{12} \theta_i; & (i \geq 1) \end{cases} \quad (16)$$

где добавки $\eta_i, \alpha_i, \beta_i, \theta_i$ вычисляются по формулам (8), а $p_i = p(t^* + ih), q_i = q(t^* + ih), f_i = f(t^* + ih)$,

Откуда коэффициенты сплайна вычисляются по следующей схеме

$$\begin{aligned} \tilde{C}_0 &= S(t^*) - \frac{h^2}{6} (f_0 - q_0 S(t^*) + p_0 x'_*), \\ \tilde{C}_1 &= S(t^*) + h x'_* + \frac{h^2}{3} (f_0 - q_0 S(t^*) + p_0 x'_*), \\ \tilde{C}_{i+1} &= \tilde{K}_i \cdot \tilde{C}_i - \tilde{M}_i \tilde{C}_{i-1} + \tilde{G}_i, \quad (i \geq 1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{где } \tilde{K}_i = \frac{2 + \frac{1}{6} \eta_i h^2 - \frac{2}{3} q_i h^2 - \beta_i \frac{h^4}{18}}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (18)$$

$$\tilde{M}_i = \frac{1 - \frac{1}{2} p_i h + \frac{1}{6} q_i h^2 + \frac{1}{12} \eta_i h^2 - \frac{1}{24} \alpha_i h^3 + \frac{1}{72} \beta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (19)$$

$$\tilde{G}_i = \frac{f_i h^2 + \frac{1}{12} \theta_i h^4}{1 + \frac{p_i h}{2} + \frac{q_i h^2}{6} + \frac{\eta_i h^2}{12} + \frac{\alpha_i h^3}{24} + \frac{\beta_i h^4}{72}} \quad (20)$$

Подставляя значения коэффициентов \tilde{C}_i сплайна (15), найденные по схеме (17)-(20) и явный вид В-сплайнов на каждом участке $[t_v, t_{v+1}]$, $v = 0, 1, 2, \dots$, учитывая, что $z = \frac{t-t^*}{h} - v$, ($z \in [0, 1]$), сплайн-решение (6) запишем в виде

$$\tilde{S}(t) = \tilde{C}_v \left(\frac{2}{3} - z^2 + \frac{z^3}{2} \right) + \tilde{C}_{v+1} \left(\frac{2}{3} - (1-z)^2 + \frac{(z-1)^3}{2} \right) + \tilde{C}_{v+2} \cdot \frac{z^3}{6} + \tilde{C}_{v-1} \cdot \frac{(1-z)^3}{6}. \quad (21)$$

Таким образом, получено аналитическое решение на втором этапе решения задачи. Вычислив производную от (21) мы можем проследить за изменением скорости, а так же за изменением силы сопротивления.

Рассмотрим примеры применения предложенных схем. Приведем графическую визуализацию результатов решения.

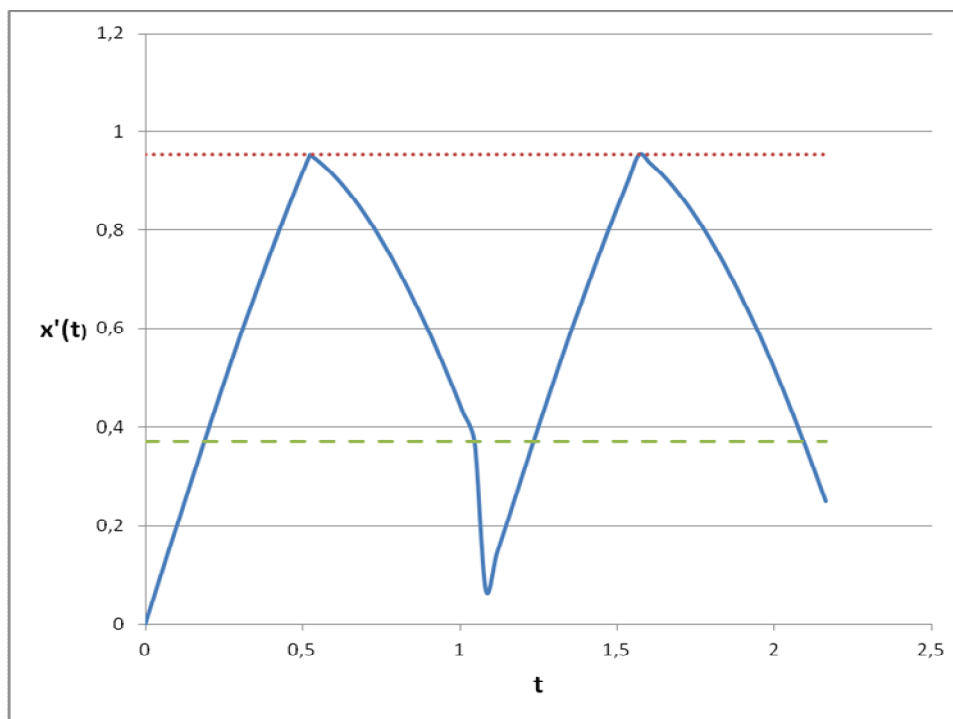
Рассматривается задача Коши

$$x'' - \sin t \cdot x' + \cos t \cdot x = 2 \cos t - t \sin t - \sin^2 t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

и вводятся ограничения по скорости $x'(t^*) = 0,9$; $x'_{\min} = 0,37$.

При достижении $x'(t)$ значения x^* , задача меняется, и мы решаем

$$x'' + \sin t \cdot x' + \cos t \cdot x = 2 \cos t - t \sin t - \sin^2 t, \quad x(0,48) = 0,27; \quad x'(0,48) = 0,9.$$



..... максимальное значение скорости
 - - - - - минимальное значение скорости

Рисунок 1 – График изменения скорости при введении ограничений

Выводы. Разработан метод решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, являющейся моделью, описывающей движение с вязким трением. Предложенный метод построен на основе кубических сплайнов. Метод является эффективным и удобным в применении. Он позволяет получить решение в аналитическом виде на всей области определения задачи с более высокой точностью по сравнению с обычными коллокационными методами. Данный метод дает возможность решать задачи, в которых исследуется вопрос об изменении силы сопротивления в зависимости от изменения скорости движущегося тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю.С., Квасов Б.И.,
2. Мирошниченко В.Л. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
3. Худая Ж.В. О сплайн-схеме повышенной точности решения задачи Коши / Худая Ж.В., Дронов С.Г. // Приближение функций и суммирование рядов. –Д., 1992. – С.29–38.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 629.02

САСОВ А.А., к.т.н., доцент
КУЛЬШЕНКО В.В., магистрант

Днепродзержинский государственный технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМПОНЕНТОВ АГРЕССИВНОЙ СРЕДЫ ДОРОЖНОГО ПОЛОТНА НА КОРРОЗИЮ ДНИЩА И ЭЛЕМЕНТЫ КУЗОВА АВТОБУСОВ

Введение. Срок службы современных автобусов в значительной степени зависит от коррозионной стойкости кузова, в особенности его днища, так как уже через 2,5...3 года после начала эксплуатации автобуса на нем появляются первые очаги коррозии, а через 4...5 лет начинаются разрушения усилителей днища кузова и мест присоединения несущих стоек. Потери металла от коррозии кузовов легковых автомобилей за период полной эксплуатации составляют 35...40%, а кузовов автобусов за 6...7 лет эксплуатации - 60% от их стоимости.

Основными причинами коррозионных разрушений являются агрессивные загрязнения автомобильных дорог, промышленные отработанные газы, химические средства, применяемые для борьбы с обледенением дорог в зимнее время и т.п.

Практика эксплуатации автобусов показывает, что надежно защищать их кузова от коррозии с помощью применяемых в настоящее время средств не удастся, т.к. все они быстро подвергаются абразивному изнашиванию, растрескиваются и отслаиваются.

Все применяемые для противокоррозионной защиты кузовов автомобилей и автобусов составы имеют повышенное влагопоглощение. В них отсутствуют ингредиенты, вытесняющие частицы влаги и заполняющие микро- и макропоры в высыхающей пленке. Поэтому разработка способов повышения стойкости днищ кузовов автобусов к воздействию агрессивных компонентов загрязнения дорожного

полотна с использованием недефицитных и недорогих средств, а так же установление рациональной периодичности их противокоррозионной обработки с учетом местных условий эксплуатации автобусов является актуальной задачей.

Изложение основного материала. К основным видам изнашивания деталей автотранспорта можно отнести механическое, молекулярно-механическое и коррозионно-механическое. Последнее является следствием действий ряда случайных факторов и во многих случаях превалирует над другими видами изнашивания. Кузов в коррозионном отношении более уязвим, чем другие узлы автобуса. Зная закономерности износа деталей автобуса во времени, можно прогнозировать ресурс их работы и разрабатывать пути по обеспечению их сохранности.

Характер износа 60...70% деталей автобусов от наработки, в том числе и днища, в общем виде определяется уравнением регрессии [1]:

$$y = y_n + \alpha L \quad (1)$$

В нем не учтено влияние коррозии деталей. Известно, что коррозионный износ описывается уравнением вида:

$$y_k = \alpha_1 L^b \quad (2)$$

где α_1, b - коэффициенты уравнения регрессии; L - наработка автобуса, км, тыс. км.

Тогда общее уравнение износа деталей автобуса выразится суммой выражений (1) и (2).

$$y_{\text{общ}} = y_n + \alpha L + \alpha_1 L^b \quad (3)$$

а удельная степень износа деталей будет представлять первую производную от наработки автобуса:

$$\frac{dy}{dL} = \alpha + \alpha_1 b L^{b-1} \quad (4)$$

Сокращение ресурса детали оценивается величиной его изменения от действия коррозии (рис. 1).

$$\Delta L = L_p - L_d \quad (5)$$

где L_p – наработка автобуса до допустимого износа без учета действия коррозии, км; L_d – то же с учетом действия коррозии, км

Скорость проникновения коррозии вглубь конструкционного материала обычно оценивают отношением величины глубины к единице времени, например, мм/год. Зная эти закономерности, можно определить срок службы изделия и разработать мероприятия по предотвращению или уменьшению интенсивности точечной коррозии.

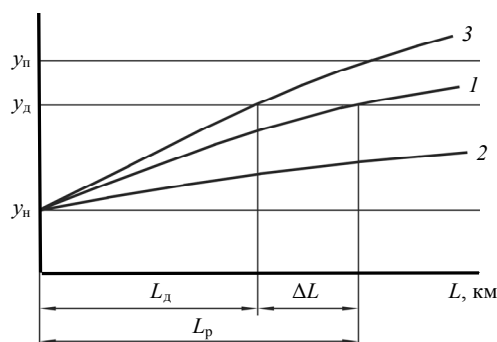


Рисунок 1 – Зависимость суммарного (3) износа детали при совместном влиянии коррозии (1) и наработки (2)

L_p – пробег автобуса без учета действия коррозии, км; L_d – пробег до величины допустимого износа с учетом действия коррозии, км; ΔL - сокращение пробега автобуса от действия коррозии, км.

По характеру начало появления очагов коррозии на окрашенной поверхности соединяемых деталей можно условно разделить на два вида: возможность развития щелевой и точечной коррозии. В узких зазорах практически всегда присутствует электролит. Интенсивность коррозии в щелях и зазорах (щелевая коррозия) значительно выше, чем на открытых поверхностях, т.к. анодные процессы здесь протекают при более отрицательных потенциалах. Наиболее опасны с точки зрения коррозии щели и зазоры величиной 0,2 – 0,4 мм.

Завод-изготовитель наружные поверхности кузова автобуса защищает от действия атмосферных и других разрушающих факторов нанесением лакокрасочных или защитных покрытий. Но через эти покрытия происходит диффузия влаги, для которой необходимы два условия: 1) наличие вблизи рассматриваемой молекулы свободного пространства («дырки»); 2) наличие необходимого количества энергии. При этом целостность покрытия сохраняется довольно длительное время, пока увеличивающиеся в объеме продукты коррозии не прорвут пленку покрытия.

Разрушение пленки противокоррозионного покрытия можно отнести к категории постепенных отказов, для распределения которых наиболее близко подходит нормальный закон распределения, характеризующийся средней арифметической (средним сроком службы покрытия) \bar{x} и среднеквадратическим отклонением (мерой рассеивания отказов относительно среднего срока службы) S . Рациональную периодичность обработки днища кузова можно определить по выражению:

$$x_{об} = \bar{x} \pm S \quad (6)$$

Покрытия и днище кузова автобуса в процессе эксплуатации подвержены действию коррозионных агентов дорожных и климатических условий. Примером этого является влияние противогололедных материалов (натрий хлористый технический карьерный), аммиака, сульфатов и окислов азота. При разработке мер защиты необходимо выявить влияние нескольких одновременно действующих агрессивных компонентов. Поскольку эти составляющие легко растворяются в конденсированном на поверхности деталей кузова слое влаги и загрязнениях дорожного покрытия, то в первом приближении их действие можно моделировать в водных растворах.

Оценку влияния агрессивных факторов дорожного полотна на интенсивность коррозии стали и влагопоглощение пленки защитного состава можно проводить методом многофакторного эксперимента, который предусматривает получение нескольких серий значений искомых показателей при различных значениях варьируемых переменных [2].

При этом воспроизводимость экспериментов оценивалась по критерию Кохрена:

$$G_p = \frac{S_j^2 \max}{\sum S_j^2}, \quad (7)$$

значимость коэффициентов уравнения регрессии – с использованием критерия Стьюдента:

$$t_r = \frac{r}{S_r} > t_{таб} (P=0,05; v = n-2), \quad (8)$$

а проверку адекватности остаточного уравнения к первоначальному проверяли по критерию Фишера:

$$F_i = \frac{\max\{S_{ay}^2 : S^2\}}{\max\{S_{ay}^2 : S^2\}} \leq F_{табл} [\gamma; v_1 = B - 1 : v_2 = N(m - 1)], \quad (9)$$

Выводы. Зная закономерности износа деталей автотранспорта во времени, можно прогнозировать ресурс их работы и разрабатывать пути по обеспечению их сохранности. Основными причинами коррозионных разрушений являются агрессивные загрязнения автомобильных дорог, промышленные отработанные газы, химические средства, применяемые для борьбы с обледенением дорог в зимнее время и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Павлов В.С., Рязанов В.Е., Фадеев И.В. Влияние составляющих загрязнений полотна автомобильных дорог на коррозию деталей автомобилей //Актуальные проблемы эксплуатации автотранспортных средств. Международная научно-практическая конференция, посвящ. 80-летию И.Н. Арину, 20 - 22 ноября 2007. -Владимир, 2007.-с. 142 - 143.
2. Рязанов В.Е., Фадеев И.В., Павлов В.С. Коррозионная активность загрязнений полотна автомобильных дорог // Проблемы и перспективы развития инновационной деятельности в агропромышленном производстве. Уфимский гос. аграрный университет. - Уфа: 2007. - с.92-93.

Поступила в редколлегию 08.02.2013

УДК 539.3

БОГДАНОВ С.Ю., к.физ.-мат.н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ПОДКРЕПЛЁННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Введение. Теория обобщённых функций находит всё большее применение при решении задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек. В данной статье выведены и проанализированы уравнения движения и граничные условия для подкреплённых шпангоутами цилиндрических оболочек в классе обобщённых функций и показано, что данные уравнения позволяют решать задачи динамики подкреплённых цилиндрических оболочек с различными условиями контакта ребра с оболочкой.

1. Постановка задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обычных функций. Подкреплённая оболочка рассматривается как система, состоящая из оболочки (обшивки) и соединённых с ней ребер по линии контакта. Оболочка и подкрепляющие рёбра описываются по теории типа Тимошенко. Условия контакта оболочки и ребер могут быть самыми произвольными – либо жёсткими, либо подвижными. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что оболочка подкреплена одним ребром в некоторой точке $x = x_r$. В этой точке определённым образом заданы условия контакта. Оболочка имеет длину L , т.е. пространственная переменная x изменяется на отрезке $[0, L]$. Временная переменная изменяется на отрезке $t \in [0, T]$. В прямоугольнике $Q_T = [0, L] \times [0, T]$ рассматривается следующая начально – краевая задача :определить тройку функций $\{u(x, t), w(x, t), \varphi(x, t)\}$ удовлетворяющих в Q_T системе уравнений в частных производных :

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{T_{yy}}{R} = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + P(t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_{xz} = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Соотношения для деформаций – перемещений имеют вид:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi, \quad \chi_{xx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2)$$

Соотношения упругости для изотропного материала выражаются зависимостями:

$$T_{xx} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}), \quad T_{yy} = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}), \quad Q_{xz} = G_{xz} k' h \varepsilon_{xz},$$

$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \chi_{xx} \quad (3)$$

где k' – коэффициент сдвига.

Начальные условия

$$u(x, 0) = u_0, \quad w(x, 0) = w_0, \quad \varphi(x, 0) = \varphi_0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = w_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1 \quad (4)$$

где $u_0, w_0, \varphi_0, u_1, w_1, \varphi_1$ – известные функции координаты x .

Граничные условия предполагаются соответствующими для каждой конкретной задачи.

В точке $x = x_r$ заданы условия сопряжения ребра с оболочкой.

В соотношениях (1) - (4) введены общепринятые обозначения теории оболочек [2].

2. Постановка задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обобщённых функций. Уравнения движения. Граничные условия. Отличительной особенностью рассматриваемого класса задач есть разрывность производных от функций перемещений срединной поверхности $u(x, t), w(x, t), \varphi(x, t)$ в точке $x = x_r$. Поэтому имеет смысл рассмотреть поставленную выше задачу в классе обобщённых функций, привлечь для её решения аппарат теории обобщённых функций. Для этого используем правило обобщённого дифференцирования кусочно абсолютно непрерывной функции с кусочной абсолютно непрерывной производной, точкой разрыва $x = x_r$ и соответствующим скачком. Производную по пространственной координате заменяем на производную в смысле пространства распределений K' с исправленными слагаемыми, составленными из произведений скачков функции и её производных на δ -функцию и её производные. Обобщённая производная m -го порядка кусочно-непрерывной функции, имеющей скачок в точке $x = x_r$ имеет вид

$$f^{(m)}(x) = \{f^{(m)}(x)\} + [f]_{x=x_r} \delta^{(m-1)}(x - x_r) + \dots + \left[\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}} \right]_{x=x_r} \delta(x - x_r) \quad (5)$$

где $\{f^{(m)}(x)\}$ – производная m -го порядка функции $f(x)$ в классическом смысле, $\left[\frac{\partial f^{(i)}}{\partial x^i} \right]_{x=x_r}$ $i=0, \dots, m-1$ – скачки функции в точках установки рёбер. Расписав,

учитывая соотношения (5) систему уравнений движения в перемещениях и собирая члены с одинаковым порядком производной от δ -функции, получаем систему

уравнений движения подкреплённой цилиндрической оболочки в обобщённых функциях:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} - [T_{xx}]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - \frac{Eh}{1 - \nu^2} [u]_{x=x_r} \delta'(x - x_r) \\ \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tilde{Q}_{xz}}{\partial x} - \frac{\tilde{T}_{yy}}{R} - [Q_{xz}]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - G_{xz} k' h [w]_{x=x_r} \delta'(x - x_r) - \\ &- \frac{Eh}{1 - \nu^2} [u]_{x=x_r} \delta(x - x_r) + P(t), \\ \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{\partial \tilde{M}_{xx}}{\partial x} - [M_{xx}]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - \tilde{Q}_{xz} - G_{xz} k' h [w]_{x=x_r} \delta(x - x_r) - \\ &- \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} [\varphi]_{x=x_r} \delta'(x - x_r) \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия остаются без изменений в виде (4).

Вывод граничных условий. Задание нулевых граничных условий рассмотрено в [1]. Рассмотрим случай, когда в граничных условиях на торцах оболочки присутствуют производные. Это имеет место в задачах продольных или поперечных воздействий на торец оболочки. Допустим, что на левый торец оболочки действует продольное усилие при этом правый торец жёстко закреплён. Граничные условия в пространстве обычных функций в данном случае имеют вид:

$$M_{xx}(0, t) = 0, T_{xx}(0, t) = P(t), Q_{xz}(0, t) = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим два случая:

- 1) Торец оболочки не подкреплён шпангоутом. В этом случае граничные условия имеют вид (7);
- 2) Торец оболочки подкреплён шпангоутом. Тогда $x_r = 0, f(x_r) = f(0)$. Соотношение (5) принимает вид:

$$f^{(m)}(0) = \left\{ f^{(m)}(0) \right\} + [f]_{x=0} \delta^{(m-1)}(x) + \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \delta^{(m-2)}(x) + \dots + \left[\frac{\partial^{(m-1)} f}{\partial x^{(m-1)}} \right]_{x=0} \delta(x)$$

Расписывая, с учётом последнего соотношения граничные условия (7), и проводя выкладки аналогично тому, как при выводе уравнений (6), получаем граничные условия в обобщённых функциях:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{xx} - \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} [\varphi]_{x=0} \delta(x) &= 0, \tilde{T}_{xx} - \frac{Eh}{1 - \nu^2} [u]_{x=0} \delta(x) = P(t) \\ \tilde{Q}_{xz} - G_{xz} h [w]_{x=0} \delta(x) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

3. Корректность расширения на обобщённые функции задач динамики подкреплённых цилиндрических оболочек. В работе [1] была показана корректность расширения задач динамики цилиндрических оболочек в случае, когда на торцах оболочки заданы условия жёсткого закрепления. Покажем корректность данного расширения в случае произвольных граничных условий на примере граничных условий (7) или (8). Доказательство возможности данного расширения проведём согласно [3]. Система уравнений (1) в данном случае будет однородной, т.к. правая часть $P(t)$ входит в граничные условия (7). Запишем её в матричном виде:

$$\rho h \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = B \bar{U}(x, t), \quad (9)$$

где матрица B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{Eh}{1 - \nu^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\nu}{R} \frac{\partial}{\partial x} & G_{xz} h \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{Eh}{R^2(1 - \nu^2)} & G_{xz} h \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & G_{xz} h \frac{\partial}{\partial x} & \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Вектор $\bar{U}(x, t) = (u(x, t), w(x, t), \varphi(x, t))^T$.

Система уравнений движения в обобщённых функциях в матричном виде:

$$\rho h \frac{\partial^2 \bar{U}(x, t)}{\partial t^2} = B_1 \bar{U}(x, t) - S \bar{\delta}'(x - x_r) - S_1 \bar{\delta}(x - x_r). \quad (11)$$

Элементами матриц S и S_1 являются скачки перемещений и усилий – моментов. Матрица S диагональная, S_1 недиагональная.

Входящие в матрицу B_1 производные понимаются в обобщённом смысле. Рассмотрим обобщённую вектор – функцию, равную нулю при $x < 0$ и решению системы (1)-(5) при $x > 0$.

Для обобщённой производной имеет место равенство (5), т.е. можно записать:

$$B_1 \bar{U}(x, t) = B \bar{U}(x, t) + [\bar{U}]_{x=x_r} \bar{\delta}'(x - x_r) + \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right]_{x=x_r} \bar{\delta}(x - x_r).$$

Выражая отсюда B и подставляя это выражение в (9), получаем, что $\bar{U}(x, t)$ есть решение системы (11). Пусть $\bar{U}(x, t)$ есть решение системы (11), обращающейся в 0 при $x < 0$. Покажем, что $U(x, t)$ есть решение (9), удовлетворяющее начальным и граничным условиям (2), (3). Расписав в (11) $B_1 \bar{U}(x, t)$ как обобщённую производную, имеющую разрыв в точке $x = x_r$, используя (5), получим (9). Т.е. $\bar{U}(x, t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в обычных функциях. Доказательство корректности представления граничных условий в классе обобщённых функций проводится аналогично.

4. Анализ системы уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек в пространстве обобщённых функций. При анализе уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек в обобщённых функциях необходимо рассмотреть два вида условий сопряжения ребра и оболочки: 1) Жёсткий контакт; 2) Нежёсткий (подвижный) контакт. В случае жёсткого контакта имеем:

$$[u]_{x=x_r} = [w]_{x=x_r} = [\varphi]_{x=x_r} = 0.$$

В этом случае в системе уравнений (6) среди слагаемых, содержащих δ - функции, остаются лишь те, которые содержат скачки силовых характеристик получаем известную систему уравнений движения подкреплённых цилиндрических оболочек [2].

В случае подвижного контакта ребра и оболочки имеем:

$$[u]_{x=x_r} \neq 0, [w]_{x=x_r} \neq 0, [\varphi]_{x=x_r} \neq 0$$

Система уравнений движения в этом случае не упрощается и представляется в виде (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов С.Ю. Расширение на обобщённые функции классической задачи динамики для подкреплённой цилиндрической оболочки // Системні технології 4(45) 2006. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. Дніпропетровськ.2006. с.134-138.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций. К.:, 2005. – 536с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Москва, Наука, 1965. 312с.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат.н.

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТРЕХМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ

Введение. В настоящее время решения задач устойчивости материалов и элементов конструкций с трещинами осуществляется, в основном, с использованием прикладных подходов, позволяющих свести трехмерные уравнения к одномерным или двумерным. Используемые гипотезы приводят к тому, что механические процессы, происходящие в материале, отражаются сугубо приближенно, в результате наличия неустранимых погрешностей. В настоящее время для получения более достоверной информации о критических параметрах нагружения необходимо применять к исследованию устойчивости упругих сред и элементов конструкций трехмерный подход. Под трехмерным подходом, следуя [1], понимается подход исследования задач, в котором используются все гипотезы механики твердого тела, за исключением гипотез, позволяющих уменьшить размерность исследуемой задачи

Рассматриваемая в статье задача исследуется в рамках точного подхода. Для получения значений критических параметров наиболее соответствующих механическим процессам, происходящим в упругих средах, в настоящее время, применяются уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости. Здесь используется второй вариант теории, для случая малых деформаций и линейной связи между напряжениями и деформациями [1,4].

Постановка задачи. Рассмотрим линейно упругую изотропную прямоугольную пластину, находящуюся в условиях плоской деформации в плоскости $x_1 0x_2$ и сжимаемую в направлении $0x_2$ нагрузкой $\overset{\circ}{p}_{22}$ постоянной интенсивности. Пластина имеет размеры $2l_1 \times 2l_2$ и ослаблена в направлении действия нагрузки центральной трещиной длины $2t$ с берегами свободными от нагружения. Пластина жестко защемлена и в ней реализуется неоднородное докритическое состояние, компоненты которого отмечаются сверху индексом "о" (рис.1, а). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [1,6]. С учетом симметрии решения рассматривается половина пластины (рис.1, б). Для нахождения критических параметров пластины требуется определить из решения

задачі упругості начальные напряжения $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ основного состояния, а затем из решения уравнений (ТЛТУДТ) определить критические характеристики устойчивости пластины.

Сформулируем задачу теории упругости.

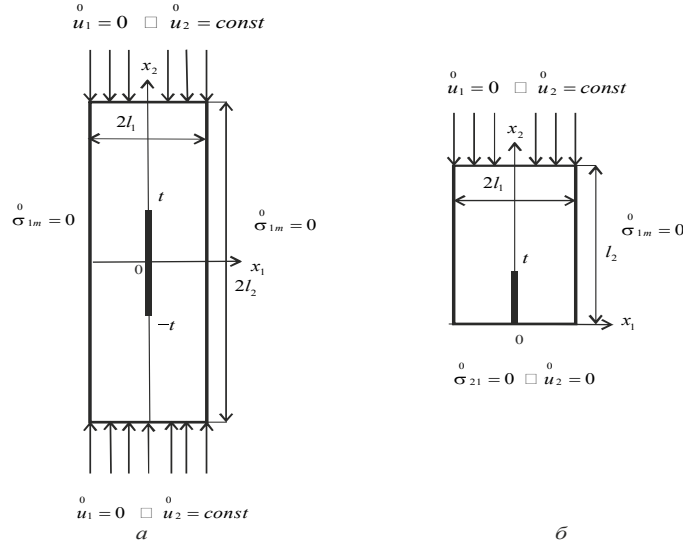


Рисунок 1

Отыскивается функция $\overset{\circ}{u} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$, удовлетворяющая следующие соотношения: уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i} = \overset{\circ}{F}_m; \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (1)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2; \\ \overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{21} = \overset{\circ}{u}_2 = 0; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge x_2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq t. \quad (3)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad A_{ii} = \lambda + 2G; \quad A_{12} = \lambda; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\overline{\Omega}$ – расчетная область; $\overset{\circ}{F}_m$ – компонента массовой силы; $x = (x_1, x_2)$ – точка на расчетной схеме; A_j – упругие постоянные (коэффициенты жесткости); G – модуль сдвига, λ – коэффициент Ламе. В (3) $x = -0$ соответствует левому берегу трещины.

Для приближенного решения задачи теории упругости используется метод Холецкого и метод сопряженных градиентов [5].

Для нахождения критических параметров в задаче устойчивости требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$, удовлетворяющее следующие соотношения:
уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{im} + p \overset{\circ}{\sigma}_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = 0; \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (5)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} = 0; |x_1| = l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2; \\ \sigma_{21} + p \overset{\circ}{\sigma}_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 0 \wedge \dot{u}_2 = 0; |x_1| \leq l_1 \wedge x_2 = 0; \\ u_1 = 0 \wedge u_2 = 0; |x_1| \leq l_1 \wedge x_2 = l_2. \end{aligned} \quad (6)$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; x_1 = \pm 0 \wedge 0 \leq x_2 \leq t. \quad (7)$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс \circ .

Критические параметры определяются из равенства

$$\mathbf{p}^{kp} = \mathbf{p}^* = \mathbf{p}_1; \mathbf{u}^{kp} = \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 \quad (8)$$

Для приближенного решения уравнений ТЛТУДТ используется метод итерирования подпространства и градиентный метод [4].

Результаты и анализ расчетов. Целью расчетов является исследования влияния механических и геометрических характеристик пластины с трещиной на характер поведения критических параметров.

Рассматривается изотропная пластина, механические и геометрические характеристики которой варьируются в следующих пределах: $0,25 \text{ ГПа} \leq E \leq 250 \text{ ГПа}$, $0 \leq \nu \leq 0,4$, $0,1 \leq \alpha \leq 0,3$, где $\alpha = l_1/l_2$ – параметр тонкостенности.

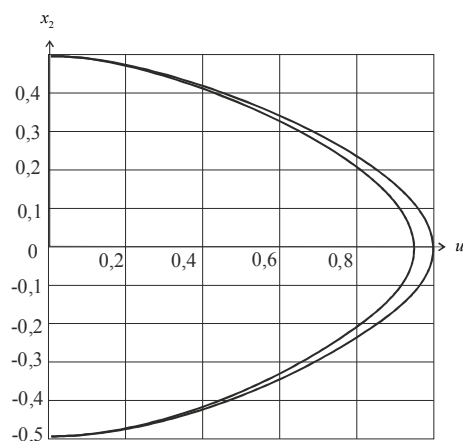


Рисунок 2

На рис.2 изображены графики функций $u_1(x_1 = \text{const}, x_2)$, представляющие форму потери устойчивости пластины в различных вертикальных сечениях пластины. Видно, что формы потери устойчивости пластины близки к функции $u_1(x_1, x_2) = A(x_1) \cos(\pi x)$, где

$A(x_1)$ – амплітуда косинусоїди в сеченні $x_1 = const$. Горизонтальне возмущение берегов трещины описывается одной функцией $u_1(\pm 0, x_2) = A(0) \cos(\pi x)$. Это означает, что в возмущенном состоянии отсутствует раскрытие или надавливание берегов трещины.

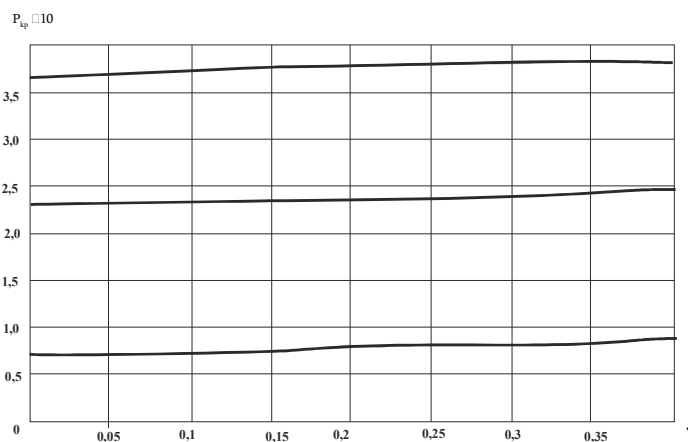


Рисунок 3

На рис. 3 показана залежність критичної навантаження від величини коефіцієнта Пуассона при фіксованих параметрах тонкостенності і модулях Юнга. Из рисунка видно, что изменение коэффициента Пуассона незначительно влияет на величину критической нагрузки (в пределах 7% при $\alpha \leq 0,25$ и в пределах 10% $0,25 < \alpha \leq 0,3$), а форма потери устойчивости практически не изменяется. Подобные результаты (незначительное влияние коэффициента Пуассона на значение критической нагрузки) получены для слабоармированных волокнистых материалов и для прямоугольных пластин [2,3]

При анализе влияния модуля Юнга на критические параметры установлено, что для произвольных фиксированных значениях α, t, ν критическая нагрузка изменяется прямо пропорционально модулю Юнга E . Такой результат является механически непротиворечивым. Поведение функции u , возмущения смещений, в этом случае практически не зависит от величины E .

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – К.: Наук. думка, 1971. – 276 с.
2. Гузь А. Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. – К.: Наук. думка, 1990. – 630 с.
3. Гузь А. Н., Гладун Е.Ю. О трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 10. – С. 53–62.
4. Коханенко Ю.В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика. – 2010. – 46, № 5. – С. 29–45.
5. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ. – М: Мир. – 1983. – 384 с.
6. Guz A.N. Fundamentals of Three-Dimensional Theory of stability of Deformable Bodies. – Berlin, Heidelberg. Springer – Verlag, 1999. – 555 p.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

Институт механики им.С.П. Тимошенко НАН Украины

ЗАВИСИМОСТЬ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ ОТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЖЕСТКО ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Введение. Элементы тонкостенных конструкций в форме стержней, пластин и оболочек широко используются в различных отраслях народного хозяйства. Производство новых конструкций побуждает к углубленному исследованию широкого круга научных задач и научно-технических проблем, касающихся расчетов конструкций или их компонент. При оценке несущей способности конструкций необходимым этапом является расчет конструкции или ее элементов на устойчивость.

В настоящее время задачи устойчивости элементов конструкций исследованы, в основном, с использованием классических или уточненных прикладных теорий устойчивости. В этих теориях используются различного рода гипотезы, позволяющие уменьшить размерность задач и тем самым существенно упростить их решения. Однако решения задач устойчивости, полученные с использованием одномерных или двумерных уравнений, не всегда удовлетворяют потребностям инженерной практики. Имеется также ряд задач, которые не допускают использования одномерных или двумерных подходов для своего решения. К таким задачам относятся, например, задачи, характеризующиеся трехмерным основным напряженным состоянием [1,4]. Отметим, что вопросы устойчивости элементов конструкций с дефектами типа трещин также относятся к области теории устойчивости, где применение одномерных или двумерных подходов нельзя считать достаточно корректным.

Получить достаточно точные значения критических параметров можно в результате применения к исследованию устойчивости упругих сред и элементов конструкций трехмерного подхода. Рассматриваемая в статье задача исследуется в рамках точного подхода с использованием уравнений трехмерной линеаризованной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [1]. Здесь используется второй вариант теории, для случая малых деформаций и линейной связи между напряжениями и деформациями [1,4]. Для жестко защемленной пластины с трещиной исследована зависимость критических параметров от геометрических характеристик пластины.

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная изотропная пластина, достаточно протяженная в направлении $0x_3$ и имеющая в этом направлении сквозную трещину длины $2l$. Вдоль оси $0x_2$ (в направлении трещины) пластина сжимается нагрузкой постоянной интенсивности $\overset{\circ}{p}_{22}$, обеспечивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости x_10x_2 , где пластина имеет размеры $2l_1 \times 2l_2$ (рис.1). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [1,4].

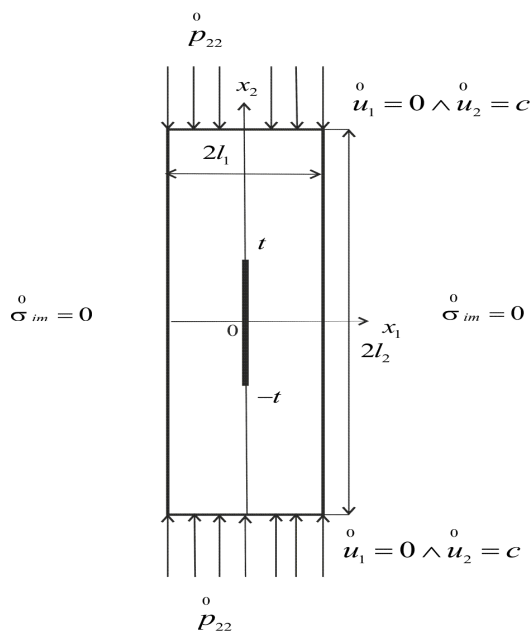


Рисунок 1

Для решения задачи уравнений ТЛТУДТ необходимо предварительно найти решение соответствующей задачи линейной теории упругости, из которой определяются начальные напряжения $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$ в теле пластины с трещиной. Сформулируем задачу упругости.

Постановка задачи упругости.

Отыскивается функция $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$, удовлетворяющая следующие соотношения: уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i} = \overset{\circ}{F}_m; \quad \mathbf{x} \in \overline{\Omega}, \quad (1)$$

граничные условия

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad (2)$$

$$\overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2,$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (3)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{ii} &= A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad A_{ii} = \lambda + 2G; \quad A_{12} = \lambda; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\overline{\Omega}$ – расчетная область; $\overset{\circ}{F}_m$ – компонента массовой силы; $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – точка на расчетной схеме; A_{ij} – упругие постоянные (коэффициенты жесткости); G – модуль сдвига, λ – коэффициент Ламе. В (3) $x = -0$ соответствует левому берегу трещины.

Постановка задачи устойчивости.

Для нахождения критических параметров требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение $(\mathbf{p}^*, \mathbf{u}^*)$ спектральной задачи, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{im} + p \sigma_{im}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = 0; \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (5)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \sigma_{1m} = 0; |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \\ u_1 = 0 \wedge u_2 = const; |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2; \end{aligned} \quad (6)$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t \quad (7)$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс 'o'.

Критические параметры определяются из равенства

$$\mathbf{p}^{kp} = \mathbf{p}^* = \mathbf{p}_1; \mathbf{u}^{kp} = \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_1 \quad (8)$$

Результаты и анализ расчетов. Для приближенного решения задачи теории упругости используется метод Холецкого и метод сопряженных градиентов [2], а для приближенного решения уравнений ТЛГУДГ используется метод итерирования подпространства и градиентный метод [3].

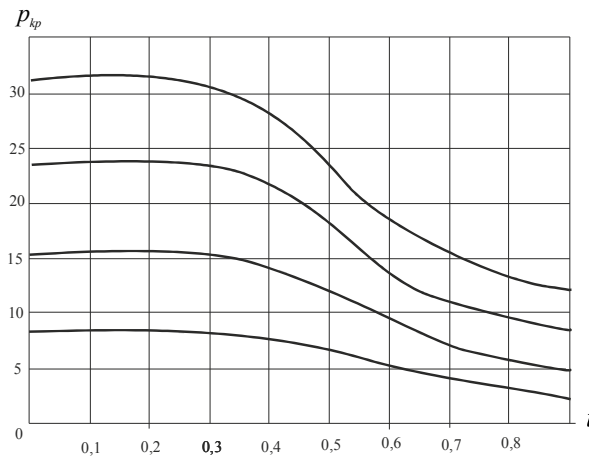


Рисунок 2

Рассматривается изотропная линейно-упругая пластина с техническими постоянными: $E = 250$ ГПа, $G = 100$ ГПа, $\nu = 0,25$. Параметр тонкостенности $\alpha = l_1/l_2$ изменяется в пределах $0,1 \leq \alpha \leq 0,25$, а размер трещины в интервале $0 \leq t < 1$. На рис.2 приведены графики зависимости критической нагрузки от длины трещины при определенном значении параметра тонкостенности. Из графиков видно, что зависимость критической нагрузки от длины трещины – нелинейная. Для интервала $|t| \leq 0,3$ критическая нагрузка слабо зависит от длины трещины, то есть трещина небольших размеров (начальная) незначительно влияет на значение p_{kp} . Установлено, что изменение геометрических параметров α, t приводит к количественному изменению критических факторов и не изменяет качественной картины их поведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел.– К.: Наук. думка, 1971.–276 с.
2. Коханенко Ю.В. Численное исследование краевых эффектов в слоистых композитах при одноосном нагружении // Прикл. механика.–2010.–46, № 5. – С. 29–45.
3. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы: Пер. с англ.– М: Мир.– 1983.– 384 с.
4. Guz A.N. Fundamentals of Three–Dimensional Theory of stability of Deformable Bodies. – Berlin, Heidelberg. Springer – Verlag, 1999.– 555 p.

Поступила в редколлегию 15.02.2013

УДК 539.3

МАЙБОРОДИНА Н.В., к. физ.-мат.н.
МЕЙШ В.Ф., д. физ.-мат.н.
ГЕРАСИМЕНКО В.А.

Нежинский агротехнический институт, Нежин, Украина
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

**ВЛИЯНИЕ МЕСТОРАСПОЛОЖЕНИЯ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ
ПОПЕРЕЧНЫХ РЕБЕР НА НАПРЯЖЕННО - ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ
ЭЛЛИпсоИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ
НАГРУЗКИ**

Введение. На сегодняшний день проблема вынужденных колебаний подкрепленных оболочек достаточно хорошо изучена. В основном рассмотрены гармонические колебания подкрепленных оболочек простой геометрии (цилиндрические, конические и сферические подкрепленные оболочки) [1-3]. Результаты по вынужденным колебаниям подкрепленных оболочек при импульсных нагрузках представлены в работах [4-6].

Целью данной работы является сравнительный анализ численного решения задач о деформированном состоянии дискретно подкрепленных поперечными ребрами эллипсоидальных оболочек при действии нестационарной распределенной нагрузки для вариантов внешнего и внутреннего размещения ребер.

Постановка задачи. Подкрепленная эллипсоидальная оболочка рассматривается как неоднородная упругая структура, которая состоит из гладкой оболочки и системы жестко соединенных с ней поперечных ребер.

Геометрия срединной поверхности гладкой эллипсоидальной оболочки задается соотношениями [5]

$$x = R \sin \alpha_1 \sin \alpha_2; \quad y = R \sin \alpha_1 \cos \alpha_2; \quad z = kR \cos \alpha_1,$$

где параметры α_1 , α_2 представляют собою гауссовы криволинейные координаты на поверхности оболочки, причем координата α_1 соответствует меридиальному направлению, α_2 – окружному направлению; $k = b/a$ – параметр эллиптичности; a , b – полуоси эллипса.

При построении математической модели процесса динамического деформирования исходной конструкции будем использовать геометрически нелинейный вариант теории оболочек типа Тимошенко в квадратическом приближении. Изменение перемещений по толщине оболочки в системе координат (s_1, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$u_1^z(s_1, s_2, z) = u_1(s_1, s_2) + z\varphi_1(s_1, s_2); \quad u_2^z(s_1, s_2, z) = u_2(s_1, s_2) + z\varphi_2(s_1, s_2);$$

$$u_3^z(s_1, s_2, z) = u_3(s_1, s_2); \quad z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]; \quad s_1 = \alpha_1 A_1; \quad s_2 = \alpha_2 A_2,$$

где A_1, A_2 – коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности эллипсоидальной оболочки.

Деформационные соотношения и соотношения между напряжениями и деформациями для гладкой оболочки принимаются согласно [5].

При построении математической модели деформирования j -го подкрепляющего ребра направляемого вдоль оси α_2 будем исходить из гипотезы недеформируемости поперечного сечения подкрепляющего элемента в рамках геометрически нелинейной теории стержней Тимошенко. Изменение перемещений по поперечному сечению j -го подкрепляющего ребра в системе координат (x, s_2, z) задается аппроксимацией вида

$$U_{1j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{1j}(s_2) + z\varphi_{1j}(s_2),$$

$$U_{2j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{2j}(s_2) + z\varphi_{2j}(s_2),$$

$$U_{3j}^{xz}(x, s_2, z) = U_{3j}(s_2)$$

Деформационные соотношения, соотношения между напряжениями и деформациями для j -го ребра принимаются согласно [5].

Условия контакта между компонентами вектора перемещений центра тяжести поперечного сечения j -го ребра и компонентами обобщенного вектора перемещения исходной срединной поверхности принимаются согласно [5].

Уравнения колебаний. Для вывода уравнений колебаний дискретно подкрепленной структуры используются вариационный принцип Гамильтона-Остроградского. После выполнения операций варьирования и интегрирования с учетом условий контакта получаем две группы уравнений.

Уравнения колебаний оболочки в гладкой области

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{22} \right] + k_1 \bar{T}_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{21}) = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 T_{12}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} T_{21} \right] + k_2 \bar{T}_{23} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 T_{22}) = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 \bar{T}_{13}) - k_1 T_{11} - k_2 T_{22} + P_3 + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 \bar{T}_{23}) = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{11}) - \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{22} \right] - T_{13} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{21}) = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{1}{A_2} \left[\frac{\partial}{\partial s_1} (A_2 M_{12}) + \frac{\partial A_2}{\partial s_1} M_{21} \right] + \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial s_2} (A_1 M_{22}) - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}.$$

Уравнения колебания j -го подкрепляющего ребра, направленного вдоль оси α_2 приведены в [5].

Обозначения величин и соответствующие выражения усилий – моментов для гладкой оболочки и подкрепляющих ребер введены согласно [5]. Уравнения колебаний дополняются соответствующими естественными граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм. Исходные уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным s_1, s_2, t при наличии пространственных разрывов по координате s_2 . Исходя из этого, численный алгоритм решения исходной задачи строится следующим образом: ищется решение в гладкой области эллипсоидальной оболочки и на линиях пространственных разрывов [5]. Разностный алгоритм основан на применении интегро-интерполяционного метода построения разностных схем по пространственным координатам и явной конечно-разностной аппроксимации по временной координате [7].

Анализ результатов численных исследований. В качестве числового примера рассматривалась задача вынужденных колебаний поперечно подкрепленной части эллипсоидальной оболочки с жестко защемленными краями в области $D = \{\alpha_{10} \leq \alpha_1 \leq \alpha_{1N}, \alpha_{20} \leq \alpha_2 \leq \alpha_{2N}\}$ при действии распределенной нормальной нагрузки $P_3(\alpha_1, \alpha_2, t)$, которая имеет вид

$$P_3(\alpha_1, \alpha_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось $A = 10^6 \text{ Па}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

Краевые условия имеют вид

$$\bar{U}(\alpha_{10}, \alpha_2) = \bar{U}(\alpha_{1N}, \alpha_2) = 0; \quad \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{20}) = \bar{U}(\alpha_1, \alpha_{2N}) = 0.$$

Начальные условия для всех компонент обобщенного вектора перемещений нулевые при $t = 0$. Задача рассматривалась при следующих геометрических и физико-механических параметрах исходной конструкции:

$$\alpha_{10} = \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{1N} = \pi - \frac{\pi}{12}; \quad \alpha_{20} = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha_{2N} = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{a}{b} = 1,5; \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = 1,5;$$

$$E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}; \quad \nu = 0,33; \quad \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Физико-механические параметры подкрепляющих элементов:

$$E_j = E_1; \quad \rho_j = \rho.$$

Поперечные подкрепляющие элементы располагались вдоль по координате α_2 в сечениях

$$\alpha_{1j} = \frac{7}{24}\pi + \frac{5}{24}\pi j, \quad j = 0, 1, 2.$$

На рис. 1 – 2 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$, в якій ε_{22} досягає свого максимального по модулю значення на часовому інтервалі $t = 20T$.

На рис. 1 – 2 крива з індексом 1 відповідає випадку зовнішнього розміщення ребер, а крива з індексом 2 – випадку внутрішнього розміщення ребер.

На рис. 1 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$ для випадку $\frac{a}{b} = 1,5$.

На рис. 2 приведені залежності величини ε_{22} від часової координати t в точці $(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0)$ для випадку $\frac{b}{a} = 1,5$.

Згідно графічному матеріалу, спосіб розміщення підкріплюючих ребер приводить в ряді випадків до різниці по максимальним амплітудах для величини ε_{22} :

для випадку $\frac{a}{b} = 1,5$ різниця досягає 1,2 рази;

для випадку $\frac{b}{a} = 1,5$ різниця досягає 1,1 рази.

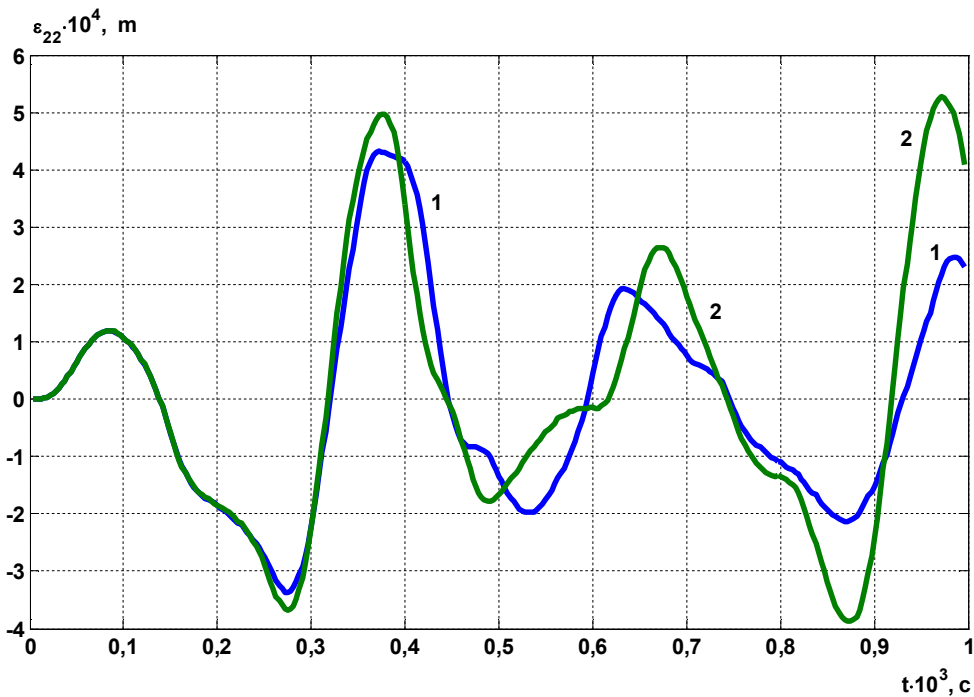


Рисунок 1 – залежність величини ε_{22} від часової координати t в точці

$$(\alpha_1 = \pi/2; \alpha_2 = 0) \text{ для випадку } \frac{a}{b} = 1,5$$

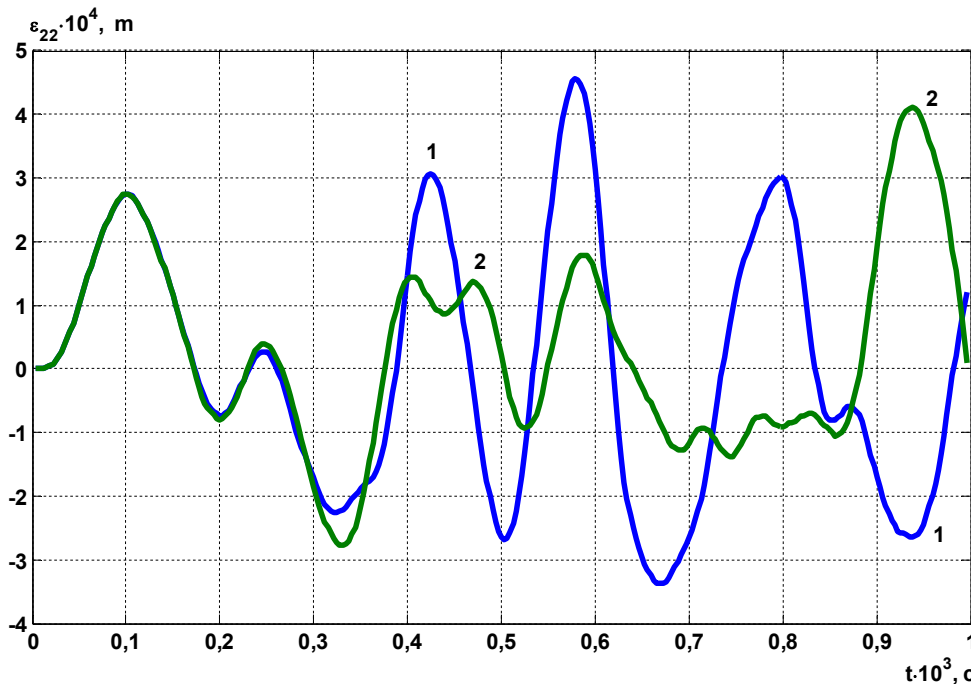


Рисунок 2 – зависимость величины ε_{22} от временной координаты t в точке

$$\left(\alpha_1 = \frac{\pi}{2}; \alpha_2 = 0\right) \text{ для случая } \frac{b}{a} = 1,5$$

Выводы. Таким образом, учет способа размещения подкрепляющих ребер при выше указанных геометрических и физико-механических параметрах конструкции, значительно влияет на ее деформированное состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я. Динамика ребристых оболочек / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Паламарчук В.Г. – К.: Наук. думка, 1983. – 204с.
2. Амиро И.Я. Колебания ребристых оболочек вращения / Амиро И.Я., Заруцкий В.А., Ревуцкий В.Н. – К.: Наук. думка, 1988. – 171 с.
3. Амиро И.Я. Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно – деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек (обзор) / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3 – 22.
4. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / Луговой П.З., Мейш В.Ф., Штанцель Э.А. – К.: Издательско-полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536 с.
5. Мейш В.Ф. К расчету неосесимметричных колебаний дискретно подкрепленных поперечными ребрами гибких эллипсоидальных оболочек при нестационарных нагрузках / В.Ф.Мейш, Н.В. Майбородина // Прикл. механика. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 63 – 73.
6. Майбородина Н.В. Влияние геометрической нелинейности на колебания подкрепленных ребрами эллипсоидальных оболочек при нестационарной нагрузке / Н.В. Майбородина, В.Ф. Мейш // Проблеми обчислюваної механіки і міцності конструкцій: збірник наукових праць / Дніпропетровський національний університет. – Дніпропетровськ: Ліра, 2011.– Вип. 17. С. 188 – 194.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656с.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

АНИКБЕВ И.И., к. т. н., ст. н. сотр.
 МАКСИМЮК В.А., д.физ.-мат. н., вед. н. сотр.
 МИХАЙЛОВА М.И., д.т.н., вед. н. сотр.
 СУЩЕНКО Е.А., к.т.н., ст. н. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАНУ

МЕТОДИКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ КОНСОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПОДКРЕПЛЯЮЩИМ СТЕРЖНЕМ ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Введение. Испытание простой системы, представляющей собой составную часть сложной конструкции, может быть полезным для понимания механизма взаимодействия отдельных элементов, а также для разработки теоретических подходов к анализу поведения конструкции в целом. Фундаментальной задачей динамики конструкций, имеющей отношение к изучению поведения её элементов при динамических воздействиях, является задача нестационарной реакции стержней, которые подкрепляют какой-либо её элемент, при воздействии ударной волны.

Постановка задачи. В данной работе представлена методика экспериментального исследования упругой статически неопределимой системы, состоящей из консольной пластины и подкрепляющего её стержня, при падении на консольную пластину плоской ударной волны прямоугольной формы.

Консольная пластина и стержень (рис. 1) изготовлены из стеклотекстолита СФ–1–150 толщиной 2,5 мм. Модуль упругости материала определялся экспериментально при растяжении образца на испытательной машине и равнялся $E = 2,6 \cdot 10^{10}$ Па; плотность материала $\rho = 1,7$ г/см³.

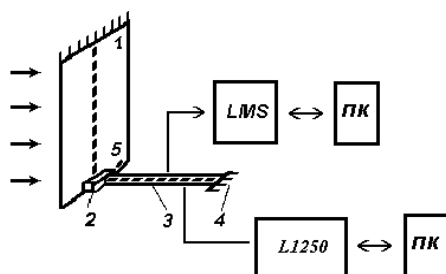


Рис. 1

Для обеспечения жёсткого защемления целая пластина стеклотекстолита размером 246×182 мм крепила эпоксидным составом холодного отверждения между двумя стальными (марки 65 Г) рамками такого же внешнего размера толщиной 10 мм каждая. Внутренний размер рамок равнялся 210×140 мм и совпадал с размером внутреннего сечения ударной трубы. Тонким лобзиком производили П-образный разрез вклеенной пластины так, что параллельно длинным сторонам рамок была образована консольная пластина 1 (рис. 1) прямоугольной формы с короткой защемлённой стороной $B = 61$ мм и длинными сторонами $L = 105$ мм. К свободной короткой стороне консольной пластины при помощи эпоксидного клея и двух винтов крепили подпятник 2 из дюралюминия весом 8 г длиной 35 мм. Подпятник имел сквозную прорезь, в которой с помощью эпоксидного клея закрепляли конец опорного стержня 3 перпендикулярно к поверхности консоли. Второй конец стержня жёстко защемлялся в неподвижной массивной опоре 4. Длина стержня $l = 122$ мм, ширина $b = 12,1$ мм.

Вдоль длинных сторон консоли и стержня эпоксидным составом холодного отверждения наклеивали фольговые тензорезисторы типа КФ 5П1 – 3 – 120 – Б – 12 базой 3 мм и сопротивлением 120 Ом (на рис. 1 показаны короткими чёрточками). Расстояние между центрами соседних тензорезисторов равнялось 10 мм. Ряды тензорезисторов размещали на равном расстоянии от длинных сторон на обеих поверхностях консольной пластины и стержня, при этом центры датчиков деформаций с обеих сторон располагались друг под другом. На консольной пластине два тензорезистора 5 были расположены вдоль коротких сторон и находились на обеих поверхностях друг под другом.

В качестве нагружающего устройства использовалась диафрагменная ударная труба. Диафрагменная ударная труба [2] (рис. 2) состояла из трёх секций: камеры высокого давления 1 длиной один метр, канала 2 длиной три метра и измерительной секции 3 длиной 0,75 м. Все секции имели одинаковое внутреннее поперечное сечение прямоугольной формы размером 140x210 мм с шероховатостью внутренней поверхности 5-го класса. Камера отделялась от канала непроницаемой тонкой диафрагмой 4. В канале 2 находился воздух при атмосферном давлении. После установки в измерительной секции испытуемой системы (на рисунке измерительная секция закрыта пластиной 12) в камеру из ресивера через штуцер 6 подавался сжатый воздух до давления P_d , превышающего атмосферное. Разница давления на диафрагме в момент её прорыва устройством 5 измерялась манометром 6 класса 0,4.

Нагружение системы ударной волной акустического диапазона производилось в измерительной секции ударной трубы. Соотношение длин камеры и канала с измерительной секцией было таким, что при подходе к измерительной секции формировалась ударная волна 7 с крутым фронтом и постоянным давлением за фронтом длительностью приблизительно $8 \cdot 10^{-3}$ с. Давление во фронте ударной волны задавалось значением давления в камере ударной трубы, которое визуально фиксировалось на манометре непосредственно перед прорывом диафрагмы.

Для более точного определения нагрузки, действующей на консоль при падении ударной волны, в каждом опыте на осциллографе GDS – 806S проводили регистрацию сигналов двух пьезодатчиков (8 и 9), расположенных на расстоянии (323 ± 1) мм по ходу волны. Время между фронтами сигналов не превышало $1 \cdot 10^{-3}$ с и его отсчитывали с погрешностью $0,5 \cdot 10^{-6}$ с, что давало возможность вычисления скорости c ударной волны. В каждом опыте также фиксировали температуру t° в канале с погрешностью $0,1^\circ$ Цельсия, скорость звука a в момент проведения опыта определяли по формуле $a = 20,046 (t^\circ + 273,15)^{1/2}$. Пьезодатчик 10 служил для запуска осциллографа GDS -806S.

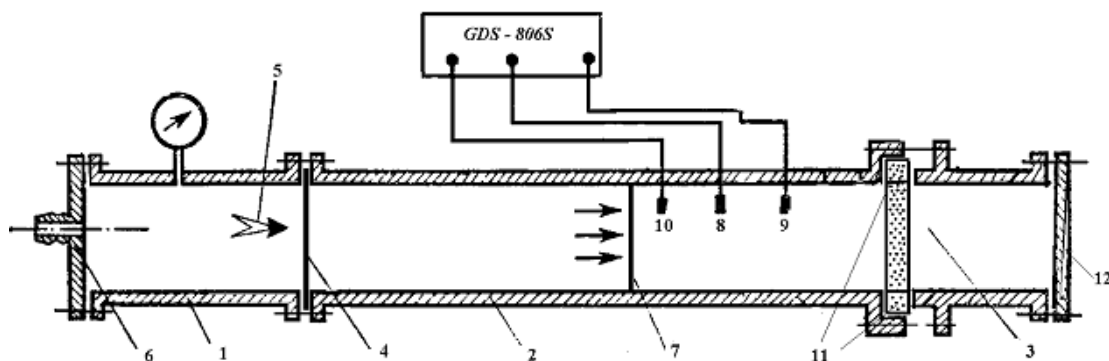


Рис. 2

Рамка из пенопласта 11 выполняла роль акустической развязки между каналом 2 и измерительной секцией 3.

Давление в волне нагрузки P_2 вычисляли [1, 2] через значение числа Маха ($M = c / a$) по формуле

$$P_2/P_1 = [2\gamma M^2/(\gamma+1)] - (\gamma - 1)/(\gamma + 1),$$

где P_1 – начальное давление в канале трубы; $\gamma = 1,4$ - показатель адиабаты воздуха. В момент встречи с плоской преградой во фронте отраженной волны формировалась нагрузка P [1, 2], определяемая формулой:

$$P = P_2 \frac{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + 2 - \frac{P_1}{P_2}}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{P_1}{P_2}}.$$

Результаты работы. Регистрация сигналов тензорезисторов происходила на ПК с использованием либо быстродействующего четырёхканального устройства ввода – вывода и обработки аналоговой и цифровой информации L 1250 (Россия) [3], рис. 3, либо с помощью высокоточной портативной восьмиканальной аппаратуры LMS SCADAS Mobile (Бельгия) [4]. Отметим, что оба варианта регистрации нестационарных процессов показали идентичные результаты. Преимуществом бельгийской аппаратуры является её более высокая чувствительность, а также измерение деформаций непосредственно в микрострейнах, минуя пересчёт значения деформаций в милливольтгах с учётом напряжения питания мостовой схемы и чувствительности используемых тензорезисторов. Отметим, что аппаратура LMS SCADAS Mobile позволяет в одном опыте регистрировать сигналы 8 тензорезисторов, т.е. в два раза больше в сравнении с устройством L 1250.

На рис. 3 приведены осциллограммы изменения деформаций элемента упругой стеклопластиковой консольной пластины (1к) и одного из тензорезисторов (3с) подкрепляющего её стержня при падении на консоль волны с давлением во фронте $P_2 = 0,09 \times 10^5$ Па.

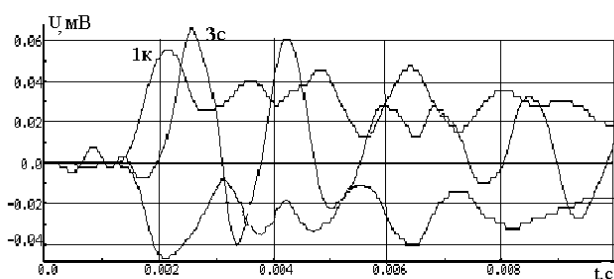


Рис.3

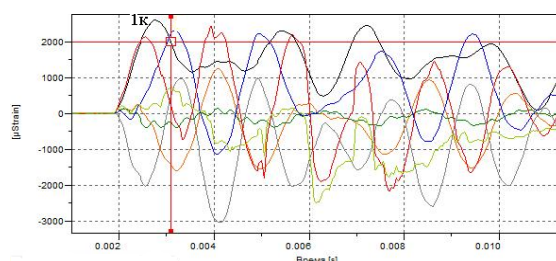


Рис. 4

На рис. 4 приведен результат одного из опытов, в котором регистрация деформаций проводилась с помощью аппаратуры LMS при действии на консольную пластину ударной волны со скачком давления во фронте $P_2 = 0,435 \times 10^5$ Па. Кривая 1к – изменение во времени консольного тензосигнала; остальные кривые – деформации различных тензорезисторов стержня. Маленький квадрат, который находится на пересечении сплошных вертикальной и горизонтальной линий указывает точку пересечения курсоров, с помощью которых можно узнать значение деформаций в любой момент времени на всех осциллограммах.

Выводы. Таким образом, разработана методика экспериментального исследования поведения во времени упругой связанной системы, которая состоит из консольной пластины и подкрепляющего её стержня, при падении на пластину ударной волны. Осциллограммы изменения деформаций регистрировались на ПК с использованием быстро действующей четырёхканальной приставки ввода – вывода и обработки аналоговой и цифровой информации L 1250 (Россия), или с помощью

высокоточной портативной восьмиканальной аппаратуры LMS SCADAS Mobile (Бельгия). Разработанная методика может быть использована для исследования различных процессов: статическое и квазистатическое, а также динамическое тензометрирование, регистрация сигналов с частотой дискретизации до 204,8 кГц по каждому каналу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. - М.: Наука, 1966. - 687 с.
2. Ударные трубы / Под ред. Х.А. Рахматулина и С.С. Семёнова. - М.: ИЛ, 1962. - 699 с.
3. Anik'ev I.I., Mikhailova M.I., Sushchenko E.A. Nonstationary deformation of an elastic Plate with a Notch under Action of a Shock Wave // Int. Appl. Mech. - 2007. - 43, № 11. - P. 1264 -1269.
4. И.И. Аникьев, М.И. Михайлова, Е.А. Сущенко. Реакция упругой системы «консольная пластина – стержень» на действие ударной волны // Прикл. мех. - 48, № 6. - 2012. - С.135-141.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 681.3

ДЕГТЯРЬ С.В.¹, к. фіз.-мат. н.
ДЕГТЯРЬ В.Г.², к. фіз.-мат. н.

¹Національний економічний університет, Київ

²Національний транспортний університет, Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ СІМ'Ї РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВОЮ ПРАВОЮ ЧАСТИНОЮ

Вступ. Прикладні задачі математики, зокрема проблеми стабілізації систем управління, побудови оптимального управління спонукають до вивчення систем диференціальних рівнянь, що залежать від випадкових процесів. Проста стохастична модель односекторної економіки розглядалась в роботі [2]. Мета роботи дослідити асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із коефіцієнтами, що залежать від напівмарковського процесу зі зчисленною множиною станів [1].

Постановка задачі. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY(t)}{dt} = F(Y(t), X(t)), \quad \dim Y(t) = m, \quad (1)$$

де $X(t)$ – напівмарковський випадковий процес зі зчисленною множиною станів $\theta_1, \theta_2, \dots$. Припустимо, що частинні системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dY_k(t)}{dt} = F_k(Y_k(t)), \quad F_k(Y) \equiv F(Y, \theta_k), \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (2)$$

мають розв'язки, які можна продовжити при $t > 0$. Розв'язок системи (2) у формі Коші позначимо через

$$Y_k(t) \equiv R_k(t, Y(u)), \quad R_k(u, Y(u)) \equiv Y(u), \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Нехай $\tau = \inf\{t \geq 0; X(t) \neq X(0)\}$ – момент першого стрибка процесу $X(t), t \geq 0$. Введемо умовні математичні сподівання випадкового розв'язку

$$M_k(t, Y) = P\{Y_k(t) | Y_k(0) = Y, X(0) = \theta_k\}, k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Зафіксуємо $k \in \{1, 2, \dots\}$ і покладемо

$$f_k(t, Y) = M_k(t, Y),$$

$$g_k(t, Y) = P_k\{Y_k(t) | Y_k(0)\} I_{\{0 \leq t < \tau\}} = R_k(t, Y) P_k\{t < \tau\},$$

$$G_{ks}(dt) = P_k\{X(\tau) = \theta_s, \tau \in dt\},$$

де $P_k(\dots) = P(\dots | X(0) = \theta_k), k = 1, 2, \dots$.

Покажемо, що має місце векторне рівняння відновлення

$$f(t, Y) = g(t, Y) + \int_0^t G(du) f(t-u, Y),$$

де $G(du)$ – матриця з елементами $G_{ks}(du)$, $f(t, Y)$ і $g(t, Y)$ – вектори-стовпці з компонентами $f_k(t, Y)$ і $g_k(t, Y)$ відповідно.

Дійсно за формулою повної ймовірності дістанемо систему інтегральних рівнянь

$$M_k(t, Y) = R_k(t, Y) P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) = \theta_s, \tau \in du) M_s(t-u, R_k(u, Y)), \quad (5)$$

яка очевидно еквівалентна наведеному векторному рівнянню відновлення.

Якщо система рівнянь (1) лінійна і має вигляд

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(X(t))Y(t), \quad A_k = A(\theta_k) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

то система рівнянь (5) набуває такого вигляду

$$M_k(t)Y = e^{A_k t} Y P_k\{t < \tau\} + \int_0^t \sum_{s=1}^{\infty} P_k(X(\tau) = \theta_s, \tau \in du) M_s(t-u) e^{A_k u} Y. \quad (7)$$

Результати роботи. Для розв'язання поставленої задачі застосуємо аналітичний апарат – теорему марковського відновлення [2]. Припустимо, що напівмарковський випадковий процес залежить від малого параметру $\varepsilon > 0$. Перепозначимо

$$X(t) = X_\varepsilon(t), \quad \tau = \tau^\varepsilon, \quad Y(t) = Y_\varepsilon(t).$$

Нас цікавитиме асимптотична поведінка умовних математичних сподівань випадкового розв'язку системи (1) при $t \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$.

Нехай випадковий процес $X_\varepsilon(t), t \geq 0$ збігається до деякого випадкового процесу $X_0(t), t \geq 0$ з моментом першого стрибка τ^0 в розумінні

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_k \{X_\varepsilon(t_1) = \theta_{s_1}, \dots, X_\varepsilon(t_n) = \theta_{s_n}, t_1, t_2, \dots, t_n < \tau^\varepsilon\} = \\ = P_k \{X_0(t_1) = \theta_{s_1}, \dots, X_0(t_n) = \theta_{s_n}, t_1, t_2, \dots, t_n < \tau^0\} \end{aligned} \quad (8)$$

в точках неперервності t_1, t_2, \dots, t_n граничного розподілу ймовірностей, $n = 1, 2, \dots$;
 $\theta_{s_i} \in \{\theta_1, \theta_2, \dots\}, i = 1, 2, \dots$ для всіх $k = 1, 2, \dots$.

Вважатимемо, що $X_\varepsilon(0) = X(0)$.

Позначимо $m_k = P_k \tau^0$ і вимагатимемо, щоб

$$\sup_0^t P_k(\tau^\varepsilon \in dt) t \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0, \quad (9)$$

$$\inf_k m_k > 0, \quad (10)$$

сукупність розподілів ймовірностей

$$P_k \{\tau^0 \in dt\}, \quad (11)$$

$k = 1, 2, \dots$ нерешітчаста.

Припустимо, що існує така матриця $C = \|c^{ks}\|_{k,s=1}^\infty$, що

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{P_k \{X_\varepsilon(\tau^\varepsilon) = \theta_k\} - I\} = c^{kk}, \quad (12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{s \neq k} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} P_k \{X_\varepsilon(\tau^\varepsilon) = \theta_k\} - c^{ks} \right\} = 0, \quad (13)$$

$$\sum_s c^{ks} = 0, \quad \sup_k |c^{kk}| < \infty. \quad (14)$$

Позначимо через $M^\varepsilon(t, Y)$, $R(Y)$ – вектори-стовпчики з компонентами $M_k^\varepsilon(t, Y)$,
 $R_k(Y) = P_k \int_0^{\tau^0} R_k(u, Y) du$, а через M – діагональну матрицю з елементами m_k на головній діагоналі.

Теорема. Нехай виконуються умови (8) – (14), тоді

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \\ \varepsilon t \rightarrow u}} M^\varepsilon(t, Y) = e^{\frac{u}{M}} M^{-1} R(Y)$$

в такому розумінні

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \\ \varepsilon t \rightarrow u}} \left\{ M_k^\varepsilon(t, Y) - \sum_{v=1}^{\infty} p_{kv}(u) \frac{1}{m_v} R_v(Y) \right\} = 0$$

для всіх $k = 1, 2, \dots$, де $\|p_{ks}(u)\|_{k,s=1}^\infty = \exp\{uC\}$.

Аналогічно для системи диференціальних рівнянь (6)

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \\ \varepsilon t \rightarrow u}} \left\{ M_k^\varepsilon(t, Y) - \sum_{v=1}^{\infty} p_{kv}(u) \frac{1}{m_v} T_v(Y) \right\} = 0,$$

де $T_k = P_k \int_0^{\tau_0} M_k(t) e^{A_k t} dt$, $k = 1, 2, \dots$, або

$$\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty \\ \varepsilon t \rightarrow u}} M^\varepsilon(t, Y) = e^{\frac{u}{M} C} M^{-1} T(Y).$$

T – вектор-стовпчик з компонентами T_k .

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язку системи лінійних дифференціальних рівнянь з коефіцієнтами, які залежать від напівмарківського процесу з скінченною множиною станів.

ЛІТЕРАТУРА

1. Валеев К.Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами / К.Г. Валеев, О.Л. Карелова, В.И. Горелов. – М.: Изд-во РУДН, 1996. – 258с.
2. Дегтярь С.В. Перехідні явища в теорії марковського відновлення / С.В. Дегтярь, В.Г. Дегтярь // Вісник НТУ. – 2009. – №19 – С.275 – 278.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

БАБИЧ С.Ю., д.т.н., профессор
ДЕГТЯРЬ С.В., к.физ.-мат.н., доцент
КУЛИК А.Б., к. физ.-мат. н., доцент
ЩЕКАНЬ Н.П., ассистент

Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана

ДВЕ СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СЛОЯ С НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Введение. В настоящее время по проблемам, относящимся к смешанным задачам для предварительно напряженных тел (контактные задачи, задачи для трещин), получены результаты по широкому кругу вопросов. Актуальность таких исследований не вызывает сомнений, так как начальные (остаточные) напряжения практически присутствуют во всех элементах конструкций. Как известно, начальные напряжения имеют различную природу. Так они возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении и сборке, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания, в кровеносных сосудах живых организмов. Начальные напряжения необходимо учитывать при решении задач о деформировании грунтов (особенно мёрзлых). Кроме того, в упруго пластических телах также могут присутствовать внутренние остаточные напряжения после снятия нагрузок. Иногда целесообразно преднамеренно создавать начальные напряжения (остаточные и технологические) для компенсации тех напряжений, которые возникают в элементах конструкций в процессе работы, и повышения их прочностных характеристик.

Постановка задачи и основные соотношения. В работах [1, 2] дана постановка и предложены методы решения осесимметричной контактной задачи для упругого предварительно напряженного слоя и задачи о трещине нормального отрыва в слое с начальными напряжениями.

В первой задаче исследуется осесимметричная контактная задача для жесткого кругового штампа, действующего без трения на упругий слой с начальными напряжениями. Вторая задача посвящена этому же слою, в котором имеется трещина нормального отрыва.

Отметим, что под трещинами нормального отрыва, как и в механике хрупкого разрушения тел без начальных напряжений, понимаются трещины, к поверхности которых симметрично относительно плоскости, в которой расположена трещина, приложена нормальная нагрузка. Все исследования в обеих задачах проводятся в общей форме для сжимаемых и несжимаемых материалов с однородными начальными напряжениями при произвольной структуре упругого потенциала для случаев равных и неравных корней определяющего уравнения.

Здесь используются общие решения статических задач линеаризованной теории упругости, построенные А.Н. Гузем[3]. Ограничимся случаем равных корней определяющего уравнения [1]. Согласно [1] представление перемещений через гармонические функции $\varphi_j(y_1, y_2, z_j)$ в круговых цилиндрических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial}{\partial r}(\varphi_1 + \varphi_2) + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z_1} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta}; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\varphi_1 + \varphi_2) + \frac{z_1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial r}; \\ u_z &= \frac{m_1}{\sqrt{n_1}} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z_1^2} \right) + \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}. \end{aligned} \quad (1)$$

При этом выражения для определения составляющих вектора напряжений $\tilde{\theta}$ при $y_3 = const$ через гармонические функции $\varphi_j(y_1, y_2, z_j)$ можем записать

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{33} &= c_{44} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} [(1+m_1)l_1\varphi_1 + (1+m_2)l_2\varphi_2] + (1+m_1)l_1z_1 \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial z_1^3} \right\}; \\ \tilde{\theta}_{3r} &= c_{44} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + \frac{(1+m_1)}{\sqrt{n_1}} \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial r \partial z_1^2} - \frac{1}{r\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \theta \partial z_3} \right\}; \\ \tilde{\theta}_{3\theta} &= c_{44} \left\{ \frac{1}{r\sqrt{n_1}} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z_1} [(1+m_1)\varphi_1 + (1+m_2)\varphi_2] + (1+m_1)z_1 \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial \theta \partial z_1^2} + \frac{1}{\sqrt{n_3}} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\sqrt{n_3} \partial r \partial z_3} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Величины c_{44} , n_j , m_j , l_j ($j=1,2$) определяются из выражений [1]. Данные задачи родственные в том смысле, что в отличие от граничных условий, они решаются с использованием преобразований Ханкеля с последующим сведением их к парным интегральным уравнениям. Последние уравнения приводятся к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Поскольку точных решений уравнения Фредгольма [4] не существует, то в общем случае при решении интегрального уравнения Фредгольма второго рода приходится прибегать к численным методам, для эффективной реализации которых существенным является непрерывность и ограниченность ядра уравнения.

В данной работе исследовано при каких значениях коэффициентов удлинений λ_1 (параметр, который характеризует предварительную напряженность) ядро интегрального уравнения Фредгольма имеет разрыв.

Для контактной задачи уравнение Фредгольма имеет вид [1]

$$\varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \varphi(t) [G(t+x, \lambda_1) + G(t-x, \lambda_1)] dt = F(x), \quad (0 \leq x \leq a). \quad (3)$$

Численные результаты в данной работе выполнены для конкретных видов упругих потенциалов. Здесь приведены результаты численного определения коэффициента интенсивности напряжений для равных (потенциал гармонического типа) и неравных (потенциал Бартенева-Хазановича) корней определяющего уравнения в зависимости от начальных напряжений (табл.1).

Таблица 1 – Распределение коэффициента интенсивности напряжений от величины начальных напряжений

P	Потенциал гармонического типа				Потенциал Бартенева-Хазановича
	v=0,1	v=0,2	v=0,3	v=0,4	
$\lambda_1=0,8$					
0,1	0,9692	0,9670	0,9650	0,9631	0,9135
0,4	0,8836	0,8751	0,8672	0,8598	0,7803
0,5	0,9291	0,9215	0,9146	0,9084	0,8718
0,6	1,006	1,001	0,9959	0,9917	0,9894
0,8	1,237	1,239	1,240	1,242	1,246
1,0	1,673	1,750	1,863	2,029	2,034
1,5	3,374	3,597	3,742	3,918	4,098
2,0	7,350	8,742	9,859	9,983	11,69

Здесь P – отношение диаметра трещины к толщине слоя принималось равным 2,0; 1,5; 1,0; 0,8; 0,6; 0,5; 0,4; 0,2 и 0,1; v – коэффициент Пуассона; $\lambda_1=0,8$ – коэффициент, характеризующий предварительную напряженность.

Выводы. Как видно из приведенной таблицы, наиболее сильное влияние начальных напряжений на коэффициент интенсивности напряжений проявляется для относительно тонкого слоя (при P=2,0), а для потенциала Бартенева-Хазановича и при P=1,5) для λ_1 равном 0,8, т.е. наиболее близком к значениям, являющимся корнями уравнений [2]. Другой максимум влияния начальных напряжений наблюдается при P=0,4 и $\lambda_1=1,3$ [2]. Причем величина K_I/K_I^0 для $\lambda_1 > 1$ растет при уменьшении P от 0,8 до 0,4, а затем при дальнейшем уменьшении P начинает убывать. Предельному случаю неограниченного упругого тела (P=0) соответствует прямая $K_I/K_I^0=1$ (K_I и K_I^0 – соответственно коэффициенты интенсивности напряжений в слое без и с начальными напряжениями). Как видно из таблицы значения коэффициента интенсивности напряжений для слоя уже при значении отношения диаметра трещины к толщине слоя P равном 0,1 близки к соответствующим значениям для коэффициента интенсивности напряжений для неограниченного упругого тела. Контактные характеристики в случае предварительно напряженного слоя вычислялись для потенциала Трелоара (несжимаемые тела) и для потенциала гармонического типа (сжимаемые тела). Как следует из выполненных расчетов и [5,6], зависимость контактных характеристик довольно существенная, особенно для несжимаемого слоя (полупространства).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг «Press-line», 2007. – 795с.
2. Примаченко О.В., Бабич С.Ю. Осесимметричная задача о трещине нормального отрыва в предварительно напряженном слое // Прикладная механика. – 1992. - 28, №7. – с.18-24
3. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук.думка, 1983. -296с.
4. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 403с.
5. Гузь О.М., Бабич С.Ю., Рудницький В.Б. Контактна взаємодія пружних тіл з початковими напруженнями. – К.: Вища школа, 1995. – 304с.
6. Cuz' A.N., Babich S.Yu., Rudnitsky V.B. Contact problems for elastic bodies with initial stresses: Focus on Ukrainian research // Applied Mechanics Reviews, vol. 51, no 5, May 1998.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 517.5

ДЕРЕЦ Е. В. к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

**О ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ
ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ,
ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫМ МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ**

Введение. Методы приближения, задаваемые линейными операторами, находят применение в различных вопросах математического анализа, теории приближения и математической статистики. Особое место занимают результаты, связанные с изучением аппроксимационных и асимптотических свойств линейных положительных операторов.

Пусть H_1^0 - множество 2π -периодических измеримых функций $f(t)$ таких, что

$$\omega(f, t)_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{|h| \leq t} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \omega(t),$$

где $\omega(t)$ - заданный модуль непрерывности, $W^r H_1^0$ ($r=1,2,\dots$)- множество 2π -периодических функций $f(t)$, у которых $(r-1)$ -я производная $f^{(r-1)}(t)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)}(t) \in H_1^0$.

Обозначим через $A_n(f, t)$ оператор вида

$$A_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t - \tau) d\tau,$$

где $u_n(t) = 1/2 + \sum_{k=1}^n p_k \cos kt$, $u_n(t) \geq 0$ для всех t .

Для выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ точное значение величины $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ при нечетных r вычислено в [1], при $r=2$ в [2]. В настоящей работе найдено значение $\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty$ для четных $r \geq 6$ и выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$.

Для каждого оператора $A_n(f, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t - \tau) d\tau$ обозначим через $g(A_n, t)$

нечетную 2π -периодическую функцию, при $t \in [-\pi, 0)$ равную $g(A_n, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^t u_n(\tau) d\tau$,

при каждом $k=1, 2, \dots$ в среднем равной нулю k -й периодический интеграл от функции $g(A_n, t)$ будем обозначать через $G_k(A_n, t)$, таким образом

$$G_k(A_n, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(A_n, t) \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\cos(v(t-x) + r\pi/2)}{v^r} dt.$$

Основным результатом работы является следующая теорема

Теорема 1. Для всех $r=6, 8, \dots$ и любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ и линейного положительного полиномиального оператора $A_n(f, t)$

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega} \|f - A_n(f)\|_\infty = \int_0^\xi \omega'(2t) |G_{r-1}(A_n, t)| dt, \quad (1)$$

где $\xi \in (0, \pi)$ - нуль функции $G_{r-1}(A_n, t)$.

Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть $G_2(A_n, t)$ - описанная выше функция, порожденная ядром оператора $u_n(\tau)$. Тогда справедливы следующие утверждения

- 1) $G_2(A_n, 0) = G_2(A_n, \pi) = 0$,
- 2) $G_2(A_n, t)$ выпукла вверх на $[0, \pi]$
- 3) $G_2(A_n, t) > G_2(A_n, \pi - t) > 0$ для всех $t \in (0, \pi/2)$.

Доказательство. Из способа построения функции $G_2(A_n, t)$ следует, что

$$G_2(A_n, t) = \int_0^t G_1(A_n, y) dy, \text{ поэтому } G_2(A_n, 0) = 0, G_2(A_n, \pi) = \int_0^\pi G_1(A_n, y) dy = 0.$$

Выпуклость вверх функции $G_2(A_n, t)$ на $[0, \pi]$ следует из строгого убывания производной $\frac{d}{dt} G_2(A_n, t) = G_1(A_n, t)$ на промежутке $[0, \pi]$. Кроме того, очевидно, для всех $t \in (0, \pi/2)$ выполняются неравенства $G_2(A_n, t) > 0$ и $G_2(A_n, \pi - t) > 0$. Рассмотрим функцию $h(t) = G_2(A_n, t) - G_2(A_n, \pi - t)$. Для доказательства леммы остаётся доказать, что $h(t) > 0$ для всех $t \in (0, \pi/2)$. Для любого $t \in (0, \pi/2)$

$$h'(t) = G_1(A_n, t) + G_1(A_n, \pi - t),$$

$$h''(t) = g(A_n, t) - g(A_n, \pi - t)$$

По построению функция $g(A_n, t)$ строго возрастает на $(0, \pi)$, поэтому $h''(t) < 0$ на промежутке $(0, \pi/2)$, следовательно, $h(t)$ выпукла вверх на этом промежутке, при этом $h(0) = h(\pi/2) = 0$. Поскольку $h(t)$ не является тождественным нулем на промежутке $[0, \pi/2]$, из этого следует, что $h(t) > 0$ для всех $t \in (0, \pi/2)$, что и требовалось доказать.

Теорема А. [3] Пусть $\psi(t)$ - $2\pi/n$ -периодическая четная функция, равная в среднем нулю на периоде, $k \in \mathbb{N}$, производная $\psi^{(2k+1)}(t)$ существует и непрерывна, $\psi^{(2k+1)}(0) = \psi^{(2k+1)}(\pi/n) = 0$, $|\psi^{(2k+1)}(t)|$ выпукла вверх на $[0, \pi/n]$, $|\psi^{(2k+1)}(t)| > |\psi^{(2k+1)}(\pi/n - t)|$ для всех $t \in (0, \pi/(2n))$.

Тогда для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f \in H_1^0} \int_0^{2\pi} \psi(t) f(t) dt = \int_0^{\xi} |\psi(t)| \omega'(2t) dt \quad (2)$$

где $\xi \in [0, \pi/n]$ - нуль функции $\psi(t)$. Верхнюю грань в (2) реализуют функции вида $C + f(\psi, \omega, x)$, где C - произвольная постоянная, а $f(\psi, \omega, x)$ - $2\pi/n$ -периодическая чётная функция, определенная равенством

$$f(\psi, \omega, x) = \begin{cases} \frac{\text{sgn} \psi(\xi/2)}{2n} \omega'(2x), & \text{если } x \in (0, \xi] \\ 0, & \text{если } x \in (\xi, \pi/n] \end{cases}$$

Основные результаты

Доказательство теоремы 1. Пусть $r \in \{6, 8, \dots\}$, $f \in W^r H_1^0$. Интегрируя по частям, нетрудно получить следующие равенства

$$\begin{aligned} f(t) - A_n(f, t) &= f(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau) u_n(t - \tau) d\tau = f(t) - f(t)g(A_n, -0) + f(t)g(A_n, +0) - \\ &- \int_0^{2\pi} f'(\tau)g(A_n, t - \tau) d\tau = - \int_0^{2\pi} f'(\tau)g(A_n, t - \tau) d\tau = - \int_0^{2\pi} f'(t - z)g(A_n, z) dz = \\ &= \int_0^{2\pi} f''(t - z)G_1(A_n, z) dz = - \int_0^{2\pi} f'''(t - z)G_2(A_n, z) dz. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, в конце получаем известное равенство

$$f(t) - A_n(f, t) = (-1)^r \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t - z)G_{r-1}(A_n, z) dz,$$

следовательно, так как множество функций H_1^0 вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит и все её сдвиги,

$$\sup_{f \in W^r H_1^0} \|f - A_n(f)\|_{\infty} = \sup_{f \in H_1^0} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t)G_{r-1}(A_n, z) dt \right|.$$

Поскольку множество функций H_1^0 вместе с каждой функцией $f(t)$ содержит и функцию $-f(t)$, справедливо равенство

$$\sup_{f \in W^r H_1^0} \|f - A_n(f)\|_\infty = \sup_{f \in H_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n, t) dt. \quad (3)$$

Таким образом, доказательство теоремы сводится к вычислению величины $\sup_{f \in H_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n, t) dt$. Положим $k = r/2 - 2$, тогда $G_{r-1}^{(2k+1)}(A_n, t) = G_{r-1}^{(r-3)}(A_n, t) = G_2(A_n, t)$, следовательно, в силу леммы 1 при любом четном $r \geq 6$ функция $G_{r-1}(A_n, t)$ удовлетворяет условиям теоремы А. Применяя теорему А к правой части (3), получаем (1). Теорема полностью доказана.

Выводы

В настоящей работе найдена погрешность приближения класса $W^r H_1^0$ линейными положительными полиномиальными операторами при любом четном $r \geq 6$ и любом выпуклом модуле непрерывности $\omega(t)$. При каждом $r \in \mathbb{N}$ решение такой

задачи сводится к вычислению величины $\sup_{f \in H_1^0} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) G_{r-1}(A_n, t) dt$, где функция

$G_{r-1}(A_n, t)$ определяется ядром оператора. При этом при четных r отсутствие симметрии функции $G_{r-1}(A_n, t)$ значительно усложняет задачу. В настоящее время автором получено обобщение теоремы А на случай $k = 0$, что позволяет доказать теорему 1 при $r = 4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Доронин В. Г., Лигун А. А. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. – 1980. – 251, №1. – С. 16–19.
2. Дерез Е. В. О приближении некоторых классов периодических дифференцируемых функций линейными положительными полиномиальными операторами // Системні технології. Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Дніпропетровськ, 2006. – С. 20–24.
3. Дерез Е. В. О точном решении некоторых экстремальных задач на классах функций, определенных мажорантой интегрального модуля непрерывности // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 2010. – №6/1. – Т. 18 – С. 102–109.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 517.5

ДАВИДЧИК А. Н. к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

О ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение. Задачи приближения классов функций состоят в исследовании величин

$$E(\mathfrak{N}, M_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in \mathfrak{N}} E(f, M_n) \quad (1)$$

или величина

$$\sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f - L_n(f)\|, \quad (2)$$

где \mathfrak{N} – класс функций, обладающих заранее известными нам свойствами (непрерывность, ограниченность какой-то производной и др.).

Важные результаты в этом направлении были получены С.Н. Бернштейном, а затем Д. Джексоном, которые для случая, когда $M_n = T_n (M_n = P_n)$ и $\mathfrak{N} = W_\infty^r (\mathfrak{N} = W_\infty^r[0,1])$ или $\mathfrak{N} = \overline{W}_\infty^r$ нашли порядки убывания по n величин (1) и (2) (величину для некоторых конкретных методов).

Это направление, т.е. вычисление порядков по n величин (1) и (2), в дальнейшем было развито Вале-Пуссенем, Л.Фейером, С.Б. Стечкиным, С.А. Теляковским и др.

Так как построение многочлена наилучшего приближения (точнее решение задачи (1) возможно лишь в крайне редких случаях, то существенную роль играют методы, для которых приближающие функции строятся сравнительно просто и обеспечивают достаточно хорошую степень приближения.

Впервые эту задачу строго сформулировал А.Н. Колмогоров и заключается она в следующем:

Пусть указан метод приближения $L_n(f)$, приводящий в соответствие каждой функции $f \in \mathfrak{N}$ некоторый многочлен $L_n(f, x)$ порядка $\leq n$. Требуется определить точно или асимптотически точно величину

$$\varepsilon(\mathfrak{N}, L_n, x) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - L_n(f, x)|, \quad (3)$$

или величину

$$\varepsilon(\mathfrak{N}, L_n)_p = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - L_n(f)_p\|, \quad (4)$$

которые являются мерой приближения на классе \mathfrak{N} .

Первый результат в этом направлении был получен А.Н. Колмогоровым. Он установил, что

$$\sup_{f \in W_\infty^r} \|f - S_n(f)\|_\infty = \frac{4 \ln n}{\pi^2 n^r} + o\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad (5)$$

где $s_n(f, x)$ – частные суммы ряда Фурье функции $f(x)$.

С.М. Никольский обобщил этот результат на классы $W^r H_\omega$. Позже для различных методов асимптотики величин находили Б. Надь, С.Б. Стечкин, С.А. Теляковский, В.К. Дзядык, А.И. Степанец и другие.

Постановка задачи. Пусть $f(x, y) \in C_{2\pi, 2\pi}$ – класс непрерывных, 2π – периодических функций по каждой переменной с нормой

$$\|f\| = \max_{x, y} |f(x, y)|.$$

$$\sigma_{n, n}(f; x, y) = \frac{1}{4\pi^2 n^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u, y+v) U_{nn}(u, v) du dv \quad (6)$$

– сумма Фейера, где

$$U_{n,n}(u, v) = U_n(u) \cdot U_n(v) = \left(\frac{\sin \frac{n}{2} u}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{n}{2} v}{\sin \frac{v}{2}} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Положим

$$\alpha_n = \frac{\gamma \ln(n + \alpha)}{n}.$$

Рассмотрим величину

$$\chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) = \sup_{\substack{f \in C_{2\pi, 2\pi} \\ f \neq const}} \frac{\|f(x, y) - \sigma_{n,n}(f; x, y)\|}{\omega(f; \alpha_n, \alpha_n)} \quad (8)$$

где

$$\omega(f; \alpha, \beta) = \sup_{\substack{|x_1 - x_2| < \alpha \\ |y_1 - y_2| < \beta}} |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \quad (9)$$

Результаты работы. Докажем следующее утверждение.

Имеет место асимптотическое равенство

$$\chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) = 1 + \frac{4}{\pi\gamma} - \frac{4 \ln(\gamma \ln(n + \alpha))}{\pi\gamma \ln(n + \alpha)} + o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \quad (10)$$

Доказательство. Известно, что

$$\chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) = \frac{1}{\pi^2 n^2} \int_0^\pi \int_0^\pi f_{n,n}(x, y) U_n(x) \cdot U_n(y) dx dy \quad (11)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \kappa, & \kappa\alpha_n \leq x \leq (\kappa+1)\alpha_n, \quad 0 < y < x \\ & \kappa\alpha_n < y < (\kappa+1)\alpha_n, \quad 0 < x < y \\ & \kappa = 0, 1, 2, \dots, n_0 \\ (n_0 + 1)\alpha_n \leq x \leq \pi, & 0 < y < x \\ \left[\frac{\pi}{\alpha_n} \right] & (n_0 + 1)\alpha_n \leq y \leq \pi, \quad 0 < x < y \end{cases} \quad (12)$$

$$n_0 = \left[\frac{\pi}{\alpha_n} \right] - 1$$

Проведя некоторые преобразования

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) &= \frac{1}{\pi n} \int_0^\pi \left[1 + \frac{y}{\alpha_n} \right] U_n(y) dy + \\ &+ \frac{1}{\pi^2 n^2} \sum_{\kappa=0}^{n_0} \int_{\kappa\alpha_n}^{(\kappa+1)\alpha_n} U_n(y) dy \cdot \sum_{l=\kappa+1}^{n_0+1} \int_{l\alpha_n}^\pi U_n(x) dx = J'_n J''_n \end{aligned} \quad (13)$$

К сумме J''_n применим преобразование Абеля

$$J''_n = \frac{1}{\pi n} \sum_{\kappa=1}^{n_0+1} a_\kappa - \frac{1}{\pi^2 n^2} \sum_{\kappa=1}^{n_0+1} a_\kappa^2$$

где

$$a_{\kappa} = \int_{\kappa\alpha_n}^{\pi} U_n(z) dz$$

и учитывая, что

$$a_{\kappa} = \int_{\kappa\alpha_n}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2nz) \frac{dz}{\sin^2 z} = \frac{2n}{\kappa\gamma \ln(n+\alpha)} + \xi(n)$$

и

$$|\xi(n)| < \frac{2\pi n}{\kappa^2 \gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + 1,4$$

из соотношений получим

$$J_n'' < \frac{1}{\pi n} \sum_{\kappa=1}^{n_0+1} \left(\frac{2n}{\kappa\gamma \ln(n+\alpha)} + \frac{2\pi n}{\kappa^2 \gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + 1,4 \right) < \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &< \frac{2n}{\pi\gamma \ln(n+\alpha)} \sum_{\kappa=1}^{n_0+1} \frac{1}{\kappa} + \frac{2,5}{\gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + \frac{1,4}{\gamma \ln(n+\alpha)} < \\ &< \frac{2n}{\pi\gamma \ln(n+\alpha)} \left(\ln(n_0+1) + C + \frac{1}{2n} \right) + \frac{2,5}{\gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + \frac{1,4}{\gamma \ln(n+\alpha)} < \\ &< \frac{2n}{\pi\gamma} - \frac{2 \ln(\gamma \ln(n+\alpha))}{\pi\gamma \ln(n+\alpha)} + \frac{5}{\gamma \ln(n+\alpha)} - \frac{2,5}{\gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + \frac{1}{\pi\gamma \ln(n+\alpha)} \end{aligned} \quad (15)$$

где C – постоянная Эйлера, $C \approx 0,577$.

Причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n'' = \frac{2}{\pi\gamma}$$

Величина J_n' оценена в

Учитывая теперь соотношение, получим

$$\begin{aligned} \chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) &< 1 + \frac{4}{\gamma\pi} - \frac{4 \ln(\gamma \ln(n+\alpha))}{\gamma\pi \ln(n+\alpha)} + \\ &+ \frac{7}{\gamma \ln(n+\alpha)} + \frac{4,5}{\gamma^2 \ln^2(n+\alpha)} + \frac{1}{n\pi\gamma \ln(n+\alpha)} \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi(\sigma_{n,n}, \alpha_n) = 1 + \frac{4}{\pi\gamma}$$

Теорема доказана.

Выводы. Полученные асимптотически точные константы Джексона при приближении функции двух переменных сумма Фейера.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коровкин П.П. Об одном асимптотическом свойстве суммирования рядов Фурье и о наилучшем приближении функций класса z^2 линейными положительными операторами. – УМН, 1958, т.13, №6(84), С. 99–103.

2. Коровкин П.П, Асимптотические свойства положительных методов суммирования рядов Фурье. – УМН, 1960, т.15, №1(19), С. 207–212.
3. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближения. – М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
4. Баскаков В.А. О порядке приближения дифференцируемых функций линейными положительными операторами. – В сб.: Теория приближения функций, Труды Международной конференции по теории приближения функций, Калуга 1975, С. 28–31.
5. Баскаков В.А., Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций суммами Фейера. – Мат. заметки, 1982, т.32, вып. 2, С. 129–141.
6. Лигун А.А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций. – Мат. заметки, 1973, т.14, №1, С. 21–30.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.375 : 622.35

ЛУГОВИЙ П.З., д.т.н., професор, гол.н.с.
ПРОКОПЕНКО Н.Я. к. т. н., ст.н.с.
ГОЛОВКО К.Г., к. фіз.-мат. н., н. с.

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

МОДЕЛЮВАННЯ ДІЇ НАВАНТАЖУВАЛЬНОГО КЛИНОВОГО ЕЛЕМЕНТУ УДАРНОГО МЕХАНІЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

Вступ. Не зважаючи на позитивні сторони вибухової відбійки блоків і руйнування негабаритів, питома вага технологій видобутку каменю з використанням механічних засобів зростає, що зумовлено наступними недоліками вибухової технології: вибух в значній мірі порушує монолітність породи, що приводить до зменшення виходу готової продукції з 1м^3 блоку, особливо при виготовленні тонких плит; вибухова технологія відноситься до процесів підвищеної небезпеки; обов'язкова наявність спеціально підготовлених кадрів для проведення вибухових робіт; зупинка роботи кар'єру для виводу людей і механізмів з небезпечної зони, що призводить до втрат робочого часу. Тому поширюється застосування буроклинового механічного обладнання, яке створює ударні навантаження на шпури при розколу негабаритів та видобутку кам'яних блоків [1]. З допомогою експериментального моделювання проведемо дослідження способів керування динамічними навантаженнями шпурів з допомогою ударних клинових елементів.

Експериментальна методика. В якості клинового елемента використаємо сталевий циліндр 1 з конічною заточкою в $13^\circ 25'$ на торці (Рис. 1). Циліндр 1 конічним торцем жорстко закріплюється в отворі діаметром $d = 0,016\text{м}$ перпендикулярно до пластини з органічного скла 2 [2]. В цьому випадку навантажувальний клиновий елемент 1 виконує роль вісесиметричного клину, кут конусності якого $\alpha = 13^\circ 25'$.

На елемент 1 в якості направляючої одивається тонка алюмінієва циліндрична трубка 3. Завдяки цій направляючій можна створювати ударні навантаження на торець клинового елемента 1 паралельно до його вісі. Ударні вісесиметричні навантаження створювалися з допомогою скидання по направляючій 3 сталевому циліндру вагою $m_1 = 0,145\text{кг}$. На відстані $0,020\text{м}$ від центра отвору по радіальній лінії відколу був наклеєний тензорезистор марки КТД 7Б для реєстрації радіальних деформацій ε_r^0 в часові. Сигнал від нього подавався на один із променів двохпроменевого осцилографа з пам'яттю GDS

- 806S ~ 8. Циліндр скидався з висоти $h_1 = 0,235\text{м}$, з осцилограми Рис. 2 видно, що навантаження на пластину носить ударний характер. Так як елемент 1 виготовлений із сталі, модуль

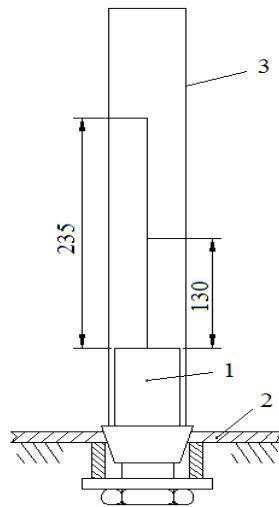


Рисунок 1

пружності якої в 400 разів більший за модуль пружності органічного скла, то можна вважати, що елемент 1 працює, як абсолютно жорстке тіло.

При ударі циліндра по навантажувальному елементу 1 максимум

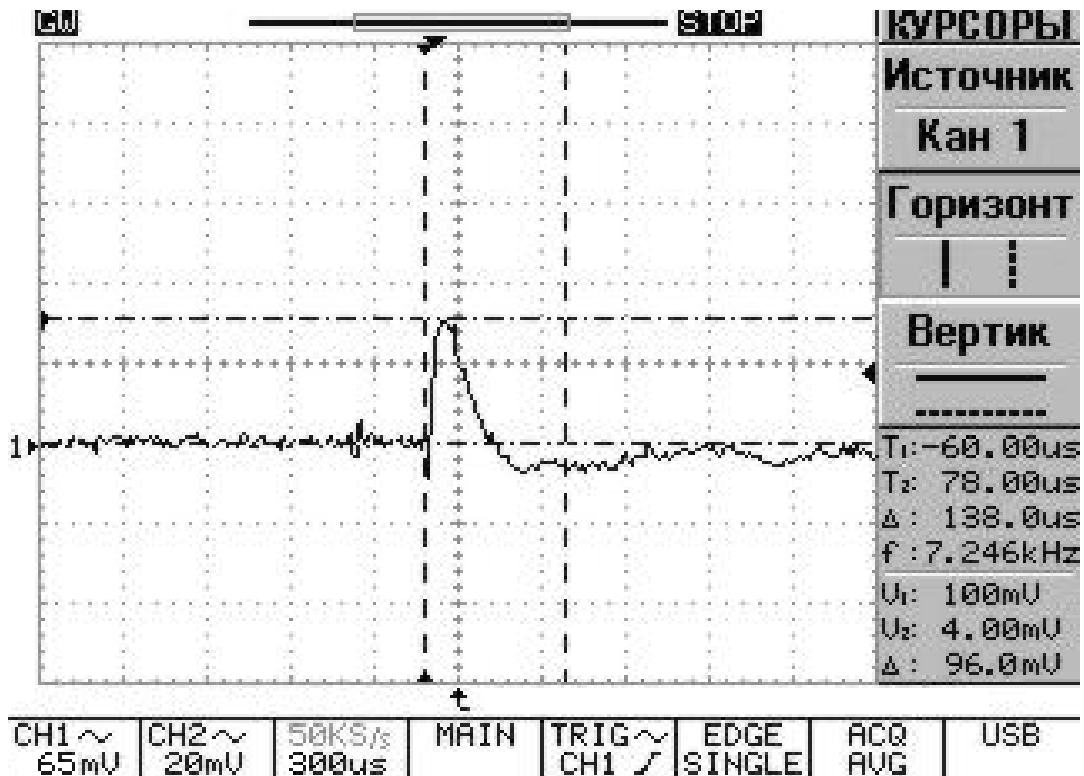


Рисунок 2

$\varepsilon_r^a = 0,32 \cdot 10^{-3}$, імпульс $I \approx 44.16$. Це середні значення експериментальних величин по трьом аналогічним дослідом.

З результатів експериментів слідує, що при підйомі циліндра виконана робота 0,0341 кГм.

Проведемо експеримент по визначенню впливу характеру неосесиметричного динамічного навантаження на шпуровий отвір на деформований стан пластини в тичках лінії відколу. В цьому випадку елемент 1 закріпимо перпендикулярно до пластини 2 з використанням вкладок для створення концентрації динамічних напружень в точках контура отвору, які лежать на лінії відколу. Вкладки виготовлялися з практично нестисливого щільного поліетилену і вставлялися між клиновою частиною елемента 1 і контуром отвору таким чином, щоб в точках лінії відколу були розриви вкладок розміром 0,01м. Ударні навантаження створювалися з допомогою скидання по направляючій 3 сталюого циліндру, як і в попередніх випадках.

При ударі циліндра по елементу 1 з поліетиленовими вкладками, з осцилограми $\varepsilon_r^d(t)$ (Рис. 3) видно, що навантаження на пластину носить

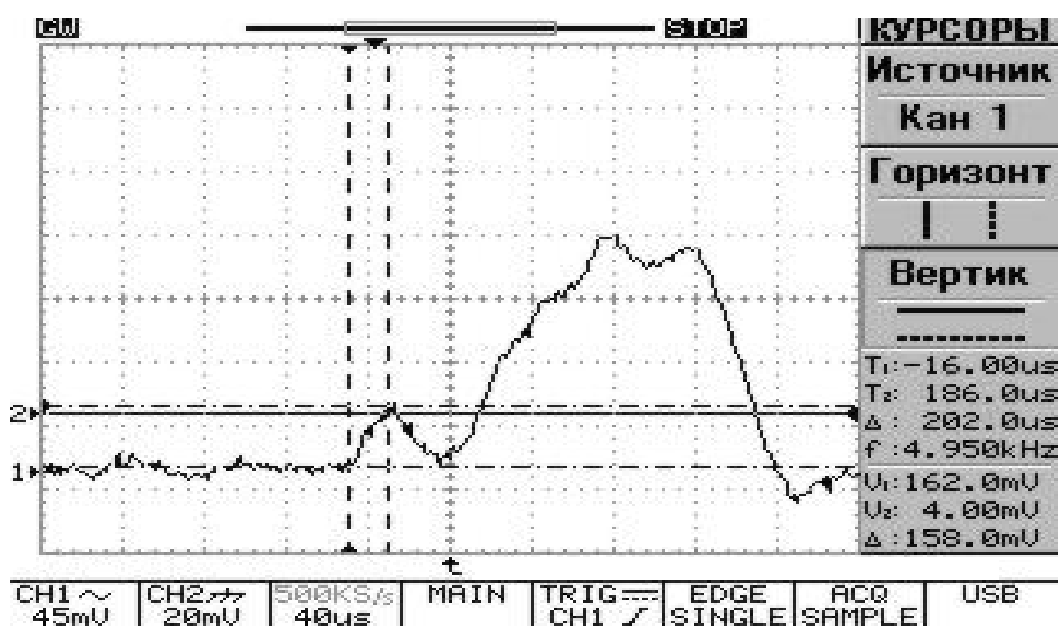


Рисунок 3

імпульсний характер. На початку зафіксованого на осцилограмі імпульсу чітко просліджується проходження ударного навантаження через поліетиленові вкладки і наростання імпульсного навантаження до свого максимуму. Максимальна радіальна динамічна деформація для цього виду навантаження $\varepsilon_r^d = 0,53 \cdot 10^{-3}$, а імпульс $I \approx 107,06$. Це середні значення експериментальних величин по трьом аналогічним дослідом.

Висновки. Аналіз результатів експериментів показує, що завдяки перерозподілу динамічного навантаження на контур шпуру з допомогою поліетиленових вкладок максимум деформацій в точках прогнозованої лінії відколу ε_r^d збільшився в 1,66 рази, а імпульс I збільшився в 2.42 рази при одній і тій же виконаній роботі циліндра. Слід підкреслити, що при перерозподілу динамічних навантажень на контур шпуру з допомогою поліетиленових вкладок для створення концентрації динамічних напружень, підтверджується той факт, що напруження по лінії відколу значно збільшуються (в даному випадку на 66%).

Відмітимо, що коли динамічне навантаження має вісесиметричний характер, то воно рівномірно розподіляється по периметру отвору довжиною $\pi d = 3,13 \times 0,016 \text{ м} =$

0,05м. У випадку наявності вставок, навантаження рівномірно розподіляється по довжині вкладок. В даному випадку довжина вкладок дорівнює $0,05\text{м} - 0,02\text{м} = 0,03\text{м}$. При рівномірному розподілу навантаження від удару циліндра однієї ваги по периметру отвору і по сумарній довжині вкладок відношення інтенсивності навантаження на вкладки до інтенсивності вісесиметричного навантаження на контур отвору буде дорівнювати $0,05\text{м}/0,03\text{м} = 1,67$. Порівнюючи експериментальні результати і теоретичний розрахунок можна стверджувати, що для розглядуваного випадку відношення деформації при наявності вкладок в точці запланованого розколу до вісесиметричної деформації практично співпадає з відношенням довжини периметру отвору до довжини вкладок.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карасёв Ю.Г. Природный камень. Добыча блочного и стенового камня : [учеб. пособие для студентов высш. учеб. зав.] / Карасёв Ю.Г, Бакка Н.Т. – Санкт–Петербургский горный ин-т. СПб, 1997. – 428с.
2. Луговий П.З. Експериментальне дослідження деформованого стану навколо кругового отвору при його нормальному вісесиметричному статичному навантаженні / П. З. Луговий, К. К. Ткачук, Т. В. Гребенюк // Математичні проблеми технічної механіки: Міжнародна наукова конференція: матеріали конференції (Том 1). – Дніпродзержинськ – Дніпропетровськ, 2012. – С. 28.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

ОКСЕНЧУК Н.Д.

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕРХНЕВОГО ЗМІЦНЕННЯ ПІВПРОСТОРУ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ ТЕРМОМЕХАНІЧНОМУ НАВАНТАЖЕННІ З ВРАХУВАННЯМ МІКРОСТРУКТУРНОГО ПЕРЕТВОРЕННЯ

Вступ. Лазерна обробка елементів конструкцій потужними імпульсами або опромінення деталі короткими пучками електронних променів використовуються, зокрема, для зміцнення та очищення поверхні, мікроштампування, мікроформування тощо [1, 2]. Імпульсна обробка є ефективним методом підвищення міцності, зносостійкості та довговічності металевих елементів конструкцій за допомогою утворення областей залишкових стискальних напружень і зміцнення в приповерхневій зоні матеріалу.

В роботі [3] дослідження залишкового напружено-деформованого та мікроструктурного поверхневих шарів тіл проводилось із врахуванням трансформаційних змін об'єму матеріалу. В даній роботі дається оцінка механізмам зміцнення, які виникають при імпульсному термомеханічному навантаженні півпростору. При цьому крім трансформаційних змін об'єму враховується залежність непружних характеристик від фазового складу матеріалу при мікроструктурних перетвореннях (МСП) та зміні температури [4]. В якості матеріалу обирається сталь 35ХМА.

Постановка задачі. Постановка задачі для ізотропного матеріалу в системі координат $Oz\varphi$ складається із:

– співвідношень Коші для деформації

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad (1)$$

де u_r і u_z – компоненти вектора переміщень; ε_{zz} , ε_{rr} , ε_{rz} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензора деформації;

– рівнянь руху

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_r, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \ddot{u}_z, \quad (2)$$

де σ_{zz} , σ_{rr} , σ_{rz} , $\sigma_{\varphi\varphi}$ – компоненти тензора напружень, ρ – густина матеріалу;

– рівняння теплопровідності (3)

$$\bar{c}_V \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{k} r \frac{\partial \theta}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial z}) - T \dot{\sigma}_{kk} \hat{\alpha} + \rho \Delta i_\xi \dot{C}^\xi + D', \quad (3)$$

$$\bar{c}_V = c_V^\xi C^\xi, \quad \bar{k} = k^\xi C^\xi, \quad V_0^\xi = V^\xi(\theta_r), \quad \hat{\alpha} = \frac{\sum_\xi V_0^\xi C^\xi \alpha_\xi}{\sum_\xi V_0^\xi C^\xi}, \quad \alpha_\xi = \frac{(V^\xi - V_0^\xi)}{3(\theta - \theta_0) V_0^\xi},$$

$$\sum_\xi C^\xi = C^a + C^b + C^f + C^p + C^m = 1, \quad \xi = a, b, p, f, m, \quad (4)$$

де θ – температура; θ_r – відлікова температура; $\dot{\theta} = \partial \theta / \partial t$; \bar{c}_V і \bar{k} – об'ємна теплоємність і коефіцієнт теплопровідності суміші фаз; $\hat{\alpha}$ – узагальнений коефіцієнт об'ємного розширення; $\dot{\sigma}_{kk} = \dot{\sigma}_{rr} + \dot{\sigma}_{zz} + \dot{\sigma}_{\varphi\varphi}$; Δi_ξ – прихована теплота перетворення аустеніту у фазу ξ ; D' – швидкість внутрішньої дисипації; $V^\xi(\theta)$ – об'єм фази ξ для температури θ ; \tilde{N}^ξ – об'ємна концентрація фаз ξ , $\xi = a, f, p, b, m$, де a – аустеніт, f – ферит, p – перліт, b – бейніт, m – мартенсит.

Постановка задачі включає також початкові (5) та граничні умови (6) – (7).

$$u_r = \dot{u}_r = 0; \quad u_z = \dot{u}_z = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad t = 0, \quad (5)$$

де θ_0 – початкова температура.

Розглядається півпростір $z > 0$, $0 < r < \infty$. Припускається, що від нуля відмінна лише осьова компонента переміщення u_z , причому $u_z = u_z(z, t)$, а також $\theta = \theta(z, t)$. За цих припущень задача для півпростору еквівалентна задачі для стержня $0 < r < R$, $z > 0$, на бічній поверхні якого виконуються умови гладкого контакту і теплоізоляції

$$u_r = 0, \quad \sigma_{rz} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad z > 0 \quad (5)$$

за умов (6) – (7) на торці $z = 0$.

$$-k \frac{\partial \theta}{\partial z} = \begin{cases} q_0 \sin \frac{\pi}{t_q} t, & t \leq t_q, \\ 0, & t > t_q; \end{cases} \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \begin{cases} -p_0 \sin \frac{\pi}{t_\sigma} t, & t \leq t_\sigma, \\ 0, & t > t_\sigma, \end{cases} \quad (7)$$

де q_0 і p_0 – задані параметри теплового і механічного навантаження; t_q , t_σ – часові параметри навантаження – терміни дії імпульсів, між якими приймається співвідношення $t_\sigma = 2t_q$.

Нелінійна поведінка матеріалу описується термомеханічною моделлю течії Боднера-Партома, яка узагальнена для випадку багатофазового складу матеріалу [5, 6].

Модель течії включає наступні співвідношення – рівняння адитивності деформації

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{in} + \varepsilon_{ij}^{\theta ph}, \quad i, j = r, z, \varphi, \quad (8)$$

де об'ємна термотрансформаційна деформація $\varepsilon_{ij}^{\theta ph}$ приймається у вигляді

$$\varepsilon_{ij}^{\theta ph}(\theta, \theta_r, C^\xi) = \frac{V^\xi(\theta)C^\xi(\theta) - V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)}{3V^\xi(\theta_r)C^\xi(\theta_r)} \delta_{ij}; \quad (9)$$

– закон Гука, записаний для девіаторної та кульової складових тензора напружень

$$s_{ij} = 2G(e_{ij} - e_{ij}^{in}), \quad \sigma_{kk} = 3K_V(\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{\theta ph}), \quad (10)$$

де s_{ij} і e_{ij} – девіатори тензорів напружень і деформації відповідно; G і K_V – модулі зсуву й об'ємного розширення;

– закон течії Прандтля-Рейса з умовою непружної нестисливості

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{in} = D_0 \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(K_0 + K')^2}{3J_2}\right]^n\right\} \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, \quad \varepsilon_{ij}^{in}(0) = 0; \quad \varepsilon_{ii}^{in}(0) = 0; \quad (11)$$

де $J_2 = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}$;

– рівняння еволюції Орована – Бейлі для внутрішньої змінної ізотропного зміцнення K

$$\dot{K} = m_1(K_1 - K)\dot{W}^{in}, \quad K(0) = 0, \quad (12)$$

де $\dot{W}^{in} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^{in}$ – потужність непружної деформації.

У співвідношеннях (9) і (10) величини D_0 , m_1 , n , K_0 , K_1 – параметри моделі.

В даній роботі параметри узагальненої моделі \bar{K}_0 і \bar{K}_1 , які відповідають за границю текучості та тимчасовий опір матеріалу, для довільного фазового складу визначаються за лінійним правилом сумішей на основі експериментальних даних [5, 7, 8].

$$\begin{aligned} K_0 &\rightarrow \bar{K}_0 = K_0^{(\xi)}C^\xi, \\ K_1 &\rightarrow \bar{K}_1 = K_1^{(\xi)}C^\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

де $K_1^{(\xi)}$, $K_0^{(\xi)}$ – параметри моделі для окремих фаз. Відзначимо, що параметри m_1 та n , які відповідають за швидкість насичення зміцнення та чутливість до швидкості деформування відповідно, для всіх фаз приймаються однаковими.

Метод розв'язування задачі. В даній роботі вплив МСП враховується, по-перше, через термотрансформаційну деформацію, яка враховує зміни об'єму при фазових перетвореннях та зміні температури і входить в об'ємну складову закону Гука (10), по-друге, через залежність непружних характеристик, зокрема границю текучості σ_{02} та тимчасовий опір σ_B , від фазового складу матеріалу.

Термотрансформаційна складова деформації визначається через питомі об'єми та концентрації фаз [9]. Розрахунок концентрації фаз переохолодженого аустеніту проводиться за допомогою термокінетичної діаграми ТКД [10] та співвідношень для питомих об'ємів фаз [11]. Для розрахунку накопичення фаз вздовж ТКД-траєкторії використовується рівняння Коїстінена-Марбургера.

Нелінійна задача (1) – (15) розв'язується чисельно методом покровокового неявного інтегрування по часу, ітераційного методу та МСЕ. Алгоритм розв'язування описаний в роботі [3].

Результати розрахунків та висновки. Розрахунки проводились при наступних параметрах: $R = 10^{-4} \text{ м}$, $L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $p_0 = 8 \text{ ГПа}$, $q_0 = 2 \cdot 10^{11} \text{ êÁò / ì}^2$, $t_q = 1 \cdot 10^{-8} \text{ с}$.

Температура змінювалась в межах від $20^\circ \text{Ñ} \div 1300^\circ \text{Ñ}$. Початковий фазовий склад матеріалу був таким: $a = 0$, $b = 0,79$, $f + p = 0,11$, $m = 0,10$.

В розглянутій моделі течії за зміцнення відповідає параметр ізотропного зміцнення K , $K = K' + \bar{K}_0$, $\bar{K}_0 = K_0^\xi C^\xi$. Параметр \bar{K}_0 відображає вплив температури та фазового складу матеріалу (трансформаційне зміцнення), а K' - здебільшого деформаційне зміцнення.

Непружні характеристики фаз та відповідні значення параметрів для сталі 35ХМА розраховані в роботі [5]. Діаграми розтягу для окремих фаз, розраховані за допомогою узагальненої моделі, показані на рис. 1, де чорними квадратами ілюструються експериментальні дані [7, 8].

Результати досліджень парціальних вкладів обох механізмів зміцнення в залишковому стані ($t > 5 \cdot 10^{-7} \text{ с}$) показані на рис. 2. Для аналізу розрахунків використані наступні позначення: $q + f_s + p$ - розрахунок із врахуванням впливу фазового складу на neprужні властивості матеріалу; $q + f + p$ - розрахунок із врахуванням лише термотрансформаційної деформації. Штрих-пунктирна крива відповідає значенню параметра зміцнення \bar{K}_0 для початкового фазового складу.

З рис. 1 видно, що трансформаційний механізм зміцнення матеріалу

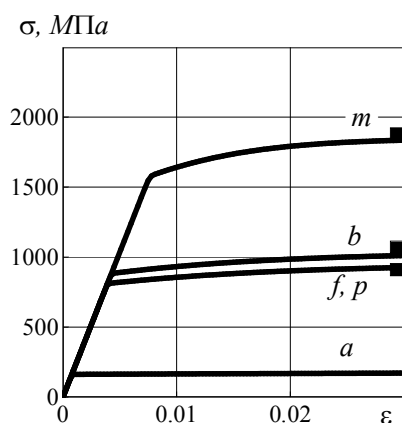


Рисунок 1

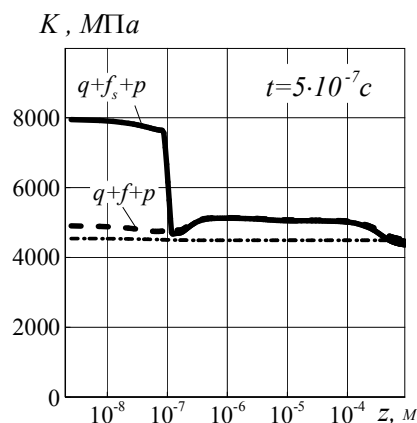


Рисунок 2

(крива $q + f_s + p$), пов'язаний із більш високим рівнем границі текучості у фазі мартенситу в порівнянні із початковою фазою (рис. 2), є визначальним. Встановлено, що приріст параметра зміцнення відносно початкового фазового складу дорівнює $\Delta K = 4200 \text{ Ì ã}$, а приріст за рахунок деформаційного зміцнення складає $\Delta K = 800 \text{ Ì ã}$.

Таким чином, розвинута модель дозволяє отримати кількісні та якісні ефекти впливу фазового складу на neprужні характеристики матеріалу, а саме: рівень

трансформаційного зміцнення, який при даних параметрах навантаження суттєво більший, ніж деформаційний.

ЛІТЕРАТУРА

1. Rubio-Gonzales C., Osana J. L., Gomes-Rosas G. Effect of laser shock processing on fatigue crack growth and fracture toughness of 6061-T6 aluminum alloy // Mater. Sci. & Engng. – 2004. – Vol. 386, №3. – P. 291–295.
2. Yilbas B. S. Laser pulse heating and flexural wave generation during treatment of metallic surfaces // J. Materials Processing Techn. – 2003. – Vol. 141. – P. 1–8.
3. Жук Я. О., Сенченков І. К., Васильєва Л. Я. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, №1. – С. 101–115.
4. Оксенчук Н. Д., Доля О. В. Чисельне дослідження мікроструктурних перетворень та напруженого стану півпростору при термомеханічному навантаженні // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій: Збірник наукових праць. — Дніпропетровськ: Ліра. — 2012. — Вип.20. — С. 267—273.
5. Сенченков І. К., Оксенчук Н. Д. Моделирование неизо термического течения с учетом зависимости пластических свойств от микроструктуры материала // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. — Т. 55, №1. – С. 138–144.
6. Moreno V., Jordan E. H. Prediction of material thermomechanical response with a unified viscoplastic constitutive model // Int. J. of Plast. – 1986. – Vol. 2. – P. 223–245.
7. Шоршоров М. Х., Белов В. В. Фазовые превращения и изменения свойств стали при сварке. Атлас. – Москва: Наука, 1972. – 220 с.
8. Гольденблат И. И., Безухов Н. И., Бажанов И. И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур. - М.: Машиностроение, 1965. – 568 с.
9. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: Наук. думка, 1976. — 326 с.
10. Попов А. А., Попова А. Е. Справочник термиста. Изотермические и термокинетические диаграммы распада переохлажденного аустенита. – М. – С.: - ГНТИ Машиностр. лит., 1961. – 430 с.
11. Юрьев С.Ф. Удельные объемы фаз в мартенситном превращении аустенита. – М.: Металлургиздат, 1950. – 48 с.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

СТЕБЛЯНКО П.О. д.фіз.-мат. н., професор
КРАВЧУК Т.В., аспірант

Черкаський національний університет

ПОБУДОВА ТА АНАЛІЗ СТИКУВАННЯ ПОВЕРХОНЬ, ПОБУДОВАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ДВОВИМІРНИХ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ

Вступ. В останні роки різко зріс інтерес до класичних методів раціональної апроксимації функцій. Це пов'язано з тим, що такі апроксимації знайшли різноманітне застосування в обчислювальних задачах теоретичної фізики та механіки. Більшість чисельних методів розв'язування задач математичного аналізу зв'язана з апроксимацією функцій. Серед них на першому місці стоїть проблема представлення і зберігання геометричної інформації в самих різноманітних областях, чи то природничі науки, чи то техніка, чи архітектура. Особливо широке застосування сплайни отримали

в техніці як апарат для математичного моделювання поверхонь деталей і агрегатів складних форм.

Мета роботи – проаналізувати методи сплайн-функцій у випадку їх застосування до інтерполяції поверхонь, склавши інтерполяційний вираз для апроксимації поверхонь та дослідивши розриви між двома інтерполяційними поверхнями, які сполучаються в чотирьох точках.

Постановка задачі інтерполяції. Нехай задані сітка Δ :

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{m-1} < \xi_m = b, \quad c = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_{m-1} < \eta_m = d$$

і набір чисел ω_{ij} , $i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$.

Побудуємо на прямокутнику $R = [a, b] \times [c, d]$ гладку функцію $\omega(\xi, \eta)$, яка приймає у вузлах сітки Δ задані значення:

$$\omega(\xi_i, \eta_j) = \omega_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (1)$$

Сформульована задача інтерполяції полягає у відновленні функції, заданій за допомогою таблиці. Така задача має безліч різних розв'язків. Накладаючи на конструйовану функцію додаткові умови, можна добитися необхідної однозначності [1]

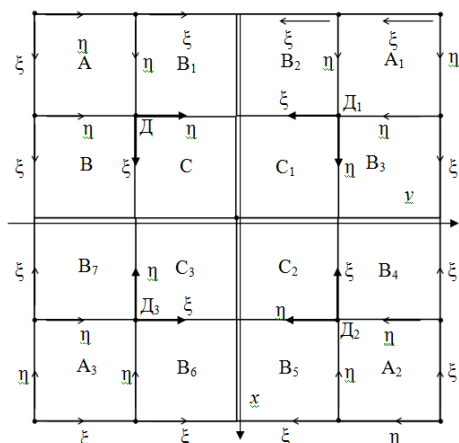


Рисунок 1 – Область визначення базисного напруженого сплайна

В кожній допоміжній області двовимірний базисний сплайн розшукуємо у вигляді наступного добутку

$$S_{2D} = \left[a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \right] \cdot \left[b_0 + b_1 \eta + b_2 \eta^2 + b_3 \eta^3 \right], \quad (2)$$

де $\xi \in [0; 1]$, $\eta \in [0; 1]$, а для визначення коефіцієнтів a_i, b_i , $i = 0; 1; 2; 3$ використовуються певні умови.

Поверхня (2) симетрична щодо осей координат і складається з шістнадцяти «склеєних» частин трьох типів [1]. Допоміжні області А, В, С і так далі разом з локальними системами координат ξ, η показані на малюнку 1.

В області А поверхня задається функцією

$$S_{2D}^A(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot \xi^3 \cdot \eta^3.$$

В області С поверхня задається функцією

$$S_{2D}^C(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot \left[1 + 3 \cdot (\xi + \xi^2 - \xi^3) \right] \cdot \eta^3.$$

В області В поверхня задається функцією

$$S_{2D}^B(\xi, \eta) = \frac{1}{24} \cdot [1 + 3 \cdot (\xi + \xi^2 - \xi^3)] \cdot [1 + 3 \cdot (\eta + \eta^2 - \eta^3)].$$

Інтерполяція поверхонь. Нехай задані сітка Δ , і набір значень двовимірної функції, що інтерполюється ω_{ij} , $i = 0,1,2,3$, $j = 0,1,2,3$. Необхідно побудувати на прямокутнику $R = [0,1] \times [0,1]$ гладку поверхню $\omega(\xi, \eta)$, яка приймає у вузлах сітки Δ задані значення:

$$\begin{aligned} \omega_{00} &= \omega(0,0); & \omega_{10} &= \omega\left(\frac{1}{3}, 0\right); & \omega_{20} &= \omega\left(\frac{2}{3}, 0\right); & \omega_{30} &= \omega(1,0); \\ \omega_{01} &= \omega\left(0, \frac{1}{3}\right); & \omega_{11} &= \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right); & \omega_{21} &= \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); & \omega_{31} &= \omega\left(1, \frac{1}{3}\right); \\ \omega_{02} &= \omega\left(0, \frac{2}{3}\right); & \omega_{12} &= \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); & \omega_{22} &= \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right); & \omega_{32} &= \omega\left(1, \frac{2}{3}\right); \\ \omega_{03} &= \omega(0,1); & \omega_{13} &= \omega\left(\frac{1}{3}, 1\right); & \omega_{23} &= \omega\left(\frac{2}{3}, 1\right); & \omega_{33} &= \omega(1,1). \end{aligned}$$

Маємо рівномірну сітку розбиття (Рис.2):

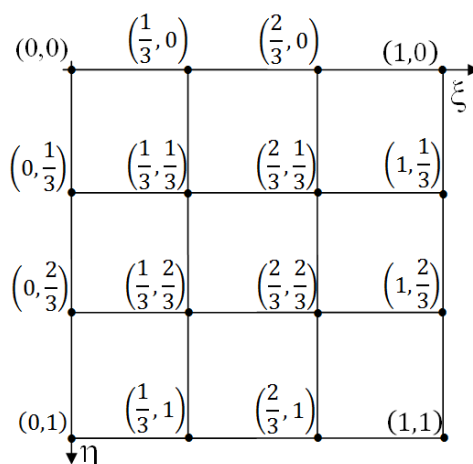


Рисунок 2 – Рівномірна сітка розбиття

Для побудови заданої поверхні W використаємо бікубічний інтерполяційний сплайн, загальне рівняння якого має вигляд:

$$\begin{aligned} S(\xi, \eta) &= c_1 \xi^3 \eta^3 + c_2 \xi^3 \eta^2 + c_3 \xi^3 \eta + c_4 \xi^3 + c_5 \xi^2 \eta^3 + c_6 \xi^2 \eta^2 + c_7 \xi^2 \eta + c_8 \xi^2 + c_9 \xi \eta^3 + \\ &+ c_{10} \xi \eta^2 + c_{11} \xi \eta + c_{12} \xi + c_{13} \eta^3 + c_{14} \eta^2 + c_{15} \eta + c_{16} \end{aligned} \quad (3)$$

Задача зводиться до відшукування коефіцієнтів: c_i , $i = 1, 2, \dots, 16$.

Розв'яжемо цю систему матричним способом. Складемо матричне рівняння: $A \cdot C = W$. Матриця коефіцієнтів C має вигляд $C = A^{-1} \cdot W$.

Для того щоб знайти коефіцієнти c_i інтерполяційного сплайна, підставлятимемо у рівняння (3) координати заданих 16-ти точок, в результаті чого отримаємо систему 16-ти рівнянь із 16-ма невідомими:

$$\begin{cases}
 \omega_{00} = c_{16} \\
 \omega_{01} = \frac{1}{27}c_{13} + \frac{1}{9}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{02} = \frac{8}{27}c_{13} + \frac{4}{9}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{03} = c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{10} = \frac{1}{27}c_4 + \frac{1}{9}c_8 + \frac{1}{3}c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{11} = \frac{1}{36}c_1 + \frac{1}{35}c_2 + \frac{1}{34}c_3 + \frac{1}{33}c_4 + \frac{1}{35}c_5 + \frac{1}{34}c_6 + \frac{1}{33}c_7 + \frac{1}{32}c_8 + \frac{1}{34}c_9 + \frac{1}{33}c_{10} + \frac{1}{32}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + \frac{1}{33}c_{13} + \frac{1}{32}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{12} = \frac{8}{36}c_1 + \frac{4}{35}c_2 + \frac{2}{34}c_3 + \frac{1}{33}c_4 + \frac{8}{35}c_5 + \frac{4}{34}c_6 + \frac{2}{33}c_7 + \frac{1}{32}c_8 + \frac{8}{34}c_9 + \frac{4}{33}c_{10} + \frac{2}{32}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + \frac{8}{33}c_{13} + \frac{4}{32}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{13} = \frac{1}{33}c_1 + \frac{1}{33}c_2 + \frac{1}{33}c_3 + \frac{1}{33}c_4 + \frac{1}{32}c_5 + \frac{1}{32}c_6 + \frac{1}{32}c_7 + \frac{1}{32}c_8 + \frac{1}{3}c_9 + \frac{1}{3}c_{10} + \frac{1}{3}c_{11} + \frac{1}{3}c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{20} = \frac{8}{27}c_4 + \frac{4}{9}c_8 + \frac{2}{3}c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{21} = \frac{8}{36}c_1 + \frac{8}{35}c_2 + \frac{8}{34}c_3 + \frac{8}{33}c_4 + \frac{4}{35}c_5 + \frac{4}{34}c_6 + \frac{4}{33}c_7 + \frac{4}{32}c_8 + \frac{2}{34}c_9 + \frac{2}{33}c_{10} + \frac{2}{32}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + \frac{1}{33}c_{13} + \frac{1}{32}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{22} = \frac{64}{36}c_1 + \frac{32}{35}c_2 + \frac{16}{34}c_3 + \frac{8}{33}c_4 + \frac{32}{35}c_5 + \frac{16}{34}c_6 + \frac{8}{33}c_7 + \frac{4}{32}c_8 + \frac{16}{34}c_9 + \frac{8}{33}c_{10} + \frac{4}{32}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + \frac{8}{33}c_{13} + \frac{4}{32}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{23} = \frac{8}{33}c_1 + \frac{8}{33}c_2 + \frac{8}{33}c_3 + \frac{8}{33}c_4 + \frac{4}{32}c_5 + \frac{4}{32}c_6 + \frac{4}{32}c_7 + \frac{4}{32}c_8 + \frac{2}{3}c_9 + \frac{2}{3}c_{10} + \frac{2}{3}c_{11} + \frac{2}{3}c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{30} = c_4 + c_8 + c_{12} + c_{16} \\
 \omega_{31} = \frac{1}{33}c_1 + \frac{1}{32}c_2 + \frac{1}{3}c_3 + c_4 + \frac{1}{33}c_5 + \frac{1}{32}c_6 + \frac{1}{3}c_7 + c_8 + \frac{1}{33}c_9 + \frac{1}{32}c_{10} + \frac{1}{3}c_{11} + c_{12} + \frac{1}{33}c_{13} + \frac{1}{32}c_{14} + \frac{1}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{32} = \frac{8}{33}c_1 + \frac{4}{32}c_2 + \frac{2}{3}c_3 + c_4 + \frac{8}{33}c_5 + \frac{4}{32}c_6 + \frac{2}{3}c_7 + c_8 + \frac{8}{33}c_9 + \frac{4}{32}c_{10} + \frac{2}{3}c_{11} + c_{12} + \frac{8}{33}c_{13} + \frac{4}{32}c_{14} + \frac{2}{3}c_{15} + c_{16} \\
 \omega_{33} = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12} + c_{13} + c_{14} + c_{15} + c_{16}
 \end{cases}$$

Знайдемо матрицю A^{-1} (для цього використаємо прикладну математичну програму):

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}
 \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{729}{4} & \frac{729}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{729}{4} & \frac{729}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} \\
 \frac{81}{4} & \frac{405}{4} & -81 & \frac{81}{4} & \frac{243}{4} & \frac{1215}{4} & \frac{243}{4} & -\frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{1215}{4} & -\frac{243}{4} & \frac{243}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{405}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{81}{4} \\
 \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & -\frac{243}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{81}{4} & \frac{4}{4} \\
 \frac{99}{4} & \frac{81}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{297}{4} & \frac{243}{4} & -\frac{243}{4} & \frac{27}{4} & \frac{297}{4} & -\frac{243}{4} & \frac{243}{4} & -\frac{27}{4} & -\frac{99}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{9}{4} \\
 \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{24}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{2}{4} \\
 -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{27}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{27}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{81}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{81}{2} & \frac{405}{2} & -\frac{1215}{2} & \frac{1215}{2} & -\frac{405}{2} & -81 & 243 & -243 & 81 & \frac{81}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{81}{2} \\
 \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & -81 & 243 & -243 & 81 & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} \\
 81 & -\frac{405}{2} & 162 & -\frac{81}{2} & \frac{405}{2} & \frac{2025}{4} & -405 & \frac{405}{4} & 162 & -405 & 324 & -81 & -\frac{81}{2} & \frac{405}{4} & -81 & \frac{81}{4} \\
 -\frac{99}{2} & 81 & -\frac{81}{2} & 9 & \frac{495}{4} & -\frac{405}{4} & \frac{405}{4} & -\frac{45}{2} & -99 & 132 & -81 & 18 & \frac{99}{4} & \frac{81}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{2} \\
 \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{45}{2} & 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{99}{2} & -\frac{297}{2} & \frac{297}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{81}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{81}{2} & \frac{81}{2} & -\frac{243}{2} & \frac{243}{2} & -\frac{81}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} \\
 \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} & \frac{2}{2} \\
 -\frac{99}{2} & \frac{495}{4} & -99 & \frac{99}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{405}{4} & 162 & -\frac{81}{2} & -\frac{81}{2} & \frac{405}{4} & -81 & \frac{81}{4} & 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} \\
 \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & \frac{99}{4} & -\frac{11}{4} & -\frac{99}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{81}{4} & 9 & \frac{99}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{11}{4} & 9 & -\frac{9}{4} & 1 \\
 \frac{121}{4} & -\frac{99}{4} & \frac{99}{4} & -\frac{11}{4} & -\frac{99}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{81}{4} & 9 & \frac{99}{4} & -\frac{81}{4} & \frac{81}{4} & -\frac{9}{4} & -\frac{11}{4} & 9 & -\frac{9}{4} & 1 \\
 -\frac{11}{2} & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{9}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} & \frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 9 & -\frac{45}{2} & 18 & -\frac{9}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{11}{2} & 9 & -\frac{9}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

Коефіцієнти c_i , $i = 1, 2, \dots, 16$ мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{81}{4}\omega_{00} - \frac{243}{4}\omega_{01} + \frac{243}{4}\omega_{02} - \frac{81}{4}\omega_{03} - \frac{243}{4}\omega_{10} + \frac{729}{4}\omega_{11} - \frac{729}{4}\omega_{12} + \frac{243}{4}\omega_{13} + \frac{243}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{729}{4}\omega_{21} + \frac{729}{4}\omega_{22} - \frac{243}{4}\omega_{23} - \frac{81}{4}\omega_{30} + \frac{243}{4}\omega_{31} - \frac{243}{4}\omega_{32} + \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_2 &= -\frac{81}{2}\omega_{00} + \frac{405}{4}\omega_{01} - 81\omega_{02} + \frac{81}{4}\omega_{03} + \frac{243}{2}\omega_{10} - \frac{1215}{4}\omega_{11} + 243\omega_{12} - \frac{243}{4}\omega_{13} - \frac{243}{2}\omega_{20} + \\
 &\quad + \frac{1215}{4}\omega_{21} - 243\omega_{22} + \frac{243}{4}\omega_{23} + \frac{81}{2}\omega_{30} - \frac{405}{4}\omega_{31} + 81\omega_{32} - \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_3 &= \frac{99}{4}\omega_{00} - \frac{81}{2}\omega_{01} + \frac{81}{4}\omega_{02} - \frac{9}{2}\omega_{03} - \frac{297}{4}\omega_{10} + \frac{243}{2}\omega_{11} - \frac{243}{4}\omega_{12} + \frac{27}{4}\omega_{13} + \frac{297}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{243}{2}\omega_{21} + \frac{243}{4}\omega_{22} - \frac{27}{2}\omega_{23} - \frac{99}{4}\omega_{30} + \frac{81}{2}\omega_{31} - \frac{81}{4}\omega_{32} + \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_4 &= -\frac{9}{2}\omega_{00} + \frac{27}{2}\omega_{10} - \frac{27}{2}\omega_{20} + \frac{9}{2}\omega_{30}; \\
 c_5 &= -\frac{81}{2}\omega_{00} + \frac{243}{2}\omega_{01} - \frac{243}{2}\omega_{02} + \frac{81}{2}\omega_{03} + \frac{405}{4}\omega_{10} - \frac{1215}{4}\omega_{11} + \frac{1215}{4}\omega_{12} - \frac{405}{4}\omega_{13} - 81\omega_{20} + \\
 &\quad + 243\omega_{21} - 243\omega_{22} + 81\omega_{23} + \frac{81}{4}\omega_{30} - \frac{243}{4}\omega_{31} + \frac{243}{4}\omega_{32} - \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_6 &= 81\omega_{00} - \frac{405}{2}\omega_{01} + 162\omega_{02} - \frac{81}{2}\omega_{03} - \frac{405}{2}\omega_{10} + \frac{2025}{4}\omega_{11} - 405\omega_{12} + \frac{405}{4}\omega_{13} + 162\omega_{20} - \\
 &\quad - 405\omega_{21} + 324\omega_{22} - 81\omega_{23} - \frac{81}{2}\omega_{30} + \frac{405}{4}\omega_{31} - 81\omega_{32} + \frac{81}{4}\omega_{33}; \\
 c_7 &= -\frac{99}{2}\omega_{00} + 81\omega_{01} - \frac{81}{2}\omega_{02} + 9\omega_{03} + \frac{495}{4}\omega_{10} - \frac{405}{2}\omega_{11} + \frac{405}{4}\omega_{12} - \frac{45}{2}\omega_{13} - 99\omega_{20} + \\
 &\quad + 162\omega_{21} - 81\omega_{22} + 18\omega_{23} + \frac{99}{4}\omega_{30} - \frac{81}{2}\omega_{31} + \frac{81}{4}\omega_{32} - \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_8 &= 9\omega_{00} - \frac{45}{2}\omega_{10} + 18\omega_{20} - \frac{9}{2}\omega_{30}; \\
 c_9 &= \frac{99}{4}\omega_{00} - \frac{297}{4}\omega_{01} + \frac{297}{4}\omega_{02} - \frac{99}{4}\omega_{03} - \frac{81}{2}\omega_{10} + \frac{243}{2}\omega_{11} - \frac{243}{2}\omega_{12} + \frac{81}{2}\omega_{13} + \frac{81}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{243}{4}\omega_{21} + \frac{243}{4}\omega_{22} - \frac{81}{4}\omega_{23} - \frac{9}{2}\omega_{30} + \frac{27}{2}\omega_{31} - \frac{27}{2}\omega_{32} + \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_{10} &= -\frac{99}{2}\omega_{00} + \frac{495}{4}\omega_{01} - 99\omega_{02} + \frac{99}{4}\omega_{03} + 81\omega_{10} - \frac{405}{2}\omega_{11} + 162\omega_{12} - \frac{81}{2}\omega_{13} - \frac{81}{2}\omega_{20} + \\
 &\quad + \frac{405}{4}\omega_{21} - 81\omega_{22} + \frac{81}{4}\omega_{23} + 9\omega_{30} - \frac{45}{2}\omega_{31} + 18\omega_{32} - \frac{9}{2}\omega_{33}; \\
 c_{11} &= \frac{121}{4}\omega_{00} - \frac{99}{2}\omega_{01} + \frac{99}{4}\omega_{02} - \frac{11}{2}\omega_{03} - \frac{99}{2}\omega_{10} + 81\omega_{11} - \frac{81}{2}\omega_{12} + 9\omega_{13} + \frac{99}{4}\omega_{20} - \\
 &\quad - \frac{81}{2}\omega_{21} + \frac{81}{4}\omega_{22} - \frac{9}{2}\omega_{23} - \frac{11}{2}\omega_{30} + 9\omega_{31} - \frac{9}{2}\omega_{32} + \omega_{33}; \\
 c_{12} &= -\frac{11}{2}\omega_{00} + 9\omega_{10} - \frac{9}{2}\omega_{20} + \omega_{30}; \quad c_{13} = -\frac{9}{2}\omega_{00} + \frac{27}{2}\omega_{01} - \frac{27}{2}\omega_{02} + \frac{9}{2}\omega_{03};
 \end{aligned}$$

$$c_{14}=9\omega_{00}-\frac{45}{2}\omega_{01}+18\omega_{02}-\frac{9}{2}\omega_{03}; \quad c_{15}=-\frac{11}{2}\omega_{00}+9\omega_{01}-\frac{9}{2}\omega_{02}+\omega_{03}; \quad c_{16}=\omega_{00}.$$

Отже ми отримали загальні формули для знаходження коефіцієнтів $c_i (i=1,2,\dots,16)$, які обчислюються через координати точок поверхні.

Розглянемо приклад. Нехай $\omega_{ij} (i=0,1,2,3; j=0,1,2,3)$ точки поверхні W :

$$\begin{array}{llll} \omega_{00}=12; & \omega_{10}=-8; & \omega_{20}=0; & \omega_{30}=12; \\ \omega_{01}=6; & \omega_{11}=13; & \omega_{21}=10; & \omega_{31}=-1; \\ \omega_{02}=-9; & \omega_{12}=-5; & \omega_{22}=-13; & \omega_{32}=-6; \\ \omega_{03}=4; & \omega_{13}=9; & \omega_{23}=11; & \omega_{33}=7. \end{array}$$

Побудуємо дану поверхню за допомогою прикладної програми Mathematica (рисунок 3):

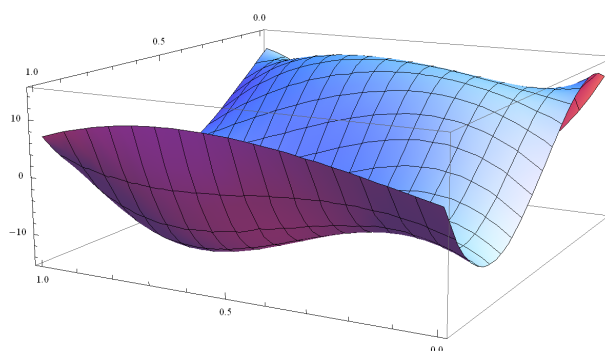


Рисунок 3 – Поверхня W , побудована за точками за допомогою бікубічного інтерполяційного сплайна

Задача стикування двох поверхонь. Розглянемо задачу з'єднання двох поверхонь, побудованих по точках за допомогою інтерполяційної бікубічної сплайн-функції в області $[0,1] \times [0,1]$.

Побудуємо дві поверхні W_1 і W_2 , які повинні співпадати по одному з країв, тобто ці поверхні мають чотири спільні точки (наприклад $\omega_{00}, \omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}$):

$$W_1 = (12; -15300; -456; 78500; -12000; 7850; 12500; -12225; 25; 85; -1; 0; 500; -1200; 2500; -8800),$$

$$W_2 = (12; -15300; -456; 78500; 12000; -10036; -1456; 23785; -2125; 785; -125; 2125; 5555; 45; 0; -451)$$

На рисунку 4 зображено дані по верхні W_1 і W_2 , які скріплюються в точках $(0;0;12)$, $(0; \frac{1}{3}; -15300)$, $(0; \frac{2}{3}; -456)$, $(0;1;78500)$, причому чорними прямокутниками виділені розходження між поверхнями.

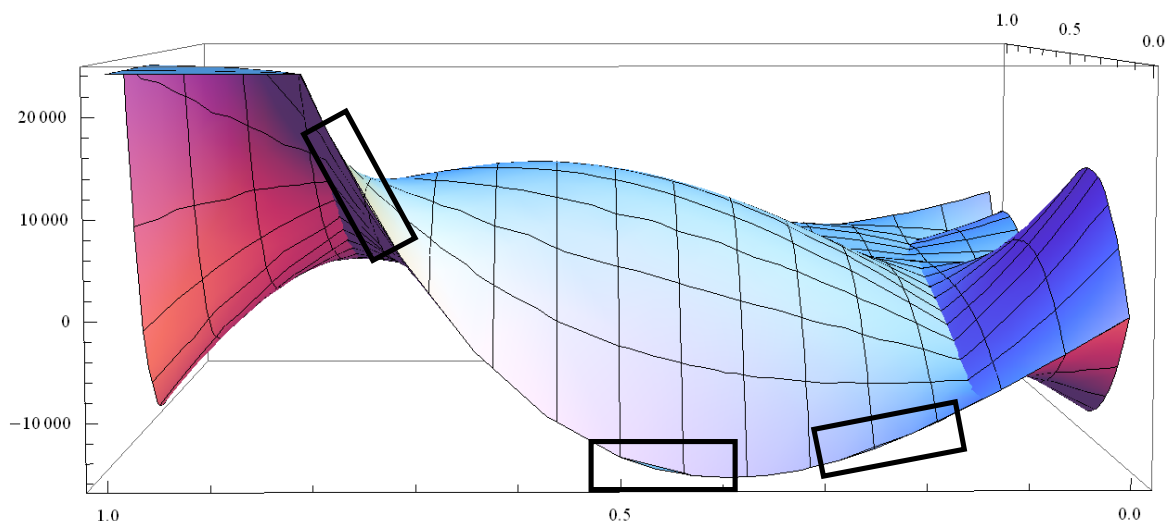


Рисунок 4 – Поверхні W_1 і W_2

Бачимо, що поверхні сполучаються не повністю, тобто між ними є розриви, відзначимо, що ці розриви можна помітити лише при великому збільшенні зображення (Рис. 5).

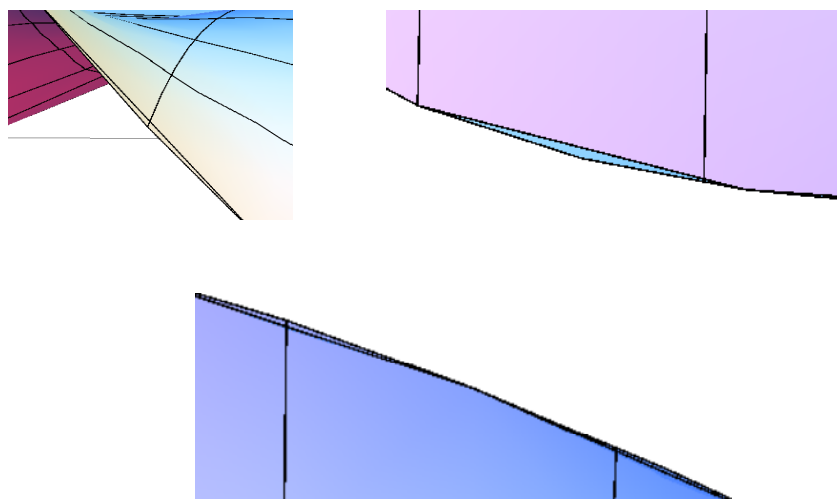


Рисунок 5

Обрахуємо максимальну величину розходжень між стикованими поверхнями, побудованими з допомогою інтерполяційних сплайнів. Для цього розглянемо ще кілька прикладів сполучення поверхонь, які стикаються в чотирьох точках і проаналізуємо максимальні величини розходжень між даними поверхнями в місці їх сполучення. Як виявилось максимальна величина розриву між стикованими поверхнями менша за 0,0001%, що вказує на те, що сплайн-функції є чудовим методом інтерполяції поверхонь.

Перевіримо вплив змін величин окремих точок поверхонь на характер і величину розходжень між поверхнями в місці їх скріплення. Це необхідно для того щоб дослідити, як впливатимуть на з'єднання поверхонь хибні точки (точки, які насправді не належать поверхням, але їх використовували при побудові апроксимуючої поверхні).

При дослідженні конкретних прикладів з'ясувалося, що характер розходжень між поверхнями залежить від того, яка саме точка збільшена (зменшена), тобто з якої

сторони від площини $\eta = 1$ знаходиться збільшувана (зменшувана) точка, з тієї сторони і буде більшою максимальна величина розриву. Необхідно також зауважити, що розходження між з'єднуваними поверхнями змінюватиметься в залежності від того, які точки і у скільки разів збільшились чи зменшились. Можна відмітити, що на величину розходжень між поверхнями найбільше впливають зміни у сусідніх вузлах.

Висновки. В даній роботі було проведено аналіз методів сплайн-функцій на предмет їх придатності до використання в інтерполяційних задачах при побудові поверхонь. Було складено інтерполяційний вираз для побудови поверхонь. Дослідження, що були виконані над стикованими поверхнями, побудованими з допомогою сплайн-функцій, показали, що максимальна величина розривів між даними поверхнями менша за 0,0001% що вказує на те, що сплайн-функції є відмінним методом інтерполяції поверхонь. Причому на характер і величину розходжень впливають зміни точок на поверхнях, але максимальна величина розриву між поверхнями зазнає незначних змін, що дає підстави вважати метод сплайн-функцій одним із найкращих методів інтерполяції поверхонь.

Поступила в редколлегию 22.02.2013

УДК 539.3

ІГНАТИШИН М. І. к.т.н., доцент
БАБИЧ С. Ю. д.т.н., професор*
ДЕГТЯР С. В. к.т.н, доцент*

Мукачівський державний університет
*Київський національний економічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ АЧХ ГАСНИКА МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ ЗА ФОРМУЛАМИ ВІЄТА

Вступ. Механічні гасники коливань мають широке застосування у техніці. Вони призначені для гасіння коливань механізмів, машин, будівельних споруд тощо [1, 2, 3]. Причиною виникнення небажаних коливань можуть бути техногенні та природні фактори, наприклад, землетрус.

Актуальним є дослідження та аналіз відомих конструкцій гасників механічних коливань, отримання співвідношень, що пов'язують динаміку лінійних та нелінійних коливань [1, 2, 3, 4] гасника з його конструктивними і механічними характеристиками, подальше формулювання оптимізаційних задач на базі отриманих математичних формул, вдосконалення відомих та синтез нових механічних гасників для зменшення шкідливих наслідків техногенних та природних катастроф пов'язаних з механічним руйнуванням механізмів, машин та споруд. Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла застосовують в своїх дослідженнях Левина Е. Е., Маневич А. (дослідження вимушених коливань циліндричного гасника коливань, рис. 1), И., Клименко А. А., Милин Ю. В. (нелінійні коливання маятникових гасників коливань).

В роботі Левина Е. Е., Маневича А.[1] побудовано математичні моделі маятникового та циліндричного гасників коливань, отримано комплексні амплітуди A та B коливань масивного тіла та гасника коливань:

для маятникового гасника

$$\begin{cases} A = (\mu \tilde{\Omega}^2 B - i U_0) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + i \tilde{\beta} \tilde{\Omega}) \\ B = i \tilde{\Omega}^2 U_0 / [- (1 - \tilde{\Omega}^2 + i \tilde{\beta} \tilde{\Omega})(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\Omega}^2) + \tilde{\Omega}^4 \mu] \end{cases} \quad (1)$$

для циліндричного гасника

$$\begin{cases} A = (\mu\tilde{\Omega}^2 B - iU_0) / (1 - \tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega}) \\ B = i\tilde{\Omega}^2 U_0 / [-(1 - \tilde{\Omega}^2 + i\tilde{\beta}\tilde{\Omega})(\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\Omega}^2/2) + \tilde{\Omega}^4 \mu] \end{cases} \quad (2)$$

де

$$\mu = \frac{m}{M+m}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega \sqrt{\frac{M+m}{k}}, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \frac{M+m}{R-r_0}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{k(M+m)}} \quad (3)$$

m - маса гасника, M - маса масивного тіла коливання якого гасить гасник, k - жорсткість пружини, r_0 - радіус циліндричного гасника, R - радіус циліндричної поверхні, Ω - кутова частота вимушених коливань, β - коефіцієнт в'язкого тертя, рис. 1.

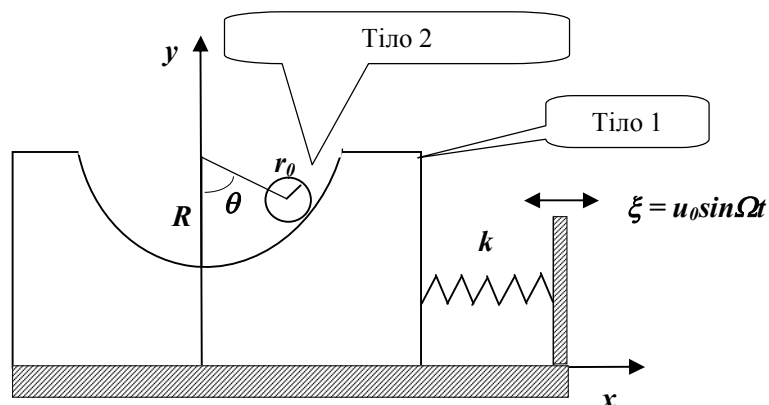


Рисунок 1 – Тіло 2 має форму циліндра. Тіло 1 – масивне тіло, тіло 2- гасник механічних коливань масивного тіла.

На рис. 1 зображено об'єкт дослідження - це механічна система двох тіл, що взаємодіють між собою через силу тиску та тертя і одне з тіл зазнає періодичне збурення заданої частоти та амплітуди через пружну ланку та знаходиться під дією дисипативної сили пропорційної швидкості. Предметом дослідження є математична модель гасників механічних коливань. В дослідженнях застосовані методи механіки деформівного твердого тіла та математичного аналізу.

Постановка задачі. Основні рівняння. Необхідно дослідити амплітуду коливань A масивного тіла, співвідношення (1) та (2), на екстремум, знайти аналітичні формули для розрахунку резонансних частот коливання масивного тіла з гасником.

Представимо модулі комплексних амплітуд (1) та (2) так:

для маятничого гасника

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(\tilde{\Omega}^2 - \tilde{\omega}^2)^2}{\tilde{\omega}^4 + [(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2]\tilde{\omega}^2\tilde{\Omega}^2 + \{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2]\tilde{\omega}^2\}\tilde{\Omega}^4 + (2\tilde{\omega}^2\mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\Omega}^6 + (\mu - 1)^2\tilde{\Omega}^8}} \quad (4)$$

для циліндричного гасника

$$|A| = U_0 \sqrt{\frac{(3\tilde{\Omega}^2 - 2\tilde{\omega}^2)^2}{4\tilde{\omega}^4 + [(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3]\tilde{\omega}^2\tilde{\Omega}^2 + \{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3 - \mu)]\tilde{\omega}^2\}\tilde{\Omega}^4 + \{4(2\mu - 3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu - 3) + 3\tilde{\beta}^2]\}\tilde{\Omega}^6 + (2\mu - 3)^2\tilde{\Omega}^8}} \quad (5)$$

Щоб отримати аналітичні вирази для резонансних частот коливання масивного тіла для маятничого та циліндричного гасника механічних коливань необхідно дослідити на екстремум підкореневі вирази співвідношень (4) та (5). Таке дослідження приводить до рівняння 12-го степеня котре нескладними перетвореннями може бути

зведене до рівняння 5-го степеня. Останнє, згідно теореми Абеля-Руффіні, немає закритої форми розв'язків, тобто форми, що містить тільки арифметичні операції та радикали довільного степеня. Тому, дослідимо на екстремум знаменник підкореневого виразу співвідношень (4) та (5). Нами встановлено, що мінімум підкореневого виразу з великою точністю співпадає з максимумом знаменника підкореневого раціонального дробу.

Розв'язок задачі. Знайдемо похідні цих знаменників по $\tilde{\Omega}$ і прирівняємо їх до нуля. Відкинувши розв'язок $\Omega = 0$ отримаємо рівняння шостого степеня:

для маятничкового гасника

$$8(\mu-1)^2 \tilde{\Omega}^6 + 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2) \tilde{\Omega}^4 + 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\} \tilde{\Omega}^2 + 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (6)$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2 \tilde{\Omega}^6 + 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\} \tilde{\Omega}^4 + 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\} \tilde{\Omega}^2 + 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (7)$$

Позначимо $\tilde{\Omega}^2 = x$ одержимо два рівняння третього степеня:

для маятничкового гасника

$$8(\mu-1)^2 x^3 + 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2) x^2 + 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\} x + 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (8)$$

для циліндричного гасника

$$8(2\mu-3)^2 x^3 + 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\} x^2 + 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\} x + 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 = 0 \quad (9)$$

Розв'яжемо отримані кубічні рівняння за тригонометричними формулами Вієта
Константи кубічного рівняння

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (10)$$

позначимо:

маятничковий гасник

$$a = 8(\mu-1)^2, \quad b = 6(2\tilde{\omega}^2 \mu + 2\mu - 2\tilde{\omega}^2 + \tilde{\beta}^2 - 2), \\ c = 4\{1 + [2(2 - \tilde{\beta}^2 - \mu) + \tilde{\omega}^2] \tilde{\omega}^2\}, \quad d = 2[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 2] \tilde{\omega}^2 \quad (11)$$

циліндричний гасник

$$a = 8(2\mu-3)^2, \quad b = 6\{4(2\mu-3)\tilde{\omega}^2 + 3[2(2\mu-3) + 3\tilde{\beta}^2]\}, \\ c = 4\{9 + 4[\tilde{\omega}^2 - 3\tilde{\beta}^2 + 2(3-\mu)]\tilde{\omega}^2\}, \quad d = 8[(\tilde{\beta}^2 - 2)\tilde{\omega}^2 - 3] \tilde{\omega}^2 \quad (12)$$

Далі

$$Q = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}}{9}, \quad R = \frac{2\left(\frac{b}{a}\right)^3 - 9\frac{bc}{a^2} + 27\frac{d}{a}}{54}, \quad S = Q^3 - R^2, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arccos\left(\frac{R}{\sqrt{Q^3}}\right) \quad (13)$$

Корені кубічного рівняння (10):

$$x_1 = -2\sqrt{Q} \cos(\varphi) - \frac{b}{3a}, \quad x_2 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}, \quad x_3 = -2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a} \quad (14)$$

Отже, стаціонарним точкам знаменника підкореневого виразів (4) та (5) будуть відповідати частоти:

$$\tilde{\Omega}_1 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos(\varphi) - \frac{b}{3a}}, \quad \tilde{\Omega}_2 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi + \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}}, \quad \tilde{\Omega}_3 = \sqrt{-2\sqrt{Q} \cos\left(\varphi - \frac{2}{3}\pi\right) - \frac{b}{3a}} \quad (15)$$

Числові результати. Для значень $\tilde{\omega} = 1.2$, $\mu = 0.1$, $\tilde{\beta} = 0.05$ та $U_0 = 0.05$ розраховано по дві частоти, що відповідають резонансним стаціонарним точкам:

для маятникового гасника

$$\tilde{\Omega}_1 = 0.932, \tilde{\Omega}_2 = 1.357, \quad (16)$$

для циліндричного гасника

$$\tilde{\Omega}_1 = 0.883, \tilde{\Omega}_2 = 1.147, \quad (17)$$

На рис.2 побудовано амплітудно-частотні характеристики з допомогою програмного пакета MathCad, що відповідають співвідношенням (4) та (5) і співпадають з отриманими [1].

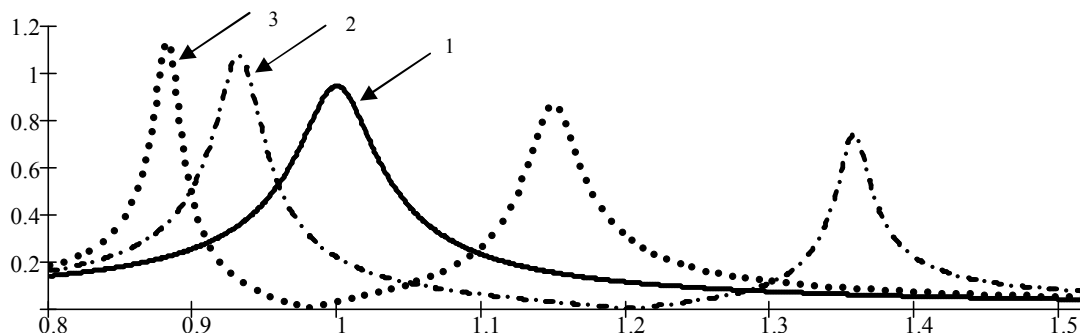


Рис. 2. Амплітудно-частотні характеристики: 1-масивне тіло без гасника, 2-маятниковий гасник, 3-циліндричний гасник.

Висновки. Як бачимо з рис. 2, маятниковий гасник зміщує одну резонансну частоту вліво, а другу вправо від резонансної частоти тіла без гасника, аналогічно робить і циліндричний гасник. Він лівий пік віддаляє далі вліво, а правий дещо ближче вправо. Отримані в даній праці аналітичні формули (11)-(14) придатні для розрахунку резонансних частот тіла з гасником і можуть застосовуватись в подальшому для визначення параметрів $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$ гасника механічних коливань за заданими значеннями $\tilde{\Omega}_1$ та $\tilde{\Omega}_2$, котрі в свою чергу залежать від резонансної частоти масивного тіла без гасника. За розрахованими параметрами $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$ далі можлива оптимізація конструктивних та механічних характеристик гасника: m - маси гасника, r_0 - радіуса циліндричного гасника, R - радіуса циліндричної поверхні, рис. 1. Для більш ефективного гасіння коливань доцільно змінити форму гасника [5] залишивши незмінною масу m , зробити гасник в виді гантелі з моментом інерції що забезпечить необхідні параметри $\tilde{\omega}$, μ , $\tilde{\beta}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левина Е. Е., Маневич А. И. Вынужденные нелинейные колебания тела с цилиндрическим гасителем колебаний. - Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла, вип. 11, 2010 .
<http://www.nbu.gov.ua/scripts/wwwi32.exe/%5Bin=scripts/ref.in%5D>
2. Вибрации в технике. Т.6. Защита от вибраций и ударов: справочник/ под ред. К. В. Фролова. – М.: Машиностроение, 1981. – 456 с.
3. Корнеев Б. Г. Динамические гасители колебаний/ Б. Г. Корнеев, Л. М. Резников. – М.: Наука, 1988 . – 304 с.

4. Клименко А. А., Милин Ю. В. Нелинейные формы колебаний механической системы с маятниковым гасителем колебаний. – Механика твердого тела, вып. 40. – 2010 .
5. Ігнатишин М. І. Математичне моделювання механічного гасника коливань в системі MathCad.- Науковий вісник Мукачівського державного університету. Серія технічні науки. №12(7).- 2012 .

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 517.5

ДЕРЕЦЬ Е.В. к.физ.-мат.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Одним из направлений теории приближений является изучение методов приближения интегралов. Большое количество исследований посвящено формулам приближенного интегрирования, позволяющим приближенно находить значение интеграла в виде линейной комбинации значений функции в n узлах. При этом функция f принадлежит некоторому классу функций. Экстремальная задача теории квадратур состоит в отыскании наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и вычисления её погрешности. Общая постановка экстремальной задачи теории квадратур и первые основополагающие результаты принадлежат С.М. Никольскому и А.Н. Колмогорову. Решению таких задач для различных классов функций посвящено большое количество работ (см., например, [5, 8, 11] и библиографию к ним). Вместе в тем, в ряде работ рассматривалась задача оптимизации так называемых «интервальных» квадратурных формул, которые вместо значений функции в узлах используют усреднения интегрируемой функции по n интервалам в области определения. С точки зрения приложений, применение таких формул является более естественным, так как во многих случаях результаты измерений физических величин являются средними значениями функции, описывающей измеряемую величину.

В настоящей работе рассматриваются интервальные квадратурные формулы вида

$$\int_0^{2\pi} f(t)dt = \sum_{k=1}^n c_k \frac{1}{2h} \int_{x_k-h}^{x_k+h} f(t)dt + R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) \quad (1)$$

где $\bar{c}_n = \{c_k\}_{k=1}^n$, $c_k \in \mathbb{R}$ – коэффициенты, $\bar{x}_n = \{x_k\}_{k=1}^n$, $x_k \in [0, 2\pi)$ – узлы, $h \in (0, \pi/n)$ и $R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h)$ – погрешность квадратурной формулы (1) на функции f . Пусть M – некоторый класс 2π -периодических непрерывных функций $f(t)$. Погрешностью квадратурной формулы (1) на классе M называют величину $R_n(M, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = \sup_{f \in M} |R_n(f, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h)|$. Квадратурная формула с узлами \bar{x}_n^* и

коэффициентами \bar{c}_n^* называется наилучшей на классе M , если

$$R_n(M, h) = \inf_{\bar{c}_n, \bar{x}_n} R_n(M, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = R_n(M, \bar{c}_n^*, \bar{x}_n^*, h).$$

Пусть $H^{\omega_+; \omega_-}$ – множество 2π -периодических непрерывных функций $f(t)$ таких, что $\omega_{\pm}(f, t) = \sup_{|x'-x''| \leq t, \pm x' \geq \pm x''} (f(x') - f(x'')) \leq \omega_{\pm}(t)$, где $\omega_+(t)$, $\omega_-(t)$ – заданные модули непрерывности, $W^1 H^{\omega_+; \omega_-}$ – множество 2π -периодических дифференцируемых функций $f(t)$, для которых $f'(t) \in H^{\omega_+; \omega_-}$. Задача о наилучшей интервальной квадратурной формуле для классов $H^{\omega_+; \omega_-}$ была решена С. В. Бородачевым для выпуклых вверх мажорант $\omega_+(t)$ и $\omega_-(t)$ [2], а также в случае, когда хотя бы один из модулей непрерывности $\omega_+(t)$ и $\omega_-(t)$ не является выпуклым вверх [3]. Для классов $H^{\omega}[a, b]$ оптимальность точечной формулы прямоугольников была доказана Н. П. Корнейчуком [6]. Для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$ оптимальность точечной формулы прямоугольников на классах $W^r H^{\omega}$ доказал В. П. Моторный [9] при нечетных r , и при $r = 2$ – В. П. Моторный и А. О. Куц [10]. В. П. Моторным [12] было показано, что интервальный аналог формулы прямоугольников является наилучшей интервальной квадратурной формулой для классов \tilde{W}_{∞}^r , при этом рассматриваются интервальные квадратурные формулы с произвольно расположенными узловыми интервалами.

В настоящей работе задача оптимизации интервальных квадратурных формул решена для класса $W^1 H^{\omega_+; \omega_-}$ при любых выпуклых вверх модулях непрерывности $\omega_+(t)$, $\omega_-(t)$ и $h \in (0, \pi/(4n))$, при этом рассматриваются формулы вида (1) с непересекающимися интервалами интегрирования.

Вспомогательные результаты. Пусть $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – выпуклые вверх непрерывные неубывающие функции, не равные тождественно нулю и такие, что $\psi_1(0) = \psi_2(0) = 0$. Обозначим через M_{n, ψ_1, ψ_2} множество всех 2π -периодических непрерывных функций $f(t)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f(t)$ имеет среднее значение 0 на периоде; 2) $f(t)$ меняет знак в каждой из точек x_i , $i = \overline{1, 2n}$, $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = x_0 + 2\pi$; 3) для всех $t \in [x_i, x_{i+1}]$ в случае, когда при переходе через точку x_i функция $f(t)$ меняет знак с «-» на «+» $f(t) = \min\{\psi_1(2t - 2x_i), \psi_2(2x_{i+1} - 2t)\}/2$, если же при переходе через точку x_i функция $f(t)$ меняет знак с «+» на «-», то $f(t) = -\min\{\psi_2(2t - 2x_i), \psi_1(2x_{i+1} - 2t)\}/2$. Пусть M_{n, ψ_1, ψ_2}^r – множество r -х периодических интегралов от функций $f(t) \in M_{n, \psi_1, \psi_2}$. Для любой 2π -периодической интегрируемой функции $g(t)$ будем обозначать её функцию

$$\text{Стеклова } g_h(x) = S_h(g) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} g(u) du.$$

Лемма 1. Для любого $h \in (0, \pi/(2n))$ и любой системы точек $\bar{y}_n = \{y_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющей условию

$$y_1 + h \leq y_2 - h < \dots < y_k + h \leq y_{k+1} - h < \dots \leq y_n - h < y_n + h \leq y_1 + 2\pi - h \quad (2)$$

существует функция $f_1(\bar{y}_n, \psi_1, \psi_2, t) \in M_{n, \psi_1, \psi_2}^1$, для которой функция Стеклова принимает наименьшее значение, равное нулю, в этой системе точек \bar{y}_n .

Утверждение леммы 1 следует из теоремы 1 в [4].

Обозначим через $\varphi_{n,0}(\psi_1, \psi_2, t)$ - функцию из множества M_{n, ψ_1, ψ_2} , соответствующую равномерному разбиению $x_k = k\pi/n$, положительную справа от нуля, а через $\varphi_{n,1}(\psi_1, \psi_2, t)$ - её периодический интеграл, равный в среднем нулю.

Лемма 2. Для любого $h \in (0, \pi/(2n))$ и любой системы точек $\bar{y}_n = \{y_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющей условию (2) справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} (\varphi_{n,1}(\psi_1, \psi_2, t) - S_h \varphi_{n,1}(\psi_1, \psi_2, 0)) dt \leq \int_0^{2\pi} (f_1(\bar{y}_n, \psi_1, \psi_2, t) - S_h f_1(\bar{y}_n, \psi_1, \psi_2, y_1)) dt,$$

где $f_1(\bar{y}_n, \psi_1, \psi_2, t)$ - функция, о которой идет речь в лемме 1.

Доказательство леммы 2 проводится так же, как доказательство аналогичного утверждения в [4, теорема 2].

Основные результаты. Теорема. Для любых выпуклых вверх модулей непрерывности $\omega_+(t)$, $\omega_-(t)$ и любого $h \in (0, \pi/(4n))$ интервальная квадратурная формула прямоугольников с узлами $x_k^0 = \tau + 2\pi(k-1)/n$, $k=1, \dots, n$, $\tau \in [0, 2\pi/n)$ и коэффициентами $c_k^0 = 2\pi/n$, $k=1, \dots, n$, является наилучшей на классе $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$ среди всех формул вида (1) с непересекающимися интервалами интегрирования.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 0$. Обозначим через $g(t)$ нечетную $2\pi/n$ -периодическую функцию, определенную равенством

$$g(t) = \begin{cases} (\pi/(nh) - 1)t, & \text{если } t \in [0, h], \\ \pi/n - t, & \text{если } t \in (h, \pi/n]. \end{cases}$$

Заметим, что для любой функции $f(t) \in W^1H^{\omega_+; \omega_-}$ $2\pi/n$ -периодическая функция $\lambda(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(t + 2\pi k/n)$ также принадлежит этому классу, при этом

$R_n(f, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h) = R_n(\lambda, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h)$. Обозначим через Y множество $2\pi/n$ -периодических функций, принадлежащих $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$, тогда, применяя следствие из леммы Корнейчука-Стечкина [7, лемма 7.4.1], полученное в [1, лемма 1], получаем

$$\begin{aligned} R_n(f, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h) &\leq \sup_{\gamma \in Y} R_n(\gamma, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h) = \sup_{\gamma \in Y} \left(- \int_0^{2\pi} g'(t) \gamma(t) dt \right) = \sup_{\gamma \in Y} \int_0^{2\pi} g(t) \gamma'(t) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0} \left(\frac{1}{2} \omega_+(2t), \frac{1}{2} \omega_-(2t), t \right) dt, \end{aligned} \quad (3)$$

аналогично

$$-R_n(f, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h) \leq \sup_{\gamma \in Y} \int_0^{2\pi} (-g(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0} \left(\frac{1}{2} \omega_-(2t), \frac{1}{2} \omega_+(2t), t \right) dt, \quad (4)$$

при этом точную верхнюю грань в (3) и (4) реализуют соответственно функции $\varphi_{n,1}(\omega_+(2t)/2, \omega_-(2t)/2, t)$ и $-\varphi_{n,1}(\omega_-(2t)/2, \omega_+(2t)/2, t)$, принадлежащие $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} R_n(W^1H^{\omega_+; \omega_-}, \bar{c}_n^0, \bar{x}_n^0, h) &= \\ &= \max \left\{ \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0} \left(\frac{\omega_+(2t)}{2}, \frac{\omega_-(2t)}{2}, t \right) dt, \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0} \left(\frac{\omega_-(2t)}{2}, \frac{\omega_+(2t)}{2}, t \right) dt \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Рассмотрим теперь произвольную квадратурную формулу вида (1), система узлов которой удовлетворяет условию (2). Заметим, что, поскольку класс $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$ содержит константы, имеет смысл рассматривать только формулы, точные на константах, т. е. удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n c_k = 2\pi$.

В силу леммы 1 функции

$$F_1(\bar{x}_n, t) = f_1(\bar{x}_n, \omega_+(2t)/2, \omega_-(2t)/2, t) - S_h f_1(\bar{x}_n, \omega_+(2t)/2, \omega_-(2t)/2, x_1),$$

$$F_2(\bar{x}_n, t) = -f_1(\bar{x}_n, \omega_-(2t)/2, \omega_+(2t)/2, t) + S_h f_1(\bar{x}_n, \omega_-(2t)/2, \omega_+(2t)/2, x_1)$$

обращают в ноль квадратурную сумму, кроме того, нетрудно показать, что эти функции принадлежат классу $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$. Для доказательства теоремы остаётся заметить, что, в силу леммы 2,

$$\begin{aligned} R_n(W^1H^{\omega_+; \omega_-}, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) &\geq R_n(F_1(\bar{x}_n, t), \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = \int_0^{2\pi} F_1(\bar{x}_n, t) dt \geq \\ &\geq \int_0^{2\pi} (\varphi_{n,1}(\omega_+(2t)/2, \omega_-(2t)/2, t) - S_h \varphi_{n,1}(\omega_+(2t)/2, \omega_-(2t)/2, 0)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0}\left(\frac{\omega_+(2t)}{2}, \frac{\omega_-(2t)}{2}, t\right) dt, \\ R_n(W^1H^{\omega_+; \omega_-}, \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) &\geq -R_n(F_2(\bar{x}_n, t), \bar{c}_n, \bar{x}_n, h) = -\int_0^{2\pi} F_2(\bar{x}_n, t) dt \geq \\ &\geq \int_0^{2\pi} (\varphi_{n,1}(\omega_-(2t)/2, \omega_+(2t)/2, t) - S_h \varphi_{n,1}(\omega_-(2t)/2, \omega_+(2t)/2, 0)) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} g(t) \varphi_{n,0}\left(\frac{\omega_-(2t)}{2}, \frac{\omega_+(2t)}{2}, t\right) dt, \end{aligned}$$

а тогда, принимая во внимание (5), получаем утверждение теоремы.

Выводы. В настоящей работе рассматриваются интервальные квадратурные формулы, точные на константах, с непересекающимися интервалами интегрирования. Задача оптимизации интервальных квадратурных формул решена для класса $W^1H^{\omega_+; \omega_-}$ посредством исследования функций, обращающих в ноль квадратурную сумму, при этом $h \in (0, \pi/(4n))$, модули непрерывности $\omega_+(t)$, $\omega_-(t)$ выпуклы вверх. Применение аналогичного метода при исследовании классов $W^rH^{\omega_+; \omega_-}$ при $r > 1$ значительно усложняется в виду отсутствия симметрии экстремальной функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко В. Ф. Приближения в среднем некоторых классов непрерывных периодических функций / В. Ф. Бабенко, О. В. Поляков // Изв. вузов . – 1995. – № 2. – С. 13 – 21.
2. Бородачев С. В. Оптимизация «интервальных» квадратурных формул для классов $H^{\omega_+; \omega_-}$ / С. В. Бородачев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 1998. – Вип. 3. – С. 19 – 26.

3. Бородачев С. В. Об оптимизации «интервальных» квадратурных формул на некоторых несимметричных классах периодических функций / С. В. Бородачев // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 4. – С. 19 – 24.
4. Дерез Е. В. О наилучшей интервальной квадратурной формуле для класса $W^2H_1^{\omega}$ / Е. В. Дерез // Вісник Дніпропетр. ун-ту, Математика. – 2008. – Т. 16, № 6/1. – С. 73 – 83.
5. Женсыкбаев А. А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы / А. А. Женсыкбаев // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, №4. – С. 107 – 159.
6. Корнейчук Н. П. Наилучшие кубатурные формулы для некоторых классов функций многих переменных / Н. П. Корнейчук // Мат. заметки. – 1968. – 3, № 5. – С. 565–576.
7. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук – Наука, М. – 1976.
8. Моторный В.П. Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул / В. П. Моторный // Укр. мат. журн.–1990. – Т. 42, вып.1.– С. 18 – 33.
9. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{i=1}^n p_i f(x_i)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций / В. П. Моторный // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – 38, №3. – С. 583–614.
10. Моторный В. П. О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^n p_k f(x_k)$ на классе W^2H^{ω} / В. П. Моторный, А. О. Куц // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск, 1987. – С. 60 – 65.
11. Никольский С. М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский – Наука, М. – 1988.
12. Motornyi V. P. On the best interval quadrature formula in the class of functions with bounded r^{th} derivative // East journal of approximations. – 1998. – Vol. 4, №4. – P. 459 – 478.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 536:669.02.09:669.054.82:669.18:536.001:005. ВОЛОШИН Р.В., аспирант
ПАВЛЮЧЕНКОВ И.А., д.т.н., профессор
САЛО Е.В. к.т.н., доцент
ВОЛОШИН В.Ф. зав. лаб.

Днепродзержинский государственный технический университет

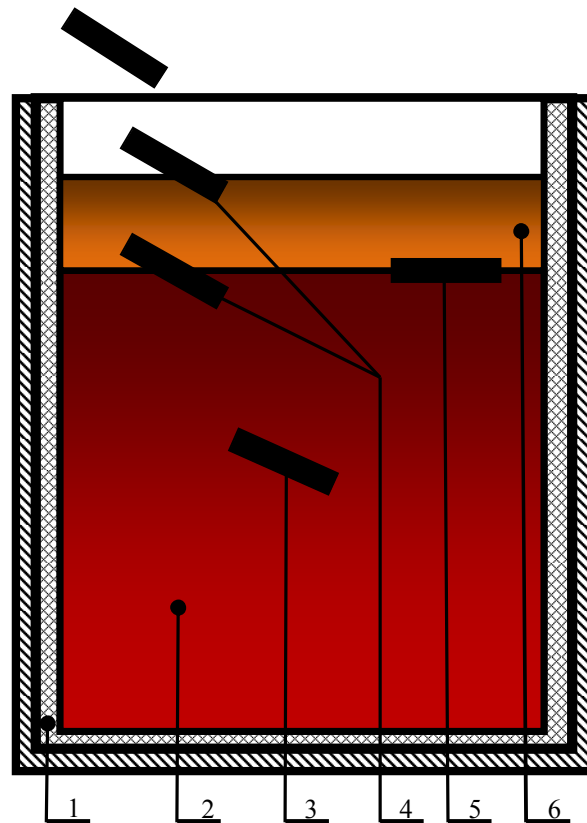
АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРОЦЕССА ПЛАВЛЕНИЯ РАСКИСЛИТЕЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СЕТКИ (ПО РАДИУСУ r И УГЛУ ϑ) В СТАЛЕРАЗЛИВОЧНОМ КОВШЕ

Введение. Внепечная обработка металла является одним из наиболее перспективных направлений коренного повышения качества и свойств металлопродукции массового назначения. В зависимости от различных задач внепечной обработки необходимо предварительное раскисление металла, как правило,

алюминием при выпуске или продувке его в сталеразливочном ковше. Основная задача раскисления – снижение до минимума растворенного в стали кислорода путем перевода его в оксиды с их удалением из металла [1,2].

Постановка задачи. Основным раскислителем стали является алюминий. В настоящее время для раскисления и микролегирования спокойной стали в ковше при выпуске плавки из агрегата обычно используется вторичный и первичный алюминий в слитках (чушках) массой 12-20 кг. Раскисление стали в ковше во время выпуска плавки алюминиевыми слитками сопровождается значительным угаром алюминия (80-95 %), так как из-за низкой плотности ($2,7 \text{ г/см}^3$) алюминий не проникает в глубь расплава, а, плавая на его поверхности, окисляется кислородом из атмосферы. Вопросу повышения степени усвоения алюминия при раскислении стали в ковше посвящено большое количество исследований. С целью увеличения плотности алюмосодержащих раскислителей одним из эффективных способов раскисления является использование слитков ферроалюминия вместо чистого алюминия. Применение алюмосодержащих сплавов на основе железа для раскисления стали опробовано на крупных металлургических предприятиях Украины: ОАО «Криворожсталь», ОАО «Азовсталь», ОАО «Макиевский металлургический завод», ОАО «Донецкий металлургический завод») и др. В работе [3] решена одномерная задача плавления слитков из ферроалюминия в зависимости от процентного содержания алюминия. Однако в работе [3] не учитывался случай, когда для больших значений процентного содержания алюминия плотность ферроалюминия становится такой, что слиток (за период выпуска металла в ковш) не успевает расплавиться в объеме расплава и всплывает на границу раздела шлак-металл (Рисунок 1). С целью расчета длительности плавления слитка, расположенного на границе раздела шлак-металл разработаны математическая модель и алгоритм расчета кинетики плавления легкоплавких слитков цилиндрической формы, расположенных на границе раздела шлак-металл.

Алгоритм расчета. В качестве расчетной области выбрана половина поперечного сечения цилиндра (Рисунок 2). Для решения задачи формируется координатная сетка. Для этого рассматриваемая половина поперечного сечения цилиндра разбивается на M полукругов радиусами r_i , где $1 \leq i \leq M$ и лучами \mathcal{G}_j , где $1 \leq j \leq N$ на N секторов. В итоге получают контрольные объемы с координатами i, j . задается M_0 – начальное количество узлов по радиусу цилиндра. Значение $M > M_0$ и учитывает максимально возможное количество намерзших слоев металла или шлака.



1-сталеразливочный ковш; 2-расплав стали;
3-раскислитель погруженный в расплав стали; 4 - раскислитель проходящий расплав шлака;
5-раскислитель всплывший на границу раздела фаз шлак-металл; 6 - расплав шлака;

Рисунок 1 – Схема к технологическому процессу ввода раскислителя в сталеразливочный ковш

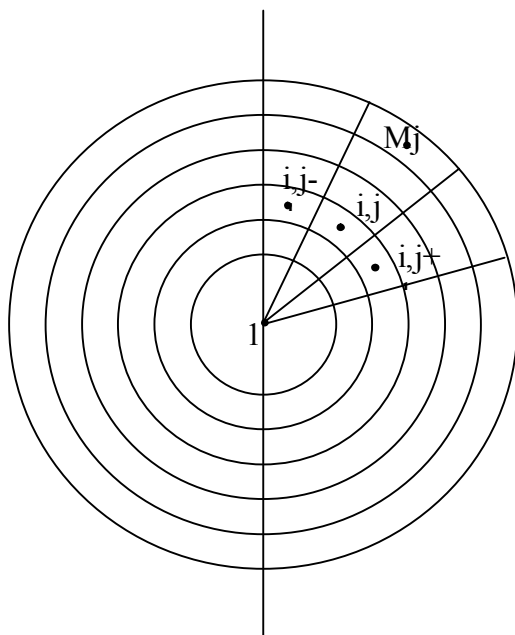


Рисунок 2 – Расчетная область к задаче плавления цилиндра на границе раздела фаз шлак-металл с использованием криволинейной расчетной сетки.

В предлагаемом алгоритме расчета также используется явная разностная схема.

Для расчета значений температур $t_{i,j}^{n+1}$ узлы сетки разделяются на внутренние контрольные объемы ($2 \leq i \leq M-1$, $2 \leq j \leq N-1$), центральные контрольные объемы ($i=1$, $1 \leq j \leq N$) и поверхностные контрольные объемы ($i=M$, $1 \leq j \leq N$).

Уравнение баланса тепла для центральных контрольных объемов ($i=1$, $1 \leq j \leq N$) имеет вид:

$$V \rho_{1,j}^n C_{1,j}^n \frac{t_{1,j}^{n+1} - t_{1,j}^n}{\Delta \tau} = 0 - \frac{S_s \cdot (t_{1,j}^n - t_{2,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{1,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{2,j}^n} \right)} + \frac{S_6 \cdot (t_{1,j-1}^n - t_{1,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{4\lambda_{1,j-1}^n} + \frac{\Delta r}{4\lambda_{1,j}^n} \right)} - \frac{S_6 \cdot (t_{1,j}^n - t_{2,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{4\lambda_{1,j}^n} + \frac{\Delta r}{4\lambda_{2,j}^n} \right)} \quad (1)$$

Значения контрольного объема V , верхней поверхности S_s и боковых поверхностей S_6 определяются в виде:

$$V = \frac{\Delta r}{2} \cdot \frac{\Delta r}{2} \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z, \quad S_s = S_6 = \frac{\Delta r}{2} \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z, \quad (2)$$

где Δz - толщина контрольного объема, в расчетах Δz принимается равной 1.

В расчетах при $j=1$ исключается второе слагаемое в правой части уравнения (1); при $j=N$ исключается третье слагаемое в правой части этого уравнения.

Уравнения баланса тепла для внутренних контрольных объемов имеют вид:

$$V \rho_{i,j}^n C_{i,j}^n \frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^n}{\Delta \tau} = \frac{S_s \cdot (t_{i+1,j}^n - t_{i,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{i+1,j}^n} \right)} - \frac{S_j \cdot (t_{i,j}^n - t_{i-1,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{i-1,j}^n} \right)} - \frac{S_6 \cdot (t_{i,j}^n - t_{i,j+1}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j+1}^n} \right)} + \frac{S_6 \cdot (t_{i,j-1}^n - t_{i,j}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j-1}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{i,j}^n} \right)} \quad (3)$$

Значения контрольных объемов V , верхней поверхности S_s , нижней поверхности S_j и боковых поверхностей S_6 определяются в виде:

$$V = r_i \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z = i \cdot \Delta r \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z; \quad S_s = \left(i + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z; \\ S_j = \left(i - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z; \quad S_6 = i \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z \quad (4)$$

В расчетах при $j=1$ исключается четвертое слагаемое в правой части уравнения (4); при $j=N$ исключается третье слагаемое в правой части этого уравнения. Согласно методу Дюзимбера [4] при намерзании и последующем плавлении оболочек металла и шлака температура поверхностного слоя принимает значение соответствующей температуры плавления (намерзания), т.е. расчет поля температур производится с граничными условиями I рода. Для расчета процесса намерзания (плавления) поверхностных контрольных объемов в цилиндре, металле или шлаке определяется избыточная $t_{из}$ (по отношению к температуре плавления $t_{пл}$) температура из уравнения баланса тепла:

$$V \rho_{M,j}^n C_{M,j}^n \frac{t_{из} - t_{пл}}{\Delta \tau} = \frac{S_j \cdot (t_{M-1,j}^n - t_{пл})}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{M-1,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{M,j}^n} \right)} - S_s \cdot \alpha_j (t_{пл} - t_j^x) + \frac{S_6 \cdot (t_{M,j-1}^n - t_{пл})}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{M,j-1}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{M,j}^n} \right)} - \frac{S_6 \cdot (t_{пл} - t_{M,j+1}^n)}{\left(\frac{\Delta r}{2\lambda_{M,j}^n} + \frac{\Delta r}{2\lambda_{M,j+1}^n} \right)} \quad (5)$$

Значения контрольных объемов V , верхней поверхности S_s , нижней поверхности S_j и боковых поверхностей S_6 определяются в виде:

$$V = r_M \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z = M \cdot \Delta r \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z; S_j = \left(M - \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z;$$

$$S_s = \left(M + \frac{1}{2} \right) \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z; S_\sigma = M \cdot \Delta r \cdot \Delta \vartheta \cdot \Delta z \quad (6)$$

Коэффициент теплоотдачи α_j , температура расплава $t^{\text{ж}}$ и температура плавления (намерзания) $t_{\text{пл}}$ принимают значения в зависимости от принадлежности поверхностного слоя к жидкому металлу или жидкому шлаку. Разность между значением избыточной температуры и температуры плавления суммируется в отдельных счетчиках. Для этих целей введен массив cd_j . В начале счета его элементы равны 0. Если значение cd_j станет больше отношения теплоты плавления материала к его теплоемкости, то считается что граничная ячейка с координатами (M_j, j) расплавилась. При этом $t[M_j, j]$ становится равной значению температуры расплава, а количество узлов по радиусу M_j уменьшается на 1. Если на данном временном слое узлов происходит намерзание материала, то также сравнивается значение cd_j с отношением теплоты плавления материала к его теплоемкости. При этом если cd_j больше этого отношения или равно ему, то количество узлов по радиусу M_j увеличивается на 1. После расплавления намерзшей оболочки металла процесс расчета плавления цилиндра закончен, поскольку к этому времени внутри оболочки металла твердая фаза цилиндра полностью проплавляется.

Выводы. В результате проведенных расчетов установлено: скорости движения металла в верхней части ковша в среднем не превышают 0,004 м/с, что не оказывает особого влияния на движение добавки раскислителя; кинематическая картина движения добавки практически везде одинакова. Имеется ввиду, что не зависимо от места ввода в расплав, раскислитель всплывает в том же месте и затем сдвигается в направлении стенки ковша; для всех вариантов и различных мест ввода длительность пребывания добавок раскислителей в расплаве не превышает 1 сек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотова Ю.А., Павлюченков И.А., Самохвалов С.Е. Математическая модель расплавления алюмосодержащего сплава при доводке стали в сталеразливочном ковше // Новые технологии. – 2005. – №1-2(7 - 8). – С. 218 – 225.
2. Болотова Ю.А., Павлюченков И.А. Исследование процессов расплавления слитков алюмосодержащих сплавов на основе железа методами математического моделирования // Сборник научных трудов НМетАУ “Металлургическая теплотехника”, 2005. – книга 1. – С. 329 - 338.
3. Болотова Ю. А. Разработка рациональных режимов плавления слитков алюмосодержащих сплавов на основе железа при раскислении стали в ковше : Дис.канд. техн. наук: 05.14.06 / Днепродзержинский гос. технический ун-т. — Днепродзержинск, 2006. — 158л. : рис. — Библиогр.: л. 138-153.
4. Волошин Р.В., Андриевский Г.А., Сало Е.В., Павлюченков И.А. Метод Дюзимбера в задачах плавления тугоплавкого раскислителя сферической формы на границе шлак - металл // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету , випуск 2 (19), Дніпродзержинськ, 2012, С. 99-104
5. Волошин Р.В. Алгоритм расчета кинетики плавления алюмосодержащего тугоплавкого цилиндра в сталеразливочном ковше на границе шлак-металл // Научный журнал: «Математичне моделювання», Дніпродзержинськ 2012,1(26). – С. 55 – 57

6. Волошин Р.В. Особенности плавления железоалюминиевых слитков в объеме расплава и на границе шлак – металл в сталеразливочном ковше // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки), випуск 1 (18), розділ «Металургія, Зварювання», Дніпродзержинськ, 2012. – С.26 – 31.

Поступила в редколлегию 29.02.2013

УДК 539.3

ЛЯШЕНКО Я.Г. к.физ.-мат.н., доцент

Національний авіаційний університет

ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ПОЛІМЕРНОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРІАЛУ ЗІ СФЕРОЇДАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Вступ. Розвиток сучасної техніки пов'язаний із використанням нових багатокомпонентних матеріалів, що експлуатуються в умовах великих навантажень та температур. Що, в свою чергу, вимагає застосування матеріалів з підвищеними міцнісними властивостями. Тому необхідно розробляти такі композитні матеріали, в яких потрібні властивості синтезуються за рахунок підбору і управління взаємним розміщенням відповідних компонентів. Зв'язуючі речовини композиту, полімери, як відомо, під дією напружень проявляють деформації повзучості, яка, в свою чергу, супроводжується виникненням мікротріщин та мікропорожнин на межах кристалічних зерен. Як результат ефективна площа перерізу, що приймає навантаження, зменшується, а швидкість повзучості збільшується.

Постановка задачі. Розглянемо деформацію ізольованого включення канонічної форми в нескінченному середовищі з лінійно або нелінійно в'язкими властивостями. Припустимо осесиметричне навантаження на досить віддаленій границі. Дослідимо концентрацію напружень на міжфазній поверхні включення в залежності від його форми і фізико-механічних властивостей матриці і композитного матеріалу в цілому. Матриця композитного матеріалу припускається ізотропною і такою, що має в'язкопружні властивості. Залежність швидкості деформацій $\dot{\varepsilon}_{ij}$ від напружень σ_{ij} припускається степеневою, зокрема, для одновимірного розтягу [1]

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 (\sigma / \sigma_0)^n \quad (1)$$

Тут $\dot{\varepsilon}_0$ і σ_0 - величини швидкості деформації і напружень відлікового стану. Показник зміцнення (жорсткості) n змінюється від одиниці до нескінченності.

Для тривимірного напружено-деформованого стану рівняння (1) узагальнюється до вигляду [2, 3]

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \dot{\varepsilon}_0 (\sigma_e / \sigma_0)^{n-1} s_{ij} / \sigma_0,$$

де s_{ij} - девіатор тензора напружень, σ_e - ефективні напруження

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{mm} \sigma_{ij};$$

$$\sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Або в більш компактній формі

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2\eta} \sigma_e^{n-1} s_{ij},$$

де η - параметр в'язкості (повзучості), який визначається співвідношенням [4]

$$\eta = \frac{\sigma_0^n}{3 \dot{\varepsilon}_0}.$$

Цими співвідношеннями можна описати матеріали від лінійного в'язкого твердого тіла Ньютона при $n=1$ до жорстко-пластичного тіла Прандтля при $n \rightarrow \infty$. Включення вважаємо осесиметричним і таким, що має канонічну форму, яка задана рівнянням

$$\frac{x_1}{b^2} + \frac{x_2}{b^2} + \frac{x_3}{a^2} = 1.$$

Будемо використовувати такі позначення для напружень на досить віддаленій границі ∂B області B композитного матеріалу

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = T; \quad \sigma_{33} = S; \quad x \in \partial B,$$

де система координат x^i , яка збігається з головними вісями сфероїда.

Таким чином, якщо позначити

$$\sigma = S - T,$$

то

$$\sigma_e(x) = |\sigma|, \quad x \in \partial B$$

$$\dot{\varepsilon}_{33}(x) = \dot{\varepsilon}; \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{3\eta} |\sigma|^{n-1} \sigma, \quad x \in \partial B$$

Розглянемо лінійну задачу

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (2)$$

Закон (2) запишемо у вигляді [5]

$$\sigma_{ij} = 2\eta \left(e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{mm} \sigma_{ij} \right),$$

де ν - коефіцієнт Пуассона.

Якщо ввести тензор Q , який пов'язує напруження σ_{ij}^∞ на віддаленій границі і швидкості деформацій включення [6, 7]

$$\bar{\sigma}_{ij} = Q_{ijkl} e_{kl}^i; \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^\infty,$$

то

$$Q_{ijkl} = \lambda_{ijkl} - \lambda_{ijmn} S_{mnkl}.$$

Тут S_{ijkl} - тензор Ешебі. Якщо позначити $w=a/b$ співвідношення двох піввісей [8], то

$$\beta = I_b / (2\pi) = \begin{cases} w(1-w^2)^{-3/2} [\arccos w - w(1-w^2)^{1/2}], & w < 1 \\ w(w^2-1)^{-3/2} [w(w^2-1)^{1/2} - \operatorname{arcch} w], & w > 1 \end{cases}.$$

Основні результати. Розглянемо вільну від навантажень область Ω_i з поверхнею $\partial\Omega_i$, що знаходиться в межах композитного елемента Ω сферичної форми радіуса R , який може бути нескінченно великим. Зовнішня сферична поверхня позначена $\partial\Omega_R$ із внутрішньою одиничною нормаллю \vec{n} і вектором зусиль

$$\vec{T} = \sigma_{ij} n_j, \quad x \in \partial\Omega_R$$

Швидкості v_i мінімізують такі функції

$$\Phi = \int_{\Omega_R} W(e) d\Omega - \int_{\partial\Omega_R} \sigma_{ij} n_j v_i dx,$$

де використовується умова нестискання

$$v_{i,i} = 0;$$

$$2e_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i}.$$

Потенціал повзучості $W(e)$ має вигляд

$$W(e) = \int_0^e \sigma_{ij} de_{ij} = (3\eta)^n \left(\frac{n}{n+1}\right) (e_e)^{\frac{n+1}{n}}.$$

Тут

$$e_e = (2e_{ij} e_{ji} / 3)^{\frac{1}{2}},$$

e_e - швидкість ефективної деформації, яка пов'язана з ефективним напруженням σ_e формулою

$$\sigma_e = (3s_{ij} s_{ji} / 2).$$

Припустимо, що поле швидкостей і швидкостей деформацій можна представити у вигляді

$$v_i(x) = \bar{v}_i(x) + \tilde{v}_i(x);$$

$$e_{ij}(x) = \bar{e}_{ij}(x) + \tilde{e}_{ij}(x),$$

де \bar{v}_i, \bar{e}_{ij} - швидкості і однорідні швидкості деформацій, які відповідають навантаженням на поверхні $\partial\Omega_R$ за відсутності області Ω_i , причому

$$2\tilde{e}_{ij} = \tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{j,i};$$

$$\tilde{v}_{k,k} = \tilde{e}_{kk} = 0.$$

Для визначення локального розподілу напружень на границі сфероїдального включення у багатокомпонентному матеріалі використано розв'язок, побудований за допомогою теорії потенціалів та інтегральних перетворень [7].

Отримані рівняння справедливі для довільних типів просторового армування. Виведення розрахункових формул пов'язаний із заданням явного виду щільності розподілу включень за напрямками. Вирази для тензорних коефіцієнтів концентрацій напружень у включеннях і матеріалі матриці композитного матеріалу.

$$\sigma_i = K_{ci}(H)\sigma^M,$$

$$\sigma_m = K_{cm}(H)\sigma^M,$$

де

$$K_{ci}(H) = \lambda_i \frac{A_i \lambda^{-1} + B_i(\tilde{E}(1), H(1))}{\sigma^M}$$

$$K_{cm}(H) = \lambda_m \frac{A_m \lambda^{-1} + B_m(\tilde{E}(1), H(1))}{\sigma^M}. \quad (3)$$

Тут σ^M – напруження на віддаленій границі даного елемента. Операторні співвідношення (3) містять раціональні функції від інтегральних операторів в'язкопружності.

Висновки. Таким чином, розраховано напруження на включеннях композиту, які випадково розміщені по середовищу та мають сфероїдальну форму. Така форма характеризується співвідношенням двох піввісей. Це дозволяє розглядати, як частинні випадки, включення сферичної, дископодібної форми. Довготривала міцність виробів з композитів залежить від величини середніх чи максимальних за цикл навантаження напружень в матеріалі матриці і у включеннях, кількості циклів і т. д. В зв'язку з цим в роботі вивчаються мікроструктурні напруження, обчислено ефективні параметри та визначено їх залежність від форми, орієнтації і об'ємної концентрації включень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.1977. 384с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М. 1982. 336с.

3. Маслов Б.П., Рушицкий Я.Я., Коваленко А.П. Полные наборы физических постоянных нелинейной микроструктурной теории двухфазной упругой смеси, вычисленные для ряда конструкционных материалов // Прикладная механика. 1996. Т. 32, № 4. С. 18-26.
4. Guz A.N. Description and investigation of some non-classical problem of fracture mechanics and corresponding mechanisms // Int. Appl. Mech.-2000.-36.-N12 (Прикл. механика.-2000.-36.-№12, С.3-37).
5. Маслов Б.П. Эффективные постоянные в теории геометрически нелинейных твёрдых тел // Прикладная механика. 1981.Т. 17, № 5, С. 45-50.
6. Маслов Б.П., Ляшенко Я.Г. Врахування пошкодженості середовища при прогнозуванні довготривалої міцності геологічних порід неоднорідної структури // В збірн. “Вісник НТУ”, 2008, № 17, С. 390-393.
7. Maslov B.P. Stress concentration in non-compressible multi-component material // Int. Appl. Mech.-2000.-36.- № 3 (Прикл. механика.-2000.-36. – №3.-С.108-114).
8. Kachanov M. Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts // Appl. Mech. Rev. – 1992. – 45. – № 8. – p. 304 – 335.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 539.3

ЛУГОВОЙ П.З., д.т.н., профессор, гл.н.с.

ПРОКОПЕНКО Н.Я. к.т.н., ст.н.с.

ГОЛОВКО К.Г., к. физ.-мат. н., н. с.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ВДОЛЬ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Вступление. При анализе воздействия гармонических нагрузок на оболочку необходимо знать динамические характеристики распространяющихся волн [1] и, в частности, их волновые параметры. После определения последних строятся дисперсионные кривые. Задачи о построении дисперсионных кривых для замкнутой круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной ребрами, рассмотрены в работах [2,3], в которых оценивается влияние дискретного размещения ребер на число и форму дисперсионных кривых. Ниже на числовых примерах исследуется влияние упругого основания Винклера на частоты запираания и форму дисперсионных кривых.

Постановка задачи и уравнения движения. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка с шарнирно опертыми краями, подкрепленная регулярной системой продольных ребр (все ребра имеют одинаковые геометрические и

механические параметры и размещены на равных взаимных расстояниях). Оболочка находится на упругом основании, характеризующемся коэффициентом Винклера C_1 .

Уравнения движения выведены на основе прикладных теорий оболочек и стержней, основанные соответственно на гипотезах Кирхгофа и Кирхгофа-Клебша [2]. С учетом наличия упругого основания они имеют вид:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \theta} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_j) \times \\ & \times \left(\gamma_c \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \delta_c \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^3} - \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \xi} \right) \Big|_{\theta=\theta_j} = 0, \\ & , \\ & \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \theta} + \left[\frac{1-\nu}{2} (1+4a^2) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + (1+a^2) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] v + \\ & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] \right\} w - \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \delta(\theta - \theta_j) \times \\ & \times \left[-\left(1 - \frac{h_c}{r}\right)^2 \lambda_{1c} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} + \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \lambda_{2c} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \theta} + \mu_c \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) - \right. \\ & \left. - \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} - \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} \right) \right] \Big|_{\theta=\theta_j} = 0, \\ & -\nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ -\frac{\partial}{\partial \theta} + a^2 \left[(2-\nu) \frac{\partial^3}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \right] \right\} v + w + a^2 \Delta \Delta w + \bar{C}_1 w + \\ & + \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + \sum_{j=1}^{k_1} \left\{ \delta(\theta - \theta_j) \left[\eta_c \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} - \delta_c \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + \bar{\rho}_c \bar{\gamma}_c \frac{\partial^2 w}{\partial t_1^2} + \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^2 \partial \xi} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \bar{\rho}_c \bar{\eta}_c \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial t_1^2} \right] \right\} \Big|_{\theta=\theta_j} + \frac{d\delta(\theta - \theta_j)}{d\theta} \left[\mu_c \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) + \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{h_c}{r}\right) \lambda_{2c} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} - \lambda_{3c} \frac{\partial^5 w}{\partial \xi^4 \partial \theta} - \bar{\rho}_c \bar{\mu}_c \left(\frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} + \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \bar{\rho}_c \bar{\delta}_c \left(1 - \frac{h_c}{r} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t_1^2} - \bar{\rho}_c \bar{\eta}_c \frac{\partial^3 w}{\partial t_1^2 \partial \theta} \Bigg|_{\theta=\theta_j} = 0. \quad (1)$$

Выше приняты обозначения: u, v, w – компоненты вектора перемещений точки на срединной поверхности обшивки, $\xi = \frac{x}{r}$, $\theta = \frac{y}{r}$, x, y – декартовы координаты точки на указанной поверхности, $t_1 = t\omega_0$, t – время,

$$a^2 = \frac{h^2}{12r^2}, \quad \bar{\rho}_c = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \quad \bar{\gamma}_c = \frac{F_c k_1}{2\pi r h}, \quad \bar{\delta}_c = \frac{h_c}{r} \bar{\gamma}_c, \quad \bar{\eta}_c = \left(\frac{h_c}{r} \right)^2 \bar{\gamma}_c, \quad \bar{C}_1 = \frac{(1-v^2)r^2}{Eh} C_1.$$

$$\bar{\mu}_c = \frac{I_{крс} k_1}{2\pi r^3 h}, \quad \gamma_c = \frac{E_c}{E} (1-v^2) \bar{\gamma}_c, \quad \delta_c = \frac{h_c}{r} \gamma_c, \quad \eta_c = \frac{E_c (I_{yc} + h_c^2 F_c) k_1}{2\pi r^3 h E} (1-v^2),$$

$$\lambda_{1c} = \frac{E_c I_{zc} k_1 (1-v^2)}{2\pi r^3 h E}, \quad \lambda_{2c} = \frac{h_c}{r} \lambda_{1c}, \quad \lambda_{3c} = \left(\frac{h_c}{r} \right)^2 \lambda_{1c}, \quad \mu_c = \frac{G_c}{E_c} (1-v^2) \bar{\mu}_c,$$

h, r – соответственно толщина и радиус срединной поверхности оболочки, E, ν, ρ_0 – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала, из которого она изготовлена; $F_c, I_{yc}, I_{zc}, I_{крс}$ – площадь поперечного сечения продольных ребер, его моменты инерции при изгибе в радиальной плоскости и в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности обшивки, а также момент инерции при кручении; h_c – эксцентриситеты ребер (расстояния от осей ребер до срединной поверхности обшивки, $h_c > 0$, если ребра укреплены на ее внутренней поверхности), k_1 – число продольных ребер; E_c, G_c, ρ_c – модули упругости и сдвига материалов, из которых изготовлены продольные, а также их плотности, $\delta(\theta - \theta_j)$ – дельта-функция

Дирака, $\theta_j = \frac{2\pi}{k_1} j$.

Решение системы (1) определяется в виде рядов

$$u = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n1} \cos n\theta + u_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1,$$

$$v = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (v_{n1} \sin n\theta + v_{n2} \cos n\theta) \cos \omega_1 t_1,$$

$$w = e^{ik\xi} \sum_{n=0}^{\infty} (w_{n1} \cos n\theta + w_{n2} \sin n\theta) \cos \omega_1 t_1, \quad (2)$$

где u_{ns} , v_{ns} , w_{ns} ($s=1,2$) – неизвестные постоянные, k – безразмерный волновой параметр

$$\left(\text{соответствующая ему длина волны } \lambda = \frac{2\pi r}{k} \right), \quad \omega_1 = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho_0 r^2}}.$$

После подстановки (2) в (1) задача сводится к определению u_{ns} , v_{ns} , w_{ns} из бесконечных систем однородных линейных алгебраических уравнений. В [2] показано, что эти системы имеют точное решение.

На его основе получены дисперсионные уравнения трех типов [3]:

а) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа (волновые параметры) при произвольном характере деформирования оболочки в окружном направлении (по терминологии, принятой в [1], - общий случай деформации). Волновые параметры в этом случае зависят от всех геометрических и механических характеристик ребер.

б) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа при таком деформировании оболочки в окружном направлении, при котором продольные ребра лежат в пучностях прогиба. Волновые параметры в этом случае зависят только от жесткостей этих ребер на растяжение-сжатие и изгиб в радиальной плоскости оболочки, а также от геометрических и механических параметров, определяющих соответствующие инерционные характеристики ребер.

в) Уравнения, позволяющие вычислить характеристические числа при таком деформировании оболочки в окружном направлении, при котором продольные ребра лежат в узлах прогиба. Волновые параметры в этом случае зависят только от жесткостей этих ребер на изгиб в плоскости, эквидистантной касательной к срединной поверхности оболочки, и при кручении, а также от геометрических и механических параметров, определяющих соответствующие инерционные характеристики ребер.

Числовой пример. Вычисления выполнены для оболочки, усиленной четырьмя ребрами ($k_1=4$), размещенными на внутренней поверхности обшивки, имеющей такие безразмерные геометрические и механические параметры:

$$\frac{h}{r} = 0,25 \cdot 10^{-2}; \quad \frac{F_c}{2\pi r h} = 0,16 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{h_c}{r} = 0,14 \cdot 10^{-1}; \quad \frac{I_{kpc}}{2\pi r^3 h} = 0,53 \cdot 10^{-6};$$

$$\frac{I_{zc}}{2\pi r^3 h} = 0,13 \cdot 10^{-6}; \quad E_c = E; \quad G_c = 0,3845E; \quad \nu = 0,3. \quad \text{Рассматриваемый интервал частот}$$

возбуждения принят таким: $0 \leq \omega_1 \leq 0,2$.

В таблице приведены значения частот запираия для приведенных случаев деформирования оболочки в зависимости от коэффициента упругого основания \bar{C}_1 . Из таблицы видно, в заданном диапазоне частот возбуждения с увеличением коэффициента Винклера частоты запираия возрастают по сравнению с частотами для оболочки без упругого основания. При достаточно больших значениях \bar{C}_1 число частот запираия уменьшается.

Таблиця 1

\bar{C}_1	$\omega \cdot 10$			
	a	б		В
0	0,099	0,053	0,841	0,019
	0,427	0,165	1,180	0,248
	0,978	0,334	1,576	0,708
	1,753	0,559		1,400
0,001	0,305	0,220	0,638	0,280
	0,521	0,295	0,896	0,398
	1,024	0,345	1,220	0,778
	1,780	0,453	1,606	1,432
0,005	0,644	0,490	0,888	0,624
	0,798	0,641	1,089	0,738
	1,190	0,699	1,368	0,997
	1,881	0,764	1,722	1,563
0,01	0,892	0,691	1,126	0,882
	1,051	0,892	1,291	1,014
	1,372	0,975	1,534	1,219
		1,031	1,857	1,714

На рис. 1 – 3 показаны дисперсионные кривые для общего случая деформирования оболочки в зависимости от коэффициента упругого основания. Кривые на рис.1 соответствуют оболочке без упругого основания $\bar{C}_1=0$, на рис.2 – для $\bar{C}_1=0,001$, на рис.3 – для $\bar{C}_1=0,01$. Как видно из рис.1 – 3, с увеличением коэффициента упругого основания изменяется форма дисперсионных кривых. Они становятся более пологими.

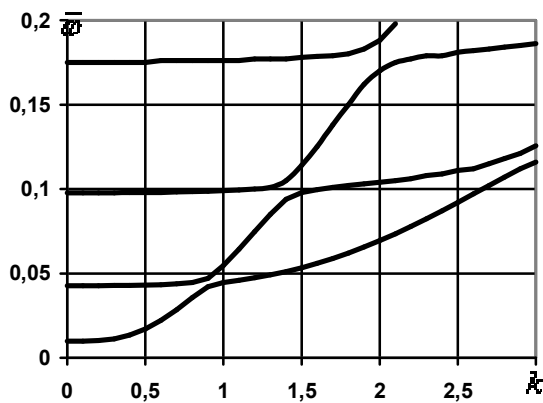


Рисунок 1

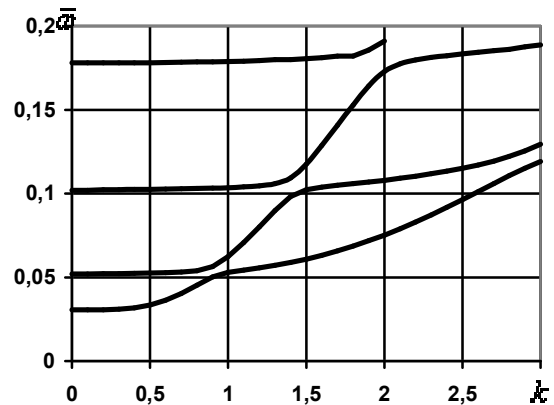


Рисунок 2

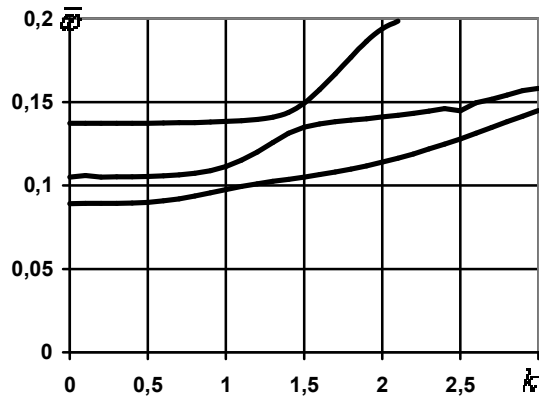


Рисунок 3

Заключення. На основі проведеного дослідження можна зробити висновок, що упруге основи Винклера впливає на кількість і величину частот заперення і форму дисперсійних кривих.

ЛИТЕРАТУРА

1. Головка К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородних оболонок при нестационарних навантаженнях. К.: Издат.-полиграф. центр «Київський університет», 2012. – 541 с.
2. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек (Метод расчета оболочек: в 5 т., Т.2) – К.: Наук. думка, 1980. – 368 с.
3. Заруцкий В.А., Прокопенко Н.Я. О влиянии дискретного размещения продольных ребер на распространение гармонических волн вдоль цилиндрических оболочек // Прикл. механика.– 2003.– 39, №4, с. 92 – 98.

Поступила в редколлегию 28.02.2013