

Национальный транспортный университет, Киев, Украина

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ НАГРУЗКЕ

Введение. Как показывает литературный обзор по теме исследования, в этом направлении следует отметить работы по динамическому поведению подкрепленных цилиндрических, сферических и конических оболочек на упругом основании Винклера при нестационарных нагрузках (случай осесимметричных колебаний) [4-8]. В этих работах исследовано влияние упругого основания на напряженно – деформированное состояние подкрепленных оболочек при нестационарных колебаниях. Практически отсутствуют исследования для случая неосесимметричных колебаний подкрепленных оболочек на упругом основании. Ниже приведен случай задачи о неосесимметричных колебаниях дискретно подкрепленных цилиндрических оболочек на упругом основании Винклера при нестационарных нагрузках.

Цель работы заключается в исследовании напряженно – деформированного состояния дискретно подкрепленных оболочек на упругом основании при нестационарных нагрузках.

Постановка задачи. При рассмотрении взаимодействия упругих конструкций с окружающей средой существует два основных подхода постановки и решения указанных задач: моделирование окружающей среды согласно трехмерных уравнений механики сплошных сред и моделирование окружающей среды некоторыми интегральными кинематическими и силовыми параметрами, действующими на упругую конструкцию (упругие основания типа Винклера, Пастернака) [1, 2]. Решение задач согласно первого подхода связано со значительными алгоритмическими и вычислительными трудностями [3]. Согласно второго подхода действие окружающей среды заменяется упругим основанием, что в свою очередь приводит к упрощению постановки и решения исходных задач [2, 4]. В данной работе рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом основании Винклера при распределенной нагрузке.

Уравнения колебаний дискретно подкрепленной цилиндрической оболочки на упругом основании представлены согласно работы [4]. Исходные уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных по переменным x, y, t при наличии пространственных разрывов по координатам x и y . Пространственными разрывами являются линии проецирования центров масс поперечного сечения дискретных ребер на срединную поверхность

циліндричеської оболочкі i – го ребра по координаті x і j – го ребра по координаті y .

Исходя из этого, исходную систему уравнений представим следующим образом:

✓ уравнения в гладкой области

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + P_1 = \rho h \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} + \frac{\bar{T}_{23}}{R} + P_2 = \rho h \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{T}_{23}}{\partial y} - \frac{T_{22}}{R} - C_1 u_3 + P_3 = \rho h \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} - T_{13} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_{22}}{\partial y} - T_{23} = \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2};$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11} \theta_1 + S \theta_2, \quad \bar{T}_{23} = T_{23} + T_{22} \theta_2 + S \theta_1;$$

✓ уравнения на i – й линии разрыва вдоль оси OX

$$\frac{\partial T_{11i}}{\partial x} + [S] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [T_{22}] = \rho_i F_i \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{ci} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \bar{T}_{13i}}{\partial x} + [\bar{T}_{23}] = \rho_i F_i \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{11i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial T_{11i}}{\partial x} - T_{13i} + [H] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{1i}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{12i}}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \bar{T}_{12i}}{\partial x} + [M_{22}] = \rho_i F_i \left[\pm h_{ci} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{ci}^2 + \frac{I_{kri}}{F_i} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right],$$

$$\bar{T}_{13i} = T_{13i} + T_{11i} \theta_{1i}, \quad \bar{T}_{12i} = T_{12i} + T_{11i} \theta_{2i},$$

✓ уравнения на j – й линии разрыва вдоль оси OY

$$\frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + [T_{11}] = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T_{22j}}{\partial y} + \frac{T_{23j}}{R_j} + [S] = \rho_j F_j \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right), \quad \frac{\partial \bar{T}_{23j}}{\partial y} - \frac{T_{22j}}{R_j} + [T_{13}] = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial M_{21j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial \bar{T}_{21j}}{\partial y} + [M_{11}] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{krj}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

$$\frac{\partial M_{22j}}{\partial y} \pm h_{cj} \frac{\partial T_{22j}}{\partial y} - T_{23j} + [H] = \rho_j F_j \left[\pm h_{cj} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + \left(h_{cj}^2 + \frac{I_{2j}}{F_j} \right) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \right],$$

$$\bar{T}_{23j} = T_{23j} + T_{22j} \theta_{2j}, \quad \bar{T}_{21j} = T_{21j} + T_{22j} \theta_{1j}.$$

В уравнениях (2), (3) величины в квадратных скобках являются усилиями – моментами гладкой оболочки, действующими на соответствующий дискретный i – й (или j –й) подкрепляющий элемент, расположенный вдоль оси ОХ (соответственно оси ОУ) – $[\Phi]_i = \Phi_i^+ - \Phi_i^-$, $[\Phi]_j = \Phi_j^+ - \Phi_j^-$.

Связь между усилиями–моментами и соответствующими величинами деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} T_{11} &= B_{11}(\varepsilon_{11} + \nu_{21}\varepsilon_{22}), & T_{22} &= B_{22}(\varepsilon_{22} + \nu_{12}\varepsilon_{11}), \\ S &= B_{12}\varepsilon_{12}, & T_{13} &= B_{13}\varepsilon_{13}, & T_{23} &= B_{23}\varepsilon_{23}, \\ M_{11} &= D_{11}(\kappa_{11} + \nu_{21}\kappa_{22}), & M_{22} &= D_{22}(\kappa_{22} + \nu_{12}\kappa_{11}), & H &= D_{12}\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} B_{11} &= \frac{E_1 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & B_{22} &= \frac{E_2 h}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & B_{12} &= G_{12}h, & B_{13} &= G_{13}hk^2, & B_{23} &= G_{23}hk^2, \\ D_{11} &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & D_{22} &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, & B_{12} &= G_{12} \frac{h^3}{12}, \end{aligned}$$

Соотношения, связывающие величины деформаций с компонентами обобщенного вектора перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_1^2, & \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2}\theta_2^2 + \frac{u_3}{R}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} + \theta_1 \theta_2, & \varepsilon_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_1, & \varepsilon_{23} &= \frac{\partial u_3}{\partial y} + \varphi_2 - \frac{u_2}{R}, & \kappa_{11} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \\ \kappa_{22} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, & \kappa_{12} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & \theta_1 &= \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \theta_2 &= \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения между усилиями – моментами и соответствующими деформациями i – го дискретного ребра расположенного вдоль оси ОХ имеют вид

$$\begin{aligned} T_{11i} &= E_i F_i \varepsilon_{11i}, & T_{12i} &= G_i F_i \varepsilon_{12i}, \\ T_{13i} &= G_i F_i k_i^2 \varepsilon_{13i}, & M_{11i} &= E_i I_{1i} \kappa_{11i}, & M_{12i} &= G_i I_{kri} \kappa_{12i}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11i} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\theta_{1i}^2 + \frac{1}{2}\theta_{2i}^2, \\ \varepsilon_{12i} &= \theta_{2i}, & \varepsilon_{13i} &= \varphi_1 + \theta_{1i}, & \theta_{2i} &= \frac{\partial u_2}{\partial x} \pm h_{ci} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, & \theta_{1i} &= \frac{\partial u_3}{\partial x}, & \kappa_{11i} &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & \kappa_{12i} &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \end{aligned} \quad (7)$$

k^2, k_i^2 – коэффициенты поперечного сдвига в теории оболочек и стержней Тимошенко.

Соответствующие соотношения для усилий – моментов и соответствующих деформаций в случае j –го дискретного ребра расположенного вдоль оси ОУ записываются согласно [4].

Уравнения колебаний (1) – (7) дополняются соответствующими граничными и начальными условиями.

Численный алгоритм решения уравнений (1)–(7) основывается на использовании интегро – интерполяционного методу построения разностных схем для исходных уравнений по пространственным координатам x , y и явной конечно – разностной схеме по временной координате t [4, 9, 10].

Численные результаты. Как численный пример, рассматривалась задача динамического поведения дискретно подкрепленной ребрами цилиндрической оболочки на упругом основании под действием распределенной внутренней импульсной нагрузки. Полагается, что торцы оболочки при $x=0, x=L$ жестко защемлены. Начальные условия для кинематических величин – нулевые. Поперечные ребра расположены в сечениях $s_{1i} = 0,25Li; i = \overline{1, 3}$. Продольные ребра расположены в сечениях $s_{2j} = \pi R(j-1)/2; j = \overline{1, 4}$ (оболочка подкреплена тремя поперечными ребрами и четырьмя продольными). Распределенная импульсная нагрузка $P_3(s_1, s_2, t)$ задавалась следующим образом $P_3(s_1, s_2, t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t-T)]$, где A – амплитуда нагрузки, T – длительность нагрузки. В расчетах полагалось: $A = 10^6$ Па; $T = 50 \cdot 10^{-6}$ с.

Задача решалась при следующих геометрических и физико – механических параметрах: $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$; $h = 10^{-2}$ м; $L = 0,4$ м. Для подкрепляющего ребра полагалось: $E_i = E_j = E; F_i = F_j = a_j h_j; a_i = a_j = h; h_i = h_j = 2h$. Расчеты проводились для трех следующих значений коэффициента упругого основания Винклера: 1) $C_1 = 1 \cdot 10^9$ Н/м³; 2) $C_1 = 2 \cdot 10^9$ Н/м³; 3) $C_1 = 3 \cdot 10^9$ Н/м³.

Численные расчеты данной задачи были проведены на временном интервале

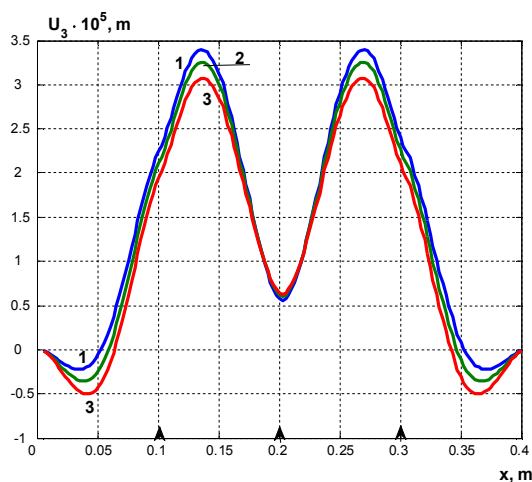


Рисунок 1

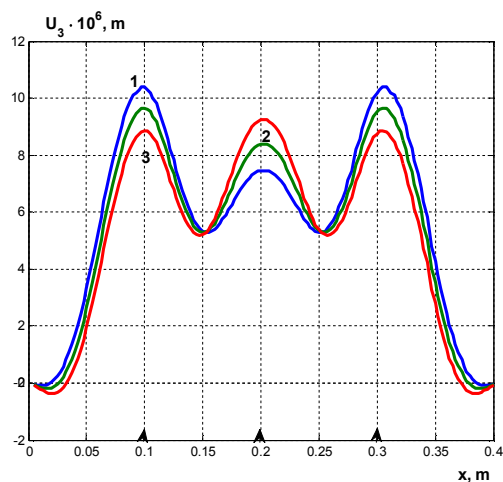


Рисунок 2

$0 < t \leq 40T$. На рис. 1, рис. 2 приведенны зависимости прогиба u_3 по длине конструкции.

Рис. 1 соответствует зависимости прогиба u_3 от пространственной координаты x в сечении $y = \pi R / 4$ (сечение между ребрами) в момент времени $t = 8,5T$ (время достижения максимального значения u_3 для случая $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$). Кривая 1 соответствует случаю расчетов при $C_1 = 1 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; кривая 2 – $C_1 = 2 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$; кривая 3 – $C_1 = 3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^3$. На рис. 2 приведены соответствующие зависимости в тот же момент времени в сечении $y = 0$. Согласно представленного графического материала наблюдается явна зависимость величины прогиба от значений коэффициентов Винклера, от места расположения подкрепляющих ребер.

Выводы. Рассмотрена задача о вынужденных колебаниях цилиндрической дискретно подкрепленной оболочки на упругом основании при распределенной нагрузке. Динамическое поведение неоднородной цилиндрической оболочки рассматривается в рамках теории оболочек и стержней типа Тимошенко. Для решения поставленной задачи используется метод конечных разностей по пространственным и временной координатам. Приведены численные результаты решения задач, позволяющие проводить детальный анализ влияния упругого основания Винклера на напряженно – деформированное состояние исходной неоднородной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вестяк А.В. Нестационарные взаимодействия деформируемых тел с окружающей средой / А.В. Вестяк, А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский // Итоги науки и техн.: Мех. деф. тверд, тела. Т. 15. -М.: ВИНТИ, 1983. - С. 69-148.20.
2. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – Киев: Сталь, 2000. – 600с.
3. Гузь А.Н. Методы расчета оболочек, т. 5. – Теория нестационарной аэро-гидроупругости оболочек. / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко – Киев: Наук. думка, 1983.– 400 с.
4. Головки К.Г. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках: монография / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш; под ред. акад НАН Украины А.Н. Гузя. – К.: Изд. полигр. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
5. Головки К.Г. О решении осесимметрических задач динамики цилиндрических оболочек на упругом основании / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Прикл. механика. – 2007. – 43, № 12. – С. 85 –94.

6. Головки К.Г. Динамическое поведение сферических оболочек на упругом основании при импульсных нагрузках / К.Г. Головки, П.З. Луговой, В.Ф. Мейш // Системні технології. Вип.: Математичні проблеми технічної механіки. -№4 (51), 2007. – С.9 -13.
7. Луговой П.З. О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, К.Г. Головки // Прикл. механика. – 2009. – 45, № 2. – С. 99 – 106.
8. Луговой П.З. О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных конических оболочек на упругом основании / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Ю.А. Мейш // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій / Дніпропетровський Національний ун-т. – 2009, вип. 13. – С. 142 – 148.
9. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.А. Штанцель. – К: Издательско – полиграфический центр “Киевский университет”, 2005. – 536с.
10. Самарский А.А. Теория разностных схем. / А.А. Самарский – М.: Наука, 1977. – 656 с.

Поступила в редколлегию 28.02.2013

УДК 539.3

КОВАЛЕНКО А.П.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ УПРУГИЙ ТРУБОПРОВОД – ЖИДКОСТЬ ПРИ ПРОДОЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Постановка проблемы. Составляющей частью многих технических устройств являются трубопроводы с жидкостью. При эксплуатации такие устройства зачастую подвержены различного типа динамическим (в том числе и ударным) продольным нагрузкам и одним из актуальных вопросов является исследование переходных процессов в рассматриваемых гидроупругих системах. Для изучения таких процессов необходимо построить механическую и математическую модели; выявить характерные параметры для исследуемой гидроупругой системы; разработать метод решения и исследовать влияние характерных величин на переходные процессы в такой гидроупругой системе.

Анализ публикаций по теме исследования. На протяжении последних десятилетий проводятся активные исследования по изучению переходных процессов в гидроупругих системах [1-4]. При этом рассматриваются задачи как в нелинейной так и

в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи [5–7]. Для решения подобных задач зачастую применяется интегральное преобразование Лапласа-Карсона [8]. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке в линейной постановке (метод Бубнова-Галеркина, метод итераций, численное обращение интегрального преобразования) [9–11].

Цель работы. В работе ставится цель построения адекватной математической модели исследования переходных процессов в трубопроводе с жидкостью при продольном ударном нагружении, выявления характерных параметров системы при изучении переходных процессов в данной гидроупругой системе при продольном ударном нагружении.

Обоснование выбранной механической модели. Задачи изучения переходных процессов в упругих трубопроводах при продольных ударных нагружениях можно моделировать, с приемлемой погрешностью, полубесконечной цилиндрической оболочкой с находящейся внутри жидкостью. При этом необходимо применять такие механические модели цилиндрической оболочки и жидкости, которые учитывают волновой характер распространения возмущений в системе. Вместе с тем механическая модель системы должна быть достаточно простой для расчетов, учитывать все существенные процессы для данного класса задач и иметь удовлетворительную точность при проведении вычислений. На основании вышеизложенного представляется целесообразным использовать линейные уравнения движения оболочки по модели Тимошенко и акустическое приближение для жидкости.

Постановка задачи. На оболочку действует продольная ударная нагрузка, т.е. удар по торцу оболочки массой M с начальной скоростью V_0 . Рассматриваются тонкостенные оболочки в классическом понимании ($h/R \leq 0,1$, h – толщина стенки оболочки; R – срединный радиус оболочки). На торце оболочки находится масса m . Задача рассматривается в безразмерном виде. За характерную длину L выбран радиус оболочки, т.е. $L = R$, за характерную массу выбрана величина $M + m$, а за характерное время T выбрана величина $T = R((1 - \nu^2)\rho_1 / E)^{1/2}$, где ν, E, ρ_1 – коэффициент Пуассона, модуль Юнга и плотность материала оболочки соответственно.

В такого рода задачах очень важно как можно точнее учесть взаимодействие оболочки и жидкости при подобного рода нагрузках. Для этого построим потенциал скоростей жидкости через неизвестные перемещения оболочки. Поскольку задача линейная, применим интегральное преобразование Лапласа-Карсона по времени [8]

$$F(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt.$$

Построение потенциала скоростей жидкости. Краевую задачу для потенциала скоростей жидкости φ в пространстве изображений можно записать следующим образом:

$$\Delta\varphi - \beta^2\varphi = 0; \quad x=0: \varphi_x = pU; \quad x=\infty: \varphi_x = 0; \quad r=1: \varphi_r = pW. \quad (1)$$

Здесь $\beta = p/a$, a – скорость распространения возмущений в жидкости, оператор $\Delta\Phi \equiv \Phi_{xx} + \Phi_{rr} + \Phi_r/r$.

Представим потенциал φ в виде суммы двух потенциалов $\varphi = \delta + \varepsilon$. Применяя принцип суперпозиции (вследствие линейности задачи), можем записать отдельно краевые задачи для δ и ε в следующем виде:

$$\Delta\delta - \beta^2\delta = 0; \quad x=0: \delta_x = 0; \quad x=\infty: \delta_x = 0; \quad r=1: \delta_r = pW. \quad (2)$$

$$\Delta\varepsilon - \beta^2\varepsilon = 0; \quad x=0: \varepsilon_x = pU; \quad x=\infty: \varepsilon_x = 0; \quad r=1: \varepsilon_r = 0. \quad (3)$$

Здесь x, r – продольная и радиальная координаты соответственно; U, W – продольное и радиальное перемещение стенки оболочки.

Рассмотрим краевую задачу для потенциала скоростей жидкости δ (2).

Решение задачи будем находить по методу Бубнова-Галеркина в виде

$\delta = \delta_0 + \sum_{j=0}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r)$. Здесь α_j ($j = \overline{0, N}$) – корни уравнения $J_1(x) = 0$, $J_0(x)$, $J_1(x)$ – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно. В качестве δ_0 выберем

$\delta_0 = aWe^{-(1-r)\beta}$. При определенных ограничениях ($x=0: W_x = 0$) δ_0 удовлетворяет граничным условиям. Следовательно, имеем

$$\delta = aWe^{-(1-r)\beta} + \sum_{j=0}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r). \quad (4)$$

Подставим (4) в уравнение (2) и найдем “невязку” уравнения:

$$\Delta A = \sum_{j=0}^N \left(\frac{d^2 X_j}{dx^2} - \lambda_j^2 X_j \right) J_0(\alpha_j r) + a \frac{d^2 W}{dx^2} e^{-(1-r)\beta} + \frac{a}{r} W \beta e^{-(1-r)\beta}. \quad (5)$$

Для того чтобы выражение (4) было решением задачи (2), необходимо, чтобы “невязка” ΔA была ортогональна ко всем функциям $J_0(\alpha_j r)$ ($j = \overline{0, N}$). Для этого умножим выражение ΔA (5) на $rJ_0(\alpha_j r)$ ($j = \overline{0, N}$), проинтегрируем по r от 0 до 1 и приравняем результат нулю. В результате получим краевую задачу для X_j ($j = \overline{0, N}$):

$$\left(X_j \right)_{xx} - \lambda_j^2 X_j = -pB_{1j}W - aB_{2j}W_{xx} \quad (j = \overline{0, N}). \quad (6)$$

Граничные условия для X_j имеют следующий вид:

$$x = 0, \infty: \left(X_j \right)_x = 0 \quad (j = \overline{0, N}) \quad (7)$$

Здесь $\lambda_j^2 = \alpha_j^2 + \beta^2$, $B_{ij} = \left\| J_0(\alpha_j r) \right\|^{-1} \int_0^1 r^{i-1} e^{-\beta(1-r)} J_0(\alpha_j r) dr$ ($i = 1, 2; j = \overline{0, N}$)

Аналогічно розглянемо крайову задачу для потенціала швидкостей жидкості ε (3). Розв'язок задачі знаходимо за методом Бубнова-Галеркіна в вигляді

$$\varepsilon = -aU(0)e^{-\beta x} + \sum_{j=0}^N Y_j(x)J_0(\alpha_j r). \quad (9)$$

Начальне значення $\delta_0 = -aU(0)e^{-\beta x}$ задовольняє граничним умовам для (3). Підставимо (9) в рівняння (3) і знайдемо “невязку” рівняння.

$$\Delta C = \sum_{j=0}^N \left(\frac{d^2 Y_j}{dx^2} - \lambda_j^2 Y_j \right) J_0(\alpha_j r). \quad (10)$$

Домножимо (10) на $rJ_0(\alpha_j r)$ ($j = \overline{0, N}$), проінтегруємо від 0 до 1 і прирівняємо результат нулю. В результаті отримаємо рівняння для Y_j ($j = \overline{0, N}$):

$$(Y_j)_{xx} - \lambda_j^2 Y_j = 0 \quad (j = \overline{0, N}). \quad (11)$$

Граничні умови мають наступний вигляд:

$$x = 0, \infty: (Y_j)_x = 0 \quad (j = \overline{0, N}) \quad (12)$$

Отже, отримаємо $Y_j = 0$ ($j = \overline{0, N}$). Отже, $\varepsilon = -aU(0)e^{-\beta x}$.

При отриманні виразу для ΔA і ΔC використано формули диференціювання функцій Бесселя [12]:

$$\frac{dJ_0(\alpha_j r)}{dr} = -\alpha_j J_1(\alpha_j r), \quad \frac{d^2 J_0(\alpha_j r)}{dr^2} = -\alpha_j \left(J_0(\alpha_j r) - \frac{1}{\alpha_j r} J_1(\alpha_j r) \right) \alpha_j = -\alpha_j^2 J_0(\alpha_j r) + \frac{\alpha_j}{r} J_1(\alpha_j r)$$

Таким чином, в просторі зображень вдалося побудувати потенціал швидкостей жидкості через невідомі переміщення для оболонки (для випадку $x = 0: W_x = 0$): $\varphi = \delta + \varepsilon = -aU(0)e^{-\beta x} + aWe^{-(1-r)\beta} + \sum_{j=0}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r)$. (13)

Математична модель дослідження перехідних процесів в гідроупругій системі півбесконечної циліндричної оболонки – жидкість при динамічних ударних навантаженнях в просторі зображень на основі вищеописаного може бути записана наступним чином:

Рівняння руху оболонки з урахуванням впливу жидкості [13]:

$$\begin{aligned} U_{xx} - d_1^2 U &= \beta_{13} W_x, \quad \Psi_{xx} - d_2^2 \Psi = \beta_{23} W_x, \\ W_{xx} - d_3^2 W &= \beta_{31} U_x + \beta_{32} \Psi_x + K_s p \left(-aU(0)e^{-\beta x} + \sum_{j=0}^N X_j(x)J_0(\alpha_j r) \right). \end{aligned}$$

Граничні умови будуть

$$x = 0: W_x = \Psi = 0, \quad \varphi_x = pU; \quad x = \infty: U = W = \Psi = 0, \quad r = 1: \varphi_r = pW;$$

$$x = 0: p^2 (U - V_0 / p) = 2\pi K_m K_h (U_x + vW) + \left(2\pi K_m K_s K_h p \int_0^1 \varphi r dr \right) / \alpha_{33}.$$

Здесь, в силу представления (13) при $x = 0$, выражение

$$\int_0^1 \varphi r dr = -aU(0)/2 + X_0(0)/2 + (a(\beta - 1) + ae^{-\beta})W(0)/\beta^2, \quad \Psi - \text{тангенс угла наклона сечения}$$

по теории оболочек типа Тимошенко. Коэффициенты системы имеют следующий вид:

$$d_1^2 = p^2, \quad d_2^2 = p^2 + \alpha_{22}, \quad d_3^2 = b_3^2 p^2 + \alpha_{33} + apK_s, \quad b_3^2 = \alpha_{33} = 2/(k^2(1-\nu)), \quad \beta_{13} = -\nu, \\ \alpha_{22} = \beta_{23} = 6k^2(1-\nu)/K_h^2, \quad \beta_{31} = 2\nu/(k^2(1-\nu)), \quad \beta_{23} = -1, \quad K_h = h/R, \quad K_m = R^3 \rho_1 / (M + m), \\ K_s = 2K_\rho / (k^2(1-\nu)K_h), \quad K_\rho = \rho_0 / \rho_1 \quad (\rho_0 - \text{плотность жидкости в состоянии покоя}).$$

Анализ полученных результатов. В пространстве изображений начально-краевую задачу удалось свести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (для определенного класса задач). При записи задачи в безразмерных величинах были выделены безразмерные коэффициенты K_h , K_m , K_s , K_ρ . Это характерные параметры рассматриваемой гидроупругой системы, которые позволяют оценить взаимное влияние параметров системы на динамические процессы при продольном ударном нагружении. Коэффициент K_s позволяет учесть взаимное влияние жидкости и оболочки при рассматриваемых динамических процессах. Этот коэффициент имеет ясный физический смысл и зависит от констант для материала оболочки, отношения плотностей для жидкости и материала оболочки а также от безразмерной толщины стенки оболочки.

Выводы и перспективы дальнейших исследований. Для нахождения приближенного аналитического решения системы дифференциальных уравнений целесообразно применить метод итераций [9]. Переход в пространство оригиналов предполагается осуществлять численно [10,14]. Исследования в данной области целесообразно продолжать для исследования переходных процессов в конкретных механических системах при осевом ударном нагружении для различных параметров системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок./ Н.А. Алумяэ//Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.:Наука,1966. – С.883–889.
2. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой./ В.Д. Кубенко. – Киев.:Наук.думка, 1979. –184с.
3. Коваленко А.П. Переходные процессы в упругих трубопроводах с жидкостью при продольных импульсных нагружениях. КОНСОНАНС – 2011, Акустичний симпозіум (27.09.29.09.2011), Зб. праць.: – К.: – 2011. – С. 148-153.
4. Коваленко А.П. Математическое моделирование продольных динамических возмущений в оболочке в системе полубесконечная цилиндрическая оболочка с

- жикостью при осевом импульсном нагружении. КОНСОНАНС-2007, Акуст. симпозиум (25-27 вересня 2007 р.), Зб. праць.– К.: – 2008. – С.108-113.
5. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке. /Л.А.Мовсисян.//Изв. АН Арм.ССР.Физ мат науки.– 1964. – Т.17. – №5. – С.43–46.
 6. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек./ У.К.Нигул //Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок.– М.: Наука,1966. – С.593–599.
 7. Сагомоян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость/ А.Я.Сагомоян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. –№2. – С.173–176.
 8. Лурье А.И. Операционное исчисление. / А.И.Лурье // М.-Л.:Гостехиздат, 1950. – 431с.
 9. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке /А.П.Коваленко //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008.– Вып. 2(31). – С.240–244.
 10. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке./А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. –Вып. 2(35). – С.236-240.
 11. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках. /А.П.Коваленко //Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
 12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.:Наука,1977.– 342с.
 13. Gerrmann G., Mirsky J. Three-dimensional and shell-theory analysis of axially motions of cylinder/ G. Gerrmann, J.Mirsky //J. Appl. Mech.–1956. – Т.23. – №4.– P.563-568.
 14. Крылов В.И., Скобля Н.С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа./ В.И.Крылов, Н.С.Скобля.– М.: Наука, 1974.– 224с.

Поступила в редколлегию 29.02.2013

Днепродзержинский государственный технический университет

СИНЕРГЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ НАДЕЖНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ АППАРАТУРЫ ДЛЯ МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Введение. Показатель надежности функционирования аппаратуры для медико-биологических исследований (МБИ) в период применения может быть выражен следующим соотношением [1]:

$$P(\tau_{np.}) = P_u(t) \cdot P(\tau_n) \cdot P(\tau_{np.}), \quad (1)$$

где $P_u(t)$ – вероятность того, что в момент t неконтролируемые в период подготовки к применению подсистемы находятся в технически полностью исправном состоянии; $P(\tau_n)$ – вероятность того, что за время τ_n не возникнут отказы этих подсистем, приводящие к отказу системы при применении; $P(\tau_{np.})$ – вероятность неоявления за период $\tau_{np.}$ отказов подсистем, приводящих к отказу системы в период применения.

Тогда обобщенный показатель надежности [1]:

$$P = K_z \cdot P(\tau_n) \cdot P(\tau_{np.}), \quad (2)$$

где K_z - коэффициент готовности.

Надежность функционирования аппаратуры для МБИ, как сложной технической системы (СТС) в условиях неопределенности биофизической информации о состоянии пациента информации определяется величиной коэффициента готовности составляющих ее элементов. При сравнительно малом его значении для поддержания надежности системы в заданных пределах предусматривается активная деятельность, направленная на обеспечение работоспособности ее элементов путем адаптации к реальным, постоянно изменяющимся условиям функционирования (колебания температуры окружающей среды и тела пациента, хаотичности и непредсказуемости его движений и т.п.). Это позволяет выбирать управляющие стратегии и способы обеспечения устойчивости процесса измерений.

Оценка надежности и безопасности СТС по известным показателям надежности ее элементов предполагает переход от показателей надежности элементов к показателям надежности всей системы. Основная трудность такого перехода состоит в адекватном учете взаимодействия элементов СТС на ее надежность в целом. Сущность синергетического подхода, как нам представляется в данном случае, состоит в определении надежности функционирования аппаратуры для МБИ, как функции влияния и взаимовлияния всех подсистем и их элементов. На основе этих данных могут быть разработаны меры по поддержанию уровня надежности функционирования

аппаратуры для МБИ в заданных пределах, а также созданы более достоверные по сравнению с существующими методы контроля и прогноза выхода ее параметров за допустимые пределы.

В связи с этим, **целью данной работы** является разработка синергетической модели оценки надежности функционирования аппаратуры для МБИ как СТС.

Постановка задачи исследований. Отказы элементов аппаратуры для МБИ, являясь случайными, в совокупности образуют последовательность зависимых и независимых событий. *Под отказом в данном случае понимается получение (выдача на выходе с аппаратуры для МБИ) неверной информации о состоянии пациента в результате чего формируется ошибочная база данных для постановки диагноза, работе органов и систем его организма.*

Предположим, что на систему для проведения МБИ действует n видов внешних и внутренних факторов с параметрами $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$, которые являются некоторыми нестационарными случайными функциями времени. Реакция системы на их действие: $R = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_n q_n$ – линейная функция. Отказ системы произойдет, когда величина R превысит некоторое критическое значение R^* . То есть условие отказа системы имеет следующий вид:

$$R[Q(t)] \geq R^*, \quad (3)$$

где $Q(t) = f(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$.

Аппаратуру для МБИ будем рассматривать как СТС, состоящую из последовательно соединенных элементов.

Основная часть. Вероятность развития отказа P_o можно представить как совмещение двух независимых событий: P_1 и P_2 – вероятности подавления и активизации процесса развития отказа соответственно [2]:

$$P_o = P_1 \cdot P_2. \quad (4)$$

Проанализируем изменение состояния аппаратуры для МБИ при изменении какого-либо параметра, определяющего ее функционирование, как СТС.

Обозначим через S_i i -й фактор, вызывающий j -е изменение надежности функционирования. Количественно влияние i -го фактора на j -е изменение надежности характеризуется информационной мерой – количеством информации, содержащимся в S_i относительно состояния надежности:

$$a_{\psi_i, S_i} = \lg \frac{P(\delta_i / S_i)}{P(\delta_i)}, \quad (5)$$

где $P(\delta_i / S_i)$ – вероятность изменения состояния надежности при наличии фактора S_i , $P(\delta_i)$ – априорная вероятность изменения состояния δ_j .

Для системы факторов $\varphi_k(S_1, S_2, \dots, S_k)$,

$$a_{\psi_i, S_i} = \lg \frac{P(\varphi_k / \partial_i)}{P(\varphi_k)}. \quad (6)$$

Существенной является возможность вычисления информационной меры системы факторов $\varphi_k(S_1, S_2, \dots, S_k)$ по информационным мерам отдельных параметров:

$$a_{\partial_j, \varphi_k} = a_{\partial_j, S_1} + a_{\partial_j, S_2} + a_{\partial_j, S_2 / S_1} + \dots + a_{\partial_j, S_k / S_1, \dots, S_{k-1}}, \quad (7)$$

где $a_{\partial_j, S_k / S_1, \dots, S_{k-1}} = \lg \frac{P(\partial_j / S_1 \dots S_k)}{P(\partial_j / S_1, \dots, S_{k-1})}$.

Формированию каждого Φ_i -го процесса предшествует возникновение необходимого и достаточного условий. Первое – вложенность потенциальных зон $\Omega(\varphi_i)$ одновременного протекания всех процессов:

$$\Omega(\varphi_i) = \Omega_0(\varphi_0) \subset \Omega_1(\varphi_1) \subset \dots \subset \Omega_{i-1}(\varphi_{i-1}). \quad (8)$$

Это условие означает, что энергетический источник для формирования Φ_i -го процесса должен обеспечиваться изменением потенциалов $(i-1)$ уровней процессов.

Достаточное условие ограничивает пространственные размеры и определяет местоположение формирования Φ_i -го процесса; возникновение нового процесса возможно только в такой зоне, в которой значения $\varphi_i(i-1)$ потенциалов процессов находятся в определенных пределах:

$$\Omega_i(\varphi_i) = \bigcap_{i=0}^{i-1} \Omega_i, \left(\overset{\vee}{\varphi}_i < \varphi_i < \overset{\wedge}{\varphi}_i \right), \quad (9)$$

где $\overset{\vee}{\varphi}_i$ и $\overset{\wedge}{\varphi}_i$ – соответственно верхняя и нижняя границы значений потенциалов процессов.

Нарушение этого условия неизбежно сопровождается затуханием Φ_i -го процесса. Источник g_i формирования Φ_i -го процесса определяется как разность энергий [3] и характеризует внутреннюю самоорганизацию термодинамического ансамбля процессов:

$$g_i = - \sum_{k, j=0}^n \left[\tau_{jn}^* \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - \tau_{ki}^* \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} \right], \quad i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

Из условия (10) следует, что при отсутствии k -х процессов ($k > i$), источник протекания Φ_i -го процесса положителен (формирование ядра i -го процесса). При ликвидации j -х процессов ($j < i$), источник протекания i -го процесса отрицателен (затухание процесса). В случае $g_i > 0$ при условии существования j -х и k -х процессов, наступает стадия устойчивого протекания Φ_i -го процесса. Одновременно положительность всех источников $g_i > 0$ для термодинамического ансамбля процессов возможна только в изолированной системе. В открытых системах возможен противоположный процесс, связанный с самоликвидацией термодинамических

потенциалов при отрицательных значениях источников энергии $g_i < 0$. Такой процесс носит название самодезорганизации (хаотизации).

Термодинамические модели отражают зависимости между внешними и внутренними параметрами объектов [2]. В качестве внутренних параметров могут использоваться термодинамические силы, а в качестве внешних – энтропия или энергия взаимодействия объекта с внешней средой. В таких моделях интегральными характеристиками индивидуальной ненадежности является величина накопленной энтропии физической структуры объекта. Изменение энтропии $\frac{d_i S}{dt}$ может служить интегральным по объему и механизмам физико-химических процессов базовым термодинамическим критерием потенциальной ненадежности. Эта величина может быть интерпретирована как скорость необратимого изменения интегрального состояния или интегральных параметров объекта для реальных условий его взаимодействия со внешней средой:

$$\frac{d_i S}{dt} \sim \frac{dy}{dt}, \quad (11)$$

где y – интегральные параметры или термодинамические функции состояния объекта.

Интегральный процесс изменения во времени энтропии может быть представлен в виде:

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_k B_k \exp\left(-\frac{t}{\tau_k}\right), \quad (12)$$

где B_k – коэффициенты, определенные для данного объекта и заданных внешних условий; τ_k – время релаксации необратимых процессов.

В неравновесной термодинамике существует так называемый принцип «мозаичности», который состоит в разделении системы на составляющие ее физические или химические элементы и соответствующие элементарные процессы [3]. Для каждого «мозаичного» элемента устанавливается соотношение между скоростью протекания процесса и контролирующими термодинамическими силами. Затем скорости различных элементарных процессов различным образом комбинируют друг с другом.

Простейшим эволюционным уравнением является выражение вида [4]:

$$q = \alpha \cdot \dot{q}, \quad (13)$$

которое используется в химии для описания автокаталитических реакций, когда скорость \dot{q} образования некоторого вещества пропорциональна его концентрации q . В биологии коэффициенту α придают смысл параметра порядка, представляя его как разность между скоростью продуцирования и скоростью распада клеток. Применительно к СТС, к которым относится и современная медико-биологическая аппаратура, в качестве скорости \dot{q} следует понимать скорость изменения конкретного параметра, непосредственно определяющего уровень надежности ее

функціонування. Очевидно, що таких параметрів в кожній із підсистем апаратури для МБІ достатньо багато, і вони оказують непряме впливання не тільки на рівень надійності, але і впливають один на одного.

Синергетическим системам свойственна стохастичність, то єсть їх часову залежність не можна передсказати з абсолютною точністю. Поэтому вводиться член $f(t)$, учитывающий флуктуацию сил.

$$\dot{q} = \alpha \cdot q + f(t). \quad (14)$$

В случае СТС предлагаемый подход требует введения многих переменных – переменных состояния q_1, q_2, \dots, q_n .

Рассмотрим множество Ω_n всех 2^n всех возможных состояний $\omega = (p_1, \dots, p_i, \dots, p_n)$ системы S , характеризующих нормальную работу и выход из строя элементов (подсистем) апаратури для МБІ. Функцию p_i представим как бернуллиеву переменную, которая в соответствии с двумя возможными исходами может принимать только 2 значения: $p_i = 1$, если S_i находится в состоянии A_i^p и $p_i = 0$, если S_i находится в состоянии A_i^o . Разобьем Ω_n на две части: Ω_1 и Ω_0 . Пусть Ω_1 представляет собой множество работоспособных состояний, а Ω_0 – множество отказов. Тогда апаратура для МБІ работоспособна (надійна), если $\omega \in \Omega_1$ и неработоспособна при $\omega \in \Omega_0$.

Пусть состояния ω_i во времени представляют собой последовательность независимых испытаний с вероятностью исходов $p_i = P(p_i = 1)$; $p_i' = 1 - p_i = P(p_i = 0)$; $i = \overline{1, n}$ каждого i -го испытания. Тогда, в общем случае, вероятность надежного или ненадежного P' состояний апаратури для МБІ в момент времени t будет иметь вид [5]:

$$P = P(\omega \in \Omega_1) = \sum_{\omega \in \Omega_1} \prod_{i=1}^n P_i^{P_i} \cdot P_i'^{(1-P_i)}; \quad (15)$$

Для оценки надежности подсистемы апаратури для МБІ m -го порядка, нет необходимости анализировать структуру взаимодействия ее подсистем и определять их изменения в течение всего периода эксплуатации. Достаточно проанализировать поведение соотношения (15) при условии $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{cases} P > 1 - \exp(-\bar{k}_n n) \text{ при } k_p > \bar{p}, \\ P < 1 - \exp[-\underline{k}_n n + 0 \cdot (\ln n)] \text{ при } k_p > \underline{p}, \\ P < \exp(-\bar{k}_n n) \text{ при } k_p < \bar{p} \end{cases} \quad (16)$$

где k_n – коэффициент надежности; k_p – коэффициент работоспособности, $k_p = m/n$; m – число работоспособных подсистем (элементов) n – общее число подсистем; \bar{p} –

средняя вероятность надежного функционирования подсистем (элементов); выражение « $0 \cdot (\ln n)$ » означает величину высшего порядка малости по отношению к другим членам уравнения; \underline{p} – граничная вероятность безотказной работы подсистем,

$\underline{p} = p / \left(1 + p - \hat{p}\right)$; $\bar{k} = k(k_p / \bar{p})$ – функции, определяемые соотношением:

$$k = k_p \ln(k_p / p) + (1 - k_p) \cdot \ln(1 - k_p) \cdot (1 - p) \geq 0. \quad (17)$$

Выражение (16) является синергетической моделью надежности аппаратуры для МБИ, как СТС.

Очевидно, что функционирование аппаратуры для МБИ будет надежным, если значение коэффициента работоспособности k_p превышает некоторую среднюю вероятность работоспособного состояния ее подсистем ($k_p \geq \bar{p}$). Если $k_p < \bar{p}$ и ситуация изменяется независимо от человека, то надежность и эффективность функционирования аппаратуры для МБИ стремится к нулю и наоборот.

Определение приемлемого значения коэффициента работоспособности k_p достаточно сложная задача, решение которой возможно только после детального исследования конкретной аппаратуры для МБИ, взаимодействия её с другими подсистемами субъектами при проведении МБИ: пациент, собственно аппаратура для МБИ, обслуживающий персонал, врачи.

В заключение, сформулируем следующие **выводы**:

1. Аппаратура для МБИ в современном представлении является СТС функционирование которой происходит при непосредственном и активном участии пациента, обслуживающего персонала и врача. Вследствие этого аппаратура для МБИ – это психоинформационная система, обладающая положительными и отрицательными обратными связями, а также стохастичностью и непредсказуемостью.

2. Аппаратура для МБИ рассматривается как нелинейная диссипативная СТС, состоящая из подсистем и элементов, которые формируют их структурные кластеры.

3. Отказы подсистем аппаратуры для МБИ, являясь случайными, в совокупности образуют последовательность зависимых и независимых событий. Это происходит в том случае, когда отказ элемента (подсистемы) вызывает неуправляемое движение материальных потоков: потеря стабильности состояния пациента, неадекватные действия врача и/или обслуживающего персонала и т.п. Это неуправляемое движение, вызванное отказом первого элемента, оказывает воздействие на другие элементы в качестве внешней нагрузки (возмущения). Если ее величина превышает предельно допустимый уровень для следующего элемента, то происходит его отказ. Так проявляется зависимость надежности одного элемента от надежности другого. При этом отказы приобретают лавинообразный характер, вовлекая все новые элементы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Червоный А.А. Надежность сложных систем / Червоный А.А., Лукьященко В.И. – [2-е изд, перераб. и доп.]. – М.: Машиностроение, 1976. – 288 с.
2. Синергетика и фракталы в материаловедении / [В.С. Иванова, А.С. Баланкин и др.]. - М.: Наука, 1994. – 382 с.
3. Надежность и эффективность в технике: Справочник в 10 т.; т. 7. – Качество и надежность в производстве /под ред. И.В. Апполонова. - М.: Машиностроение, 1989.– 280 с.
4. Хакен Г. Синергетика: Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах / Хакен Г. - М.: Мир, 1985. – 419 с.
5. Флейшман Б.С. Основы системологии / Флейшман Б.С. – М.: Радио и связь, 1982. – 368 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2013

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к. физ.-мат. н.*

БЫСТРОВ В.М., к. физ.-мат. н.

ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к. физ.-мат. н.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины

*Национальный университет государственной налоговой службы Украины

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНЫ С
ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ**

Введение. Одной из актуальных проблем механики разрушения материалов и элементов конструкций является исследование устойчивости хрупких тел, содержащих начальную трещину, при одноосном сжатии [1, 2]. В случае тонкостенных элементов конструкций эта проблема может рассматриваться в различных аспектах, определяющих механизмы их разрушения. Один из таких аспектов – это анализ влияния формы потери устойчивости в окрестности начальной трещины на текстуру материала (форму трещины) и дальнейшее развитие трещины, другой – анализ влияния формы и размеров начальной трещины на критическую нагрузку для различных условий нагружения и закрепления элемента конструкции. В работах [3, 4] решены задачи определения критических параметров устойчивости пластины с центральной трещиной при одноосном сжатии вдоль направления размещения трещины. При исследовании потери устойчивости применялась трехмерная линеаризованная теория устойчивости деформируемых тел [5, 6]. Рассмотрены случаи шарнирного опирания и шарнирного закрепления торцов пластины. Первый случай соответствует однородному докритическому состоянию, второй – неоднородному. В качестве расчетной схемы

использована плоская задача теории устойчивости для второго варианта теории малых докритических деформаций, когда начальное состояние определяется на основе решения задачи линейной теории упругости. Численное решение задачи получено с использованием метода сеток на основе концепции базовых схем [7 - 9]. В данной работе с использованием указанной расчетной схемы исследуется влияние размеров трещины на критическую нагрузку и форму потери устойчивости пластины для случая шарнирного закрепления торцов пластины (неоднородное начальное состояние).

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная в плане пластина достаточно протяженная в направлении, перпендикулярном действию нагрузки и содержащая в этом направлении сквозную трещину в виде математического разреза (нулевой толщины) длиной $2t$. Геометрия расчетной области, условия нагружения и закрепления пластины, а также соответствующие граничные условия представлены на рис. 1. С учетом симметрии условий нагружения и закрепления пластины задача рассматривается для области $\bar{\Omega} = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$ (на рисунке заштрихована).

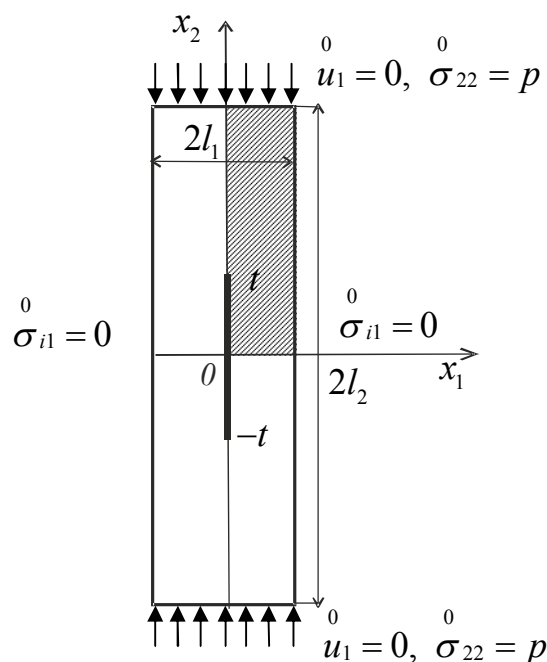


Рисунок 1 – Геометрия расчетной области, условия нагружения и закрепления

Для нахождения критических параметров устойчивости пластины с трещиной при одноосном сжатии применяется статический метод трехмерной линеаризированной теории устойчивости для второго варианта теории малых докритических деформаций [5]. Задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения, в которой минимальное собственное значение определяет критическую загрузку, а соответствующая собственная функция – форму потери устойчивости. Таким образом,

задача определения критических параметров устойчивости включает следующие соотношения:

уравнения в возмущениях:

$$(\sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik} u_{m,k}),_{,i} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega; \quad (1)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} (\sigma_{21} + \lambda \sigma_{2k} u_{1,k}) = 0, \quad u_2 = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1) \wedge (x_2 = 0), \\ (\sigma_{1m} + \lambda \sigma_{1k} u_{m,k}) = 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (0 \leq x_2 \leq t), \\ u_1 = 0, \quad (\sigma_{12} + \lambda \sigma_{1k} u_{2,k}) = 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (t \leq x_2 \leq l_2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$u_1 = 0, \quad (\sigma_{22} + \lambda \sigma_{2k} u_{2,k}) = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1) \wedge (x_2 = l_2),$$

$$(\sigma_{1m} + \lambda \sigma_{1k} u_{m,k}) = 0, \quad (x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2),$$

условие для определения критической нагрузки:

$$p_{кр} = \min |\lambda| p, \quad (3)$$

где λ – минимальное собственное число задачи (1) - (2), p – интенсивность поверхностной нагрузки, приложенной к торцу пластины.

Компоненты докритического состояния (в соотношениях (1) – (3) обозначены индексом “0”) определяются из уравнений линейной теории упругости, которые вместе с граничными условиями и основными соотношениями упругости могут быть представлены следующим образом:

уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (4)$$

граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = 0, \quad u_2 = 0, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1) \wedge (x_2 = 0) \\ \sigma_{i1} = 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (0 \leq x_2 \leq t), \\ u_1 = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad (x_1 = 0) \wedge (t \leq x_2 \leq l_2), \\ u_1 = 0, \quad \sigma_{22} = p, \quad (0 \leq x_1 \leq l_1) \wedge (x_2 = l_2), \\ \sigma_{i1} = 0, \quad (x_1 = l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2), \end{aligned} \quad (5)$$

соотношения между компонентами напряжений, деформаций и перемещений:

$$\sigma_{ii} = A_{ik} \varepsilon_{ik}, \quad \sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i \neq j, \quad (6)$$

$$A_{ii} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad A_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad i \neq j.$$

Обозначения в (1) - (6) являются общепринятыми и индексы изменяются от 1 до 2. В соотношениях (4) – (6) индекс “0” для удобства опущен. Линеаризованные соотношения напряжения – деформации и деформации – перемещения имеют такой же вид, как и соотношения (6).

Для численного решения задачи (1) – (6) применялся метод сеток на основе базовых схем [7 - 9]. Для решения разностных задач использовались эффективные численные методы (прямые и итерационные) в соответствии с методикой, представленной в работе [7]. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, соответствующей задаче (4) – (6), использовался прямой метод Холецкого [10], а для решения обобщенной проблемы собственных значений, соответствующей задаче (1) - (3) – метод итерирования подпространства [11].

Результаты численного решения задачи. Расчеты проведены для следующих геометрических и механических характеристик пластины: $E = 52 \text{ ГПа}$, $\nu = 0.3$, $p = 1 \text{ ГПа}$, $l_2 / l_1 = 10$, $t / l_2 = 0 \div 0.75$.

На рис. 2 показано изменение критической нагрузки $p_{кр}$ при изменении длины t трещины. На рис. 3 приведены формы потери устойчивости в окрестности трещины для различных значений ее длины. Кривые 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют формам потери устойчивости для следующих значений t / l_2 длины трещины: 0.125, 0.25, 0.375, 0.5, 0.75. Из полученных результатов следует, что наличие трещины приводит к существенному уменьшению критической нагрузки по сравнению с однородной пластиной ($t = 0$). Увеличение длины трещины приводит к дальнейшему монотонному уменьшению критической нагрузки.

Выводы. Сравнение с результатами работы [3] для случая шарнирного опирания, когда в пластине реализуется однородное докритическое состояние, показывает, что неоднородность начального состояния, которое имеет место при шарнирном закреплении торцов пластины, приводит к увеличению критической нагрузки для однородных пластин (при отсутствии трещины). Такое увеличение достигает 40%. В то же время, при наличии центральной трещины, неоднородность начального состояния, связанная с граничными условиями на торцах пластины, практически не влияет на критические параметры устойчивости пластины. Это позволяет сделать вывод о том, что основные механизмы разрушения пластины определяются локальной потерей устойчивости в окрестности трещины.

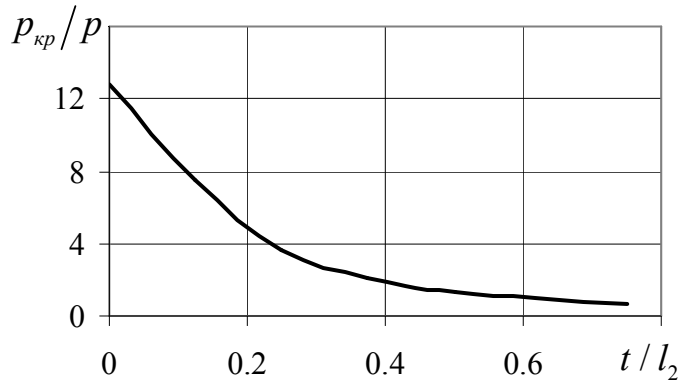


Рисунок 2 – Зависимость критической нагрузки от длины

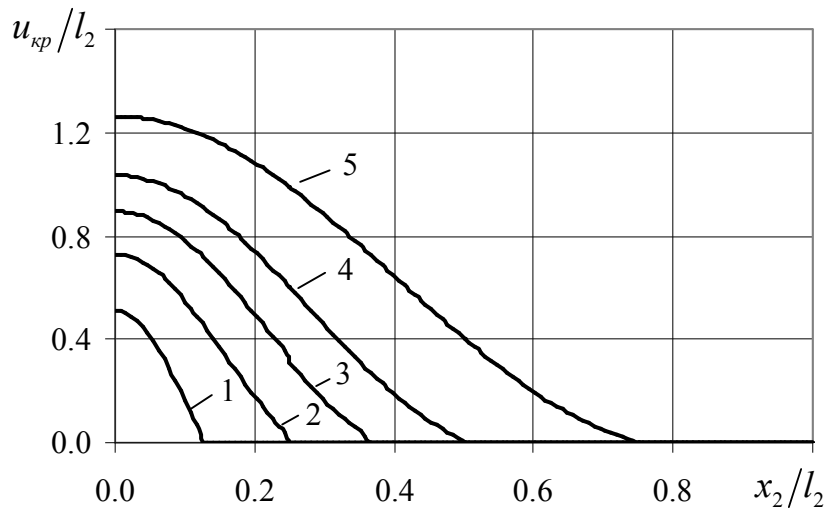


Рисунок 3 – Формы локальной потери устойчивости в окрестности трещины

Увеличение длины трещины приводит к уменьшению критической нагрузки и как следствие – уменьшению прочности пластины при сжатии. Информация о форме локальной потери устойчивости в окрестности трещины позволяет при дальнейшем исследовании провести анализ влияния предварительной потери устойчивости на разрушающую нагрузку [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н., Дышель М.Ш., Назаренко В.М. Разрушение и устойчивость материалов и элементов конструкций с трещинами: подходы и результаты // Успехи механики: В 6-ти т.; Т. 5.– К.: “Литера ЛТД”, 2009.– 32.– №6– С. 661-705.

2. Костандов Ю.А., Макаров П.В., Еремін М.О., Смолин І.Ю., Шиповський І.Е. О разрушении хрупких тел с трещиной при сжатии // Прикл. механика. – 2013. – 49. № 1. – С. 113 – 121.
3. Гузь А.Н., Гладун Е.Ю. О трехмерной устойчивости пластины с трещиной // Прикл. механика. – 2001. – 37. № 10. – С. 53 – 62.
4. Коханенко Е. Ю. Устойчивость пластины с трещиной при неоднородном докритическом состоянии // Доп. НАН України . – 2007. – № 12. – С. 60 – 63.
5. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел – К.: Наук. Вища школа, 1986. – 512с.
6. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, – 1999. – 555p.
7. Григоренко Я.М., Шевченко Ю.В., Василенко А.Т. и др. Численные методы // Механика композитов: В 12-и т. / Под общей ред. А.Н. Гузя. Т.11. – К.,: “А.С.К.”, 2002. – 448 с.
8. Зеленский В.С., Быстров В.М. Трехмерная устойчивость горного массива в окрестности прямоугольной горной выработки, ослабленной геологической трещиной. – Проблемы вычислительной механики и устойчивости конструкций. – Днепрпетр. Ун-тет. Им О. Гончара. – 2011, №7. – с. 153-158.
9. Зеленский В.С., Декрет В. А., Быстров В.М. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении. Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету. Тематичний випуск “Математичні проблеми технічної механіки” / Дніпродзержинськ:ДДТУ. – 2012. с. 49-53.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельнов С.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
11. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2013

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України
Національний університет біоресурсів і природокористування України

**ВИКОРИСТАННЯ АПРОКСИМАЦІЇ РІЧАРДСОНА ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ ДИСКРЕТНО
ПІДКРІПЛЕНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ
НАВАНТАЖЕННЯХ**

Вступ. Особливістю створення сучасних шаруватих конструкцій полягає в проектуванні їх спільної форми разом з матеріалами, що потребує в свою чергу розробку теорії і методів розрахунку, які дозволяють в нерозривному зв'язку оцінювати напружено – деформований стан конструкцій заданої геометричної, з врахуванням неоднорідності, структури. Реалізація моделей неоднорідних оболонкових структур викликає необхідність вдосконалення і розвитку існуючих чисельних методів будівельної механіки, які є ефективними для розрахунку вказаних конструкцій.

Неоднорідна пружна структура з врахуванням дискретних включень представляє собою безпосередньо обшивку (багатошарову оболонку обертання) та набір дискретних повздовжньо – поперечних підкріплюючих ребер. Рівняння осесиметричних коливань багатошарових циліндричних оболонок з врахуванням дискретності підкріплень при динамічних навантаженнях є найбільш простою моделлю коливань вказаних структур.

В даній роботі розглядається постановка задачі нестационарної поведінки багатошарових дискретно підкріплених циліндричних оболонок, побудова чисельного алгоритму із застосуванням апроксимацій типу Річардсона та розв'язування вказаних задач і аналіз отриманих результатів.

Постановка задачі. Багатошарова циліндрична оболонка з врахуванням дискретності представляє собою багатошарову гладку циліндричну оболонку з жорстко-з'єднаними шарами і дискретними підкріплюючими кільцевими елементами. Покладається, що для розрахунку напружено – деформованого стану (НДС) пружної структури використовується варіант геометрично нелінійної теорії стержнів і оболонок типу Тимошенко. Підкріплюючі елементи розглядаються як набір криволінійних стержнів, які жорстко з'єднані з оболонкою. Для розрахунку приймається варіант теорії криволінійних стержнів типу Тимошенка.

За допомогою варіаційного принципу Рейсснера для динамічних процесів [1,2] отримано наступні системи рівнянь (рівняння осесиметричних коливань багатошарової неоднорідної пружної структури отримані як частинний випадок рівнянь [1]):

- 1) рівняння коливань власно багатошарової оболонки в гладкій області між відповідними дискретними ребрами

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + P_1 = I_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{T_{22}}{R} + P_3 = I_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}^*}{\partial x} - T_{13} + m_1 = I_2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2},$$

$$\bar{T}_{13} = T_{13} + T_{11}\Theta_1; \quad M_{11}^* = M_{11} \pm h_{cm}T_{11};$$

2) рівняння коливань j -го кільцевого ребра в точках розривів $x = x_j$ (точки проектування центрів ваги поперечного перерізу на приведену серединну поверхню гладкої багат шарової оболонки)

$$[T_{11}]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad [\bar{T}_{13}]_j - \frac{T_{22j}}{R_j} = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$[M_{11}]_j = \rho_j F_j \left[\pm h_j \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \pm h_{cj} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right) + \frac{I_{kpj}}{F_j} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right],$$

де

$$(T_{11}, T_{22}, T_{13}) = \sum_k \int_z (\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}) dz, \quad (M_{11}) = \sum_k \int_z (z \sigma_{11}^{kz}) dz,$$

$$I_1 = \sum_k \rho_k h_k, \quad I_2 = \sum_k \pm \rho_k h_k h_{ck}, \quad I_3 = \sum_k \rho_k \frac{h_k}{12}.$$

В рівняннях (1) – (2) введено наступні позначення: x, t – просторова та часова координати відповідно, R – радіус приведеної серединної поверхні багат шарової оболонки; ρ_k, ρ_j – щільності матеріалів відповідно k -го шару оболонки та j -го ребра; h_k – товщини відповідних шарів оболонки, h_{ck} – відстань від вихідної серединної поверхні до серединної поверхні k -го шару; h_{cj} – відстань від вихідної серединної поверхні до лінії центру ваги поперечного перерізу j -го ребра; x_j – координата лінії контакту j -го ребра з багат шаровою оболонкою; R_j, F_j, I_{kpj} – геометричні параметри j -го ребра. В позначеннях для величин зусиль і моментів покладається, що $\sigma_{11}^{kz}, \sigma_{22}^{kz}, \sigma_{13}^{kz}$ – напруження по товщині відповідно k -го шару, $k = \overline{1, n}$. Зв'язок між величинами напружень і компонентами деформацій вводиться згідно формул:

$$\sigma_{11}^{kz} = \frac{E_1^k}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} (\varepsilon_{11}^{kz} + \nu_2^k \varepsilon_{22}^{kz}), \quad \sigma_{22}^{kz} = \frac{E_2^k}{1 - \nu_1^k \nu_2^k} (\varepsilon_{22}^{kz} + \nu_1^k \varepsilon_{11}^{kz}), \quad \sigma_{13}^{kz} = G_{13}^{kz} \varepsilon_{13}^{kz}, \quad (3)$$

де компоненти тензора деформацій в системі координат x, z мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{kz} &= \varepsilon_{11}^k + z\theta_{11}^k, \quad \varepsilon_{22}^{kz} = \kappa_2 u_3^k, \quad \varepsilon_{13}^{kz} = \varphi_1^k + \theta_1^k, \\ \varepsilon_{11}^k &= \frac{\partial u_1^k}{\partial x} + \frac{1}{2}[\theta_1^k]^2, \quad \vartheta_{11}^k = \frac{\partial \varphi_1^k}{\partial x}, \quad \theta_1^k = \frac{\partial u_3^k}{\partial x}, \quad k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Рівняння коливань (1) – (4) доповнюються відповідно природними граничними та початковими умовами.

Однією з складностей розв'язку крайових задач теорії підкріплених оболонок з врахуванням дискретного розміщення ребер є наявність розривних коефіцієнтів в рівняннях коливань. Згідно [1,2], шукаємо розв'язок на гладкій частині і “склеюємо” на лініях розриву. В розглянутій задачі лініями розривів є точки проектування центрів ваги поперечного перерізу відповідного j -го ребра на серединну поверхню обшивки.

Чисельний алгоритм. Для побудови різницевої схеми для розв'язку рівнянь (1)–(4) використовуються інтегро – інтерполяційний метод побудови скінчено – різницевих схем [3] для гіперболічних рівнянь. Згідно цього підходу, рівняння (1) представимо в наступному вигляді в області

$$\begin{aligned} &\{x_{l-1/2} \leq x \leq x_{l+1/2}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \\ &\int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \frac{\partial T_{11}}{\partial x} dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[I_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] dx dt; \quad (5) \\ &\int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[\frac{\partial \bar{T}_{13}}{\partial x} - \frac{\partial T_{22}}{R} + P_3(x, t) \right] dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} I_1 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} dx dt; \\ &\int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[\frac{\partial M_{11}^*}{\partial x} - T_{13} \right] dx dt = \int_{t_n}^{t_{n+1/2}} \int_{x_{l-1/2}}^{x_{l+1/2}} \left[I_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + I_3 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \right] dx dt. \end{aligned}$$

Після стандартних перетворень в співвідношеннях (5), отримуємо наступні різницеві апроксимації рівнянь (1)

$$L_1(\bar{U}_l^n) = I_1(u_{1l}^n)_{\bar{t}t} + I_2(\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t}; \quad (6)$$

$$L_2(\bar{U}_l^n) + P_3(x_l, t_n) = I_1(u_{3l}^n)_{\bar{t}t}; \quad L_3(\bar{U}_l^n) = I_2(u_{1l}^n)_{\bar{t}t} + I_3(\varphi_{1l}^n)_{\bar{t}t};$$

де

$$\begin{aligned} L_1(\bar{U}_l^n) &= \frac{T_{11}^n{}_{l+1/2} - T_{11}^n{}_{l-1/2}}{\Delta x}; \quad (7) \\ L_2(\bar{U}_l^n) &= \frac{\bar{T}_{13}^n{}_{l+1/2} - \bar{T}_{13}^n{}_{l-1/2}}{\Delta x} - \frac{T_{22}^n{}_{l+1/2} + T_{22}^n{}_{l-1/2}}{2R}; \\ L_3(\bar{U}_l^n) &= \frac{M_{11}^*{}^n{}_{l+1/2} - M_{11}^*{}^n{}_{l-1/2}}{\Delta x} - \frac{T_{13}^n{}_{l+1/2} + T_{13}^n{}_{l-1/2}}{2}. \end{aligned}$$

В співвідношеннях (6) $\bar{U}_l^n = (u_{1l}^n, u_{3l}^n, \varphi_{1l}^n)$, а позначення дискретних похідних введено згідно [3]. Як видно з представлення (6), величини зусиль і моментів співвідносяться до різницевої точки в напівцілих точках по просторовій координаті і в цілих точках по часовій координаті

$$T_{11}, T_{22}, \bar{T}_{13}, M_{11} \rightarrow (T_{11}^n{}_{l\pm 1/2}, T_{22}^n{}_{l\pm 1/2}, \bar{T}_{13}^n{}_{l\pm 1/2}, M_{11}^n{}_{l\pm 1/2}).$$

Виходячи з цього, рівняння (3) – (4) інтегруються відповідно в областях

$$\{x_{l-1} \leq x \leq x_l, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\} \text{ і } \{x_l \leq x \leq x_{l+1}, t_{n-1/2} \leq t \leq t_{n+1/2}\}.$$

Аналогічним чином проводиться чисельне інтегрування рівнянь коливань (2) для j – го підкріплюючого елемента.

Як вже відмічалось, в ряді випадків, при чисельному розв'язку рівнянь (1) – (4) на основі апроксимацій (6) спостерігається погіршення збіжності чисельних результатів. Для побудови більш ефективних чисельних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв'язків по Річардсону [4]. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\tilde{\bar{U}}_{l(\Delta x)}^n = \frac{4}{3} \bar{U}_{l(\Delta x/2)}^n - \frac{1}{3} \bar{U}_{l(\Delta x)}^n, \quad (8)$$

де $\bar{U}_{l(\Delta x)}^n$ і $\bar{U}_{l(\Delta x/2)}^n$ - чисельні розв'язки рівнянь коливань (6), (7) відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті Δx і $\Delta x/2$.

Неважко показати, що різницеві рівняння (8) апроксимують вихідні рівняння коливань (1) в гладкій області з четвертим порядком точності по координаті X .

Розглядалася задача визначення напружено – деформованого стану п'ятишарової циліндричної оболонки при нестационарному навантаженні. Крайові умови для такого випадку мають вигляд при $x=0, x=L: U_1=U_2=\varphi_3=0$; де L – довжина оболонки. Початкові умови нульові. Нестационарне розподілене навантаження задавалося у вигляді: $P_3(t) = A \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right) [\eta(t) - \eta(t-T)]$, де A – амплітуда навантаження, T – тривалість навантаження.

Задача розглядалася при наступних геометричних і фізико-механічних параметрах:

$$E_1^1 / E_1^{3an} = 100 \div 1000; \nu_1^1 = 0,3; \nu_1^{3an} = 0,4; \rho_1 / \rho_{3an} = 7$$

$$R/h = 20; h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5; L/R = 1.25; A = 10^5 \text{ Н/м}^2;$$

$$\rho_j = \rho; E_j = E_1^1; h_j/h = 3; \alpha_{1j} = 0.25jL, j = \overline{1,3}.$$

Покладалося, що перший, третій і п'ятий шари неоднорідної оболонки характеризуються наступними фізико-механічними параметрами:

$E_1^1 = E_1^3 = E_1^5 = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$; $\rho^1 = \rho^3 = \rho^5 = 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. А другий і четвертий шари характеризуються матеріалом з наступними фізико-механічними параметрами (заповнювач) E_1^{3an} ; ν_1^{3an} ; ρ_{3an} .

В таблицях 1 – 4 приведено частково результати розрахунків згідно двох підходів – стандартного з фіксованим кроком Δx і згідно підходу по Річардсону з кроками Δx і $\Delta x/2$. В таблицях 1 – 2 приведено результати розрахунків в гладкій області оболонки для величин U_3 і σ_{22} в перерізі оболонки $x = 7L/40$ для фіксованого часу $t = 8,5T$ (l - кількість дискретних інтервалів по просторовій координаті).

Як видно з приведених результатів, застосування екстраполяції Річардсона дозволяє досягти достатньої точності в порівнянні з стандартним підходом чисельного розв'язку вихідних рівнянь на більш грубих різницевих сітках по просторовій координаті. Використання даного підходу дозволяє отримати вигоду в кількості обчислювальних операцій порядку в три рази ($\approx 1,5$ рази за рахунок використання просторових сіток і порядку 2 разу за рахунок дискретного часового кроку).

Таблиця 1 Розрахунки для величини U_3

Стандартні розрахунки			Розрахунки по Річардсону		
Δt	l	$U_3 \cdot 10^4$, м	Δt	l	$U_3 \cdot 10^4$, м
Δt_1	40	0,557	Δt_1	40 ÷ 80	0,573
	80	0,569			
	160	0,573			
$0,5\Delta t_1$	320	0,576		80 ÷ 160	0,574

Таблиця 2 Розрахунки для величини σ_{22}

Стандартні розрахунки			Розрахунки по Річардсону		
Δt	l	$\sigma_{22} \cdot 10^8$, Па	Δt	l	$\sigma_{22} \cdot 10^8$, Па
Δt_1	40	0,412	Δt_1	40 ÷ 80	0,420
	80	0,418			
	160	0,419			
$0,5\Delta t_1$	320	0,421		80 ÷ 160	0,420

ЛІТЕРАТУРА

1. Мейш В.Ф., Арнаута Н.В., Заболотный Г.М. Вынужденные колебания многослойных продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при нестационарных нагрузках // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформованого твердого тіла. – 2009. – Вип. 10. – 197 – 203 с.

2. Мейш В.Ф., Кравченко Н.В. До розрахунку наружено – деформованого стану багат шарових оболонок з дискретними неоднорідностями при нестационарних навантаженнях // Вісник Київського університету. Серія: фіз.– мат. науки. - 2002. – Вип. №3. – С. 210 – 216.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1977. - 656 с.
4. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1977. – 454с.

Поступила в редколлегию 11.03.2013

УДК 539.3

ЧЕРВИНКО О.П., к. физ.-мат. н., н. с.
ДОЛЯ Е.В., к. физ.-мат. н., доцент
ЯКИМЕНКО Н.С., к. физ.-мат. н.

Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины
Киевский Национальный университет строительства и архитектуры
Кировоградский национальный технический университет

УСТАЛОСТНОЕ ТЕРМИЧЕСКОЕ РАЗРУШЕНИЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ СЛОИСТОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПРИЗМЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Введение. Термическое усталостное разрушение определяется как потеря несущей способности вязкопластического материала вследствие размягчения или виброразогрева [1]. Предельное состояние обычно связывают с достижением температуры некоторого критического значения $\theta = \theta_f$, например, температуры вязкотекучего перехода $\theta_f = \theta_{\dot{\alpha}\dot{\alpha}}$. Обобщение результатов исследования виброразогрева однородных вязкоупругих тел дается в монографиях [2, 3].

Связанные задачи термовязкоупругости для полимеров, упрочненных волокнами, рассмотрены в работе [4].

Настоящая работа посвящена тепловому разрушению призмы прямоугольного сечения, которая состоит из слоев меди и полиэтилена. Призма нагружается прямоугольным вибрирующим штампом в кинематическом или силовом режиме сжатия с частотой 20 кГц.

Постановка задачи. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxuz$ упрощенная постановка связанной задачи термовязкоупругости для случая гармонической нагрузки [2] включает в себя кинематические уравнения Коши, уравнения колебаний и теплопроводности.

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{b}_i + \rho\omega^2\tilde{u}_i = 0, \quad i, j = x, y, z \quad (1)$$

$$c_V \dot{\theta} = (k \theta_{,i})_{,i} + \beta \bar{D}', \quad (2)$$

где β – доля рассеянной за период колебаний механической мощности, переходящей в тепло; k, c_V – коэффициенты теплопроводности и объемной теплоемкости, ρ – плотность, ω – частота колебаний.

Определяющие уравнения для девиаторных и шаровых составляющих напряжений, а также скорости внутренней диссипации \bar{D}' имеют вид

$$\tilde{s}_{ij} = 2\tilde{G}(\omega, \theta)\tilde{e}_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{kk} = 3\tilde{K}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \bar{D}' = \frac{\omega}{2}(\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}) \quad (3)$$

где $\tilde{s}_{kl} = s'_{kl} + is''_{kl}$, $\tilde{e}_{kl} = e'_{kl} + ie''_{kl}$ – комплексные амплитуды девиаторов тензоров напряжения и деформации; $\tilde{\sigma}_{kk} = \sigma'_{kk} + i\sigma''_{kk}$, $\tilde{\varepsilon}_{kk} = \varepsilon'_{kk} + i\varepsilon''_{kk}$ – комплексные амплитуды шаровых составляющих; $\tilde{G}(\omega, \theta) = G'(\omega, \theta) + iG''(\omega, \theta)$ – комплексный модуль сдвига; $\tilde{K}(\omega, \theta) = K'(\omega, \theta) + iK''(\omega, \theta)$ – комплексный модуль объемного сжатия.

Тепловые граничные и начальные условия

$$\theta_{,i}n_i = \gamma(\theta - \theta_c) \quad \text{на } S, \quad (4)$$

$$\theta = \theta_0(x_j) \quad \text{при } t = 0, \quad (5)$$

где γ – коэффициент теплоотдачи; θ_0, θ_c – начальная температура и температура окружающей среды; $\theta_{,i} = \partial\theta / \partial x_i$, $\dot{\theta} = \partial\theta / \partial t$; S – поверхность тела.

Механические граничные условия формулируются ниже.

Рассматривается плоское деформированное состояние и виброразогрев призмы прямоугольного сечения $|x| \leq \tilde{n}, 0 \leq y \leq b$, состоящей из вязкоупругих (полимерных) и упругих (металлических) слоев. Изучение влияния армирующих слоев на температурное поле виброразогрева производится путем сравнения решений трех задач. В задаче 1 рассматривается однородная призма, состоящая из полимера (рис. 1а). В задаче 2 призма содержит два слоя меди толщиной h_c , расположенные на верхней и нижней поверхностях $y = 0$ и $y = b$ (рис. 1б). В задаче 3, кроме наружных слоев (задача 2), имеется третий слой меди, расположенный в срединной поверхности призмы $y = b/2$ (рис. 1в).

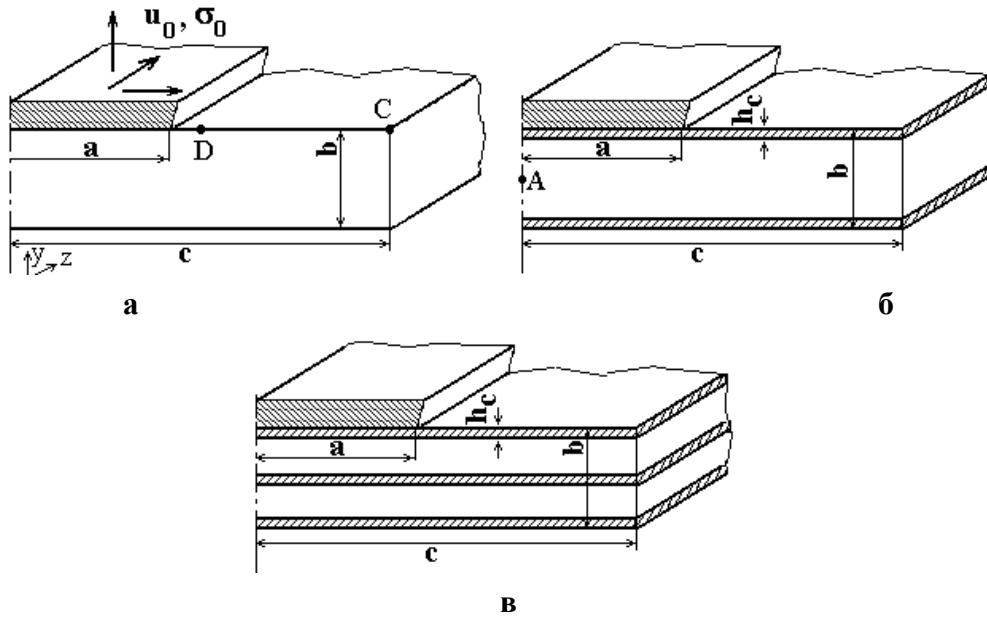


Рисунок 1

Призма розполагается на гладком основанні. На часті верхньої грани $y = b$, $|x| \leq a$ діє штамп з прямолинейним торцем, осцилюючий з частотою ω . Во всіх трьох задачах суммарна товщина слоя однакова і рівна b . Геометрія призми, умови навантаження і теплообміну характеризуються параметрами

$$\tilde{n} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ м}, \quad b = 2.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad h_c = 10^{-4} \text{ м}, \quad a = 9.55 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\theta_0 = \theta_{\tilde{n}} = 20^0 \text{ N},$$

$$f = \omega / 2\pi = 20 \text{ кГц}, \quad \gamma = 30 \text{ Å} \cdot \text{i}^2 \cdot \text{C}, \quad \beta = 0,80.$$

Зависимости физико-механических характеристик материала от температуры приведены в работе [5].

На поверхностях призмы, исключая поверхность нагружения $|x| \leq a$, $y = b$ принимаются следующие механические и тепловые условия:

$$\tilde{u}_y = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad \theta = \theta_c \quad |x| \leq \tilde{n}, \quad \acute{o} = 0,$$

$$\tilde{\sigma}_{yy} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,y} = \gamma(\theta - \theta_{\tilde{n}}) \quad |x| > a, \quad \acute{o} = b$$

$$\tilde{\sigma}_{x\acute{o}} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0, \quad -k\theta_{,x} = \gamma(\theta - \theta_{\tilde{n}}) \quad |x| = \tilde{n}, \quad 0 < y < b.$$

Условие кинематического сжатия призмы гладким штампом имеет вид

$$\tilde{u}_y = u_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad (6)$$

Задача решалась численно на основе неявной шаговой схемы по времени для интегрирования уравнения (2). Задача линеаризировалась путем вычисления физико-механических характеристик материалов для температуры на предыдущем шаге и решалась методом конечных элементов [6].

Результаты расчета. При кинематическом нагружении принималось $u_0 = 22\dot{\epsilon} \dot{\epsilon}$.

На рис. 2 сплошной и пунктирной линиями показаны временные зависимости максимальной по объему θ_m и максимальной в среднем сечении $x = 0$ θ_1 температуры для задачи 2. Конфигурация тела соответствовала рис. 1б.

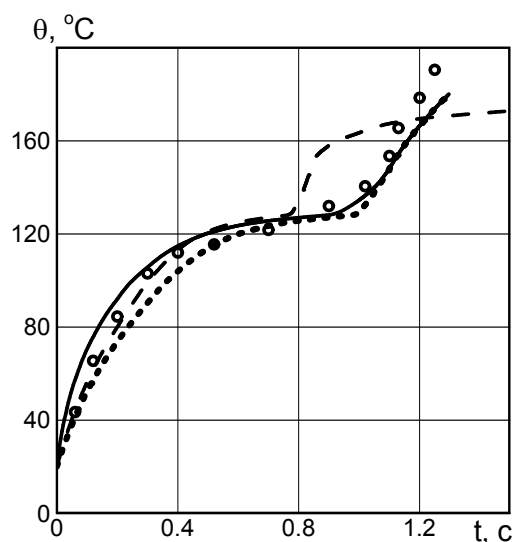


Рисунок 2

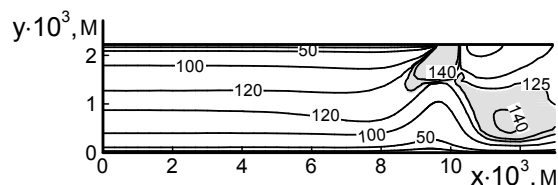
Штриховая линия отвечает случаю плоского напряженного состояния. Кружками показана температурная зависимость, полученная в результате эксперимента [5]. Отметим хорошее согласование расчетных и экспериментальных температурных кривых для задачи 2, которое свидетельствует об адекватности используемого подхода.

В качестве предельного состояния термического разрушения принимается достижение температурой значения $\theta_{\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}} = 125^\circ C$. Распределения температуры для задач 1, 2 и 3 в момент времени $t \approx 0,8c$ показаны на рис. 3 а, б, в. Область с температурой, большей $\theta_{\dot{\epsilon}\dot{\epsilon}} = 125^\circ C$, затенена. Сравнительный анализ показывает, что в задаче 1 тепловое разрушение обусловлено концентрацией контактных напряжений вблизи кромок штампа. В армированной призме разрушение происходит в центральной части полимерных слоев.

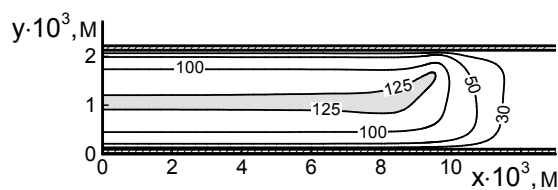
Для силового сжатия призмы гладким штампом принималось условие

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \tilde{\sigma}_{yy}(x,b) dx = \frac{1}{2a} N_0 = \sigma_0, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = 0; \quad \tilde{u}_y = \tilde{u}_{0y}, \quad (7)$$

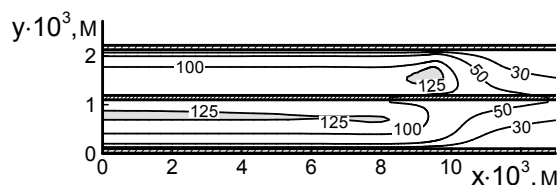
где N_0 или $\bar{\sigma}_0$ – заданные параметры силового нагружения, \tilde{u}_{0y} – перемещение, отвечающее заданной нагрузке N_0 . Принималось $\sigma_0 = 15\dot{\epsilon} \dot{\epsilon}$.



а



б



в

Рисунок 3

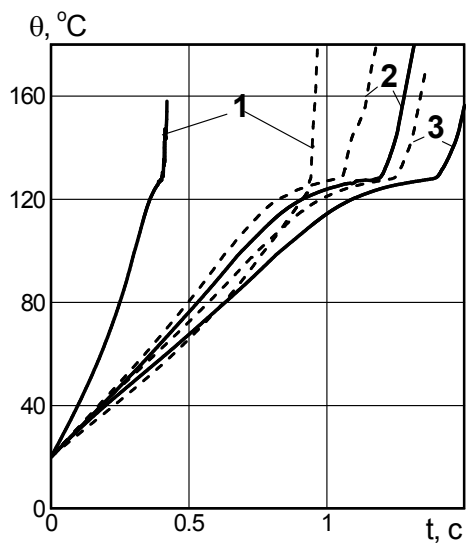


Рисунок 4

На рис. 4 показаны временные зависимости максимальной температуры для трех задач. В динамической постановке (силовая задача) расчет дает более быстрый разогрев в сравнение с квазистатической постановкой (штриховые линии). Влияние динамичности особенно заметно в однородной призме в результате близости ω к резонансной частоте.

При силовом нагружении наиболее интересным является эффект тепловой неустойчивости [2, 3]. Этот эффект обусловлен наличием интервалов температур, в которых сдвиговая и объемная податливости потерь полимера возрастают с температурой, а параметр нагружения σ_0 превосходит некоторое критическое значение.

полимера возрастают с температурой, а параметр нагружения σ_0 превосходит некоторое критическое значение.

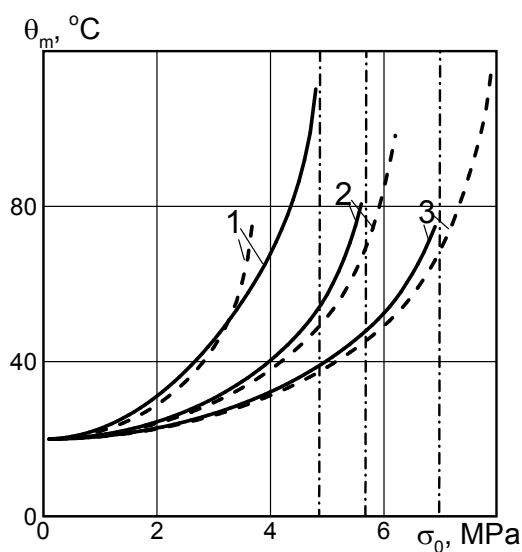


Рисунок 5

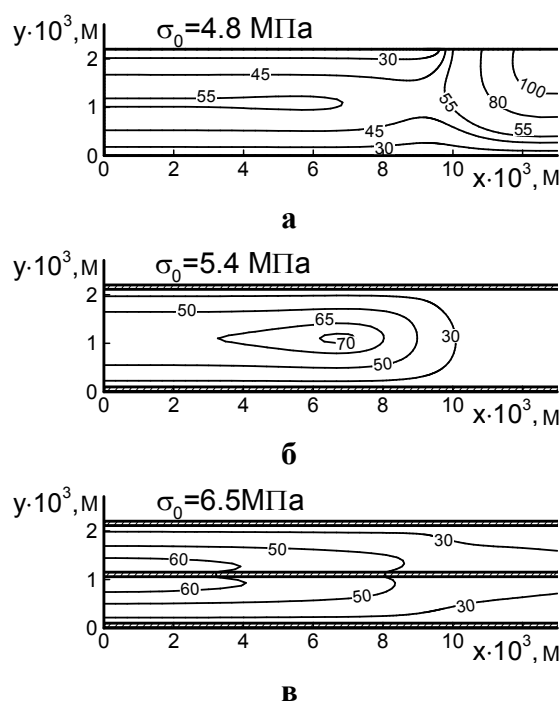


Рисунок 6

Результаты решения стационарной задачи теплопроводности показаны на рис. 5. Здесь сплошные линии отвечают θ_m - максимальной по объему стационарной температуре, цифрами указаны номера задач. Штриховые линии соответствуют квазистатической постановке задачи ($\rho = 0$). Вертикальные штрих-пунктирные линии отвечают критическим значениям σ_0^* таким, что при $\sigma_0 > \sigma_0^*$ не существует

стационарных тепловых состояний, т.е. имеет место лавинообразный (в пределах рассматриваемого температурного интервала) рост температуры.

Анализ данных, представленных на рис. 5, показывает, что, чем тоньше полимерные слои, тем выше критические значения амплитуды нагружения. При этом эффекты динамичности весьма заметны. Их роль возрастает, когда частота нагружения ω несколько меньше частоты резонанса.

Изолинии стационарных температурных полей, близких к критическим, для задач 1, 2 и 3 приведены на рис. 6 а, б, в. Для задачи 1 характерно наличие локализации разогрева вне области нагружения. Сопоставление с решением соответствующей квазистатической задачи показывает, что этот эффект является следствием динамичности. В задаче 2 при отсутствии внутреннего слоя максимальный разогрев происходит в области $x/a \approx 0,5-0,7$; $y/b \approx 0,5$. При наличии внутреннего армирующего слоя эта область «рассасывается» за счет высокой теплопроводности меди и максимальный разогрев имеет место в центральных частях полимерных слоев $x \approx 0$ (рис.5 в). Кривые на рис.5 в для пятислойной призмы иллюстрируют механизм теплоотвода из области нагружения $|x| > a$ путем теплопроводности по внутреннему металлическому слою.

В случае $\rho = 0$ для задачи 1 характерна локализация виброразогрева в области $x/a \approx 0,5-0,7$; $y/b \approx 0,5$. Учет сил инерции существенно усложняет картину виброразогрева вообще, и тепловой неустойчивости в частности. Колебаниям в окрестности резонанса присущи более высокие уровни амплитуд напряжений, деформаций и, следовательно, температуры виброразогрева. Распределения механических полевых величин определяются формой колебаний, отличающейся от квазистатического распределения. В частности, возможны локализованные очаги разогрева вдали от области нагружения, в области пучности напряжений.

Выводы.

1. Для полимерной призмы установлена возможность поверхностного разрушения. В металлополимерной призме разрушение происходит во внутренних полимерных слоях.
2. Армирование стабилизирует процесс термической неустойчивости и повышает критическое значение параметра нагружения.
3. При высокочастотном нагружении необходимо учитывать эффекты динамичности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нарисава И. Прочность полимерных материалов. – М.: Химия, 1987. – 400с.
2. Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. Гуменюк Б.П. Термо-механическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении. К.: Наук. думка, 1985. – 288 с.

3. Термомеханика эластомерных элементов конструкций при циклическом нагружении / Потураев В.Н., Дырда В.И., Карнаухов В.Г., Сенченков И.К. и др., под ред. Потураева В.Н. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
4. Сенченков И.К., Кропивный В.Н., Якименко С.Н., Якименко Н.Н. Вибрационный разогрев полимерного однонаправленного волокнистого композита при гармоническом сжатии поперек волокон / Матер. XII конф. ученых Украины, России и Белоруссии «Прикладные задачи математики и механики», Севастополь, 2003. – С.2428.
5. Теплофизические и реологические характеристики полимеров. Справочник./Под ред. Ю.С.Липатова.- Киев: Наук. думка, 1977. – 244 с.
6. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 1. Термоупругость / Мотовиловец И.А., Козлов В.И. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 264 с.

Поступила в редколлегию 29.02.2013

УДК 539.3

СЕНЧЕНКОВ И.К.¹
ЧЕРВИНКО О.П.¹
РЯБЦЕВ И.А.²

¹Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины

²Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НДС И МИКРОСТРУКТУРНОГО СОСТОЯНИЯ ВАЛКА ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ В ПРОЦЕССЕ МНОГОСЛОЙНОЙ НАПЛАВКИ И ЭКСПЛУАТАЦИИ

Введение. При оценке долговечности наплавленных валков горячей прокатки, роликов машин непрерывного литья заготовок, штампов горячего деформирования металла определяющую роль играют два фактора: 1) остаточные наплавочные напряжения и деформации; 2) характеристики напряженно-деформированного состояния при эксплуатационном циклическом термомеханическом нагружении. Исследованию остаточного НДС наплавленных деталей посвящены работы [1, 2, 3]. Обобщение результатов расчета эксплуатационных напряжений проведено в монографии [4], причем в большинстве работ не учитывалось влияние остаточных напряжений на долговечность деталей.

В настоящей работе в рамках сквозной расчетной схемы рассматривается история жизни валка горячей прокатки, включающая технологическую стадию многослойной наплавки рабочей поверхности и последующую эксплуатационную

стадию, которая моделируется вращающейся термомеханической нагрузкой.

Объект исследования, схема процесса наплавки и эксплуатации. Расчеты проводились для валка горячей прокатки НКМЗ из стали 50ХФА, наплавляемого подслоем низкоуглеродистой стали 08кп и наружным слоем мартенситной стали 25Х5ФМС. Конечно-элементная разбивка бочки валка показана на рис. 1. Диаметр бочки валка 1445 мм.

После наплавления валок подвергался эксплуатационному нагружению в условиях термомеханического цикла. Предполагается, что валок подпирается жестким валком и не испытывает деформаций изгиба (рис. 2).

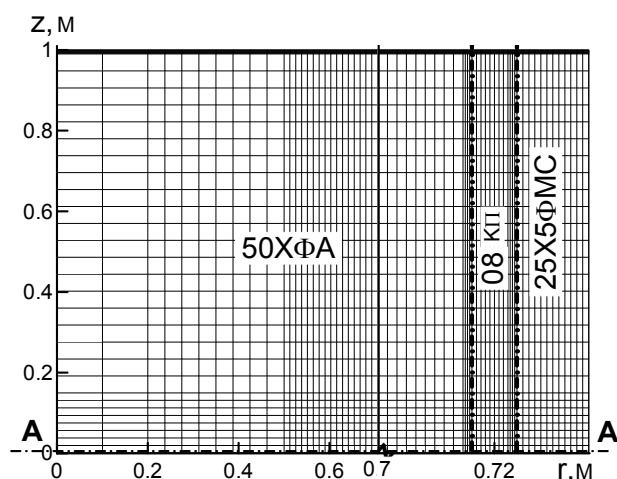


Рисунок 1

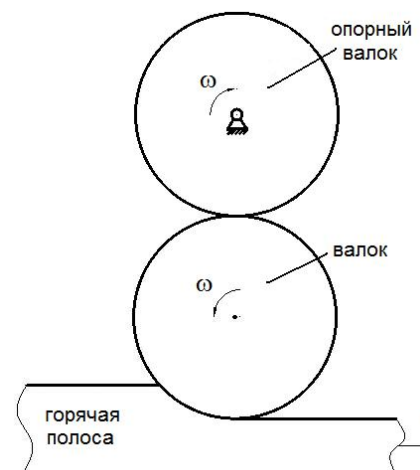


Рисунок 2

Методика расчета. Задача о наплавлении и последующем циклическом нагружении валка является трехмерной (3D-задача). На настоящем этапе такая постановка не может быть эффективной для практических расчетов.

Учитывая двухстадийный характер процесса – наплавка и эксплуатация, а также осевую протяженность геометрии валка, предлагается следующий подход к решению задачи.

1. Стадия наплавки моделируется в рамках осесимметричной постановки задачи.
2. Стадия эксплуатации, характеризующая высоко локализованными контактными температурно-механическими нагрузками, описывается в рамках задачи о плоской деформации для осевого сечения цилиндра.

При этом постановка задачи для стадии 2 учитывает остаточные деформации, сформированные на стадии наплавки. Такая постановка отличается от классической задачи о плоской деформации, в которой остаточные деформации отсутствуют.

Постановка задачи о наплавке. Задача решается в цилиндрической системе координат $orz\varphi$ и включает уравнения равновесия (1) и теплопроводности (2)

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{rz} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

$$c_v \dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\lambda r \frac{\partial \theta}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \frac{\partial \theta}{\partial z}) + Q, \quad (2)$$

где c_v и λ - коэффициенты объемной теплоемкости и теплопроводности;

кинематические уравнения, уравнения модели течения Боднера-Партома [5], а также начальные (3) и граничные условия (4), (5) на поверхностях бочки

$$\theta = \theta_0, \quad t = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0, \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial r} = -q + \alpha (\theta - \theta_c) + c c_0 (T^4 - T_c^4), \quad r = R, R+h, \quad 0 < z < L, \quad t \neq t_{1,2}^*; \quad (4)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = 0, \quad \pm k \frac{\partial \theta}{\partial r} = -q + \alpha (\theta - \theta_c) + c \tilde{n}_0 (T^4 - T_c^4), \quad z = 0, \quad r = R, R+\tilde{h}, \quad t > 0; \quad (5)$$

где $\tilde{h} = h_1, h_1 + h_2$; $h_{1,2}$ - толщины первого и второго наплавляемого слоев; $t_{1,2}^*$ - время наложения наплавляемых слоев; $T = \theta + 273$; \tilde{n}_0 - постоянная Больцмана; \tilde{n} - коэффициент черноты, α - коэффициент теплоотдачи; θ_c - температура окружающей среды, q - поток, передаваемый дугой.

Для удовлетворения условий отсутствия напряжений в наращиваемых слоях закон Гука для девиаторных и шаровых составляющих тензоров напряжений и деформации записывается в виде [6]

$$s_{ij} = 2G (e_{ij} - e_{ij}^p - e_{ij}^*), \quad \sigma_{kk} = 3K_v (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{kk}^{ph} - \varepsilon_{kk}^*) \quad (6)$$

где G и K - сдвиговой и объемный модули; ε_{ij}^* - компоненты тензора собственных деформаций. Эти компоненты рассчитываются в процессе решения задачи из условия отсутствия напряжений в поверхностных слоях в момент их наращивания.

Постановка задачи о термомеханическом эксплуатационном нагружении валька. Задача формулируется в рамках обобщенной плоской деформации для сечения AA (рис. 1) с учетом остаточных деформаций. Условия нагружения отвечают схеме работы валька, показанной на рис. 3.

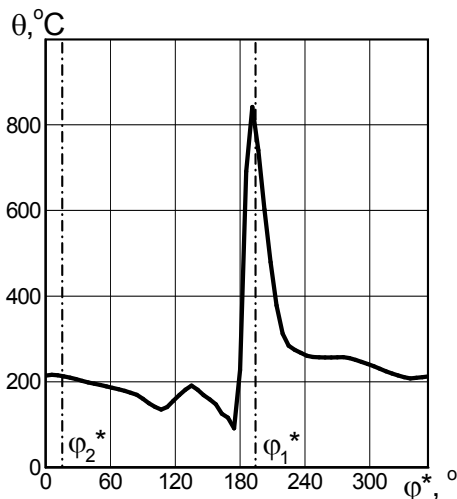


Рисунок 3

В полярной системе координат $r\varphi$ граничные условия для напряжений и температуры принимаются в виде

$$\sigma_{rr} = \sigma(\varphi^*), \quad \sigma_{rz}(\varphi^*) = 0, \quad \theta = \theta(\varphi^*), \quad 0 < \varphi^* < 2\pi \quad (7)$$

Здесь $\varphi^* = \varphi - \omega t$; распределение $\theta(\varphi^*)$ приведено на рис. 3. Функция $\sigma(\varphi^*)$ отвечает распределению нормального напряжения в задаче Герца о гладком штампе и задается в виде

$$\sigma(\varphi^*) = \sigma_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\varphi^* - \varphi_{1,2}^*}{\varphi_0^*} \right)^2} \quad \text{при } |\varphi^* - \varphi_{1,2}^*| < \varphi_0^*,$$

$$\sigma(\varphi^*) = 0 \quad \text{при } |\varphi^* - \varphi_{1,2}^*| > \varphi_0^*, \quad (8)$$

где $2\varphi_0^*$ - область действия нагрузки (контакта). Значения φ_1^* и φ_2^* отвечают центральным точкам областей контакта вала с горячей полосой и опорным валком (рис. 3).

Расчет остаточных напряжений в наплавленном валке. Упрощенная схема мгновенной наплавки по слоям реализовывалась для следующего режима. Поверхность бочки вала в течение 2,8 с разогревалась до 1800°C , после чего на нее наплавлялся первый слой наплавки (подслой) из стали 08кп толщиной $h_1 = 5 \text{ мм}$ температуры 1800°C . После остывания детали до 300°C ее поверхность снова за 2,6 с разогревалась до 1800°C , после чего накладывался второй слой наплавки толщиной $h_2 = 8 \text{ мм}$ из стали 23Х2НВФА. Затем деталь остывала до комнатной температуры 20°C .

Радиальные распределения в валке концентраций фаз распада аустенита при охлаждении и остаточных напряжений и интенсивности пластических деформаций e_i^p показаны на рис. 4 а, б.

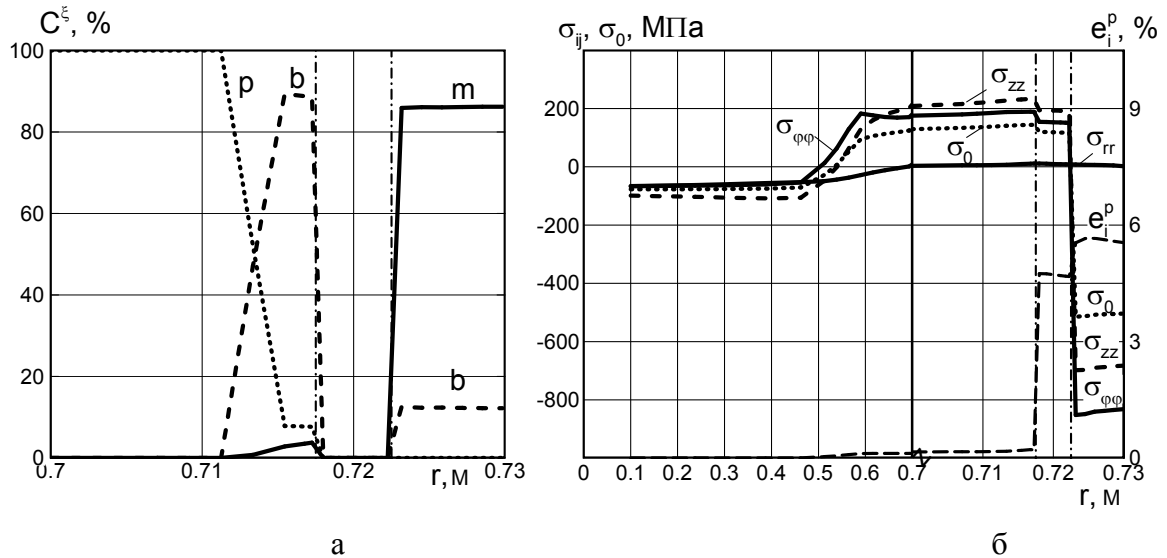


Рисунок 4

Здесь приняты следующие обозначения: C^{ξ} - объемные доли p - перлита, b - бейнита, m - мартенсита; s_i - интенсивность девиатора тензора напряжений,

$s_i = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$, $e_i^p = \left(\frac{1}{2} e_{ij}^p e_{ij}^p \right)^{1/2}$. Штрих-пунктирными линиями показаны границы наплавленных слоев и основного материала. Концентрации фаз распада аустенита

рассчитывались на основе термокинетических диаграмм и закона Коистинена-Марбургера.

Из рис. 4 а видно, что наращенный наружный слой имеет преимущественно мартенситную структуру; в основном металле в зоне термического влияния – бейнит-перлитная структура. Мартенсит за счет большего удельного объема формирует в наружном слое сжимающие напряжения σ_{zz} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ (рис. 4 б). В основном металле их уравнивают растягивающие значения компонент.

Эксплуатационное нагружение. Выводы. На рис. 5 показаны циклы главных напряжений σ_1 , σ_3 и температуры θ в наружной точке наплавленного цилиндра при $\omega = 0,69\tilde{n}^{-1}$ и $p_0 = 300\tilde{l} \tilde{I} \tilde{a}$. Кинетика деформационного процесса в наружной точке показана на рис. 6.

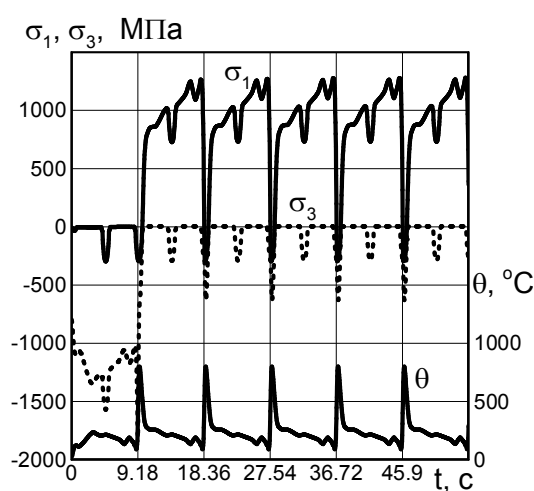


Рисунок 5

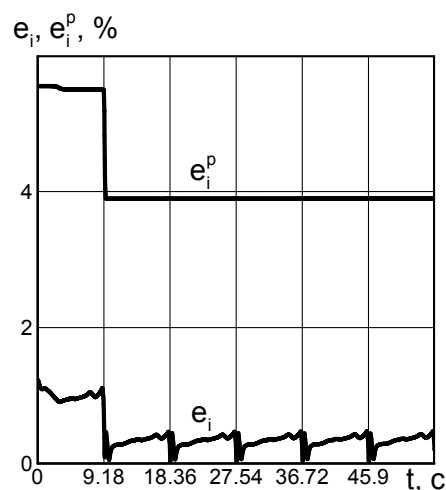


Рисунок 6

Здесь приведены кривые для интенсивности деформаций $e_i = (1/2e_{ij}e_{ij})^{1/2}$ и интенсивности пластических деформаций e_i^p . Для поверхностных точек имеем: $\sigma_1 = \sigma_{\varphi\varphi}$, $\sigma_3 = \sigma_{rr}$. После выхода точки из зоны нагрева от контакта с горячей полосой, вследствие резкого охлаждения, в поверхностном слое формируются значительные растягивающие напряжения. В результате в этом слое неупругая остаточная деформация снижается. Начальная стадия термомеханического нагружения оказывает существенное влияние на всю последующую историю эксплуатации вала. На этой стадии формируется его пластическое состояние.

Для оценки усталостной долговечности вводятся амплитудные (индекс a), средние (индекс m) и усредненные (индекс s) характеристики полевых величин:

$$\sigma_{1a} = (\max_T \sigma_1(t) - \min_T \sigma_1(t)) / 2, \quad \sigma_{1m} = (\max_T \sigma_1(t) + \min_T \sigma_1(t)) / 2; \quad \sigma_{1s} = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_1 dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

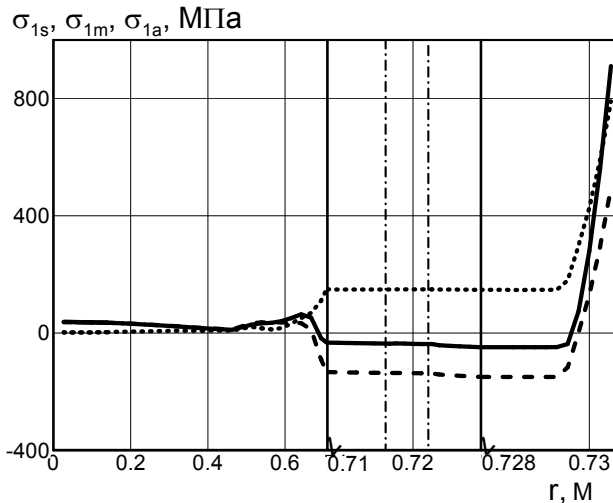


Рисунок 7

Очевидно, что средние значения механических величин определяются наложением остаточного напряженного состояния и средними значениями величин, обусловленными циклической термической и механической нагрузками.

Для оценки многоциклового усталости на рис. 7 приведены радиальные распределения характеристик σ_{1a} (пунктирная линия), σ_{1m} (штриховая линия) и σ_{1s}

(сплошная линия). В поверхностном слое реализуется экстремальный режим нагружения вследствие быстрого охлаждения после выхода из зоны контакта с горячей полосой. В результате численного анализа установлено, что циклические неупругие деформации возникают при $p_0 = p_0^* \approx 1000 \dot{l} \dot{I} \dot{a}$. Следовательно, при $p_0 > p_0^*$ происходит смена механизма многоциклового усталости на малоцикловую. При этом значение p_0^* в значительной мере определяется скоростью вращения вала и режимом его охлаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Senchenkov I.K., Zhuk Y.A., Chervinko O.P., Turyk E. Modeling of residual stresses developed in steel cylinders subjected to surface-layer deposition by welding // J. Eng. Math. – 2008. – 61. – P. 271-284.
2. Senchenkov I. K., Chervinko O. P., Ryabtsev I. A., Kondratiev I. A. A method for calculating the heat resistance of deposited metal // Welding Intern. — 2012. — Vol. 25. — №12. — P. 952—956.
3. Radaj D. Welding residual stresses and distorsion. Calculation and measurment. – Dusseldorf. DVs Verlag GmbH, 2003. – 396 p
4. Домбровский Ф.С., Лещинский Л.К. Работоспособность наплавленный роликов машин непрерывного литья заготовок. – К.: Изд. ИЭС им. Е.О. Патона НАН Украины, 1995. – 225с.
5. Сенченков И.К., Табиева Г.А. Определение параметров модели Боднера-Партома термовязкопластического деформирования материалов // Прикл. механика. – 1996. – 32, № 2. – С. 64–72.
6. Сенченков И.К. Термомеханическая модель растущих цилиндрических тел из физически нелинейных материалов // Прикл. механика. – 2005. – 41, № 9. – С.118 – 126.

Поступила в редколлегию 11.03.2013

УДК 539.3

ЛЕВЧЕНКО В. В. , к. физ.-мат.н.
МАКИЕВСКИЙ А.И.

Институт механики НАН Украины

ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКИХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН С РАДИАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ

Введение. Тонкие пьезоэлектрические пластинчатые преобразователи с толщиной поляризацией используются в устройствах различного функционального назначения [1-4]. В дисковых и кольцевых вибраторах со сплошными электродами на лицевых плоскостях возбуждаются осесимметрические колебания [4]. Если же электроды кольцевой пластины имеют только диаметральные разрезы и электроупругие сектора возбуждаются противофазно, то в ней возникают неосесимметричные колебания по окружной координате. Формы этих колебаний по этой координате априори определяются числом диаметральных разрезов электродов. Систематическое теоретическое исследование частотного спектра, а также форм колебаний по радиальной координате отсутствуют [2, 4]. Этим вопросам и посвящена статья.

Основные соотношения и постановка задачи. Тонкую пьезокерамическую пластину с толщиной поляризацией отнесем к прямоугольным декартовым координатам x, y, z , причем координатная плоскость $z = 0$ совпадает со срединной плоскостью пластины.

Если тонкая пьезокерамическая пластина с электродированными лицевыми плоскостями $z = \pm h/2$ (h толщина пластины) находится в условиях плоского напряженного состояния, то, приняв гипотезы $u_x = u_x(x, y, t)$, $u_y = u_y(x, y, t)$, $\sigma_{zz} = \sigma_{yz} = \sigma_{xz} = 0$, $E_z = E_z(x, y, t)$, из общих материальных соотношений [3] получим формулы

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \nu_E \frac{\partial u_y}{\partial y} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right),$$

$$\sigma_{yy} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} \left(\nu_E \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2(1 + \nu_E) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad (1)$$

где аналог коэффициенту Пуассона $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$.

Из трех уравнений механических колебаний при пренебрежении толщинными ускорениями останутся только два

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) после несложных преобразований получим уравнение колебаний в перемещениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \nu_E}{2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} \right) - (1 + \nu_E) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{1 - \nu_E}{2} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} \right) - (1 + \nu_E) d_{31} \frac{\partial E_z}{\partial y} &= (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение систем (3) представим [3] в виде

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (4)$$

Если функции $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$ определить из волновых уравнений

$$\Delta \Phi - (1 + \nu_E) d_{31} E_z = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad \Delta \Psi = 2(1 + \nu_E) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad (5)$$

то уравнения (3) будут удовлетворены.

Для пластины со сплошными электродами на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ электрический потенциал (при пренебрежении влиянием краев пластины) $\varphi = h^{-1} z V_0(t)$. Такому потенциалу отвечают по [3] компоненты напряженности электрического поля $E_x = E_y = 0$, $E_z = h^{-1} V_0(t)$, а значит в уравнении (5), учитывая (4), нужно пренебречь величиной $(1 + \nu_E) d_{31} E_z$

В полярных координатах $r \cos \theta = x$, $r \sin \theta = y$ выражения (1.4) для перемещений будут такими

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (6)$$

Материальные зависимости (1) для механических напряжений с учетом формул для деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad 2\varepsilon_{r\theta} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}, \quad (7)$$

запишутся в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} (\varepsilon_{rr} + \nu_E \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{d_{31}}{(1 - \nu_E) s_{11}^E} E_z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} (\nu_E \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) - \frac{d_{31}}{(1 - \nu_E) s_{11}^E} E_z, \quad \sigma_{r\theta} = \frac{1}{2(1 + \nu_E) s_{11}^E} \gamma_{r\theta}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из (6)-(8) получим следующие выражения для механических напряжений через потенциалы Φ, Ψ в полярных координатах

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) + \nu_E \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) - (1 + \nu_E) d_{13} E_z \right], \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left[\nu_E \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right) - (1 + \nu_E) d_{13} E_z \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E)} (\Delta\Phi - d_{13}E_z) - i\omega^2\rho(1 - \nu_E^2)S_{11}^E\Phi - d_{13}E_z, \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{2(1 + \nu_E)S_{11}^E} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial\theta} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Общее решение задачи. Рассмотрим круглую пьезокерамическую пластину со свободную от механических напряжений на границах $r = r_0$ и $r = r_1$ (r_0 и r_1 - внутренний и внешний радиусы кольца)

$$\sigma_{rr}(r_j, \theta, t) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r_j, \theta, t) = 0, \quad j = 0, 1, \quad (10)$$

Электродное покрытие на лицевых плоскостях $z = \pm h/2$ разбито на $2N$ секторов с противофазными соседними подключениями, так что $E_{za} = (-1)^{n-1} V_0/h$, $n = 1, \dots, 2N$.

Решение уравнений (5) в полярных координатах r, θ , в первом из которых слагаемое $(1 + \nu)d_{31}E_z$ нужно брать равным нулю [3], при гармонических колебаниях $f(r, \theta, t) = \text{Re} f^a(r, \theta) \exp i\omega t$ с циклической частотой ω выбираем в виде рядов

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, t) &= R^2 \text{Re} \sum_m \{A_{m1} J_m(k_1 r) + A_{m2} Y_m(k_1 r)\} \sin m\theta \exp i\omega t, \\ \Psi(r, \theta, t) &= R^2 \text{Re} \sum_m \{A_{m3} J_m(k_2 r) + A_{m4} Y_m(k_2 r)\} \cos m\theta \exp i\omega t.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь $J_m(k_j r)$ но $Y_m(k_j r)$ - цилиндрические функции первого и второго рода m -го порядка [2], $k_1^2 = (1 - \nu_E^2)S_{11}^E\rho\omega^2$, $k_2^2 = 2(1 + \nu_E)S_{11}^E\rho\omega^2$.

За формулами (5), (8) и (9) находим механические напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta, t) &= -\text{Re} \frac{1}{(1 - \nu_E^2)S_{11}^E} \left\{ \sum_m (a_{m1}(k_1 r)A_{m1} + a_{m2}(k_1 r)A_{m2} + a_{m3}(k_2 r)A_{m3} + a_{m4}(k_2 r)A_{m4}) \right. \\ &\quad \left. \sin m\theta + \frac{4}{\pi} V_0(1 + \nu_E)d_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1} \right\} \exp i\omega t, \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta, t) &= -\text{Re} \frac{1}{(1 - \nu_E^2)S_{11}^E} \left\{ \sum_m (b_{m1}(k_1 r)A_{m1} + b_{m2}(k_1 r)A_{m2} + b_{m3}(k_2 r)A_{m3} + b_{m4}(k_2 r)A_{m4}) \right. \\ &\quad \left. \sin m\theta + \frac{4}{\pi} V_0(1 + \nu_E)d_{13} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1} \right\} \exp i\omega t, \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta, t) &= \text{Re} \frac{1}{(1 + \nu_E)S_{11}^E} \sum_m (c_{m1}(k_1 r)A_{m1} + c_{m2}(k_1 r)A_{m2} + c_{m3}(k_2 r)A_{m3} + \\ &\quad + c_{m4}(k_2 r)A_{m4}) \cos m\theta \exp i\omega t.\end{aligned}\quad (12)$$

В формулах (12) использованы обозначения введенные в [8]

Поскольку амплитуда $E_z^a = (-1)^{n-1} V_0 h^{-1}$, $n = 1, 2, \dots, 2N$ напряженности электрического поля $E_z = \text{Re } E_z^a \exp i\omega t$ раскладывается в ряд Фурье по угловой координате θ

$$E_{za} = -\frac{2V_0}{\pi h} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin N(2n-1)\theta}{2n-1}. \quad (13)$$

то в формулах (12) и (13) индекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots$.

Из граничных условий (10) на свободных от напряжений границах кольца $r = r_0$ и $r = r_1$ получим блочные системы алгебраических уравнений для определения ненулевых безразмерных постоянных $A_{N(2n-1).i}$, $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} & a_{N(2n-1).1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).1} + a_{N(2n-1).2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).2} + \\ & + a_{N(2n-1).3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).3} + a_{N(2n-1).4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1 + \nu_E) d_{13}}{2n-1}, \\ & a_{N(2n-1).1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).1} + a_{N(2n-1).2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).2} + \\ & + a_{N(2n-1).3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).3} + a_{N(2n-1).4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).4} = -\frac{4}{\pi} V_0 \frac{(1 + \nu_E) d_{13}}{2n-1}, \\ & c_{N(2n-1).1}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).1} + c_{N(2n-1).2}(k_1 r_0) A_{N(2n-1).2} + \\ & + c_{N(2n-1).3}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).3} + c_{N(2n-1).4}(k_2 r_0) A_{N(2n-1).4} = 0, \\ & c_{N(2n-1).1}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).1} + c_{N(2n-1).2}(k_1 r_1) A_{N(2n-1).2} + \\ & + c_{N(2n-1).3}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).3} + c_{N(2n-1).4}(k_2 r_1) A_{N(2n-1).4} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При резонансных колебаниях воспользуемся концепцией комплексных модулей, в результате которой в формулах (4), (12), (14) материальные постоянные будут комплексными величинами $\tilde{s}_{ij}^E = s_{ij}^E - i s_{ij}^{E \text{Im}}$, $\tilde{d}_y = d_y - i d_{ij}^{\text{Im}}$, $\tilde{\epsilon}_{jj} = \epsilon_{jj} - i \epsilon_{jj}^{\text{Im}}$.

Резонансные частоты определяются из условия равенства нулю определителей четвертого порядка однородной (при $V_0 = 0$) системы алгебраических уравнений

$$\begin{vmatrix} a_{m1}(k_1 r_0) & a_{m2}(k_1 r_0) & a_{m3}(k_2 r_0) & a_{m4}(k_2 r_0) \\ a_{m1}(k_1 r_1) & a_{m2}(k_1 r_1) & a_{m3}(k_2 r_1) & a_{m4}(k_2 r_1) \\ c_{m1}(k_1 r_0) & c_{m2}(k_1 r_0) & c_{m3}(k_2 r_0) & c_{m4}(k_2 r_0) \\ c_{m1}(k_1 r_1) & c_{m2}(k_1 r_1) & c_{m3}(k_2 r_1) & c_{m4}(k_2 r_1) \end{vmatrix} = 0, \quad (15)$$

в которой азимутный индекс $m = N(2n-1)$, $n = 1, 2, \dots$, N – число диаметральных разрезов электродного покрытия.

При определении резонансных частот тангенсами малых углов потерь можно пренебречь и пользоваться действительными значениями физико-механических материальных параметров.

Количественные результаты и их анализ. Из граничных условий (10) для напряжений и частотного уравнения (15) вытекают следующие общие свойства теоретического частотного спектра. При колебаниях пластины с одним диаметральной разрезом ($N = 1$, два электрода) возникают резонансы на частотах f_{m1} , f_{m3} , f_{m5} , ...; с двумя диаметральными разрезами ($N = 2$, четыре электрода) – резонансы на частотах f_{m2} , f_{m6} , f_{m10} , ...; с тремя диаметральными разрезами ($N = 3$, шесть электродов) – резонансы на частотах f_{m3} , f_{m9} , f_{m15} , ...; с четырьмя диаметральными разрезами ($N = 4$, восемь разрезов) резонансы на частотах f_{m4} , f_{m12} , f_{m20} , ...; с пятью

діаметральними розрезами ($N = 5$, десять електродів) – резонанси на частотах f_{m5} , f_{m15} , f_{m25} , ...; с шестью діаметральними розрезами ($N = 6$, дванадцять електродів) резонанси на частотах f_{m6} , f_{m18} , f_{m30} , ...; с семью діаметральними розрезами ($N = 7$, чотирнадцять електродів) – резонанси на частотах f_{m7} , f_{m21} , f_{m35} , ...; с восемью діаметральними розрезами ($N = 8$, шестнадцать електродів) – резонанси на частотах f_{m8} , f_{m24} , f_{m40} , ... В прийнятій нумерації частот f_{mk} другої індекс відповідає номеру гармоніки по азимутному куту θ (номер форми по азимуту), а перший індекс k являється порядковим номером корня відповідного частотного рівняння (15). В загальному випадку аналіз рівняння (15) можливий тільки численно. Результати численних розрахунків представлені в таблиці 1, де приведені рішення для безрозмірної частоти $\bar{\omega} = \sqrt{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega r_1}$. Резонансні частоти коливань розраховувалися для коефіцієнта Пуассона $\nu_E = 0.38157$, що відповідає кераміці со свойствами PZT-4 [4]. Геометрія кільця вибиралась наступною $r_0 / r_1 = 0.4$.

Таблиця 1

j	$N = 0$	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
1	1.42334	1.6265	0.69281	1.54389	2.35656
2	3.31746	3.85103	2.34721	3.18735	4.01180
3	5.49151	5.20302	4.85053	4.97488	5.31515
4	6.05803	6.53165	5.05288	6.17078	7.31794
5	8.896337	8.88278	7.294018	7.983204	8.45249
6	10.59329	10.72654	8.93175	9.28126	10.06834
7	11.76887	11.81621	11.049	11.42551	11.84558

Дальніші розрахунки дозволяють зробити висновок, що з ростом значення N зародження частот відповідних малим j сдвигается в високочастотну область і частотний спектр стає більш густим. При $N > 1$ частоти, відповідні однаковим j сдвигаются в високочастотну область. Сопоставляя результати при різних значеннях j , видно, що з ростом значення j відносна різниця частот, відповідна різним значенням N , зменшується. В розглянутому випадку при $j = 7$ різниця в частотах менше п'яти відсотків, тому цей випадок був вибран для аналізу форм коливань. На малюнках сплошними лініями нанесені залежності u_r , а пунктирними u_θ , а також значення відповідного N . Вдоль осі ox відложено безрозмірне значення $\bar{r} = r / r_1$.

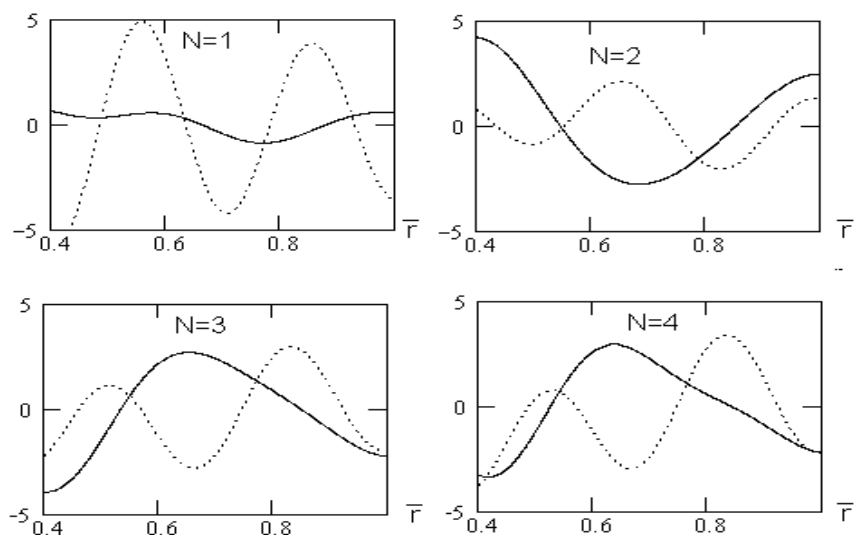


Рисунок 1

Приведенные графические зависимости позволяют заключить, что, несмотря на близость частот при разных значениях N формы колебаний различаются существенно. Количество нулей функций u_r и u_θ одинаково при разных значениях N . Число нулей u_θ , как правило, равно $[j/2] + 1$, а u_r в два раза меньше. Формы колебаний u_θ имеют более сложный характер.

Представляет интерес рассмотреть зависимость частотного спектра от геометрии кольца. В таблице 2 приведены значения первой частоты при различном количестве разрезов.

Таблица 2

r_0 / r_1	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$
0.1	1.56127	1.23169	2.00392	2.618
0.2	1.58725	1.05552	1.95461	2.61131
0.3	1.61479	0.86562	1.79267	2.55171
0.4	1.62666	0.69304	1.54389	2.35656
0.5	1.61051	0.54047	1.27326	2.04243
0.6	1.56808	0.4038	1.00296	1.67866
0.7	1.50873	0.28052	0.73471	1.28545
0.8	1.44201	0.17266	0.4703	0.8614
0.9	1.37384	0.07913	0.22072	0.41876

Представленные результаты позволяют заключить, что зависимость основной частоты от геометрии существенно зависит от количества разрезов. При $N = 1$ эта зависимость имеет максимум, а при $N = 2, 3, 4$ значение частоты убывает с ростом величины отверстия. Кроме того, следует отметить, что при $N = 2, 3, 4$ одинаковой геометрии соответствует большая частота при большем количестве разрезов.

Заключение. В тонких кольцевых пьезокерамических пластинах с радиальными разрезами электродов на лицевых плоскостях возбуждаются неосесимметрические планарные колебания. В статье получено общее решение соответствующей задачи. Для выбранных граничных условий численно проанализирована спектральная задача. Собственные частоты колебаний для низших гармоник по азимутальной координате определены при различном числе радиальных разрезов и отношениях граничных радиусов. Установлено количество узловых линий собственных форм по радиальной

координате (форма по азимуту определяется количеством радиальных разрезов). Несмотря на близость собственных частот при разном количестве разрезов наблюдается существенное отличие соответствующих собственных форм.

ЛИТЕРАТУРА

1. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.; Отв. ред. А.Н. Гузь; АН УССР. Ин-т механики. – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наук. думка, 1990. – 228 с.
4. Шульга М.М. До теорії електромеханічних неосесиметричних коливань п'єзокерамічних пластин з товщиною поляризацією // Системні технології. – Вип.7. – 2007. – С. 63 – 68.
5. Шульга М.О., Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.
6. Mason W.P. Piezoelectricity, its history and applications // J. Acoust. Soc. Am. – 1981. – 70, № 6. – P. 1561 – 1566.
7. Shul'ga N.A., Bezverkhii O.I. and Mekievskii O.I. Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates// Int. Appl. Mech. – 2010. – 46, N9. – p. 1031-1038.
8. Shul'ga N.A., Levchenko V.V. and Mekievskii O.I. Nonaxisymmetric Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates with Radially Cut Electrodes// Int. Appl. Mech. – 2012. – 48, N4. – p. 438-446.

Поступила в редколлегию 11.03.2013

УДК 517.977

ЗАЙЦЕВ В.Г., к.физ.-мат.н., доцент
ПЫШНЫЙ М.А., студент

Днепропетровский национальный университет им.О. Гончара

ПОДАВЛЕНИЕ НЕИЗМЕРЯЕМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Вступление. Использование известных методов для решения проблем связанной с учетом возмущений внешней среды, применимо только для ограниченного количества процессов, динамика которых давно исследована и понятна. Тем не менее, разнообразие появляющихся процессов, каждый раз требует построения регуляторов, настроенных хотя бы на конкретные возмущения внешней среды[3-6]. Одним из таких новых подходов является использования метода АКАР[1], для построения указанного регулятора. В работе рассмотрено использование данного метода на примере подавления неизмеряемых возмущений в задаче синтеза управления процессами рыскания и бокового сноса корабля на воздушной подушке[2].

Постановка задачи и метод решения. Математическая модель указанного процесса имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_{11}x_1 - a_1x_2 - a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + b_1(u + v), \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2(u + v),\end{aligned}\quad (1)$$

где x_1 – угол рыскания, x_2 – боковой снос, u – управление, v – внешнее возмущение, приведенное к входу, $a_{11}, a_1, a_2, a_3, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ – положительные параметры, зависящие от скорости движения корабля.

Поставим задачу построения синтеза управления, обеспечивающего перевод объекта (1) из произвольного начального в нулевое положение равновесия. Для решения задачи синтезируем базовый закон управления объектом (1), используя метод АКАР. Однако для его использования необходимо осуществить подавление неизмеряемых возмущений. Для этого введем в рассмотрение дополнительную переменную, т.е. выполним принцип «расширения - сжатия фазового пространства». Это означает, что вместо исходной модели (1) рассмотрим следующую модель синтеза:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -a_{11}x_1 - a_1x_2 - a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + b_1(u + v) + x_3, \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}x_1 - a_{22}x_2 + b_2(u + v) + x_3, \\ \dot{x}_3(t) &= x_1 + \alpha x_2,\end{aligned}\quad (2)$$

где α – параметр, подлежащий выбору с целью обеспечения максимальной области асимптотической устойчивости синтезируемой системы.

Вводимая дополнительная переменная x_3 в установившемся режиме моделирует постоянное возмущение. Следовательно, из условий асимптотической устойчивости системы (2), имеет место аналогичное свойство и для исходной системы (1) при действии постоянных возмущений. В переходных режимах с помощью переменной x_3 в нулевом приближении компенсируются изменяющиеся возмущения. Очевидно, что сказанное справедливо как для внешних, так и для параметрических возмущений. В соответствии с методом АКАР введем в рассмотрение макропеременную

$$\psi = x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3, \quad (3)$$

где β – параметр, подлежащий определению в процедуре синтеза. Для того, чтобы добиться попадания системы (2) на многообразие $\psi = 0$ (3), потребуем выполнения следующего функционального уравнения

$$T\dot{\psi}(t) + \psi = 0, \quad (4)$$

где параметр $T > 0$, определяет время переходного процесса. Используя явный вид функции ψ (3), а также уравнения состояния системы (2), из (4) получим следующий закон управления:

$$u = -v + \frac{1}{b_1 + \alpha b_2} \left[a_{11}x_1 + a_1x_2 + a_2x_2^2 - a_3x_2^3 + \alpha(-a_{21}x_1 + a_{22}x_2) - (1 + \alpha)x_3 - \beta(x_1 + \alpha x_2) - \frac{\psi}{T} \right]. \quad (5)$$

где v – номинальное возмущение. Далее определим уравнения декомпозированной системы, т.е. уравнения движения замкнутой системы (2), (5) на многообразии $\psi = 0$ (3). Из соотношения (3) следует, что

$$x_{1\psi} = -\alpha x_{2\psi} - \beta x_{3\psi}.$$

Учитывая полученное соотношение, замкнутая система (2), (5) примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_{2\psi}(t) &= a_{21}(-\alpha x_{2\psi} - \beta x_{3\psi}) - a_{22}x_{2\psi} + b_2(u_\psi + v) + x_{3\psi}, \\ \dot{x}_{3\psi}(t) &= -\beta x_{3\psi}.\end{aligned}\quad (6)$$

Из второго уравнения системы видно, что оно устойчиво при $\beta > 0$. Рассмотрим поведение первого уравнения. Подставляя в него управление, получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2\psi}(t) = & - \left(\alpha a_{21} + a_{22} - \frac{b_2}{b_1 + \alpha b_2} (-a_1 + \alpha a_{11} - \alpha a_{22} + \alpha^2 a_{21}) \right) x_{2\psi} + \\ & + \frac{b_2}{b_1 + \alpha b_2} [a_2 x_{2\psi}^2 - a_3 x_{2\psi}^3] - x_{3\psi} (a_{21} \beta - 1) - \frac{b_2}{b_1 + \alpha b_2} [\beta a_{11} - \alpha \beta a_{21} + (1 + \alpha) + \beta^2] x_{3\psi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Построим функцию Ляпунова, вычислим ее полную производную в силу (7). При $a_3 \gg a_2$ и $\alpha > 1$ квадратичная функция является функцией Ляпунова для (7). Декомпозированная система (6) асимптотически устойчива относительно нулевого положения равновесия, а значит асимптотически устойчива замкнутая система (2), (5). Кроме того при $\alpha \gg 1$ свойство асимптотической устойчивости является также параметрически грубым. Численное моделирование синтезированной системы производились при следующих параметрах объекта:

$a_{11} = 0,011$, $a_1 = 0,04$, $a_2 = 0,005$, $a_3 = 0,246$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0,057$, $b_1 = 0,011$, $b_2 = 0,009$, $a_{11}^0 = 1,5a_{11}$; $a_1^0 = 0,6a_1$; $a_2^0 = 1,7a_2$; $a_3^0 = 2a_3$; $a_{21}^0 = 0,8a_{21}$; $a_{22}^0 = 0,7a_{22}$; $b_1^0 = 1,3b_1$; $b_2^0 = 1,2b_2$; $v = 3$; $v^0 = 3 + \text{Asign}(wt)$; $A = 6$, $w = 0,2$. Здесь индексом $\{^0\}$ обозначены параметры объекта управления, а без индекса приведены номинальные параметры, подставляемые в управление. Параметры регулятора выбраны в виде $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $T = 0,05$. Графики приведенные ниже показывают работоспособность построенного регулятора (Рис. 1- 4).

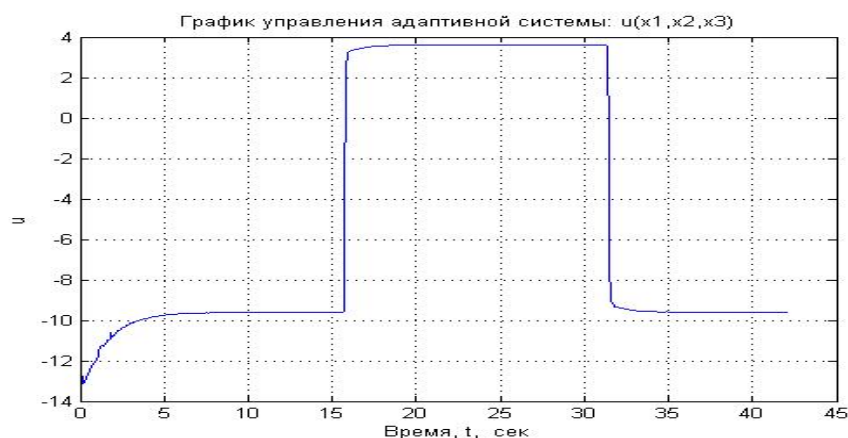


Рисунок 1

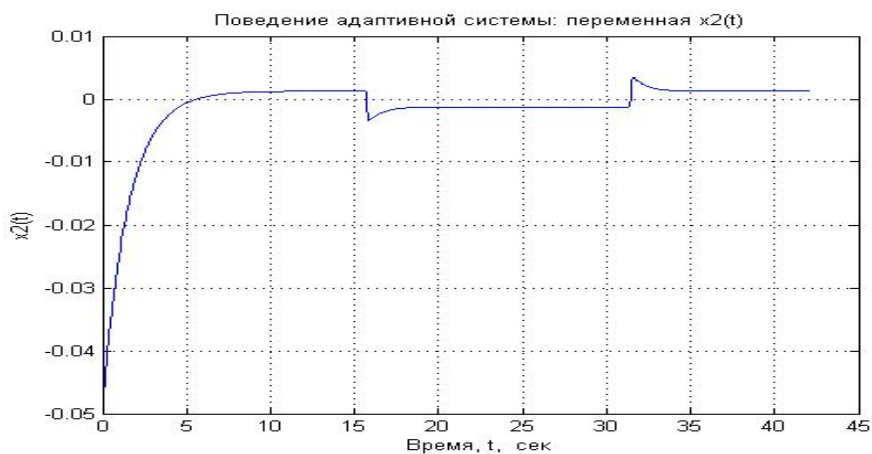


Рисунок 2

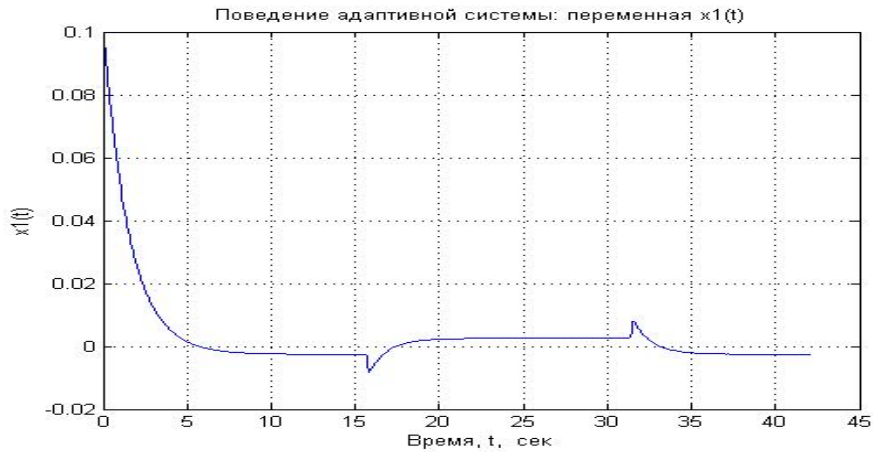


Рисунок 3

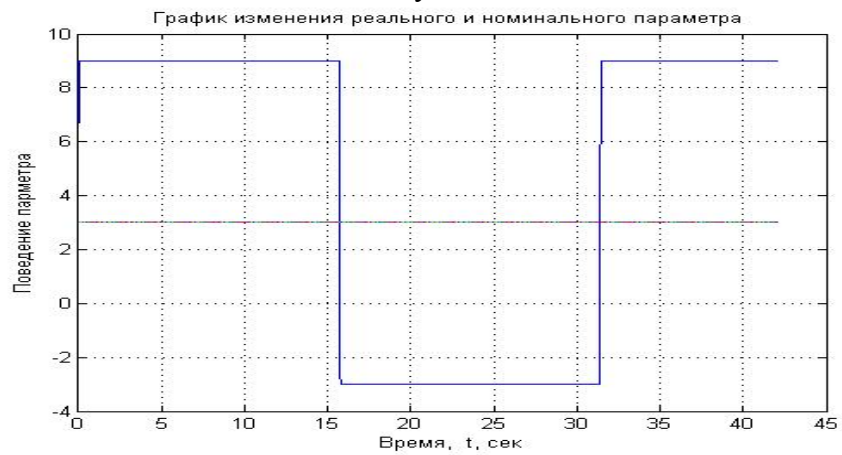


Рисунок 4

Выводы. Использование метода АКАР для процессов синтеза регуляторов подавления неизмеряемых возмущений имеет свои особенности, анализ которых позволяет исследователю подобрать его параметры, которые возможно полностью удовлетворят техническим требованиям со стороны реального процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современная прикладная теория управления: Синергетический подход в теории управления / Под ред. А.А. Колесникова. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. Ч. II.
2. Терехов В.А., Ефимов Д.В., Тюкин И.Ю. Нейросетевые системы управления / Под ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2002.
3. Structurally stable output regulation of nonlinear systems / C.I. Byrnes, F.D. Priscoli, A. Isidori, W. Kang // Automatica. – 1997. – Vol. 33. – Pp. 369-385.
4. Francis B.A., Wonham W.M. The internal model principle of control theory // Automatica. – 1976. – Vol. 12. – Pp. 457-465.
5. Conant R.C., Ashby W.R. Every good regulator of a system must be a model of that system // Int. J. Syst. Sci. – 1970. – Vol. 1. – Pp. 89- 98.
6. Тюкин И.Ю., Терехов В.А. Адаптация в нелинейных динамических системах. / С-Питер. – 2006. – С. 378.

Поступила в редколлегию 11.03.2013

УДК 621.774.353.004

ІЛЬЧЕНКО М.Г., асистент
БЕЗЦІННИЙ І. І., асистент
ВОЛОСОВА Н.М., к.т.н., доцент

Дніпродзержинський державний технічний університет

ВДОСКОНАЛЕННЯ ПРОЦЕСУ РИХТУВАННЯ ЗАГОТОВОК ВАГОННИХ ВІСЕЙ НА ПРЕСІ

Вступ. Вивчення факторів, які впливають на виникнення кривизни на етапах виготовлення заготовки вагонних та локомотивних осей, а особливо в процесі нормалізації їх в печах, правки на пресі та охолодженні, має важливе значення. Катані на стані 250 ДМКД заготовки вагонних осей виправляють на правильному пресі з використанням п'яти пар матриць, які встановлені наступним чином: по дві на передній та задній підступицях та одна на середній частині осі. Дослідженнями, які були проведені на Дніпровському металургійному комбінаті, було поставлено за мету – впровадити у виробничий процес з виправлення кривизни вагонних вісей новий технологічний процес, завдяки якому якісно підвищується правка вісей після нормалізації в печах.

Так як заготовки мають діаметральні розміри в межах поля допуску 6 мм, то виникають такі випадки, коли одні елементи мають діаметральні розміри в верхньому значенні поля допуску, а інші – нижнє значення. В такому випадку кривизна заготовки не буде виправлена і заготовка залишиться кривою.

Таким чином, існуюча технологічна схема правки не дозволяє отримати заготовки з гарантованою допустимою кривизною. Запропонована схема цю ваду виправляє.

Постановка задачі. У зв'язку з цим пропонується нова технологічна схема правки. В цій схемі використовуються дві пари матриць на задній та передній шийках, нижні матриці на підступицях з розташованими в них кантуючими роликами, які будуть використовуватися лише для провертання заготовки, а також одну матрицю, розташовану в середній частині осі, яка використовується, як основна рихтуюча матриця (рис. 1)

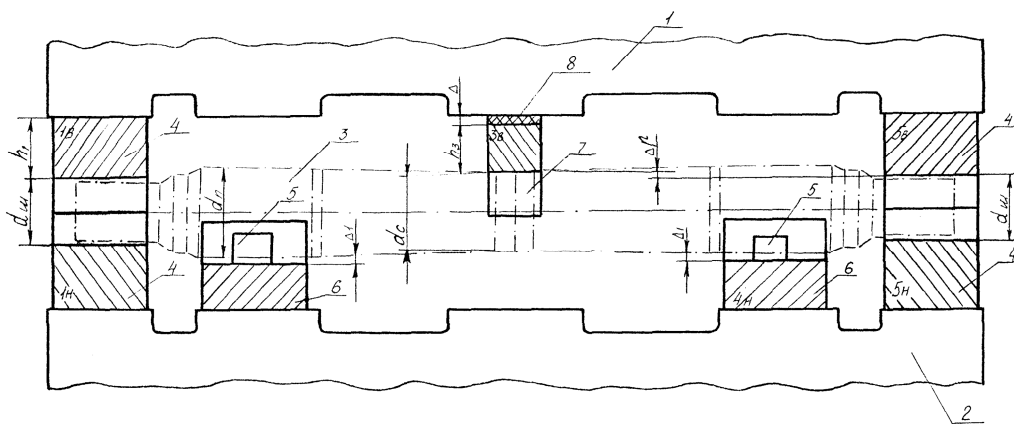


Рисунок 1 – Схема установки матриці на пресі

1, 2 – верхня рухома та нижня нерухома траверси; 3 – заготовка; 4 – матриці шийок; 5 – кантуючі ролики; 6 – основи кантуючі роликів; 7 – вузька верхня матриця; 8 – підкладка

При такій схемі правки матриці на шийках являються базовими. Тобто при правці заготовки вагонної осі вона затискується матрицями на шийках, а матриця що розташована в середній частині осі, виконує правку.

Так як положення та величина кривизни для кожної осі невідомі, то необхідно за допомогою попередніх циклів правки зорієнтувати кривизну у відповідному напрямі за допомогою спеціального пристрою, який розроблено для цієї технології правки і при останньому циклі правки встановити її у вертикальній площині та виконати рихтовку при останньому циклі.

При орієнтуванні кривизни у необхідному напрямі передбачається пережим заготовки при попередніх циклах правки на величину «а». Правка складається з трьох циклів підпресовок, ходів верхньої траверси з матрицями: 1 хід – після подання заготовки в матриці; 2 хід – після повороту заготовки на 90°; 3 хід – після повороту заготовки на 135°.

Профіль матриці, якою здійснюється рихтування, представлений на рис. 2

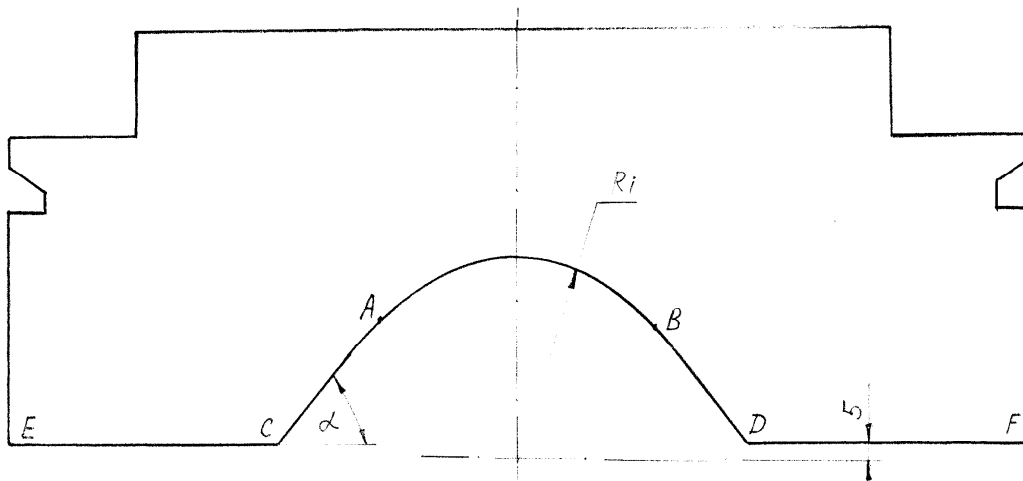


Рисунок 2 – Профіль рихтувальної матриці

В залежності від положення кривизни та її величини заготовка з матрицею може контактувати на ділянках AB, CA або BD, DE або EC . Для кожного випадку маєтся відповідний математичний вираз умови, за яким визначається величина кривизни після циклу рихтування.

Математичний аналіз умов контакту матриці та заготовки дозволяє отримати рівняння величини перегину h для кожного випадку.

I випадок – контакт знаходиться на ділянці дуги AB

$$h = (R_i - R_3) \cdot \sin \varphi + a \text{ при } \alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha, \text{ де } \varphi = \arccos\left(\frac{x}{R_i - R_3}\right) \quad (1)$$

II випадок – контакт знаходиться на ділянці дуги AC або BD

$$h = -R_3 \cdot \sin \alpha + \left[\frac{R_i}{\cos \alpha} - (|x| + R_3 \cdot \cos \alpha) \right] \cdot \operatorname{ctg} \alpha + a \quad (2)$$

при $(R_i - R_3) \cos \alpha \leq x \leq \frac{R_i}{\cos \alpha} - l_3 \cdot \cos \alpha$ (ділянка BD)

$$R_3 \cos \alpha - \frac{R_i}{\cos \alpha} \leq x \leq (R_3 - R_i) \cdot \cos \alpha \quad (\text{ділянка } AC).$$

III випадок – контакт знаходиться на ділянці дуги CE або FD

$$h = -R_3 \cdot \sin \varphi_1 + a \quad (3)$$

при $x \leq R_3 \cos \alpha - \frac{R_i}{\cos \alpha}$ (ділянка EC)

$$x \geq \frac{R_i}{\cos \alpha} - R_3 \cos \alpha \quad (\text{ділянка } FD).$$

Для всіх випадків R_i – радіус інструмента (матриці); R_3 – радіус заготовки;

$$x = l \cdot \cos \varphi;$$

α – кут профілю інструмента;

l – величина початкової кривизни заготовок;

φ – положення кривизни відносно вісі X .

Після першого циклу рихтування визначається величина кривизни та її розташування. Причому

$$\left. \begin{array}{l} \text{якщо } h > y, \text{ то } h_1 = y \\ \text{якщо } h < y, \text{ то } h_1 = h \end{array} \right\} \quad (4)$$

де $y = l \cdot \cos \varphi$.

Після перевірки умови (4) визначається величина кривизни та її положення

$$l_1 = \sqrt{x^2 + h_1^2}, \quad (5)$$

$$\varphi'_1 = \operatorname{arctg} \frac{x}{h_1}. \quad (6)$$

Для визначення дійсного кута положення кривизни після першого циклу рихтування необхідно перевірити умову

$$\left. \begin{array}{l} \text{якщо } x > 0, \text{ то } \varphi_1 = \varphi'_1 \\ \text{якщо } x < 0, \text{ то } \varphi_1 = \pi + \varphi'_1 \end{array} \right\} \quad (7)$$

Наступним циклом рихтування є повертання заготовки на 90° та друге рихтування. Це значить, що необхідно повторити всі розрахунки, починаючи з формули (1), при цьому $\varphi - \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$, а замість l необхідно поставити l_1 .

Після повторення розрахунків за формулами (1) – (4) визначається кривизна l_2 та її положення після другого циклу φ_3 .

Після другого циклу рихтування заготовку повертають на кут $\frac{3\pi}{4}$ та виконують третій цикл рихтування. Розрахунок кривизни проводиться за формулами (1) – (5).

Враховуючи те, що правка шийок заготовок проходить за рахунок обжимання матрицями, а середня частина – за рахунок згину вузькою верхньою матрицею, де в значній мірі діє вплив розподілу діаметральних розмірів шийок та середньої частини, вузьку матрицю необхідно виставляти за допомогою прокладки 8 (Рис. 1) таким чином, щоб кривизна заготовки при нормальних діаметрах дорівнювала нулю. А для заготовок з відхиленням діаметра середньої частини від номінальних розмірів, кривизна повинна бути не більшою за 3мм.

Висновки. Запропонована нова технологічна схема правки заготовок осей краще виправляє кривизну заготовки і дозволяє отримати заготовки з гарантованою допустимою кривизною.

ЛІТЕРАТУРА

1. Расчет вагонов на прочность/ Под. ред. Л.А.Шадуря.– М.:Машиностроение, 1981. – 432 с.
2. Пастернак Н.А. Результаты опытной эксплуатации полых осей/ Н.А.Пастернак, И.А.Мельниченко// Сб.научн.трудов Вопросы производства и эксплуатации железнодорожных колес и осей. – Днепропетровск:ДИИТ,1976. – С.141 – 148.
3. Ильченко Н.Г. О прочности полой вагонной оси/ Н.Г.Ильченко, В.В.Чуйко.– М., 1998. – 163с. – Деп. В ЦНИИТЭИТЯЖМАШ № 1(195) № 2030 – ТМ 87.
4. Ильченко Н.Г., Волосова Н.Н. Математическое моделирование износа деталей узла связи тележки и кузова промышленных электровозов/ Міжнародна наукова конференція «Математичні проблеми технічної механіки – 2012». – Дніпропетровськ, Дніпродзержинськ, 2012 – Том 1, С.94

Поступила в редколлегию 11.03.2013