

РОЗДІЛ «МАШИНОБУДУВАННЯ»

УДК 004.942:629.027.532-977

КВАША Э.Н., д.т.н., профессор
 РУДАСЁВ В.Б., к.т.н., доцент
 ДУБОВ П.Ю., магистр

Днепродзержинский государственный технический университет

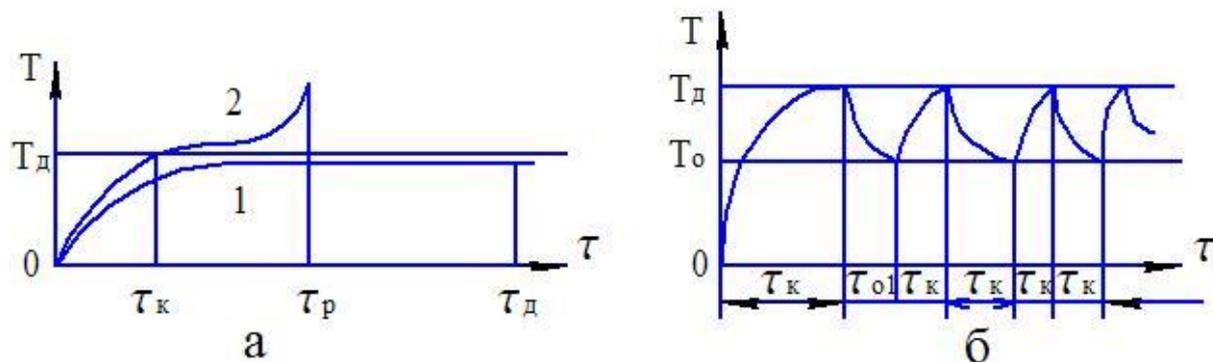
РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПНЕВМАТИЧЕСКИХ ШИН

Введение. В последние годы в карьерах страны с различными климатическими и горногеологическими условиями прошли проверку в режимах интенсивной эксплуатации различные модели отечественных и импортных крупно- и сверхкрупногабаритных шин [1].

Анализ результатов опытно-промышленной эксплуатации крупногабаритных шин (КГШ) показал, что основным критерием их работоспособности является температура разогрева каркаса, подканавки и протектора [2, 3], которая при нормальных режимах эксплуатации автосамосвалов достигает 110-130°C, что приводит к термодеструкции материала [4, 5].

Ниже изложены методы определения температурных полей сверхкрупногабаритных шин.

В процессе эксплуатации КГШ циклические изменения напряженно-деформированного состояния каркаса, подканавки, протектора, а также гистерезисные свойства резины и корда обуславливают значительный нагрев шины. Для некоторых типов шин температура разогрева является не только фактором изменения напряженно-деформированного состояния (например, за счет повышения внутреннего давления), но и является критерием работоспособности и производительности. На рис.1 представлены основные температурные режимы, которые возникают при качении пневматических шин.



а – стационарный (1) и нестационарный (2);

б – восходящие кривые – качение шины, нисходящие – остановки для охлаждения

Рисунок 1 – Основные температурные режимы шины

Наиболее благоприятный режим показан кривой 1: при этом режиме термодинамический процесс является стационарным, и максимальная установившаяся температура не приводит к преждевременному выходу из строя шины. Большинство крупногабаритных шин выходит из строя в результате термического разрушения в зоне стыка протектора с подканавочным слоем или каркасом. Режим качения в этом случае явля-

ется нестационарным (рис.1, а, кривая 2). Если не принять конструктивных или технологических мер, то ресурс шины может быть исчерпан задолго до достижения заданной величины.

Постановка задачи. Основной задачей при конструировании крупногабаритных шин является построение режимов эксплуатации, позволяющих получить максимальную производительность. В связи с этим необходимо иметь экспериментальные значения допускаемых температур, т.е. температур, при которых не происходит термодеструкция резины и корда и сохраняется необходимая прочность связи между элементами шины. Зная допускаемую температуру $T_{\text{д}}$, можно построить режимы эксплуатации шины (рис.1, б). При достижении допускаемой температуры автосамосвал необходимо остановить для охлаждения шины до некоторой температуры T_1 . При этом время охлаждения значительно больше времени нагрева шины после возобновления движения. Эти различия во времени охлаждения и нагрева в процессе движения увеличиваются и выражаются следующими соотношениями:

$$\tau_{01} < \tau_{02} < \tau_{03}, \dots, \tau_{07} \approx \tau_{08}; \quad (1)$$

$$\tau_{i1} < \tau_{i2} < \tau_{i3}, \dots, \tau_{i7} \approx \tau_{i8};$$

$$\tau_{i0} \ll \tau_{i1} (i \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Результаты работы. На основе сформулированной физической задачи о качении шины с учетом ее разогрева построим математическую модель процесса. В общем случае температурные поля шины являются трехмерными и нестационарными. Учитывая анизотропию свойств каркаса шины, уравнения связанной динамической задачи термоупругости неоднородного тела можно записать так [6, 7]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho(\partial^2 u_i / \partial \tau^2) - x_i; \quad (3)$$

$$\sigma_{ij} = b_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta; \quad (4)$$

$$e_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} + u_{k,j}); \quad (5)$$

$$C_v \partial \theta / \partial \tau = \lambda_{ij} \theta_{i,j} + \lambda_{ij,i} \theta_j + q - T_0 \alpha_{kl} b_{ijkl} (\partial e_{ij} / \partial \tau); (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (6)$$

где θ – приращение температуры, °С; T – температура, °С; τ – время, с.

Для решения задачи необходимы краевые и начальные условия. Краевые условия закрепления шины на ободе в окружном направлении:

$$u_i^0 = u_i^{360}; \sigma_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{360}; (i, j = 1, 2, 3). \quad (7)$$

В меридиональном направлении краевые условия связаны с конструктивными особенностями закрепления резинокордной оболочки шины на стальном ободе. Слои оболочки шины на стальных бортовых кольцах посажены на жесткий стальной обод с натягом, чтобы исключить проворачивание оболочки шины. Такое закрепление, строго говоря, является упругим, и его величина зависит от жесткости на растяжение бортовых колец. В общем случае краевые условия в меридиональном направлении можно записать так:

$$u_i^0 = u_i^b; (i = 1, 2, 3); \frac{dU_i}{dx_i} = 0; U^0 = 0, \quad (8)$$

где обозначено буквой «о» перемещение оболочки, а буквой «б» – перемещения в месте крепления оболочки к ободу (к бортовым кольцам).

В месте крепления можно пренебречь перемещениями в окружном и нормальном к поверхности оболочки направлениях, т.е. принять

$$u_1 = u_3 = 0. \quad (9)$$

В меридиональном направлении перемещения вычисляются в зависимости от соотношения жесткостей оболочки и бортовых колец:

$$u_2 = \frac{E^0 h^0 \varepsilon_2^0 R_b^2}{E^b F^b}, \quad (10)$$

где $E^{0(b)}$ – модули упругости оболочки и бортовых колец, Па; h – толщина оболочки в месте крепления к борту, м; ε_2 – деформации оболочки в меридиональном направлении; R_b – радиус бортовых колец, м; F_b – площадь поперечного сечения бортовых колец, м².

Начальные условия заключаются в задании в начальный момент времени температуры тела, вектора перемещений и скорости. Граничные условия теплообмена в наиболее общем виде соответствуют условиям теплообмена третьего рода: поток тепла через граничную поверхность должен быть пропорционален разности между температурой поверхности тела и известной температурой окружающей среды:

$$n_i \lambda_{ij} T_j(P, \tau) + \alpha_s [T(P, \tau) - T_c(P, \tau)] = 0 (P \in S), \quad (11)$$

где α_s – коэффициент теплоотдачи с поверхности S тела, Вт/м²·°C; n_i – компоненты вектора внешней нормали к этой поверхности; T_c – температура среды, °C.

Граничные условия второго и первого рода получаем из (11) при $\alpha_s T_c = q$, $\alpha_s \rightarrow \infty$ соответственно. Если пренебречь производной деформацией по времени в уравнении теплопроводности (6), то получим несвязанную динамическую задачу термоупругости анизотропного неоднородного тела:

$$\sigma_{ij,j} = \rho (\partial^2 u_i / \partial \tau^2) - x^2; \quad \sigma_{ij} = b_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} \theta. \quad (12)$$

Первые три уравнения системы (12) формально связаны с четвертым уравнением теплопроводности. Они описывают напряженно-деформированное состояние анизотропного неоднородного тела, находящегося под воздействием силовых нагрузок и температуры. Четвертое уравнение зависит от первых трех через внутренние источники тепла q . Мощность этих источников определяется амплитудой деформации и формой цикла нагружения шины за один оборот.

Решение связанной термоупругой задачи тел сложной формы (например, шины) пока затруднительно даже при применении численных методов решения на ЭВМ.

Решение значительно упрощается для несвязанной термоупругой задачи (12), особенно если принять, что температурное поле шины в окружном направлении является симметричным. В этом случае уравнение теплопроводности становится двухмерным и в декартовых координатах принимает вид:

$$\partial T / \partial \tau = a (\partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2) + q / C\rho, \quad (13)$$

где $a = C\rho$ – коэффициент температуропроводности, Вт/м·°C.

При решении этих уравнений следует учитывать, что при разогреве температура воздуха в замкнутой полости шины повышается, следовательно, внутреннее давление также будет возрастать. В соответствии с уравнением газового состояния внутреннее давление можно определить по формуле

$$P_2 = P_1 + (T_1 - T_2)(P_1 + 1)/T_2, \quad (14)$$

где P_1, P_2, T_1, T_2 – внутреннее давление (Па) и температура воздуха (°C) в шине соответственно в начале и конце качения.

Внутренние источники тепла в уравнении теплопроводности (12) будут определяться так:

$$q_\tau = A^H / V_\tau, \quad (15)$$

где V – объем материала, m^3 ; ν – частота циклов при качении шины.

Величина механической энергии, перешедшей в тепло,

$$A^{II} = \int_0^{\dot{\epsilon}_0} \sigma s dt = \pi E^{II} \epsilon_0^2. \quad (16)$$

Введем величину модуля внутреннего трения: $K = 2\pi E^{II}$. (17)

Тогда для потерь механической энергии форма записи по структуре будет совпадать с формулой потенциальной энергии для единицы объема:

$$A^I = 1/2 E^I \epsilon_0^2, A^{II} = 1/2 K \epsilon_0^2. \quad (18)$$

В формуле (15) потери энергии вычисляются с учетом шести компонент напряжений и деформаций.

В табл.1 представлены результаты экспериментов, выполненных Л.С.Приссом и А.Г.Шумской [2].

Таблица 1 – Динамические характеристики резин (МПа)

№ образца	Пилообразный режим			«Двойная трапеция»			«Шинная трапеция»	
	$\dot{A}^I 20^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^I 120^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 20^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 120^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 20^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 120^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 20^\circ \ddot{N}$	$\dot{A}^{II} 120^\circ \ddot{N}$
1	2,36	1,98	0,20	0,09	0,28	0,12	0,28	0,11
2	3,16	2,40	0,42	0,15	0,52	0,20	0,54	0,18
3	2,47	2,17	0,20	0,10	0,28	0,15	0,30	0,15
4	4,50	3,71	0,68	0,25	0,87	0,32	0,94	0,31
5	3,37	2,89	0,34	0,15	0,46	0,21	0,51	0,19
6	2,70	2,46	0,14	0,07	0,20	0,11	0,20	0,09
7	2,89	2,63	0,22	0,09	0,29	0,13	0,28	0,09
8	3,44	2,63	0,47	0,21	0,58	0,27	0,59	0,027

Элементы шины работают в условиях, различных не только по форме цикла, но и по амплитуде деформации. Так как экспериментальная проверка всех режимов нагружения невозможна, определяли модули потерь в зависимости от амплитуды деформации.

Вязкоупругие свойства кордов изучены в меньшей степени, чем свойства резин. Однако их вклад в тепловыделения при качении шин составляет ориентировочно 20-25% [3]. Это обусловлено как значительной долей, которую они занимают в объеме шины, так и их физико-механической структурой [4, 5]. На рис.2 показана зависимость модулей упругости и потерь для анидного корда от деформации в режиме «шинной трапеции».

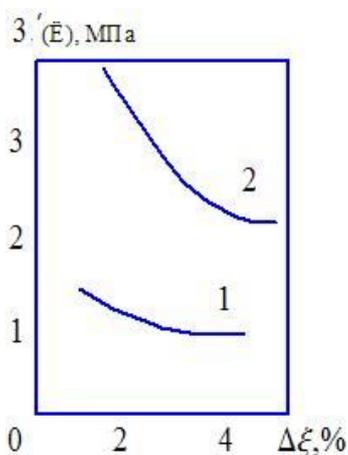


Рисунок 2 – Изменение модулей упругости $E^I(2)$ и потерь $E^{II}(1)$ анидного корда в зависимости от амплитуды импульсной «шинной трапеции»

Следовательно, для решения задачи о термонапряженном состоянии шины, кроме модулей упругости, необходимо определить модули потерь резины и корда. Затем, используя одну из теорий армирования, можно рассчитать модули упругости и потери для композиционного резинокордного материала каркаса.

Методика расчета. В виду большой сложности решения задачи термоупругости предложен упрощенный вариант решения уравнений с допущением, что температурное поле является симметричным.

В комплексе программ предусмотрено решение задачи методом последовательных приближений.

В первом приближении решают упругую задачу и определяют поля перемещений и деформаций. Учитывая вязкоупругие свойства резины и корда, с помощью уравнения теплопроводности рассчитывают температурные поля. Зная температурные поля шины, уточняют упругие характеристики материалов. По уточненным полям перемещений и деформаций и новым вязкоупругим параметрам материалов находят уточненные температурные поля. Обычно достаточно второго приближения для решения задачи.

Определив температурные поля, можно установить эксплуатационную производительность шины, которая равна произведению средней за транспортный цикл нагрузки на шину на среднюю эксплуатационную скорость (размерность ($\text{т} \times \text{км/ч}$)):

$$TKBЧ = Q_c V_{ср} \quad (19)$$

При работе в карьерах средняя нагрузка на шину определяется как полусумма массы груженого и порожнего самосвала с учетом распределения нагрузок по осям самосвала. Средняя эксплуатационная скорость равна

$$V_{ср} = (1/\tau) \sum S_i n_i,$$

где S_i – расстояние, км; n_i – число циклов; τ – время работы самохвала, ч.

Приведенные выше формулы для определения эксплуатационной производительности шины справедливы только при том условии, что за время работы автосамосвала максимальная температура в шинах не превышает допускаемой (110-120°C).

Необходимо обратить внимание на то, что в зависимости от типа карьера и самосвала шина с максимальной температурой может оказаться как на передней, так и на задней оси самосвала. Отсюда следует вывод, что для достижения максимальной производительности карьера необходимо оптимизировать режимы эксплуатации автосамосвалов. Если карьер имеет один забой, то оптимизация может быть проведена за счет использования различных типов автосамосвалов и разработки технологических режимов отстоя самосвалов для охлаждения шин. Более широкие возможности для оптимизации режимов эксплуатации существуют для карьеров, имеющих несколько разнородных забоев и разнообразный парк автосамосвалов.

В этом случае время отстоя самосвалов может быть сведено к минимуму за счет перестановки самосвалов из одного забоя в другой. Решение такой транспортной задачи с учетом ограничений максимальной температуры шин возможно при наличии в карьерах современных компьютеров.

С помощью комплекса программ в НИИ КГШ на стадии проектирования новых шин прогнозируют производительность. В качестве примера рассчитаны температурные поля и производительность четырех вариантов шины 40.00-57.

Анализ результатов представлен на рис.1-14 и показывает, что все варианты качественно равноценны. Температуры распределены по ширине беговой зоны шины при номинальной нагрузке 620кН практически равномерно. При нагрузке 450кН, что соответствует нагрузке на шину порожнего самосвала, максимум температур приходится на

зону корони. Расчётная производительность для трех вариантов (рис.3-11) составляет: 1 – 880-1100; 2 – 940-1150; 3 – 970-1230 $t \cdot км/час$. Меньшие значения соответствуют допустимой температуре 110°C, большие – 120°C.

Четвертый вариант (рис.12-14) соответствует первому, но модуль упругости корда в этом случае меньше на 30%. Анализ результатов показывает, что происходит качественное и количественное перераспределение температурных полей. Максимальные температуры возникают в угловой зоне. Производительность снижается на 16-18%. При наличии технологического разброса углов наклона корда $\pm 5^\circ$ производительность составит 480-530 $t \cdot км/час$, т.е. снизится в 1,5-2 раза.

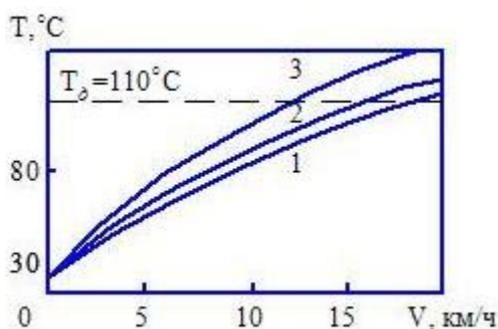


Рисунок 3 – Зависимость максимальной температуры беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 1) от скорости качения при нагрузках 450(1), 535(2) и 620 кН(3)

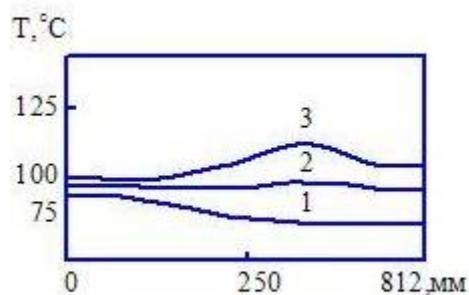


Рисунок 4 – Распределение максимальных температур по ширине (B) беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 1)

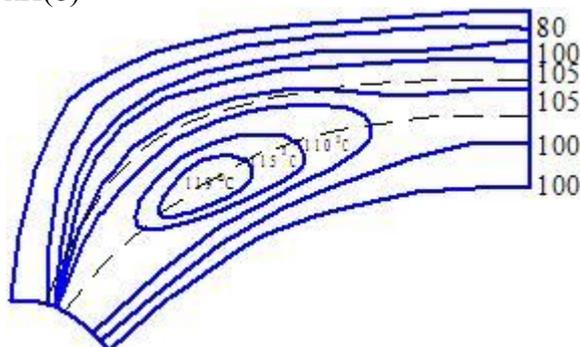


Рисунок 5 – Температурное поле беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 1); нагрузка на шину 620 кН, средняя эксплуатационная скорость 15 км/ч, температура воздуха 37°C, внутреннее давление 0,6 МПа (пунктир – границы каркаса и подканавки)

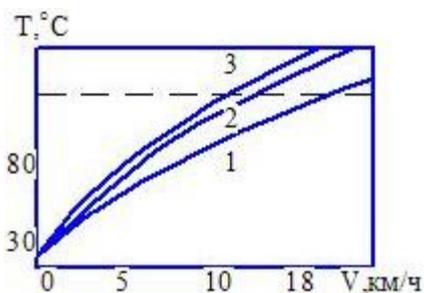


Рисунок 6 – Зависимость максимальной температуры беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 2) от скорости качения

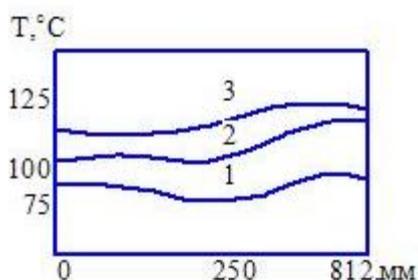


Рисунок 7 – Распределение максимальных температур по ширине (B) беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 2)

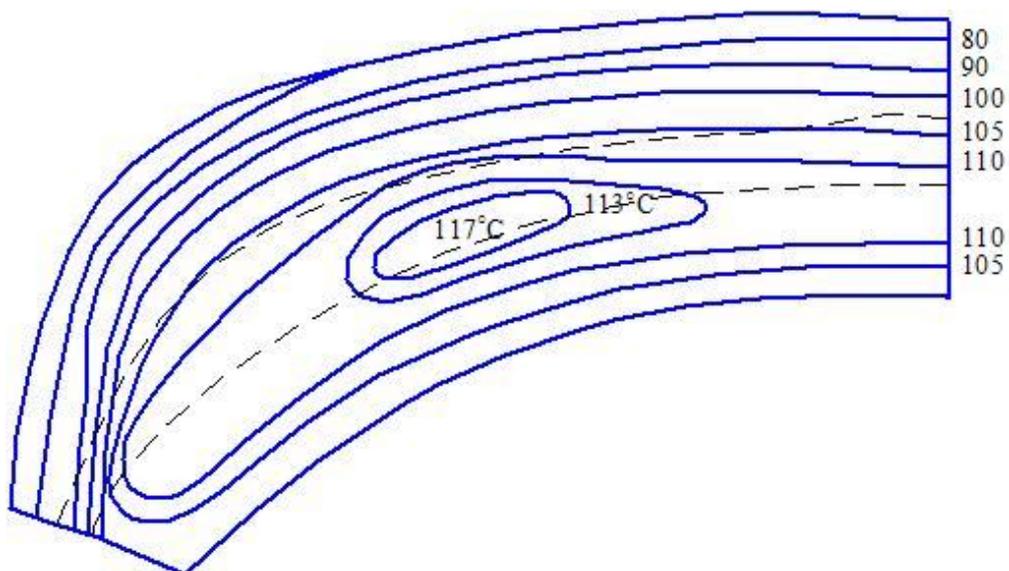


Рисунок 8 – Температурное поле беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 2)

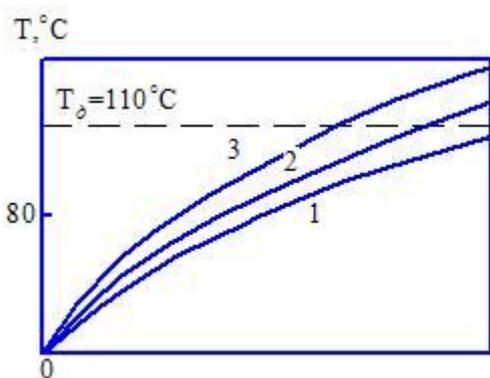


Рисунок 9 – Зависимость максимальной температуры беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 3) от скорости качения

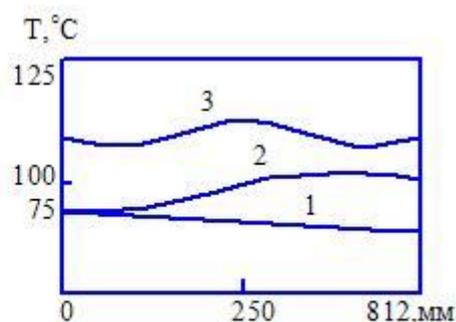


Рисунок 10 – Распределение максимальных температур по ширине беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 3)

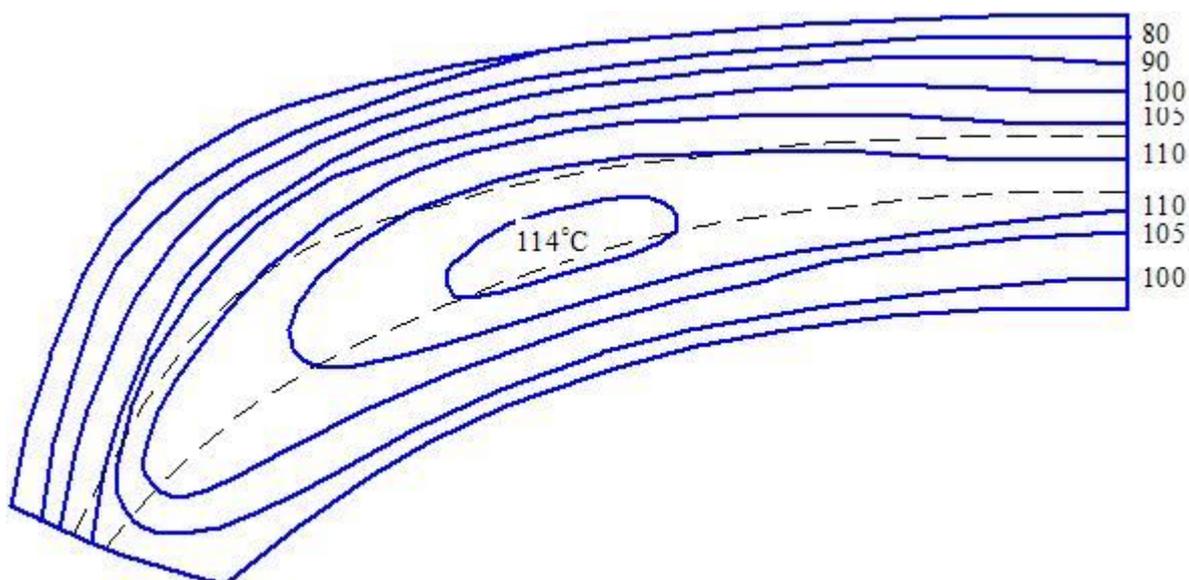


Рисунок 11 – Температурное поле беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 3)

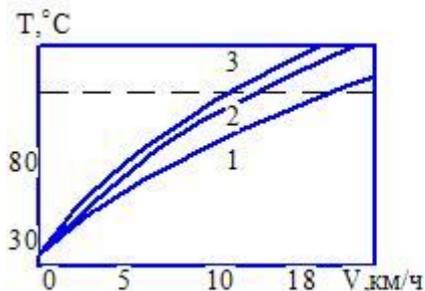


Рисунок 12 – Зависимость максимальной температуры беговой зоны шины 40.00-57(вариант 4) от скорости качения; модуль упругости корда 1000 МПа

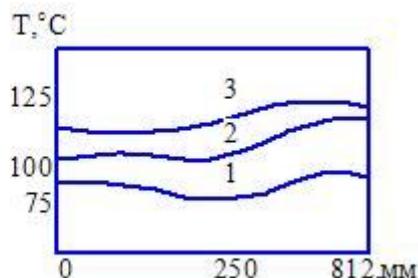


Рисунок 13 – Распределение максимальных температур по ширине беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 4); модуль упругости корда 1000 МПа

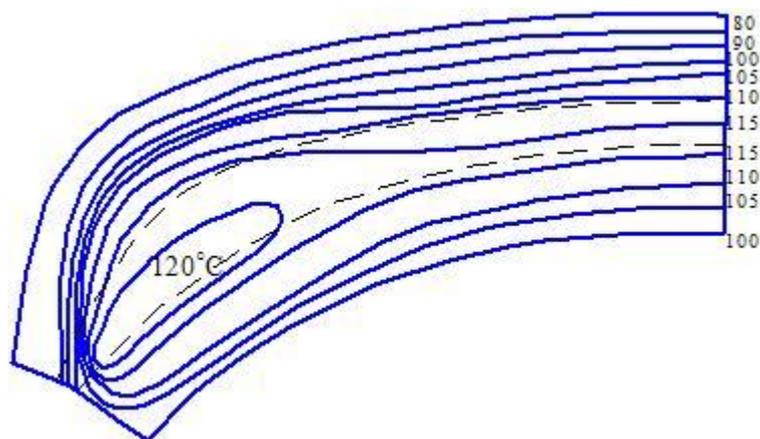


Рисунок 14 – Температурное поле беговой зоны шины 40.00-57 (вариант 4); модуль упругости корда 1000 МПа

Выводы.

1. Анализ зависимости модулей упругости и потерь для анидного корда от деформации подтверждает, что корд является вязкоупругим материалом.
2. Оптимизированы режимы эксплуатации автосамосвалов.
3. Происходит качественное и количественное перераспределение температурных полей. Максимальные температуры возникают в угловой зоне. Производительность снижается на 16-18% (вариант 4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Термоупругое напряженное состояние и потери качения пневматических шин / Индейкин Б.А., Ивденко В.А., Кваша Э.Н., Никитина Л.Б. // Крупногабаритные шины для карьерных автосамосвалов и сельскохозяйственной техники: сборник трудов. – М.: ЦННИТЭнефтехим, 1984. – С.14-24.
2. Кваша Э.Н. Термонапряженное состояние металлокордных пневматических шин / Э.Н.Кваша // Численные методы и математическое моделирование тепломассопереноса: сборник научных трудов. – Днепропетровск: Изд. ДГУ. – 1991. – С.101-106.
3. Кваша Э.Н. Контактные задачи слоистых анизотропных оболочек пневматических шин / Кваша Э.Н. – Днепропетровск: ООО«ЭНЭМ», 2006. – 268с.

4. Горская Л.П. Расчет потерь энергии в элементах катящейся шины / Л.П.Горская, В.А.Пугин // Международная конференция по каучуку и резине. – Киев, 1978. – (Препринт В14).
5. Шумская А.Г. Исследование механических потерь в резинах при условиях, характерных для работы шин / А.Г.Шумская, Л.С.Присс // Международная конференция по каучуку и резине. – Киев, 1978. – (Препринт В13).
6. Карнаухов В.Л. Связанные задачи термовязкоупругости / Карнаухов В.Г. – Киев: Наукова думка. – 1982. – 260с.
7. Лукомская А.И. Механические свойства резинокордных систем / Лукомская А.И. – М.: Химия, 1981. – 324с.
8. Карнаухов В.Г. Термомеханическое поведение вязкоупругих тел при гармоническом нагружении / Карнаухов В.Г., Сенченков И.К., Гуменюк Б.П. – Киев: Наукова думка. – 1985. – 288с.
9. Структурно-механические свойства корда как конструктивного элемента шин: [сборник научных трудов НИИ шинной промышленности / под редакцией В.Ф.Евстратова, З.В.Узиной, И.П.Краковной]. – М.: НИИШП, 1976. – 139с.

УДК 669.013.002.5:539.4

БЕЙГУЛ О.А., д.т.н., доцент
ЛЕПЕТОВА А.Л., к.т.н., доцент
ШМАТКО Д.З., к.т.н., доцент

Днепродзержинский государственный технический университет

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСУЩЕЙ СИСТЕМЫ ПОРТАЛЬНОЙ ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНОЙ МАШИНЫ НА ПНЕВМОКОЛЕСНОМ ХОДУ

Введение. В настоящее время прогресс многих отраслей промышленности неразрывно связан с новыми формами транспортного обслуживания. Стоит задача создания технологических линий, в которых был бы задействован спецавтотранспорт как более гибкий в своем применении, чем железнодорожный. В этом ряду достойное место занимают порталные подъемно-транспортные машины на пневмоколесном ходу [1, 2]. Они нашли широкое применение в лесной и деревообрабатывающей промышленности, при проведении погрузочно-разгрузочных работ в складских помещениях, в последнее время находят применение в технологических линиях заводов черной и цветной металлургии. Как правило, такие машины имеют мало аналогов в практике отечественного машиностроения, поэтому их разработка, проектирование и изготовление требуют нового, нетрадиционного подхода. Для создания конструкций рациональной металлоемкости, вместе с тем удовлетворяющих требованиям долговечности, надежности и эксплуатационной пригодности, необходим целый ряд теоретических и экспериментальных исследований, которые бы гарантировали научно обоснованный подход при создании таких машин.

Постановка задачи. В этой связи работа [1] носит энциклопедический характер, в ней широко представлены порталные подъемно-транспортные машины на пневмоколесном ходу, разные по конструктивному исполнению, по назначению. В ней обозначены методические основы проектирования, изготовления, эксплуатации порталных автомобилей. В работе [2] представлен широкий спектр в разработке подъемно-транспортных машин с порталной компоновкой. Работы [3, 4] – чисто теоретические,

вместе с тем носят локальный характер, будучи посвящены сложным вопросам проектировочных расчетов на прочность порталных несущих систем.

Поскольку результаты, полученные в теоретических исследованиях порталных несущих систем, носят принципиально важный характер, а некоторые параметры разработанных математических моделей можно установить только экспериментальным путем, была поставлена задача экспериментального исследования прототипа технологической порталной машины на пневмоколесном ходу.

В разработанной математической модели [2] получены расчетные нагрузки на лонжероны в продольной вертикальной плоскости, на поперечины в поперечной вертикальной плоскости, динамические нагрузки, направленные на складывание рамы в своей плоскости. Эти нагрузки необходимо определить экспериментально, проверить на адекватность математическую модель, расчетные схемы.

В качестве прототипа технологической порталной машины на пневмоколесном ходу при проведении экспериментального исследования был задействован порталный автомобиль грузоподъемностью 30 тонн фирмы VALMET (Финляндия). Эксперименты проведены в условиях ОАО «Запорожсталь» на ряде технологических дорог.

Результаты работы. В практике исследований нарядно-деформированного состояния силовых элементов конструкций, в частности прочностных испытаний, наиболее широкое распространение получил электротензометрический метод, который успешно фиксирует как статические, так и динамические процессы [5, 6].

Для проведения экспериментального исследования привлекается стандартная тензометрическая аппаратура, удовлетворяющая перечисленным выше требованиям, а именно: усилитель «Топаз-3» и осциллограф К12-22 [7].

Усилитель «Топаз-3» приспособлен под питание постоянным током напряжением 11-15В, имеет 10 усилительных каналов с плавной регулировкой. Сопротивление тензорезисторов от 100 Ом до 400 Ом, максимальный выходной ток составляет 10 мА, нелинейность тарировочной характеристики не превышает 2%, диапазон рабочих температур от -8°C до 45°C . Диапазон рабочих частот от 0 до 8000 Гц.

Светолучевой осциллограф К12-22 приспособлен под питание постоянным током напряжением 27 В, имеет 12 гальванометров, снабжен отметчиком времени с шагом 0,1 с, 1,0 с, 10 с. Регистрация данных осуществляется на рулонной фотобумаге шириной 100 мм, емкость кассеты составляет 20 м. Скорость протяжки фотобумаги имеет следующие фиксированные значения: 8 мм/с, 16 мм/с, 60 мм/с, 130 мм/с, 500 мм/с, 1000 мм/с. Диапазон частот регистрируемых процессов от 0 до 500 Гц.

Динамика нагружения реализуется на следующих характерных режимах: 1) движение по неровностям на горизонтальном участке пути; 2) кососимметричное преодоление фронтального препятствия на грани срыва сцепления ведущих колес; 3) движение по замкнутому циклу технологической дороги. Динамику нагружения оцениваем по величине напряжений в характерных точках несущей системы (рис.1). По окончании испытаний осциллограммы расшифровываются, результаты обрабатываются.

Тензорезисторы 1 и 5, установленные в корневых сечениях стоек, реагируют на изгиб в продольной плоскости, служат для оценки продольных нагрузок. Тензорезисторы 2 и 4, установленные на нижней полке лонжерона рамы в сечениях, где крепятся грузоподъемные штанги, реагируют на изгиб в продольной плоскости, служат для оценки вертикальных нагрузок. Тензорезисторы 3 и 3', установленные в корневом сечении упорной штанги, реагируют на изгиб в поперечной плоскости, служат для оценки поперечных нагрузок.

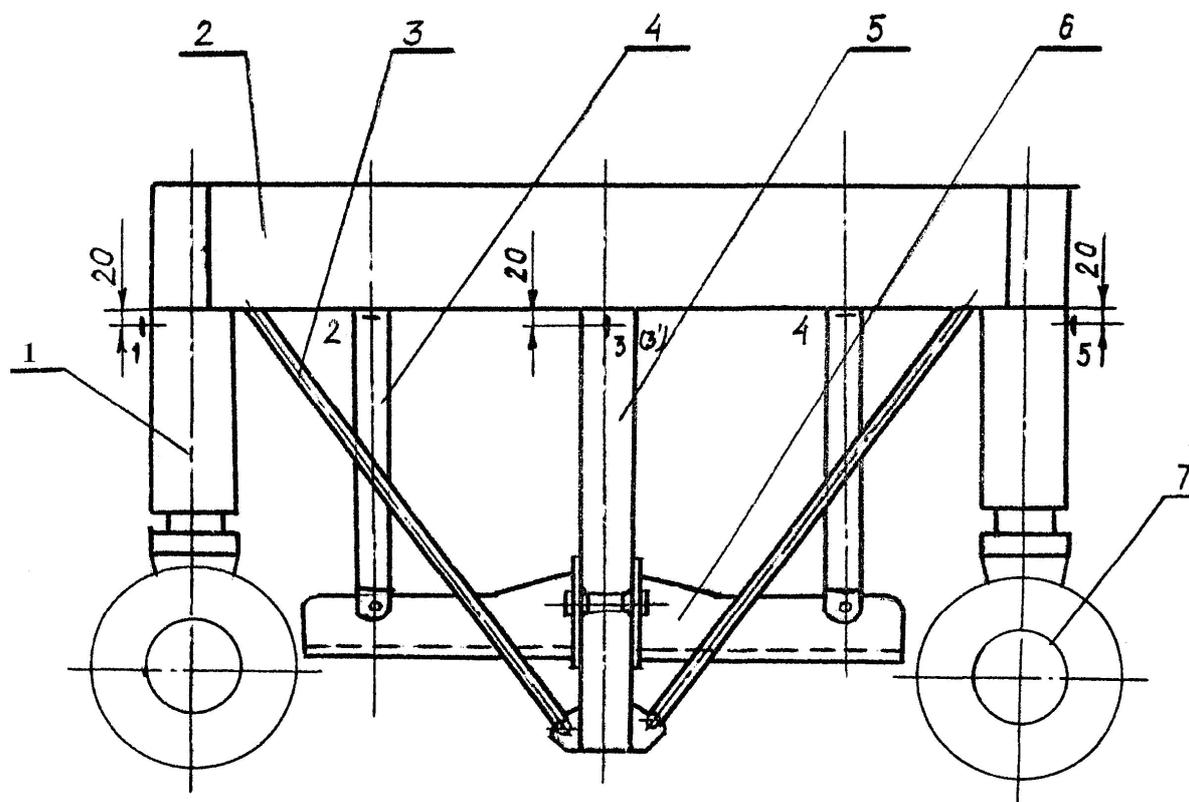
Учитывая, что между напряжениями в конструкции и внешними нагружениями существует однозначная связь, динамика нагружения оценивается по величине напряжений в характерных точках несущей системы, которые показаны на рис. 1:

$$K_{\partial j} = \sigma_{\partial} / \sigma_c, \quad (1)$$

где $K_{\partial j}$ – коэффициент динамичности на j -м режиме нагружения;

σ_{∂} – динамическое напряжение, Па;

σ_c – статическое напряжение, Па.



1 – стойка; 2 – лонжерон; 3 – подкос; 4 – штанга грузоподъемная;
5 – штанга упорная; 6 – ложемент; 7 – колесо

Рисунок 1 – Схема установки тензорезисторов

Коэффициент динамичности для продольной нагрузки определяется отношением сил:

$$K_{\partial 2} = P_{\partial} / P_c, \quad (2)$$

где $K_{\partial 2}$ – коэффициент динамичности на втором режиме нагружения;

P_{∂} – динамическая сила, Н;

P_c – статическая сила, Н.

Выражая продольную силу через динамическое напряжение в корневом сечении стойки, а ее статическую составляющую по известной формуле через коэффициент сцепления, выражение (2) переписываем в следующем виде:

$$K_{\partial 2} = \chi \sigma_{\partial}, \quad (3)$$

где χ – выражается зависимостью

$$\chi = \frac{2W_{zc}}{(m_k + m_r)gfH}, \quad (4)$$

где χ – величина, постоянная для данной конструкции, Па⁻¹;

W_{zc} – момент сопротивления изгибу корневого сечения стойки, м³;

m_k – масса снаряженного автомобиля, кг;

m_r – масса полезного груза, кг;

g – ускорение свободного падения, м/с²;

f – коэффициент сцепления;

H – высота стойки, м.

Напряжения, снимаемые с тензорезисторов, связаны с отклонением луча гальванометра зависимостью [7]

$$\sigma = ch, \quad (5)$$

где σ – напряжение, Па;

c – постоянная тарировки тензорезистора, Па/мм;

h – отклонение луча гальванометра, мм.

Тогда выражения (1) и (2) принимают другой, более удобный для практического исследования вид:

$$K_{\partial j} = h_{\partial} / h_c, \quad (6)$$

где h_{∂} – отклонение луча гальванометра при динамическом нагружении, мм;

h_c – отклонение луча гальванометра при статическом нагружении, мм.

$$K_{\partial 2} = c\chi h_{\partial}. \quad (7)$$

Данные расшифровки и обработки осциллограмм на первом режиме нагружения сведены в табл.1, на втором режиме – в табл.2, на третьем режиме – в табл.3 и 4, где приняты следующие обозначения: N_T – номер точки; N_3 – номер замера; $K_{\partial j}^{(i)}$ – максимальное значение коэффициента динамичности в i -м замере на j -м режиме нагружения; $K_{\partial j}$ – усредненный коэффициент динамичности на j -м режиме нагружения.

Таблица 1 – Данные испытаний по определению коэффициентов динамичности $K_{\partial 1}$

N_T	N_3	h_c , мм	h_{∂} , мм	$K_{\partial 1}^{(i)}$	$K_{\partial 1}$
2	1	26	41,0	1,41	1,45
	2		43,0	1,45	
	3		44,0	1,52	
4	1	25	32,5	1,30	1,45
	2		35,0	1,44	
	3		39,0	1,56	
3	1	11	14,5	1,32	1,20
	2		13,0	1,18	
	3		12,0	1,09	
3'	1	8	10,5	1,31	1,20
	2		9,5	1,19	
	3		9,0	1,12	

Таблица 2 – Данные испытаний по определению коэффициентов динамичности $K_{\partial 2}$

N_T	N_3	c , Па/мм	χ , Па ⁻¹	h_{∂} , мм	$K_{\partial 2}^{(i)}$	$K_{\partial 2}$
1	1	$8 \cdot 10^6$	$0,005 \cdot 10^{-6}$	25	1,01	1,10
	2			30	1,20	
	3			27	1,08	
5	1	$6,5 \cdot 10^6$		31	1,01	
	2			37	1,20	
	3			34	1,10	

Таблица 3 – Данные испытаний по определению коэффициентов динамичности $K_{\partial 3}$

N_T	N_3	c , Па/мм	χ , Па ⁻¹	h_{∂} , мм	$K_{\partial 3}^{(i)}$	$K_{\partial 3}$
1	1	$8 \cdot 10^6$	$0,006 \cdot 10^{-6}$	12	0,48	0,72
	2			15	0,60	
	3			27	1,08	
5	1	$6,5 \cdot 10^6$		14,5	0,47	
	2			19	0,62	
	3			32	1,04	

Таблица 4 – Данные испытаний по определению коэффициентов динамичности $K_{\partial 3}$

N_T	N_3	h_c , мм	h_{∂} , мм	$K_{\partial 3}^{(i)}$	$K_{\partial 3}$
2	1	29	30,5	1,05	1,15
	2		32,0	1,10	
	3		37,0	1,28	
4	1	25	26,0	1,04	
	2		28,0	1,12	
	3		33,0	1,32	
3	1	11	11,5	1,05	1,12
	2		13,0	1,18	
	3		12,0	1,09	
3'	1	8	8,5	1,06	
	2		9,5	1,18	
	3		9,0	1,13	

Выводы. Проведенное экспериментальное исследование портального автомобиля наполняет математическую модель формирования внешних нагрузок, восприятия и передачи внутренних усилий конкретным смыслом. Получены реальные коэффициенты динамичности, которые характеризуют эксплуатационные нагрузки, определяют расчетные нагрузки и служат основанием для разработки и создания портальных несущих систем подъемно-транспортных машин с рациональной металлоемкостью. Для расчет-

ных нагрузок можно рекомендовать следующие значения коэффициентов динамичности: $K_{\partial 1} = 1,5$; $K_{\partial 2} = 1,2$; $K_{\partial 3} = 1,2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беккер И.Г. Портальные автомобили / И.Г.Беккер. – М.: Машиностроение, 1971. – 316с.
2. Технологічні і конструктивні параметри несучих систем порталних підйомно-транспортних машин / [О.О.Бейгул, Д.З.Шматко, О.М.Коробочка, Г.Л.Лепетова]. – Дніпродзержинськ: ДДГУ, 2007. – 167с.
3. Оптимизация открытых профилей несущих систем по критерию минимальной крутильной жесткости / [О.А.Бейгул, А.Н.Коробочка, Д.З.Шматко, Л.В.Остапенко] // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ДНВП «Системні технології». – 2001. – Вип. 2 (13). – С.17-20.
4. О проектировочном расчете статически неопределимой системы / [О.А.Бейгул, Д.З.Шматко, И.О.Бейгул, Н.А.Лепетова] // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ДНВП «Системні технології». – 2001. – Вип. 3 (14). – С.100-105.
5. Шматко Д.З. Экспериментальные исследования металлургической порталной машины на пневмоколесном ходу / Д.З.Шматко, А.Н.Коробочка // Системні технології: регіон. міжвуз. зб. наук. праць. – Дніпропетровськ: ДНВП «Системні технології». – 2003. – Вип. 4 (27). – С.124-128.
6. Бейгул О.А. Основы проектирования, расчеты на прочность металлургических платформ / О.А.Бейгул. – К.: ИСМО МО Украины, 1997. – 227с.
7. Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений / [Б.С.Касаткин, А.Б.Кудрин, Л.М.Лобанов и др.]. – К.: Наукова думка, 1981. – 584с.

УДК 517.5

ДЕРЕЦЬ Е. В., к.ф.-м.н., доцент

Днепропетровский государственный технический университет

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Введение. Методы приближения интегралов являются традиционным объектом исследования в теории приближений. Первоначально исследование квадратурных формул было тесно связано с задачами вычислительной математики. Впоследствии развитие методов численного анализа привело к возникновению экстремальной задачи теории квадратур, суть которой состоит в отыскании наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы и вычислению точной оценки её остатка. Общая постановка этой задачи и первые основополагающие результаты принадлежат С.М.Никольскому и А.Н.Колмогорову. Решению таких задач для различных классов функций посвящено большое количество работ (например, [1-4] и библиография к ним). Однако следует отметить, что нахождение оптимальной для заданного класса функций квадратурной формулы связано с преодолением значительных трудностей, в особенности в многомерном случае. В связи с этим в теории квадратур рассматриваются также задачи, связанные с получением порядковых оценок и исследованием асимптотики погрешности наилучшей для заданного класса функций квадратурной формулы (в многомерном случае используется также термин «кубатурные формулы»).

Постановка задачи. В настоящей работе рассматриваются классы функций $H_{G,\rho}^\omega$, состоящие из функций f , определенных на измеримом по Жордану множестве $G \subset R^n$, для которых $|f(x) - f(y)| \leq \omega(\rho(x, y))$ для всех $x, y \in G$, где $\omega(t)$ – заданный модуль непрерывности, $\rho(x, y)$ – метрика, заданная в пространстве R^n . Будем рассматривать кубатурные формулы вида $\int_G f(x) dx \approx \sum_{k=1}^m c_k f(x_k)$, определенные узлами $X_m = \{x_k\}_{k=1}^m$, $x_k \in G$ и коэффициентами $C_m = \{c_k\}_{k=1}^m$, $c_k \in R$. Погрешностью кубатурной формулы на классе Ω называют величину

$$R_m(\Omega, C_m, X_m) = \sup_{f \in \Omega} \left| \int_G f(x) dx - \sum_{k=1}^m c_k f(x_k) \right|.$$

Кубатурная формула с узлами C_m^* и коэффициентами X_m^* называется оптимальной на классе Ω , если $R_m(\Omega) = \inf_{C_m, X_m} R_m(\Omega, C_m, X_m) = R_m(\Omega, C_m^*, X_m^*)$.

Асимптотика при $m \rightarrow \infty$ величины $R_m(H_{G,\rho}^\omega)$ найдена в [5]. Справедлива следующая теорема.

Теорема А [5]. Пусть $G = \{x \in R^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$, $\rho(x, y) = \|x - y\|$, модуль непрерывности $\omega(t)$ таков, что для любого $c > 0$ существует предел $\lim_{x \rightarrow +0} \omega(cx)/\omega(x) = g_\omega(c)$. Тогда существует предел $\lim_{m \rightarrow \infty} R_m(H_{G,\rho}^\omega)/\omega(x^{-1/m}) = E$, где $0 < E < \infty$. При этом в случае, когда норма $\|\cdot\|$ такова, что попарно непересекающимися сдвигами шара $\{x \in R^n : \|x\| \leq 1\}$ можно покрыть все пространство R^n , кроме множества меры 0 , $E = \frac{n}{n + \alpha} (\text{mes } B_\rho)^{-\alpha/n}$, где $\alpha = \log_2 g_\omega(2)$, $B_\rho = \{x \in R^n : \rho(x, 0) \leq 1\}$.

Задача оптимизации кубатурных формул на классах $H_{G,\rho}^\omega$ при различных ограничениях на метрику и модуль непрерывности изучалась в работах [3], [6]-[11].

В настоящей работе получена асимптотика величины E по размерности пространства в случае, когда $G = \{x \in R^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$, а модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условиям теоремы А. При этом используются оценки величины $R_m(H_{G,\rho}^\omega)$, полученные в [12] для случая $\omega(t) = t$.

Результаты работы. Теорема. Пусть $\rho(x, y) = \|x - y\|$, где $\|\cdot\|$ – произвольная норма в пространстве R^n , модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условиям теоремы А, $G = \{x \in R^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 3$, $E_n = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(H_{G,\rho}^\omega)/\omega(x^{-1/m})$. Тогда

$$\frac{n}{n + \alpha} (\text{mes } B_\rho)^{-\alpha/n} \leq E_n \leq (n \ln n + n \ln \ln n + 5n)^{\alpha/n} (\text{mes } B_\rho)^{-\alpha/n}, \quad (1)$$

при этом, если $\rho(x, y) = \rho_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{(n/(2e))^\alpha} = 1, \quad (2)$$

если же $\rho(x, y) = \rho_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2 \right)^{1/2}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n}{(n/(2\pi e))^{\alpha/2}} = 1. \quad (3)$$

Доказательство. Введем необходимые для доказательства теоремы обозначения.

Пусть множество $G \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану, а метрика ρ индуцирована некоторой нормой. Для любого множества $X_m = \{x_k\}_{k=1}^m \subset G$ положим

$R(X_m) = \sup_{x \in G} \rho(X_m, x)$. Величину $R(X_m)$ назовем радиусом покрытия, заданного

множеством X_m . Покрытие минимального радиуса назовем оптимальным. Радиусом

оптимального покрытия назовем величину $R_m = \inf_{X_m \subset G} \sup_{x \in G} \rho(X_m, x)$. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^\infty -$

последовательность точек пространства \mathbb{R}^n , K – множество с конечной положительной мерой Лебега $\text{mes } K$. Обозначим через C полуоткрытый куб с центром

$c = (c^1, c^2, \dots, c^n)$ и длиной ребра $s > 0$, т. е. множество вида

$$\begin{aligned} c^1 - \frac{1}{2}s &\leq x^1 < c^1 + \frac{1}{2}s, \\ c^2 - \frac{1}{2}s &\leq x^2 < c^2 + \frac{1}{2}s, \\ &\dots\dots\dots, \\ c^n - \frac{1}{2}s &\leq x^n < c^n + \frac{1}{2}s. \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\rho_{\min}(W, C) = \frac{1}{\text{mes } C} \sum_{K+a_i \subset C} \text{mes}(K + a_i),$$

$$\rho_{\min}(W) = \lim_{s \rightarrow \infty} \inf_{s(C) \geq s} \rho_{\min}(W, C),$$

где W – система множеств $K + a_1, K + a_2, \dots$, $s(C)$ – длина ребра куба C . Плотностью покрытия $\theta_n(K)$ пространства \mathbb{R}^n сдвигами множества K называется величина

$\theta_n(K) = \inf_K \rho_{\min}(W)$, где точная нижняя грань берется по всем системам W сдвигов множества K , образующим покрытие всего пространства.

В ходе доказательства теоремы А в [5] было получено неравенство

$$E_n \geq \frac{n}{n + \alpha} (\text{mes } B_\rho)^{-\alpha/n},$$

поэтому для доказательства (1) остается получить оценку величины E_n сверху. Согласно [13] при $n \geq 3$ имеет место следующее неравенство:

$$\theta_n(B_\rho) \leq n \ln n + n \ln \ln n + 5n.$$

В силу [14] $\theta_n(B_\rho) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m \text{mes } B_\rho[R_m]}{\text{mes } G}$, где $B_\rho[R_m] = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, 0) \leq R_m\}$.

Так как $\text{mes } G = 1$ и $\text{mes } B_\rho[R_m] = R_m^n \text{mes } B_\rho$, то для любого $\varepsilon > 0$ для достаточно больших m справедливо неравенство

$$R_m^n \leq \frac{n \ln n + n \ln \ln n + 5n}{m \text{mes } B_\rho} (1 + \varepsilon).$$

Кроме того, из определения величины R_m следует, что для любого $m = 1, 2, \dots$

$$R_m (H_{G, \rho}^\omega) \leq \omega(R_m).$$

Из последних двух неравенств и ограничений на модуль непрерывности следует оценка

$$E_n \leq (n \ln n + n \ln \ln n + 5n)^{\alpha/n} (\text{mes } B_\rho)^{-\alpha/n}.$$

Таким образом, соотношение (1) доказано. Равенства (2) и (3) следуют из оценки (1) и известных формул

$$\text{mes } B_{\rho_1} = \frac{2^n}{n!}, \quad \text{mes } B_{\rho_2} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)},$$

$$\sqrt[n]{n!} \sim n/e, \quad \sqrt[n]{\Gamma(n/2)} \sim \sqrt{n/(2e)} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема полностью доказана.

Выводы. В работе получена точная асимптотика погрешности кубатурных формул, оптимальных для классов функций многих переменных, заданных мажорантой модуля непрерывности по отношению к некоторой метрике. Полученные результаты могут быть использованы при построении асимптотически оптимальных кубатурных формул и оценке погрешности таких формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С.М. Квадратурные формулы / Никольский С.М. – М.: Наука, 1988. – 327с.
2. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул / Соболев С.Л. – М.: Наука, 1974. – 298с.
3. Моторный В.П. Исследования Днепропетровских математиков по оптимизации квадратурных формул / В.П.Моторный // Укр. мат. журн. – 1990. – Т. 42, вып.1. – С.18-33.

4. Женсыкбаев А.А. Моносплайны минимальной нормы и наилучшие квадратурные формулы / А.А.Женсыкбаев // Успехи мат. наук. – 1981. – Т. 36, №4. – С.107-159.
5. Chornaya E.V. On the optimization of weighted cubature formulae on certain classes of continuous functions / E.V.Chornaya // East journal of approximations. – Vol. 1, № 1. – 1995. – P.47-60.
6. Лебедь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций / Г.К.Лебедь // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, вып. 57. – С.577-586.
7. Лебедь Г.К. О квадратурных формулах с наименьшей оценкой остатка на некоторых классах функций / Г.К.Лебедь // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1970. – Т. 34, вып. 3 – С.639-661.
8. Бабенко В.Ф. Асимптотически точная оценка остатка наилучших для некоторых классов функций кубатурных формул / В.Ф.Бабенко // Мат. заметки. – 1976. – Т. 19, вып. 3. – С.313-322.
9. Бабенко В.Ф. Точная асимптотика остатков оптимальных для некоторых классов функций весовых кубатурных формул / В.Ф.Бабенко // Мат. заметки. – 1976. – Т. 20, вып. 4. – С.589-596.
10. Сухарев А.Г. Об одном подходе к исследованию эффективности квадратурных формул / А.Г.Сухарев // Кибернетика. – 1981. – № 6. – С.75-80.
11. Маунг Чжо Ньюн. Оптимальные кубатурные формулы на классах $D_2^{1,c}$ и D_2^{1,l_1} / Маунг Чжо Ньюн, И.Ф.Шарыгин // Вопр. вычислительной и прикл. математики. – Ташкент: Ин-т кибернетики АН Уз ССР. – 1971. – С.22-27.
12. Сухарев А Г. К вопросу о построении оптимальных квадратур для функций многих переменных / А.Г.Сухарев // Кибернетика. – 1982. – № 1. – С.7-11.
13. Rogers С.А. A note on covering / С.А.Rogers // Mathematics. A Journal of Pure and Applied Mathematics. – 1957. – V. 4, Part 1, № 7. – P.1-6.