

РОЗДІЛ «ПРОКАТНЕ ВИРОБНИЦТВО»

УДК 539.374.001.8

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.162

ЧИГИРИНСКИЙ В.В., д.т.н., профессор
КОСМИНЕНКО С.А., магистр
ХАЛЯВКА М.А., магистр
ЛЕВИЦКАЯ В.А.* , преподаватель

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское
*Общеобразовательная школа №1, г. Вараж Ровенской области

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРОЦЕССА ПРОКАТКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Введение. Современное развитие производства требует новых подходов решения многих практических задач, включая современные разработки математических моделей прогноза и управления многофункциональных, сложных, быстроизменяющихся во времени процессов металлургии и машиностроения. Одной из основных задач в теории обработки металлов давлением является определение напряженного состояния в зоне пластического течения. Степень допущений решаемых задач определяет степень упрощений результата теории и практики.

В теории пластичности можно отметить следующую схему решаемых прикладных задач – это половинчатые решения либо в напряжениях, либо в деформациях. Такие подходы получили широкое распространение как в отечественной литературе, так и за рубежом. Предлагается более сложный и более эффективный подход, когда задача ставится и решается комплексно, как замкнутая. В этом случае качественно и количественно изменяется конечный результат. Появляется возможность аналитически исследовать процесс пластического формоизменения как в напряжениях, так и в деформациях, получить модель пластической среды, учесть влияние разных зон друг на друга, использовать единые выражения для всего очага деформации.

Известны решения линейной задачи теории пластичности для определения контактных напряжений в очаге деформации при простом процессе прокатки [1, 2]. В этих случаях очаг деформации разбивается на несколько зон, для каждой из которых применяется свой закон трения, Амонтона или Кулона. В работах [3-6] представлен новый метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций. Однако его использование в прикладных задачах ограничено только одним процессом осадки с использованием простейших граничных условий. Можно показать, что усложнение условий на контакте не ограничивает возможности предлагаемого метода, появляется возможность получить новый результат задачи применительно к простому процессу прокатки, характеризующему асимметричное нагружение.

Постановка задачи. Общая постановка замкнутой плоской задачи теории пластичности известна [7, 8]. Состоит она из шести дифференциальных и алгебраических уравнений теории пластичности, граничных условий в напряжениях и скоростях деформации:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot k^2,$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F,$$

$$\xi_x + \xi_y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x},$$

$$\tau_n = -k \cdot \text{Sin}[A\Phi - 2 \cdot \varphi],$$

$$\gamma_n = -2\beta \cdot \text{Sin}[B\Phi - 2 \cdot \varphi].$$

Результаты работы. Использование тригонометрической и фундаментальной подстановки позволяет в (1) определить аналитическое решение для напряжений в виде [6, 7]:

$$\sigma_x = -H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0,$$

$$\sigma_y = -3H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Cos}A\Phi + k_0, \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = H_\sigma \cdot \exp\theta \cdot \text{Sin}A\Phi$$

при $\theta_x = -A\Phi_y$, $\theta_y = A\Phi_x$; $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$, $A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0$,

где H_σ – функция координаты x , определяющая граничные условия на концах очага деформации; θ и $A\Phi$ – координатные гармонические функции, определяемые очевидными условиями в очаге деформации. Нижние индексы координатных функций обозначают частные производные.

Из решения [5, 7] следует, что

$$H_\sigma = \frac{C_0 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) + C_1 \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right)}{l}, \quad (3)$$

где C_0 , C_1 , l – постоянные, определяющие напряжения на входе и выходе из очага деформации, длина очага деформации. Подставляя условия на контакте в (2), с учетом условия пластичности, можно записать

$$C_0 = \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp\theta_0 \cdot \text{Cos}A\Phi_0},$$

$$C_1 = \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp\theta_1 \cdot \text{Cos}A\Phi_1}, \quad (4)$$

где k_0 , k_1 – сопротивления пластической деформации сдвига на входе и выходе из очага деформации; θ_0 , θ_1 – функции θ на входе и выходе из очага деформации; $A\Phi_0$, $A\Phi_1$ – значение функции $A\Phi$ на входе и выходе из очага деформации; ξ_0 и ξ_1 – постоянные, учитывающие влияние натяжения или подпора.

Из уравнения Лапласа (2) получаем простейшее его решение для напряжений с учетом граничных условий (1) в виде

$$A\Phi' = - \left[AA_6' \cdot \left(\frac{l}{2} + x \right) \cdot y + AA_6'' \cdot \left(\frac{l}{2} - x \right) \cdot y - 2 \cdot \varphi \right], \quad (5)$$

где φ – угол наклона площадки контакта. С учетом соотношений Коши-Римана [3]

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x,$$

и уравнения Лапласа (2) определяем функцию θ , действительно

$$\theta' = -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot [(x + x_0)^2 - y^2] - (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot (x - x_0). \quad (6)$$

С учетом (5) и граничных условий определяем нейтральный угол, показывающий положение нейтрального сечения в очаге деформации и значение постоянной AA_6 . Действительно, в нейтральном сечении касательное напряжение на контакте равно нулю, т.е. при $x = x_0$, $y = h_\gamma / 2 \approx h_1 / 2$, $\varphi = \gamma$, $A\Phi' = 0$

$$0 = - \left[AA_6' \cdot \left(x_0 + \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} + AA_6'' \cdot \left(x_0 - \frac{l}{2} \right) \cdot \frac{h_\gamma}{2} - 2 \cdot \gamma \right],$$

где x_0 – координата, определяющая положение нейтрального сечения, при этом

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \frac{AA_6' \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}{2 + (AA_6' + AA_6'') \cdot R \cdot \frac{h_1}{2}}. \quad (7)$$

Для определения в (7) значения нейтрального угла необходимо знать постоянные величины AA_6 . Запишем граничные условия на краю очага деформации, на выходе из очага деформации в виде

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = h_1 / 2, \quad \varphi = 0, \quad A\Phi' = -A\Phi_1, \quad \theta = \theta_1,$$

на входе

$$x = -\frac{l}{2}, \quad y = h_0 / 2, \quad \varphi = \alpha, \quad A\Phi' = A\Phi_0, \quad \theta = \theta_0,$$

где h_1 – высота полосы на выходе из очага деформации, l – длина очага деформации.

После подстановки граничных условий для значений AA_6 имеем

$$AA_6' = 2 \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{l \cdot h_1}, \quad AA_6'' = 2 \cdot \frac{A\Phi_0 + 2 \cdot \alpha}{l \cdot h_0} \quad (8)$$

из (5), с учетом (8) и упрощений, при $A\Phi_0 = A\Phi_1$, получим

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{(A\Phi_1 + \alpha) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \right)}, \quad (9)$$

$$A\Phi_1 = f \cdot (1 - f).$$

Сравнивая численные значения для нейтрального угла (9) и формулу Эжелунда-Павлова, качественно и количественно получаем близкий результат. Необходимо под-

черкнуть, что формула Эжелунда-Павлова получена при условии равномерного распределения контактного нормального напряжения. Постоянные значения θ_0 и θ_1 с учетом (6) и граничных условий запишутся

$$\begin{aligned}\theta_0' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot \left(l_{om}^2 - \frac{h_0^2}{4} \right) + (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot l_{om}, \\ \theta_1' &= -\frac{1}{2} \cdot (AA_6' + AA_6'') \cdot \left(l_{on}^2 - \frac{h_1^2}{4} \right) - (AA_6' \cdot l_{om} - AA_6'' \cdot l_{on}) \cdot l_{on},\end{aligned}\quad (10)$$

учитывая, что $l_{om} = \frac{l}{2} + x_0$, $l_{on} = \frac{l}{2} - x_0$.

С учетом выражений (2)-(6), (8) и (9), (10) были получены рабочие выражения для расчета напряженного состояния металла в очаге деформации при прокатке. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0, \\ \sigma_y &= -3 \cdot \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0, \\ \tau_{xy} &= \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x \right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x \right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \sin A\Phi.\end{aligned}\quad (11)$$

По формулам (11) были подсчитаны значения относительных контактных напряжений, представленных на рис.1-3.

Особенностью данного решения является асимметричный характер нагружения, что приводит к сдвигу экстремальных точек эпюр в сторону выхода металла из очага деформации как по нормальным, так и по касательным напряжениям. Такой сдвиг определяется появлением в решении угла наклона давящей поверхности φ , который, в общем, является переменной величиной

$$\varphi = \frac{\frac{l}{2} - x}{R},$$

где R – радиус вала, x – переменная координата. Из выражения следует, что на входе в очаг деформации угол φ может принимать значение угла захвата α , а на выходе из зоны обжатия, $x = \frac{l}{2}$, равен нулю.

Кроме этого, введение функции H_σ , (3), позволяет учесть в одном выражении сопротивление пластической деформации на входе и выходе из очага.

Выражения (11) определяют компоненты тензора напряжений в зоне пластического формоизменения для всего объема очага деформации, включая зоны отставания и опережения.

В силовом отношении появление в выражении (5) угла предполагает его „компенсацию”, т.е. сдвиг вдоль очага деформации линии раздела течения металла в сторону выхода из очага деформации.

Есть еще один параметр – „координатный” x_0 , определяющий сдвиг эпюры контактных напряжений вдоль оси в направлении прокатки.

Он присутствует в показателе экспоненты θ и является определяющим в смещении экстремальных точек на эпюрах контактных нормальных и касательных напряжений. На рис.1-3 представлены результаты расчета по выражению (11).

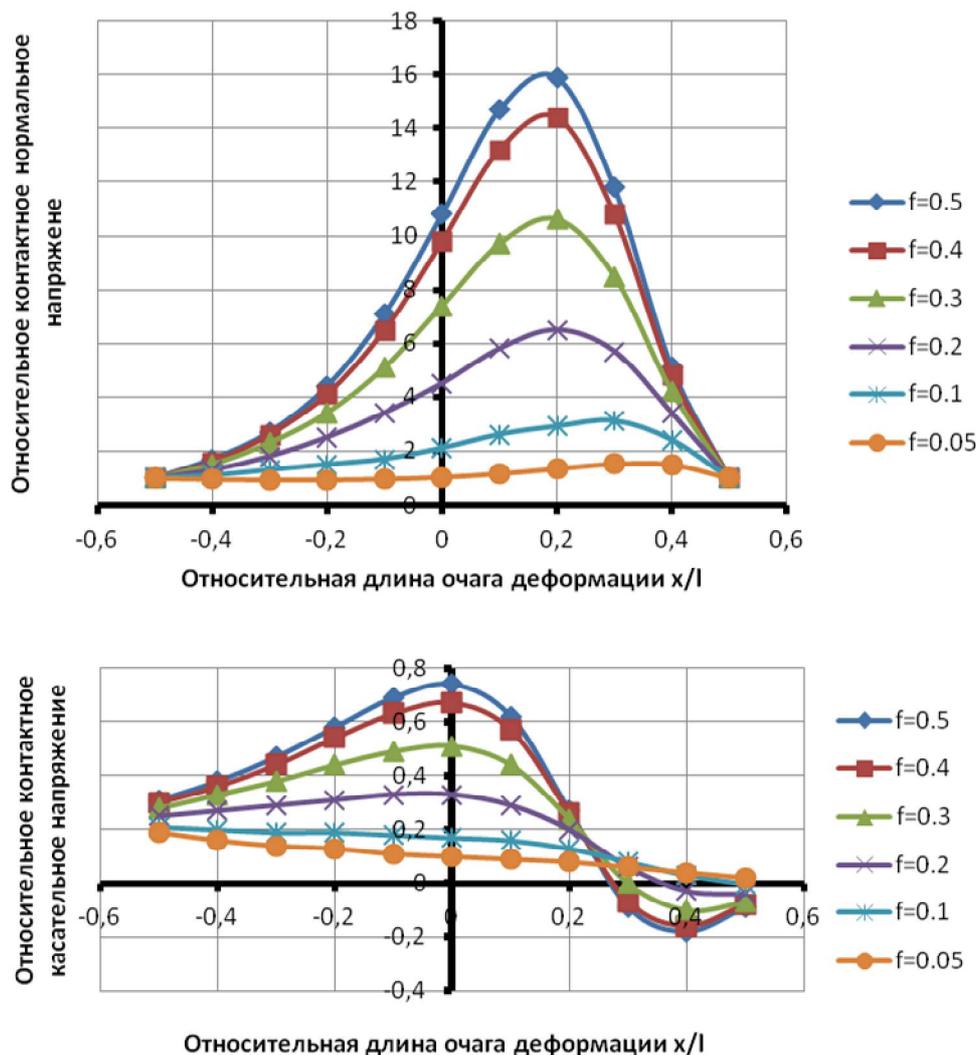


Рисунок 1 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 15,49 ; \alpha = 0,077 \right)$$

С ростом коэффициента трения значения контактных напряжений увеличиваются, хотя для разных факторов формы – по-разному.

При этом наблюдается разное смещение максимальных значений нормальных напряжений вдоль очага деформации в ту или иную стороны.

С изменением коэффициента трения экстремальные точки смещаются в сторону входа или выхода металла в валки.

Следует отметить, что выражения (11) являются едиными для всего очага деформации. На рис.1-3 видно, что математически реально представлены переходные зоны очага деформации. Нет разрывов эпюр контактных напряжений в нейтральном сечении.

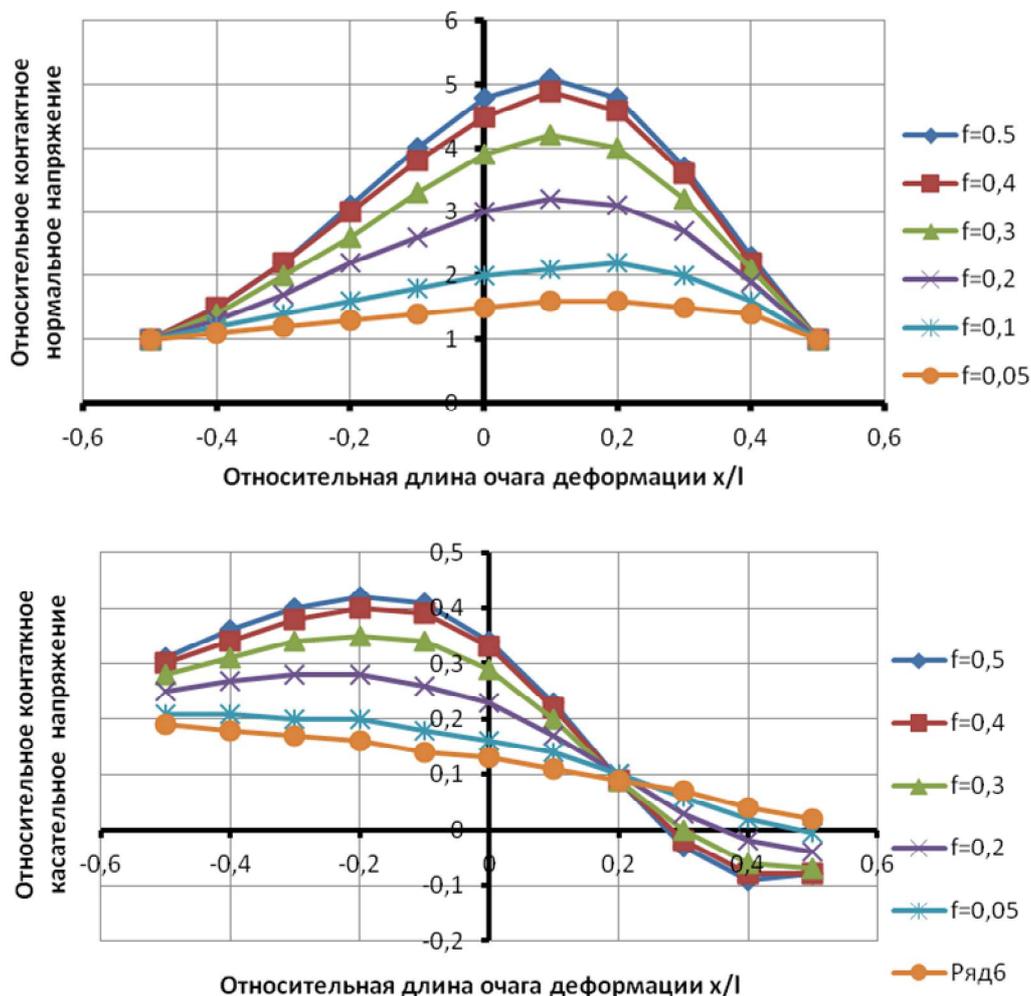


Рисунок 2 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 8,61; \alpha = 0,077 \right)$$

Длина зоны опережения изменяется с изменением контактного трения. При этом касательные контактные напряжения имеют максимальные значения в зонах отставания и опережения, смещаясь с изменением коэффициента трения.

Для минимальных значений коэффициента трения распределение касательного напряжения по длине имеет линейный характер.

Просматривается запредельное состояние, когда угол захвата превышает угол трения. Особенно это видно при прокатке тонких полос, когда эпюра нормальных контактных напряжений становится вогнутой на большей части очага деформации ($\frac{l}{h} = 15,49; \alpha = 0,05$).

С уменьшением фактора формы распределение нормальных напряжений становится более равномерным [9].

Кроме того, при прокатке более толстых полос запредельный случай просматривается только по касательным напряжениям, когда имеет место только одна зона – зона отставания, рис.3.

Реакция нормальных напряжений на это состояние отсутствует. Возможно, это связано с прокаткой полосы с отрицательным опережением [10].

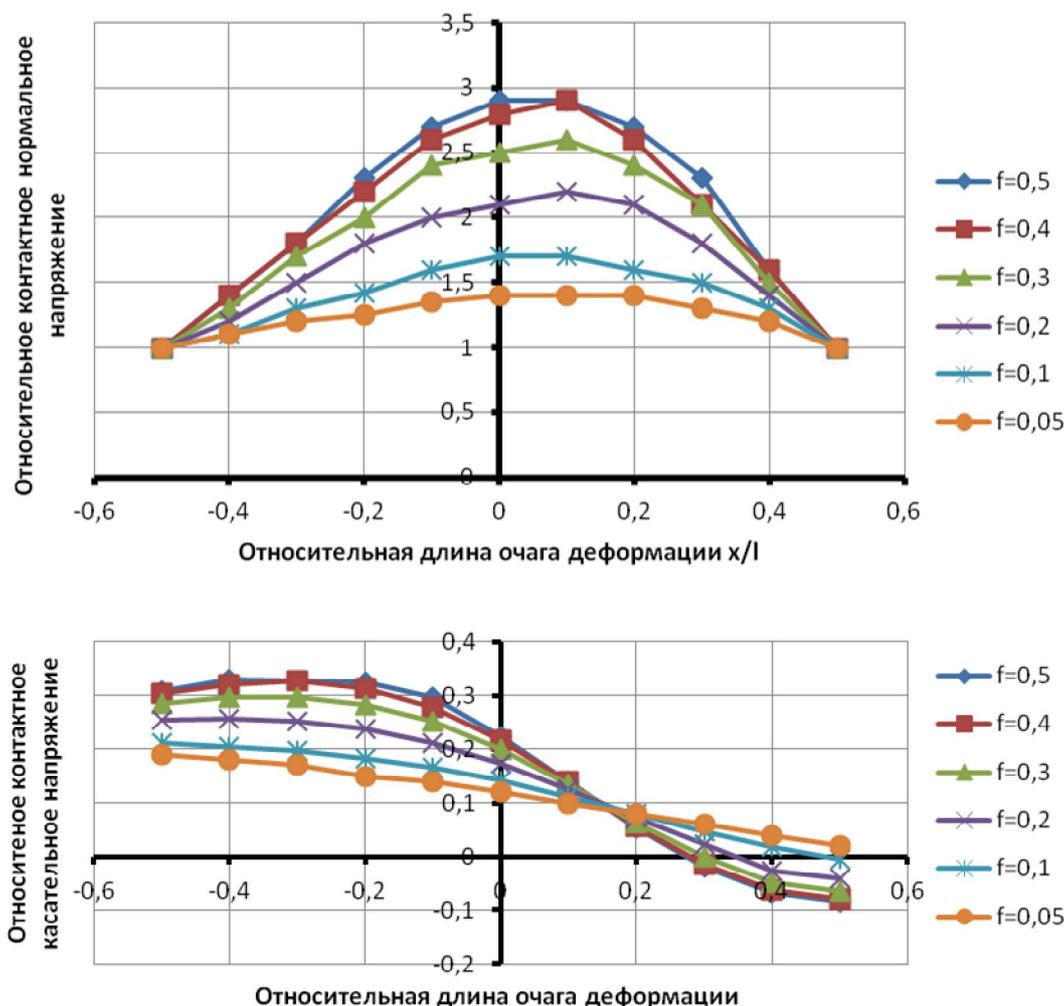


Рисунок 3 – Распределение нормальных и касательных контактных напряжений вдоль очага деформации при прокатке в зависимости от коэффициента трения

$$f \left(\frac{l}{h} = 5,164 \quad \alpha = 0,077 \right)$$

На всех эпюрах касательных напряжений есть точки, в которых пересекаются все кривые независимо от фактора формы и коэффициента трения. При этом точка смещается в сторону входа в очаг деформации при уменьшении фактора формы.

Выводы.

1. На базе метода гармонических функций предложено решение асимметричной плоской задачи теории пластичности.
2. Изменяющийся угол наклона контактной поверхности приводит к изменению напряженного состояния зоны обжатия, проявляющее себя разным смещением экстремальных точек вдоль очага деформации.
3. Предложенные выражения правильно качественно и количественно характеризует напряженное состояние металла при асимметричном нагружении металла.

4. Напряженное состояние в очаге деформации определяется едиными выражениями.
5. Указанные исследования показывают, что решение в гармонических функциях позволяет определять напряжения для граничных условий разной сложности.
6. Предложенное решение можно использовать при расчетах напряжений в процессах обработки металлов давлением, в которых внешняя нагрузка имеет несимметричный характер приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Целиков А.И. Теория прокатки / Целиков А.И., Гришков А.И. – М.: Металлургия, 1970. – 358с.
2. Василев Я.Д. Теория продольной прокатки / Василев Я.Д., Минаев А.А. – Донецк: УНИТЕХ, 2009. – 488с.
3. Чигиринский В.В. Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации / Чигиринский В.В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – №7. – С.48-49.
4. Чигиринский В.В. Определение деформированного состояния пластического тела в условиях плоского течения / Чигиринский В.В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – №9. – С.32-33.
5. Чигиринский В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – №5. – С.11-16.
6. Чигиринский В.В. Аналитическое исследование модели пластической среды / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2012. – №1. – С.55-57.
7. Производство тонкостенного проката специального назначения / [Чигиринский В.В., Кресанов Ю.С., Качан А.Я. и др.]. – Запорожье: ВАЛПИС, 2014. – 295с.
8. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 399с.
9. Клименко П.Л. Контактные напряжения при прокатке / Клименко П.Л., Данченко В.Н. – Днепропетровск: ПОРОГИ, 2007. – 285с.
10. Максименко О.П. Развитие теории смазочного действия и совершенствование процесса прокатки на ее основе: дис. ... доктора техн. наук: 5.03.05 / Максименко Олег Павлович. – Днепропетровск, 1992. – 564с.

Поступила в редколлегию 20.03.2018.

УДК 539.374.001.8

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.163

ЧИГИРИНСКИЙ В.В., д.т.н., профессор

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В РЕШЕНИЯХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Введение. Разные процессы обработки металлов давлением могут быть охарактеризованы едиными уравнениями теории пластичности, но разными граничными условиями. При этом постоянные и функции интегрирования определяются физическими и математическими моделями, которые заложены в краевых условиях задачи. Возникает необходимость их обобщения. Это позволит с единых позиций оценить результат решения, упростить подходы определения граничных условий, получить решение заданной системы уравнений. Для анализа граничных условий в напряжениях воспользу-

емя известными соотношениями, полученными из уравнений равновесия сил наклонной площадки и сил компонентов тензора напряжений в виде [1, 2]

$$\sigma_x \cdot a_x + \tau_{xy} \cdot a_y + \tau_{xz} \cdot a_z = p_{nx},$$

$$\tau_{yx} \cdot a_x + \sigma_y \cdot a_y + \tau_{yz} \cdot a_z = p_{ny},$$

$$\tau_{zx} \cdot a_x + \tau_{zy} \cdot a_y + \sigma_z \cdot a_z = p_{nz}.$$

Для плоской задачи на основании приведенных выражений после упрощений контактное касательное напряжение имеет вид [3]

$$\tau_n^2 = \left[(\sigma_x - \sigma_y) \cdot a_x \cdot a_y - \tau_{xy} \cdot (a_y^2 - a_x^2) \right]^2, \text{ или}$$

$$\tau_n = \mp \left[\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cdot \cos 2\varphi \right], \quad (1)$$

где a_x и a_y – направляющие косинусы; φ – угол между направлением действия напряжения и осью координат или угол наклона контактной поверхности. Выражение (1) можно упростить, используя тригонометрический закон распределения напряжений в очаге деформации. Если

$$\tau_{xy} = k \cdot \sin A\Phi, \quad (2)$$

то с учетом условия пластичности плоской задачи Губера-Мизеса выражение (1) принимает вид

$$\tau_n = \mp k \cdot \sin(A\Phi - 2\varphi), \quad (3)$$

где k – сопротивление пластической деформации сдвига; A – постоянный коэффициент; Φ – неизвестная функция координат. Как показал дальнейший анализ, использование тригонометрической функции имеет под собой как теоретическое, так и практическое обоснование. Из последних соотношений видно, что обобщающим фактором, о котором говорилось выше, является тригонометрическая связь касательного напряжения и сопротивления пластической деформации сдвига. Выражение (3) представляет собой граничное условие для напряжений, в котором учтены элементы взаимодействия между поверхностями инструмента и металла на контакте через сопротивление пластическому сдвигу k , а также геометрические характеристики очага деформации через аргумент-функцию $A\Phi$ и угол φ . Покажем влияние граничных условий (3) на решение прикладных задач теории пластичности. Рассмотрим предложенную постановку и решение задачи с использованием метода гармонических функций [4, 5].

Постановка задачи. Постановка плоской замкнутой задачи теории пластичности известна [2, 6], имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2 = 4 \cdot \kappa^2,$$

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = F, \quad \xi_x + \xi_y = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x}. \quad (4)$$

Граничные условия заданы в напряжениях и скоростях деформаций (3), [8]

$$\tau_n = -k \cdot \sin(A\Phi - 2\varphi), \quad \gamma_n = -2\beta \cdot \sin(B\Phi - 2\varphi).$$

Для использования граничных условий (4) необходимо знать угол φ как функцию координат очага деформации. Первые три уравнения системы (4) можно привести к обобщенному уравнению равновесия [1, 6]

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{k^2 - \tau_{xy}^2}. \quad (5)$$

Это гиперболическое неоднородное нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных, в котором разрешающей функцией является величина τ_{xy} . Следует обратить внимание на то, что соотношение (3) позволяет не только внести определенность в постановку задачи, но и линеаризировать уравнение (5) и при дальнейших упрощениях получить его аналитическое продолжение. Если угол φ принимается равным нулю, то возможна модель напряженного состояния при осадке, если принять переменным, то рассматривается асимметричный процесс, например, прокатка. При этом угол изменяется от 0 до a , где a – угол захвата [7].

Результаты работы. Решение задачи. Дальнейшее упрощение задачи, связанное с использованием модели пластической среды. Анализ показывает, что следует использовать упрочняющуюся среду или среду, учитывающую пространственные параметры очага деформации, в виде [8]

$$k = H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \quad (6)$$

где H_{σ} и θ' – функции координат x и y непрерывные дважды дифференцируемые, подлежащие определению в процессе решения задачи. Подставляя (2), (6) в обобщенное уравнение равновесия (5), после упрощений и приведения подобных можно получить аналитическое решение в виде [4, 9]

$$\tau_{xy} = H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \sin A\Phi, \quad (7)$$

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x, \quad \theta'_{xx} + \theta'_{yy} = 0, \quad A\Phi_{xx} + A\Phi_{yy} = 0.$$

Дифференциальные ограничения (7), которые накладываются на аргумент функции, позволяют не только замкнуть решение, но и определить целый класс функций, которые являются гармоническими. Функция [9] приобретает вид:

$$H_{\sigma} = C'_{\sigma}(x^2 + C'_{\sigma 2}x + C'_{\sigma 3}) + C''_{\sigma}(y^2 + C''_{\sigma 2} \cdot y + C''_{\sigma 3}) + C_{\sigma}. \quad (8)$$

При известных функциональных зависимостях (7) и (8) и соответствующих ограничениях на аргумент-функции можно из уравнений равновесия определить нормальные напряжения

$$\sigma_x = -H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + C, \quad \sigma_y = -3 \cdot H_{\sigma} \cdot \exp \theta' \cdot \cos A\Phi + C. \quad (9)$$

Компоненты тензора напряжений (7), (9) удовлетворяют часть замкнутой системы уравнений теории пластичности (4) – это уравнения равновесия и условие пластичности. Анализ показывает, что возможны дальнейшие упрощения и в деформационной задаче. Действительно, записывая компоненты тензора напряжений в уравнениях связи, получим

$$\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2 \cdot \tau_{xy}} = \pm ctg A\Phi, \quad \frac{\xi_x - \xi_y}{\gamma_{xy}} = \pm ctg B\Phi.$$

С учетом того, что $\xi_x = -\xi_y$, имеем $\dot{\gamma}_{xy} = \pm 2 \cdot tg B\Phi \cdot \dot{\xi}_x$ или

$$\dot{\gamma}_{xy} = \mp 2 \cdot \operatorname{tg} B\Phi \cdot \dot{\xi}_y.$$

Последние выражения позволяют установить соответствие между линейными скоростями деформаций и сдвиговыми. Уравнение совместности скоростей деформаций (4) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \xi_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x^2} = \pm 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \xi_x \cdot \operatorname{tg} B\Phi, \quad (10)$$

Уравнение (10), как и (5), относится к уравнениям гиперболического типа, и по структуре они не отличаются. В случае (10) разрешающей является функция координат ξ_x . Решение уравнения (10) имеет вид [4, 9]

$$\begin{aligned} \xi_x = -\xi_y &= \beta \cdot \operatorname{Cos} B\Phi = H_\xi \cdot \exp \theta'' \cdot \operatorname{Cos} B\Phi, \\ \gamma_{xy} &= 2 \cdot \beta \cdot \operatorname{Sin} B\Phi = 2 \cdot H_\xi \cdot \exp \theta'' \operatorname{Sin} B\Phi. \end{aligned} \quad (11)$$

при $\theta_x'' = -B\Phi_y$, $\theta_y'' = B\Phi_x$, $\theta_{xx}'' + \theta_{yy}'' = 0$, $B\Phi_{xx} + B\Phi_{yy} = 0$.

Функция скоростей деформации имеет вид

$$H_\xi = C'_\xi (x^2 + C'_{\xi 2} \cdot x + C'_{\xi 3}) + C'_\xi (y^2 + C''_{\xi 2} \cdot y + C''_{\xi 3}) + C_\xi. \quad (12)$$

Сопоставляя функции (7)...(9) и (11), (12), видно, что они по структуре одинаковые, имеют в своей основе одни и те же координатные функции Φ , следовательно, и θ . Таким образом, поля напряжений и поля скоростей деформаций, в своей основе, определяются одинаковыми координатными функциями, которые обозначаются уравнениями Лагранжа и соотношениями Коши-Римана.

Анализ полученных результатов. Покажем, как меняется результат задачи с изменением граничных условий (3). Рассмотрим конкретный случай, когда угол равен нулю. Это практический случай обработки металлов давлением – осадка поковки между шероховатыми параллельными бойками.

Решая уравнение Лапласа, получим координатную зависимость для аргумент-функции $A\Phi$. Используя соотношения Коши-Римана, определяем функцию θ' , имеем

$$\begin{aligned} A\Phi &= AA_6 xy - AA_{13} xy (x^2 - y^2), \\ \theta' &= -\left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot (x^2 - y^2) - AA_{13} \cdot \left[0.25 \cdot (x^4 + y^4) - 1.5 \cdot x^2 \cdot y^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения (13) позволяют охарактеризовать переходные зоны очага деформации. Постоянные величины определялись из граничных условий с использованием выражения (3). Через указанные граничные условия определялась область существования решений (7), (9), которые для данной прикладной задачи показывали приемлемый качественный и количественный результат, в чем, собственно, и заключается полуобратный метод решения задачи [9]. Запишем

$$\begin{aligned} AA_6 &= 4 \cdot \frac{\psi_0}{l \cdot h}, \quad AA_{13} = 16 \cdot \psi_1 \cdot \frac{l - 2 \cdot h}{l^3 \cdot h \cdot (l + h)}, \\ \psi_0 &= \operatorname{arctg} [2 \cdot f \cdot (1 - f)], \quad \psi_1 = \operatorname{arctg} [1.7 \cdot f \cdot (1 - f)], \end{aligned}$$

где l и h – длина и высота очага деформации при осадке полосы, f – коэффициент трения. Принимая в (7), (9) $H_\sigma = C_\sigma$, с учетом граничных условий

$$C_{\sigma} = \frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \cdot \exp(-\theta'_0),$$

при этом

$$A\Phi_0 = AA_6 \cdot \frac{l \cdot h}{4} - AA_{13} \cdot \frac{l \cdot h}{4} \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right),$$

$$\theta'_0 = -A\theta_0 = - \left\{ 0.5 \cdot AA_6 \cdot \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{4} \right) - AA_{13} \cdot \left[0.25 \cdot \left(\frac{l^4}{16} + \frac{h^4}{16} \right) - 1.5 \cdot \frac{l^2 \cdot h^2}{16} \right] \right\}.$$

Подставляя полученные выше значения в (7), (9), имеем

$$\sigma_x = -k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \cos A\Phi + k_0, \quad \sigma_y = -3 \cdot k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \cos A\Phi + k_0,$$

$$\tau_{xy} = k_0 \cdot \frac{\exp(\theta' - \theta'_0)}{\cos A\Phi_0} \cdot \sin A\Phi. \tag{14}$$

где k_0 – ненаклепанное сопротивление сдвигу.

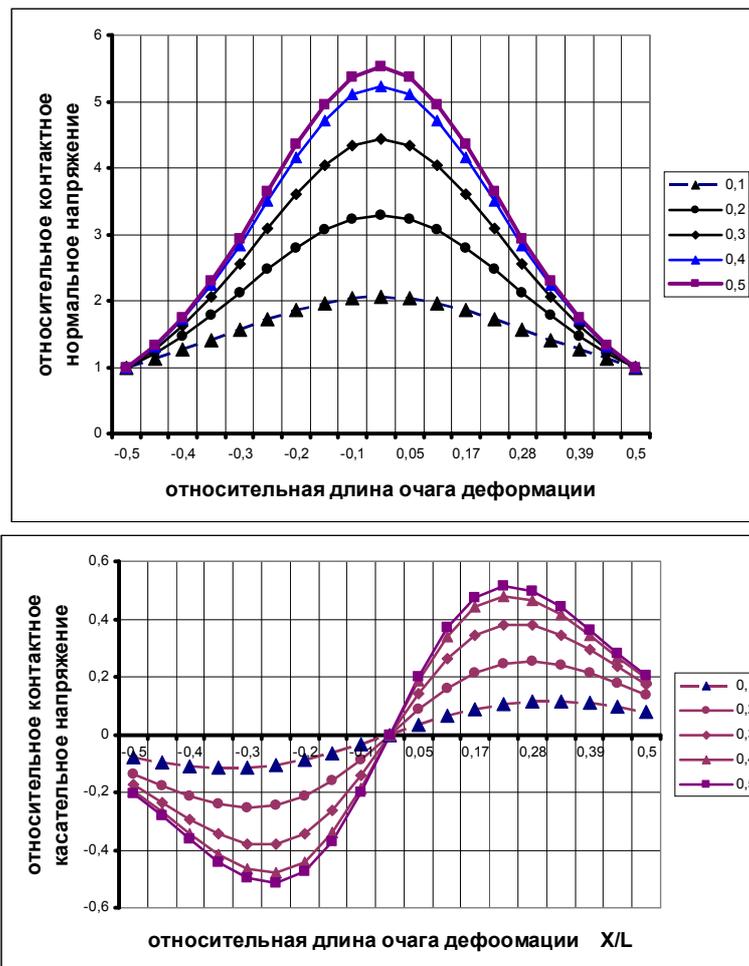


Рисунок 1 – Распределение нормальных и касательных напряжений на контакте при осадке на шероховатых бойках $\frac{l}{h} = 8, f = 0,1...0,5$

По выражениям (14) рассчитаны напряжения на контакте в очаге деформации при осадке. На рис.1 представлены эпюры нормальных и касательных напряжений при разных значениях коэффициентов трения f .

По вертикали отложены относительные напряжения $\sigma_y / 2k_0$ и τ_{xy} / k_0 , по горизонтали – относительная длина очага деформации x/l . Особенностью данного решения является использование единых формул для всего очага деформации, без разбиения на отдельные зоны с разными законами трения. Всегда было проблемой математическое описание переходных зон очага деформации. Большинство решений предполагало в нейтральном сечении разрыв по касательным и нормальным напряжениям. В выражениях (14) используются тригонометрические функции, приемлемые как по корректности решения дифференциального уравнения (5), так и по практическому результату, подтвержденному экспериментальными и теоретическими составными решениями многих авторов [10, 11].

Рассмотрим случай, когда в граничных условиях (3) предусмотрен угол φ не равным нулю. Он изменяется по длине очага деформации. Очаг деформации рассматривается как цельная система без разбиения его на отдельные зоны. Угол

$$\varphi = \frac{\frac{l}{2} - x}{R}, \quad (15)$$

при этом на входе в очаг деформации $x = -\frac{l}{2}$, $\varphi = \alpha$, на выходе из очага деформации

$x = \frac{l}{2}$, $\varphi = 0$, длина дуги контакта $l = R \cdot \alpha$. Так как постоянные на входе и выходе из очага деформации разные, возникает необходимость в их определении. Для этого воспользуемся выражениями (7)...(9). Переменную (8) можно привести к виду

$$H_\sigma = \frac{C_0 \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) + C_1 \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right)}{l}, \quad (16)$$

где C_0 , C_1 – постоянные, определяющие напряжения на входе и выходе из очага деформации. Подставляя граничные условия на контакте в (7), с учетом условия пластичности получим

$$C_0 = \frac{k_0 \cdot \xi_0}{\exp \theta_0 \cdot \text{Cos} A\Phi_0}, \quad C_1 = \frac{k_1 \cdot \xi_1}{\exp \theta_1 \cdot \text{Cos} A\Phi_1},$$

где k_0 , k_1 – сопротивления пластической деформации сдвига на входе и выходе из очага деформации; θ_0 , θ_1 – значения функции θ на входе и выходе из очага деформации; $A\Phi_0$, $A\Phi_1$ – значения функции $A\Phi$ на входе и выходе из очага деформации; ξ_0 и ξ_1 – постоянные, учитывающие влияние натяжения или подпора.

Из уравнения Лапласа определяем простейшее его решение с учетом граничных условий (3)

$$A\Phi' = - \left[AA_6' \cdot \left(\frac{l}{2} + x\right) \cdot y + AA_6'' \cdot \left(\frac{l}{2} - x\right) \cdot y - 2 \cdot \varphi \right], (17)$$

С учетом соотношений Коши-Римана и уравнения Лапласа определяем функцию θ , т.е. запишем

$$\theta'_x = -A\Phi_y, \quad \theta'_y = A\Phi_x,$$

$$\theta' = -\frac{l}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot [(x+x_0)^2 - y^2] - (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot (x-x_0). \quad (18)$$

В нейтральном сечении контактное касательное напряжений должно быть равно нулю, т.е. $A\Phi' = 0$. Этому значению аргумент-функции должны соответствовать определенные координаты очага деформации. Действительно, при $x = x_0$ $y = h_\gamma / 2 \approx h_1 / 2$, $\varphi = \gamma$, $A\Phi' = 0$, где x_0 – координата, определяющая положение нейтрального сечения. Для определения нейтрального угла необходимо знать постоянные величины AA_6 . После подстановки граничных условий имеем

$$AA'_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{l \cdot h_1}, \quad AA''_6 = 2 \cdot \frac{A\Phi_0 + 2 \cdot \alpha}{l \cdot h_0},$$

с учетом (17) и упрощений при $A\Phi_0 = A\Phi_1 = f \cdot (1-f)$ получим

$$\gamma = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{A\Phi_1 - \alpha}{(A\Phi_1 + \alpha) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \varepsilon\right)}. \quad (19)$$

Сравнивая численные значения для нейтрального угла (19) с формулой Экелунда-Павлова, качественно и количественно получаем близкий результат. Постоянные значения θ_0 и θ_1 с учетом граничных условий запишутся

$$\begin{aligned} \theta'_0 &= -\frac{l}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{om}^2 - \frac{h_0^2}{4}\right) + (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{om}, \\ \theta'_1 &= -\frac{l}{2} \cdot (AA'_6 + AA''_6) \cdot \left(l_{on}^2 - \frac{h_1^2}{4}\right) - (AA'_6 \cdot l_{om} - AA''_6 \cdot l_{on}) \cdot l_{on}. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно выражениям (7), (9), (16)...(20) получены рабочие формулы для расчета напряженного состояния металла в очаге деформации при прокатке

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0 \\ \sigma_y &= -3 \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \cos A\Phi + k_0, \quad (21) \\ \tau_{xy} &= \frac{\frac{k_0}{\cos A\Phi_0} \left(\frac{l}{2} - x\right) \exp(\theta - \theta_0) + \frac{k_1}{\cos A\Phi_1} \left(\frac{l}{2} + x\right) \exp(\theta - \theta_1)}{l} \cdot \sin A\Phi. \end{aligned}$$

По формулам (21) подсчитаны значения относительных контактных напряжений, представленных на рис.2. Распределение контактных напряжений имеет асимметричный характер как для нормальных, так и касательных напряжений. Сопоставляя

эпюры контактных напряжений, представленных на рис.1 и 2, с разными граничными условиями, убеждаемся, что имеет место разница в распределении контактных напряжений по длине очага деформации. В случае прокатки появляется дополнительный параметр влияния на величину и характер изменения эпюры напряжений – это угол захвата α , который при осадке отсутствовал. С увеличением обжатия увеличиваются максимальные значения напряжений со сдвигом в сторону выхода металла из валков. При этом в зоне отставания имеет место обратная зависимость в распределении и по величине напряжений. При большем угле захвата напряжения снижаются, что объясняется появлением растягивающих напряжений за счет усиления выталкивающего воздействия на металл со стороны валков в сторону, противоположную направлению прокатки. Это обстоятельство во многом является решающим, т.к. обжатие определяет возможность процесса прокатки в целом. Дальнейший анализ показывает, что при большем увеличении угла захвата эпюра напряжений меняет свою конфигурацию и становится вогнутой в той степени, в которой угол захвата превышает коэффициент трения. Вогнутость может распространяться на весь очаг деформации.

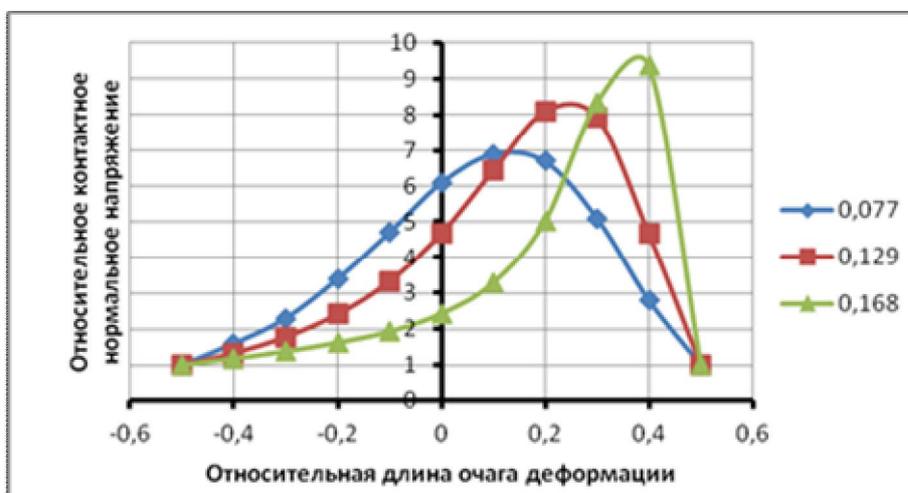


Рисунок 2 – Распределение контактных нормальных напряжений по длине очага деформации при изменении угла захвата α , при $f = 0,4$; $\frac{l}{h} = 11,04$

Следует заметить, что разные процессы обработки металлов давлением определяются разными граничными условиями и разным силовым воздействием по длине очага деформации, как это видно из представленной работы. Симметричный очаг деформации определяет симметричное воздействие на деформируемый металл, асимметричный – предопределяет асимметрию и в распределении контактных напряжений по их величине. При разных соотношениях обжатий асимметрия может быть разной, с убыванием по величине в отдельных зонах. Главным результатом является то, что граничные условия (3) позволяют в сочетании с методом гармонических функций правильно характеризовать контактные напряжения разных процессов обработки металлов давлением, качественно и количественно, едиными выражениями для зон пластического течения, определять компоненты тензора напряжений замкнутой плоской задачи.

Выводы.

1. Определены граничные условия для плоской задачи теории пластичности.
2. Показаны обобщающие факторы для граничных условий и решений замкнутой задачи теории пластичности.

3. С помощью полученных решений проанализированы процессы обработки металлов давлением, показано влияние граничных условий задачи на силовые параметры пластического формоизменения.

4. Предложенные аналитические решения и обобщенные граничные условия могут использоваться в прикладных задачах с симметричным и асимметричным нагружениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости пластичности и ползучести / Безухов Н.И. – М.: Высшая школа, 1968. – 512с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Малинин Н.Н. – М.: Машиностроение, 1975. – 399с.
3. Производство высокоэффективного металлопроката / [Чигиринский В.В., Мазур В.Л., Бергеман Г.В. и др.]. – Днепропетровск: РВА "Дніпро - Вал", 2006. – 261с.
4. Чигиринский В.В. Метод решения задач теории пластичности с использованием гармонических функций / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2009. – №5. – С.11-16.
5. Чигиринский В.В. Аналитическое исследование модели пластической среды / Чигиринский В.В. // Изв вузов. Черная металлургия. – 2012. – №1. – С.55-57.
6. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел / Надаи А. – М.: Издательство иностранной литературы, 1954. – 647с.
7. Василев Я.Д. Теория продольной прокатки / Василев Я.Д., Минаев А.А. – Донецк: УНИТЕХ, 2009. – 488с.
8. Чигиринский В.В. Определение напряженного состояния пластического тела в условиях плоской деформации / Чигиринский В.В. // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1990. – №7. – С.48-49.
9. Производство тонкостенного проката специального назначения / [Чигиринский В.В., Кресанов Ю.С., Качан А.Я. и др.]. – Запорожье: "ВАЛПИС", 2014. – 295с.
10. Клименко П.Л. Контактные напряжения при прокатке / Клименко П.Л., Данченко В.Н. – Днепропетровск: ПОРОГИ, 2007. – 285с.
11. Сторожев М.В. Теория обработки металлов давлением / Сторожев М.В., Попов Е.А. – М.: Машиностроение, 1977. – 422с.

Поступила в редколлегию 27.03.2018.

УДК.621.771.01

DOI 10.31319/2519-2884.32.2018.164

МАКСИМЕНКО О.П., д.т.н., профессор
ЛОБОЙКО Д.И., ассистент
ГОРБАТЕНКО Ю.А., магистр

Днепропетровский государственный технический университет, г. Каменское

ВЛИЯНИЕ НАТЯЖЕНИЯ ПОЛОСЫ НА СУММАРНЫЙ МОМЕНТ ПРИ НЕПРЕРЫВНОЙ ПРОКАТКЕ

Введение. Разработка энергосберегающей технологии прокатки на непрерывных станах представляется важной теоретической и практической задачей, одним из эффективных путей решения которой является оптимизация режимов натяжения полосы в межклетевых промежутках. Методика расчета оптимальных с точки зрения энергосбережения режимов натяжения пока не в полной мере разработана, хотя отдельные публикации по данному вопросу в технической литературе имеются. Так, в работе [1] при определении рационального режима натяжения полосы при холодной прокатке исхо-

дили из критерия, представляющего собой отношение суммарных мощностей на бочках валков при деформации с натяжением и без него. Однако с помощью этого критерия без учёта дополнительных условий трудно определить оптимальный режим натяжения.

Постановка задачи. Целью работы является построение энергосберегающей технологии непрерывной прокатки за счёт рационализации режима натяжения и обжатия.

Результаты работы. Как следует из основного уравнения непрерывной прокатки [2], все составляющие суммарного баланса работ при неизменных граничных условиях зависят от характера распределения удельных сил трения в очагах деформации всех клетей стана. В свою очередь силы трения в зонах отставания и опережения во многом определяются режимом натяжения металла. Поэтому в соответствии с изложенным выше целесообразно установить насколько эффективно влияние условий трения и натяжения полосы на снижение энергозатрат на бочке валков каждой из клетей и в целом по непрерывному стану. Кроме того, определенный интерес в отношении изучаемых зависимостей связан с тем, что потеря равновесия сил в очаге деформации с последующей частичной или полной пробуксовкой металла в валках может возникать при наличии зоны опережения [3, 4]. В связи с этим в каждом случае прокатки следует давать оценку продольной устойчивости полосы в валках [5-7].

Методика проведения исследования включает численное решение уравнения Т. Кармана с учётом натяжения полосы при разных моделях трения на контакте. Среди них применили закон трения скольжения ($t_x = fp_x$), закон пластического трения ($t_x = f_3 2k_{cp}$) и двухзвенную модель плавного изменения удельных сил трения в очаге деформации, описанную в работе [8]. При решении задачи определили распределение контактных напряжений, используя методику [5, 6], рассчитали текущее в очаге деформации значение продольных сил $Q_{хпр}$ и среднеинтегральное $Q_{ср.пр}$ их значение. Кроме того, нашли силы трения в зонах отставания $T_{от}$ и опережения $T_{оп}$, момент на бочке валков $M_{б}$ и его суммарное значение в целом по стану $\sum M_{б}$.

В качестве примера рассмотрим случай прокатки листа на непрерывном четырехклетевом стане в валках диаметром $D = 200$ мм. Режим обжатий приведен в табл. 1.

Таблица 1 – Режим обжатия на четырехклетевом стане

Номер клетки	Толщина полосы, мм		Абсолютное обжатие Δh , мм	Угол захвата α , рад
	h_0	h_1		
1	3,0	2,0	1,0	0,1
2	2,0	1,4	0,6	0,0771
3	1,4	0,9	0,5	0,0707
4	0,9	0,6	0,3	0,0548

Согласно [2] момент на бочке валков (рис. 1) определяли по формуле

$$M_{б} = 2k_{cp} R b_{cp} \left(\int_{\gamma}^{\alpha} \frac{t_x}{2k_{cp}} d\varphi - \int_0^{\gamma} \frac{t_x}{2k_{cp}} d\varphi \right) \quad (1)$$

или в безразмерной форме

$$M_{б}^* = \frac{M_{б}}{2k_{cp} R b_{cp}}.$$

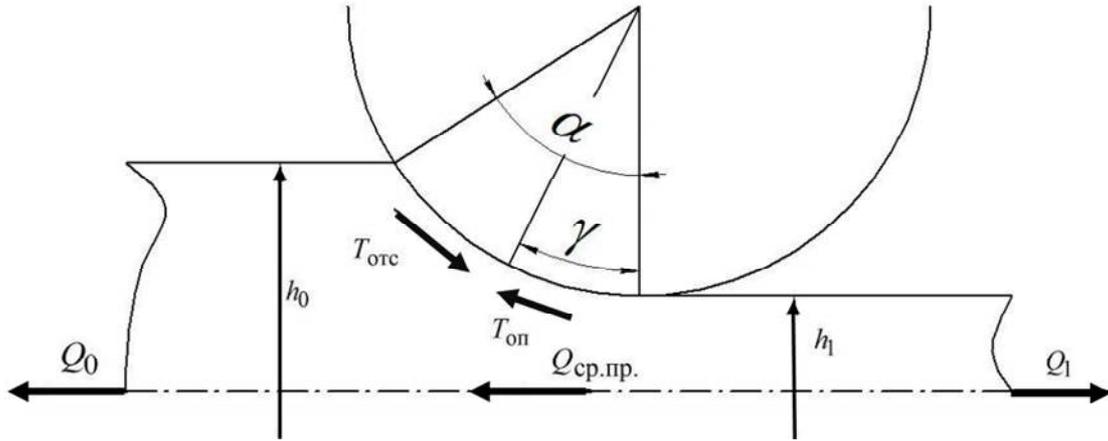


Рисунок 1 – К определению момента на бочке вала

Заметим, что выражение в скобках формулы (1) представляет собой разность безразмерных сил трения в зонах отставания $T_{от}^*$ и опережения $T_{оп}^*$. Текущее значение продольной силы пластически деформируемого металла рассчитывали по выражению

$$Q_{x пр.} = (p_x - 2k_{ср})(h_1 + R\varphi^2) b_{ср}$$

или в безразмерном виде

$$Q_{x пр.}^* = \frac{Q_{x пр.}}{2k_{ср} R b_{ср}} \left(\frac{p_x}{2k_{ср}} - 1 \right) \left(\frac{h_1}{R} + \varphi^2 \right).$$

Среднее интегральное значение этих сил

$$Q_{ср. пр.} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Q_{x пр.} d\varphi;$$

$$Q_{ср. пр.}^* = \frac{Q_{ср. пр.}}{2k_{ср} R b_{ср}},$$

где t_x и p_x – удельные силы трения и нормальное давление в очаге деформации; $2k_{ср}$ – среднее сопротивление деформации; α и φ – угол захвата и его текущее значение; γ – угол нейтрального сечения; h_0 и h_1 – толщина полосы до прохода и после него; $b_{ср}$ – средняя в очаге деформации ширина полосы; Q_0 и Q_1 – силы заднего и переднего натяжения полосы; σ_0 и σ_1 – удельное заднее и переднее натяжения; $q_0 = \frac{\sigma_0}{2k_{ср}}$ и $q_1 = \frac{\sigma_1}{2k_{ср}}$ – удельные натяжения в безразмерном виде.

Результаты исследования влияния натяжения полосы на суммарный момент M_6^* при модели трения скольжения приведены в табл.2. Анализ полученных данных показывает, что с увеличением натяжения металла суммарный момент на бочке валков уменьшается. При граничных значениях натяжения это уменьшение составляет:

$$\delta = \frac{0,01768 - 0,01472}{0,01768} \cdot 100\% = 16,7\%.$$

Таблица 2 – Влияние режима натяжения на энергосиловые параметры при прокатке с моделью трения в виде $t_x = fp_x$ ($f = 0,2$)

Номер клетки	q_{0_i}	q_{1_i}	$Q_{ср.пр.}^*$	γ	$T_{от}^*$	$T_{оп}^*$	$M_{б}^*$	$\sum M_{б}^*$
1	0	0,1	-0,0088	0,039	0,01678	0,01098	0,00580	0,01768
2	0,1	0,1	-0,0061	0,03	0,01288	0,00861	0,00427	
3	0,1	0,1	-0,0071	0,028	0,01418	0,00993	0,00425	
4	0,1	0	-0,0073	0,022	0,01318	0,00982	0,00326	
1	0	0,2	-0,0078	0,042	0,01558	0,01092	0,00466	0,01625
2	0,2	0,2	-0,0036	0,029	0,01146	0,00739	0,00407	
3	0,2	0,2	-0,0050	0,027	0,01256	0,00855	0,00401	
4	0,2	0	-0,0061	0,021	0,01235	0,00884	0,00351	
1	0	0,3	-0,0070	0,046	0,01428	0,01081	0,00347	0,01472
2	0,3	0,3	-0,0013	0,028	0,01004	0,00617	0,00387	
3	0,3	0,3	-0,0030	0,026	0,01092	0,00718	0,00374	
4	0,3	0	-0,0048	0,019	0,01144	0,0078	0,00364	

$$\delta_1 = \frac{0,00580 - 0,00347}{0,00580} \cdot 100\% = 40,2\%; \delta_2 = 9,3\%; \delta_3 = 12\%; \delta_4 = -11,6\%.$$

С увеличением натяжения продольная устойчивость полосы в валках несколько снижается. Напомним, что в соответствии с методикой [5, 6], если $Q_{ср.пр.}^* < 0$, то процесс совершается устойчиво, при $Q_{ср.пр.}^* = 0$ прокатка ведется в предельных условиях, при $Q_{ср.пр.}^* > 0$ она невозможна по причине недостатка втягивающих металл в валки сил. Сравнивая моменты на бочках валков непрерывного стана при граничных натяжениях ($q = 0,1$ и $q = 0,3$), отметим, что доля первой клетки в общем снижении $\sum M_{б}^*$ наиболее существенна.

В последней клетки при заднем натяжении $q_{0_4} = 0,3$ момент на бочке валков возрастает по сравнению со случаем, когда $q_{0_4} = 0,1$, и потому относительное снижение момента на бочке валков δ_4 является отрицательной величиной.

Анализируя результаты расчетов, приведенных в табл.3 и 4, приходим к выводу, что качественно выше сформулированные закономерности имеют место и при других моделях трения на контакте. Количественно влияние натяжения полосы на суммарный момент $M_{б}^*$ при трении, подчиняющемся закону Зибеля (табл.3), является минимальным. В этих условиях момент $\sum M_{б}^*$ во второй и третьей клетях не зависит от натяжения ($\delta_2 = \delta_3 = 0$).

$$\delta = \frac{0,01576 - 0,01422}{0,01576} \cdot 100\% = 9,8\%;$$

$$\delta_1 = \frac{0,00534 - 0,00316}{0,00534} \cdot 100\% = 40,8\%; \delta_2 = 0; \delta_3 = 0; \delta_4 = -23,3\%.$$

Таблица 3 – Влияние режима натяжения на энергосиловые параметры при прокатке с моделью трения в виде $t_x = f_3 2k_{cp} (f_3 = 0,2)$

№ клетки	q_{0_i}	q_{1_i}	$Q_{ср.пр.}^*$	γ	$T_{от}^*$	$T_{оп}^*$	$M_{б}^*$	$\sum M_{б}^*$
1	0	0,1	-0,0033	0,0367	0,01266	0,00734	0,00534	0,01576
2	0,1	0,1	-0,0023	0,0286	0,00970	0,00572	0,00398	
3	0,1	0,1	-0,0023	0,0261	0,00893	0,00522	0,00370	
4	0,1	0	-0,0021	0,0206	0,00685	0,00411	0,00274	
1	0	0,2	-0,00306	0,0394	0,01212	0,00788	0,00424	0,01497
2	0,2	0,2	-0,00158	0,0286	0,00970	0,00572	0,00398	
3	0,2	0,2	-0,00182	0,0261	0,00852	0,00522	0,00370	
4	0,2	0	-0,00184	0,0198	0,00700	0,00396	0,00305	
1	0	0,3	-0,00289	0,0421	0,01158	0,00842	0,00316	0,01422
2	0,3	0,3	-0,00094	0,0286	0,00970	0,00572	0,00398	
3	0,3	0,3	-0,00136	0,0261	0,00892	0,00522	0,00370	
4	0,3	0	-0,00160	0,0190	0,00717	0,03792	0,00338	

Продольная устойчивость полосы в валках при удельных силах трения, подчиняющихся закону Зибеля, существенно ниже по сравнению с данными, представленными в табл.2.

Зависимость суммарного момента $\sum M_{б}^*$ и средней результирующей силы $Q_{ср.пр.}^*$ от натяжения полосы при двухзвенной модели трения (табл.4) примерно такая же, как и при кулоновском законе, но при значительно меньшем коэффициенте трения $f_{ср}$, который определяли:

$$f_{ср} = \frac{\int_0^{\alpha} \frac{t_x}{2k_{ср}} d\varphi + \int_0^{\gamma} \frac{t_x}{2k_{ср}} d\varphi}{\int_0^{\alpha} \frac{p_x}{2k_{ср}} d\varphi}$$

Таблица 4 – Влияние режима натяжения полосы на энергосиловые параметры при прокатке с двухзвенной моделью трения [8]

№ клетки	q_{0_i}	q_{1_i}	$f_{ср}$	$Q_{ср.пр.}^*$	γ	$T_{от}^*$	$T_{оп}^*$	$M_{б}^*$	$\sum M_{б}^*$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,1	0,142	-0,00692	0,0310	0,01199	0,00671	0,00507	0,01529
2	0,1	0,1	0,149	-0,00505	0,0250	0,00966	0,00565	0,00401	
3	0,1	0,1	0,114	-0,00486	0,0230	0,00879	0,00512	0,00367	
4	0,1	0	0,116	-0,00341	0,0200	0,00732	0,00390	0,00255	

Продовження таблиці 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0,2	0,142	-0,00595	0,0319	0,01100	0,00608	0,00492	0,01514
2	0,2	0,2	0,149	-0,00282	0,0234	0,00876	0,00489	0,00387	
3	0,2	0,2	0,114	-0,00277	0,0206	0,00733	0,00388	0,00345	
4	0,2	0	0,116	-0,00327	0,0159	0,00617	0,00327	0,00290	
1	0	0,3	0,142	-0,00511	0,0329	0,01008	0,00714	0,00294	0,01307
2	0,3	0,3	0,149	0,00041	0,0222	0,00772	0,00401	0,00371	
3	0,3	0,3	0,114	-0,00300	0,0192	0,00698	0,00373	0,00325	
4	0,3	0	0,116	-0,00288	0,0150	0,00605	0,00288	0,00317	

$$\delta = \frac{0,01529 - 0,01307}{0,01529} \cdot 100\% = 14,5\% ;$$

$$\delta_1 = \frac{0,00507 - 0,00294}{0,00507} \cdot 100\% = 42\%; \delta_2 = 7,5\%; \delta_3 = 11,4\%; \delta_4 = -24,3\% .$$

Следует заметить, что в расчетах значение f_{cp} в очаге деформации каждой клетки удерживали на постоянном уровне. При таком условии можно оценить влияние натяжения на снижение момента в данной клетке и $\sum M_{\sigma}^*$ в чистовом виде.

Анализируя изменение $Q_{cp,пр}^*$ в очагах деформации всех клеток непрерывного стана при модели трения [8], необходимо отметить, что при прокатке во второй клетки с удельным натяжением $q_{0_2} = q_{1_2} = 0,3$ значение средней результирующей силы равно 0,00041.

При таком значении $Q_{cp,пр}^*$ процесс прокатки во второй клетки совершается в условиях, близких к предельным. Приведем эпюры контактных напряжений и текущих продольных сил для этого случая прокатки (рис.2). Как видно, нормальное давление на границах очага деформации и ближе к средней части его меньше $2k_{cp}$.

В соответствии с этим текущие силы пластически деформируемого металла $Q_{хпр}^*$ на одной части очага деформации направлены согласно с движением полосы, на другой – в противоположную сторону. Причем площади положительных и отрицательных значений этих сил достаточно близки, что и указывает на условия деформации, близкие к предельным.

Как известно, режим обжатия металла в значительной мере определяет распределение удельных сил трения в очаге деформации, что должно отразиться и на суммарном моменте на бочках валков непрерывного стана. Перераспределим обжатия по клеткам стана таким образом, чтобы они были увеличены во второй и четвертой клетках по сравнению с приведенными в табл.1, и определим изменение моментов M_{σ}^* и $\sum M_{\sigma}^*$ для случая прокатки с кулоновской моделью трения ($f = 0,2$) и при ранее принятых натяжениях полосы. Новый режим обжатий и результаты расчетов приведены в табл.5.

Из анализа данных табл.2 и 5 следует, что на зависимость момента $\sum M_{\sigma}^*$ от натяжения полосы определенное влияние оказывает и режим обжатий по клеткам непре-

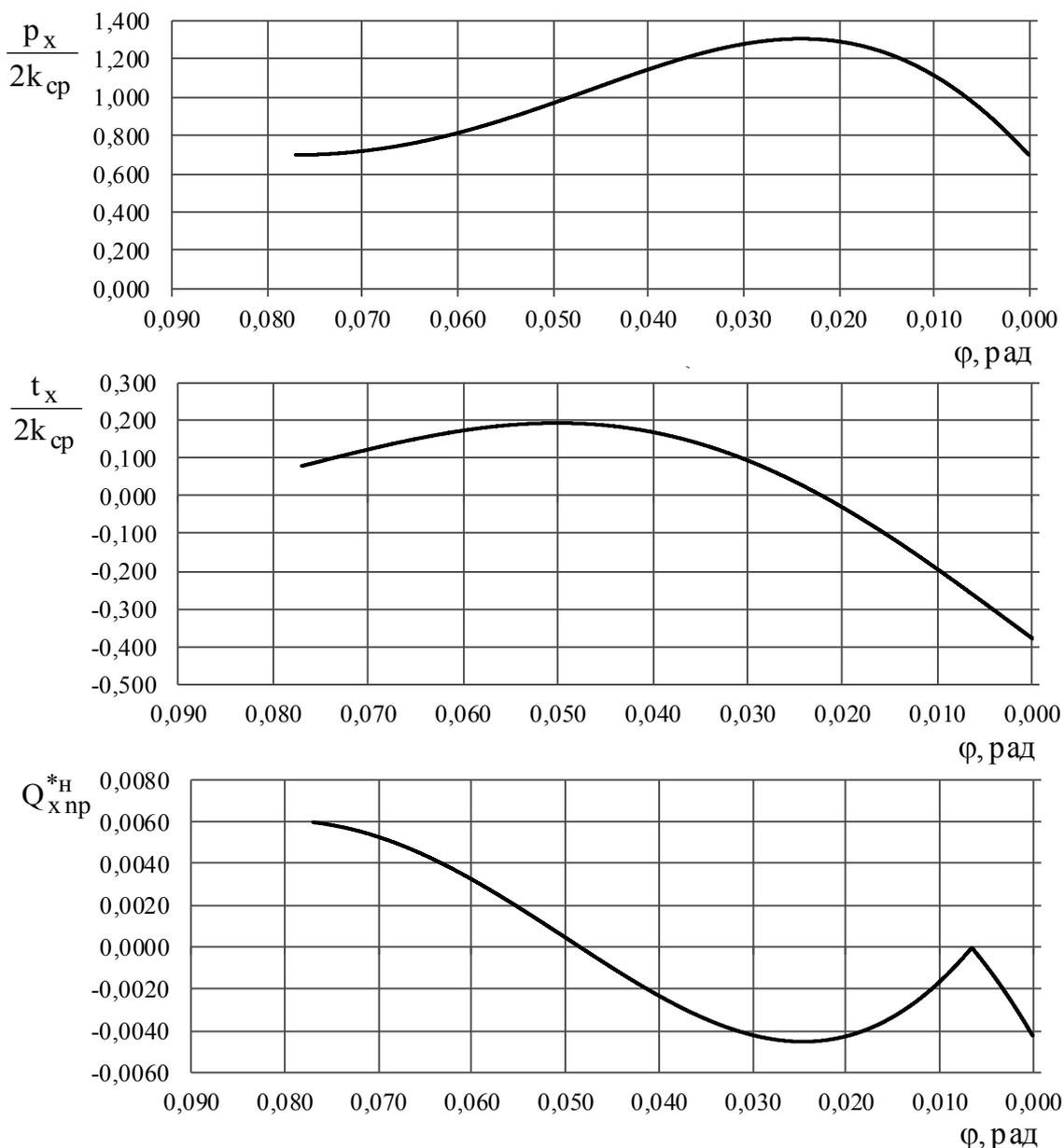


Рисунок 2 – Контактные напряжения и текущие продольные силы при прокатке во второй клетки с $q_{0_2} = q_{1_2} = 0,3$

рывного стана. Так, относительное снижение суммарного момента при первом режиме обжатий составляет $\delta = 16,7\%$, а при обжатиях, представленных в табл.5, $\delta = 22\%$. Из этой же таблицы следует, что при натяжении в первой клетки, равном $q_{0_1} = 0$ и $q_{1_1} = 0,3$, момент M_6^* становится отрицательным, т.е. полоса за счет силы переднего натяжения как бы передает валкам некоторое количество энергии.

$$\delta = \frac{0,01769 - 0,01384}{0,01769} \cdot 100\% = 22\%;$$

$$\delta_1 = \frac{0,00181 + 0,00089}{0,00181} \cdot 100\% = 149\%; \delta_2 = 11\%; \delta_3 = 11,4\%; \delta_4 = -2,4\%.$$

Таблица 5 – Влияние натяжения полосы на энергосиловые параметры в условиях перераспределений обжатий при трении скольжения ($f = 0,2$)

№ клетки	h_0 , мм	h_1 , мм	α , рад	q_0	q_{1i}	$Q_{ср.пр.}^*$	γ	$T_{от}^*$	$T_{оп}^*$	$M_б^*$	$\sum M_б^*$
1	3	2,5	0,0707	0	0,1	-0,0059	0,032	0,00948	0,00767	0,00181	0,01769
2	2,5	1,5	0,1	0,1	0,1	-0,0074	0,035	0,01799	0,01075	0,00724	
3	1,5	1,0	0,0707	0,1	0,1	-0,0067	0,028	0,01334	0,0093	0,00404	
4	1,0	0,6	0,0632	0,1	0	-0,0087	0,024	0,01669	0,01209	0,00460	
1	3	2,5	0,0707	0	0,2	-0,0050	0,036	0,00836	0,00789	0,00047	0,01576
2	2,5	1,5	0,1	0,2	0,2	-0,0042	0,034	0,01592	0,00908	0,00684	
3	1,5	1,0	0,0707	0,2	0,2	-0,0045	0,027	0,01183	0,00802	0,00381	
4	1,0	0,6	0,0632	0,2	0	-0,0087	0,023	0,01554	0,01086	0,00468	
1	3	2,5	0,0707	0	0,3	-0,0046	0,04	0,00716	0,0085	-0,00089	0,01384
2	2,5	1,5	0,1	0,3	0,3	0,0012	0,033	0,01383	0,00739	0,00644	
3	1,5	1,0	0,0707	0,3	0,3	-0,0025	0,027	0,01031	0,00673	0,00358	
4	1,0	0,6	0,0632	0,3	0	-0,0057	0,021	0,01426	0,00955	0,00471	

Выводы. С увеличением натяжения полосы суммарный момент на бочках валков непрерывного стана уменьшается. Доля первой клетки в общем снижении момента является наиболее существенной. При этом снижается и продольная устойчивость металла в очагах деформации. При значительном натяжении в отдельных клетях процесс может совершаться в условиях, близких к предельным. Такие зависимости имеют место при разных моделях трения на контакте металла с валками. Перераспределение обжатий по клетям в условиях непрерывной прокатки с натяжением полосы также влияет на суммарный момент на бочках валков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Василев Я.Д. Разработка энергосберегающих режимов натяжений на непрерывных станах холодной прокатки / Я.Д.Василев, Д.Н.Самокиш // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2003. – №2. – С.34-38.
2. Выдрин В.Н. Динамика прокатных станов / В.Н.Выдрин. – Свердловск: Metallurgizdat, 1960. – 255с.
3. Грудев А.П. Захватывающая способность прокатных валков / А.П.Грудев. – М.: СП Интермет Инжиниринг, 1998. – 283с.
4. Экспериментальное исследование максимальных углов захвата при установившемся процессе прокатки / А.П.Чекмарев, В.И.Прокофьев, В.П.Галицкий и др. // *Обработка металлов давлением: научные труды ДМеТи*. – М.: Metallurgiya. – 1967. – Выпуск ЛП. – С.79-88.
5. Максименко О.П. Анализ продольной устойчивости процесса прокатки с учетом внутренних сил и режима натяжения полосы / О.П.Максименко, М.К.Измайлова, Д.И.Лобойко // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2014. – №6. – С.47-49.
6. Максименко О.П. Продольная устойчивость в валках с анализом контактных условий: монография / О.П.Максименко, Д.И.Лобойко, М.К.Измайлова. – Днепропетровск: ДДТУ, 2016. – 212с.
7. Максименко О.П. Анализ силового взаимодействия в очаге деформации при прокатке / О.П.Максименко, Д.И.Лобойко, Р.Я.Романюк // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2013. – №6. – С.47-49.
8. Максименко О.П. Продольная устойчивость процесса прокатки с натяжением полосы при двухзвенной модели трения в очаге деформации / О.П.Максименко, М.К.Измайлова, Д.И.Лобойко // *Металлургическая и горнорудная промышленность*. – 2015. – №4. – С.73-76.

Поступила в редколлегию 21.05.2018.