

## РОЗДІЛ «МАТЕМАТИЧНІ ПРОБЛЕМИ ТЕХНІЧНОЇ МЕХАНІКИ»

УДК 539.3

БАНЯС М.В., к.фіз.-мат.н., наук. співр.  
ГАЛШИН О.З., д.т.н., пров. наук. співр.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України

### ОБҐРУНТУВАННЯ МОЖЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ОСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОСТІ ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНЧАТИХ КОНСТРУКЦІЙ

**Вступ.** В сучасній техніці багато елементів конструкцій передбачають експлуатацію в умовах інтенсивних повторних термомеханічних навантажень. Дослідження міцності та експлуатаційних характеристик подібних конструкцій потребує розробки сучасних методик розв'язання задач термомеханіки, які описують специфічні умови навантаження, термов'язкопружнопластичне деформування з урахуванням виникнення вторинних пластичних деформацій, пошкоджуваності й деградації матеріалу.

Складна геометрія, а також великі розміри об'єктів дослідження можуть вимагати чисельного розв'язання поставлених задач в просторовій постановці з використанням значних обчислювальних потужностей. Це значно ускладнює застосування розроблених методик розв'язання фізично нелінійних задач з урахуванням вищезгаданих факторів на складних конструкціях. Проте, в деяких випадках для апробації цих методик можна використати спрощені геометричні моделі, які дозволяють робити співставлення розв'язків задач в окремих точках конструкцій в модельній і точній постановці. Як приклад такої можливості в даній роботі порівнюється напружено-деформований стан довгого тонкостінного циліндру і коробчастої конструкції з квадратним поперечним перетином внаслідок їх нагріву.

**Постановка задачі.** Розглядалися задачі про нерівномірний нагрів довгого тонкостінного циліндру і коробчастої конструкції з квадратним поперечним перетином, геометрія яких зображена на рис. 1.

Вважалось, що ширина коробчастої конструкції дорівнювала зовнішньому діаметру циліндра, а товщини їх стінок  $h$  були однакові. Початкові й граничні умови на зовнішній і внутрішній поверхнях приймалися однаковими як для циліндра так і для коробки. При розрахунках початок системи координат вибирався в центрі коробки.

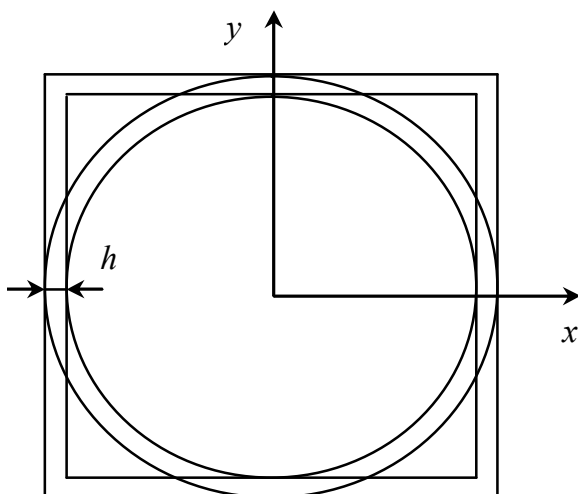


Рисунок 1 – Поперечний перетин коробка й циліндра

Для визначення розподілу температури в процесі нагріву конструкцій, що розглядаються, використовувалось рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } T), \quad (1)$$

де  $c$  – питома теплоємність;  $\rho$  – густина;  $T$  – температура;  $k$  – коефіцієнт теплопровідності.

В початковий момент часу  $t = 0$  по всьому об'єму задавалась постійна тем-

пература  $T_0$ . На зовнішній і внутрішній поверхнях конструкцій відбувався нагрів за рахунок конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, який описується умовою

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha(T - T_{cp}), \quad (2)$$

де  $\alpha$  – коефіцієнт тепловіддачі;  $T_{cp}$  – температура навколишнього середовища.

На торцях задавались умови теплоізоляції

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Напружено-деформований стан конструкцій в процесі нагріву отримували шляхом розв'язання задачі термопластичності в геометрично лінійній квазістатичній постановці. Як рівняння стану використовувались співвідношення що описують процеси деформування за траєкторіями малої кривизни

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - K\alpha_T(T - T_0) + 2Ge_{ij}^p, \quad (4)$$

де  $\sigma_{ij}$  – тензор напружень;  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформації;  $K$  – модуль об'ємного розширення;  $G$  – модуль зсуву;  $\lambda = (K - 2G)/3$ ;  $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного розширення;  $e_{ij}^p$  – компоненти тензора пластичної деформації.

Весь процес нагріву розбивався на малі етапи. Компоненти тензора пластичної деформації  $e_{ij}^p$  на  $m$ -ому етапі знаходились у вигляді суми приростів  $\Delta_k e_{ij}^p$  за всі минулі етапи

$$e_{ij}^p = \sum_{k=1}^m \Delta_k e_{ij}^p; \quad \Delta_k e_{ij}^p = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma^p, \quad (5)$$

де  $\Delta_k$  – приріст за  $k$ -ий етап відповідної величини;  $s_{ij}$  – компоненти девіатора напружень;  $S = \left( \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$  – інтенсивність дотичних напружень;  $\Gamma^p$  – інтенсивність накопиченої пластичної деформації. При визначенні приросту пластичної деформації на  $k$ -ому етапі  $\Delta_k \Gamma^p$  використовувалась залежність  $S = F(\Gamma, T)$  між інтенсивністю дотичних напружень  $S$  та інтенсивністю деформацій зсуву  $\Gamma$ . Для її конкретизації можна використати діаграми  $\sigma \sim \varepsilon$  ( $\sigma$  – напруження,  $\varepsilon$  – повздовжня деформація зразка), одержані в результаті експериментів на розтяг циліндричних зразків при різних фіксованих значеннях температури, проведених з швидкостями навантаження, які не впливають на форму діаграм  $\sigma \sim \varepsilon$ .

В процесі розв'язку задачі термопластичності приймалися наступні механічні граничні умови: зовнішня і внутрішня поверхня вважались вільними від зусиль, а на торцях задавались умови симетрії.

Задача про термопластичне деформування тонкостінного циліндра розв'язувалась з використанням теорії оболонок в осесиметричній постановці [1]. Чисельний розв'язок задачі зводився до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь, яке здійснювалось методом Рунге-Куты з дискретною ортогоналізацією по С.К.Годунову.

Задача про деформування коробчастої конструкції розв'язувалась в плоскодеформованій постановці методом скінченних елементів із застосуванням програмного комплексу ANSYS [2]. Використовувались 8-ми вузлові плоскі чотирикутні елементи

ти PLANE77 і PLANE183. Перший тип елемента призначений для розв'язання задач теплопровідності, другий – для задач механіки.

**Чисельні результати.** В процесі розрахунків приймалися наступні значення: серединний радіус циліндра –  $R_0 = 1\text{ м}$ ; товщина стінок –  $h = 0,02\text{ м}$ . Початкова температура  $T_0 = 293\text{ К}$ ; температура навколишнього середовища –  $T_{cp} = 1793\text{ К}$ ; коефіцієнт теплопровідності –  $\alpha = 1000 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ . В розрахунках по теорії оболонок кількість точок по товщині приймалось 41, вздовж меридіану 3. При розрахунках з використанням методу скінченних елементів використовувались квадратні елементи зі стороною  $0,0025\text{ м}$ .

Як матеріал була вибрана сталь ЭИ437, для якої приймалися наступні фізико-механічні властивості: густина –  $\rho = 7850\text{ кг/м}^3$ ; теплоємність –  $c = 565\text{ Дж/К}$ ; коефіцієнт теплопровідності –  $k = 19,5\text{ Вт/м}\cdot\text{К}$ ; коефіцієнт Пуассона –  $\nu = 0,28$ ; коефіцієнт лінійного теплового розширення –  $\alpha_T = 12 \cdot 10^{-6}\text{ К}^{-1}$ . Діаграми миттєвого деформування для даного матеріалу приведені в роботі [3].

Результати розрахунків в момент часу  $t = 4,5\text{ с}$  показано на рис.2. Суцільні криві відповідають розв'язку осесиметричної задачі з використанням теорії оболонок, штрихові – з використанням методу скінченних елементів. Маркерами нанесені значення величин, які виникають в перетині  $x = 0$  коробчастої конструкції.

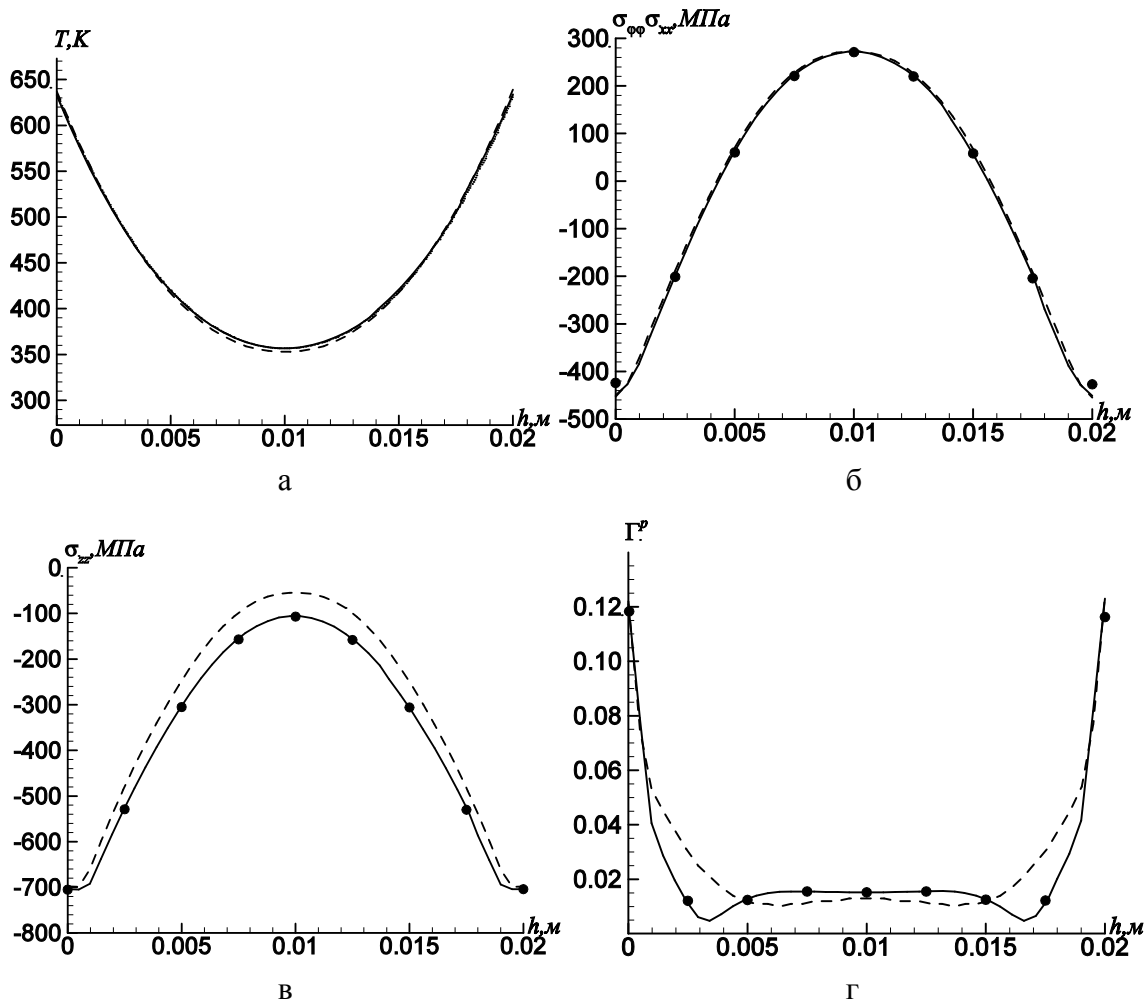


Рисунок 2 – Розподіл за товщиною температури  $T$  і напружень  $\sigma_{\phi\phi}, \sigma_{xx}$

Розподіл по товщині циліндра температури  $T$  показано на рис.2, а, з якого видно, що розподіли температури  $T$  співпадають для циліндра і коробчастої конструкції. На рис.2, б, в, г показано розподіли компонент напружень й інтенсивності пластичної деформації. В перетині  $x=0$  напрямки напружень  $\sigma_{xx}$  і  $\sigma_{\varphi\varphi}$  співпадають.

**Висновки.** З отриманих результатів видно, що в перетинах, які відповідають серединам стінок коробки, добре узгоджуються напруження, які в коробці й циліндрі співпадають за напрямками. Це дає можливість зробити висновок, що розробку й тестування методик розв'язання задач термопластичності можна проводити в осесиметричній постановці, а потім перенести її на пластинчаті конструкції.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Galishin A.Z. Thermal Stress-Strain State of Thin Laminated Shells of Revolution under Convective Heat Exchange with the Environment / Galishin A.Z., Steblyanko P.A., Shevchenko Yu.N. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки): тематичний випуск "Математичні проблеми технічної механіки" / Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2 (22). – С.3-8.
2. Басов К.А. ANSYS для конструкторов / Басов К.А. – М.: ДМК Пресс, 2009. – 248с.
3. Шевченко Ю.Н. Термовязкоупругопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций / Шевченко Ю.Н., Бабешко М.Е., Терехов Р.Г. – К.: Наук. думка, 1992. – 328с.

Надійшла до редколегії 20.05.2015.

УДК 539.3

БАГНО О.М., д.фіз.-мат.н., пров. наук. співр.

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, Київ

### ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ НА ДИСПЕРСІЮ НОРМАЛЬНИХ ХВИЛЬ У СИСТЕМІ: ШАР ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ – СТИСЛИВИЙ ПРУЖНИЙ ШАР

**Вступ.** Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень ґрунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Лява, Стоунлі та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності, наведено в [1]. Серед багатьох публікацій, що вийшли останнім часом, відмітимо лише статтю [2]. Вона присвячена дослідженню у рамках класичної теорії пружності локалізації поверхневих хвиль у системі: пружний шар на рідкому напівпросторі. У роботі приділена увага вивченню властивостей нижчих нормальних хвиль, що поширюються у гідропружному хвелеводі. При цьому детально проаналізовано поведінку хвиль Релея, Стоунлі та трьох вищих мод у високочастотній частині спектра. Чисельно визначені величини фазових швидкостей поверхневих хвиль і трьох перших мод високого порядку при великих значеннях хвильового числа. Показано, що ефекти пружно-рідинної взаємодії суттєво залежать від механічних властивостей рідини та пружного матеріалу.

Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним тілам. До числа таких факторів належать початкові напруження. Задачі, які розглянуто, та результати, що отримані з урахуванням у тілах початкових напружень, наведено в [3]. Дане повідомлення присвячене дослідженню у рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності при скінчених деформаціях впливу початкових напружень на швидкості нормальних хвиль Лемба у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини.

**Постановка задачі.** Будемо розглядати такі динамічні процеси у гідропружній системі, при яких додаткові деформації, тобто збурення деформацій, що виникають, значно менше початкових. Досліджуються гармонічні хвильові процеси малої амплітуди в пружних тілах, які знаходяться в початковому стані.

Далі припустимо, що нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно-диференційованою функцією компонент тензора деформацій Гріна, заповнює об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $-h_2 \leq z_2 \leq 0$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$  та контактує з шаром ідеальної стисливої рідини, що займає об'єм:  $-\infty < z_1 < \infty$ ,  $0 \leq z_2 \leq h_1$ ,  $-\infty < z_3 < \infty$ . Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі  $0z_3$ . У цьому випадку у всіх площинах, паралельних площині  $0z_1z_2$ , явища будуть відбуватися тотожним чином. Тому задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині  $0z_1z_2$ .

Скористаємося постановками задач гідропружності для тіл з початковими напруженнями та представленнями загальних розв'язків, запропонованими в роботах [4-6]. У подальшому досліджуються хвильові процеси у попередньо деформованих стисливих пружних тілах, початковий стан яких є однорідним.

Для плоского випадку, який розглядається, загальні розв'язки будуть мати вигляд [4-6]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; u_2 = \frac{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)}{\lambda_2^2 (a_{12} + \mu_{12})} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_1; v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t}, \quad (1)$$

де введені функції  $\chi_1$  та  $\chi_2$  задовольняють рівнянням:

$$\left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda_2^2 (\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0)}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{\lambda_2^4 (a_{12} + \mu_{12})^2}{(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0) (\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0; \quad (2)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0. \quad (3)$$

Дана задача характеризується наступними динамічними

$$Q_1|_{z_2=0} = 0, \quad Q_2|_{z_2=0} = P_2|_{z_2=0}, \quad Q_1|_{z_2=-h_2} = 0, \quad (4)$$

$$Q_2|_{z_2=-h_2} = 0, \quad P_2|_{z_2=h_1} = 0 \quad (5)$$

та кінематичними

$$v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0} \quad (6)$$

граничними умовами. Тут введені такі позначення:  $u_i$  – компоненти вектора переміщень пружного тіла;  $\lambda_i$  – подовження пружного шару в напрямках координатних осей;  $a_{ij}$  та  $\mu_{ij}$  – величини, які визначаються з рівнянь стану та залежать від виду пружного потенціалу [7];  $\bar{\sigma}_{ii}^0$  – початкові напруження ( $s_{ii}^0 = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \bar{\sigma}_{ii}^0}{\lambda_i^2}$ );  $\rho$  – щільність матеріалу пружного шару;  $v_i$  – компоненти вектора швидкості рідини;  $a_0$  – швидкість звуку в рідині в стані спокою;  $Q_j$  та  $P_i$  – складові напружень у твердому тілі та рідині.

Далі параметри, що характеризують процес поширення хвиль, розшуковуються у класі біжучих хвиль, які обираються у вигляді:

$$\chi_j = X_j(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad j = 1, 2, \quad (7)$$

де  $k$  – хвильове число,  $\omega$  – кругова частота.

У подальшому розглядаються дві задачі Штурма-Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини. Розв'язуючи їх знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (4)-(6) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку, та, прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm} \left( c_\sigma, a_{ij}, \mu_{ij}, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s \right) \right\| = 0, \quad l, m = \overline{1, 6}, \quad (8)$$

де  $c_\sigma$  – фазова швидкість нормальних хвиль у попередньо напруженому шарі,  $c_s$  ( $c_s^2 = \mu / \rho$ ) – швидкість хвилі зсуву,  $\mu$  – модуль зсуву,  $h_1$  – товщина шару рідини,  $h_2$  – товщина пружного шару,  $\rho_0$  – щільність рідини.

Як відомо, у необмежених і напівобмежених тілах хвилі, що поширюються, є бездисперсійними. Особливістю даної пружно-рідинної системи є наявність не тільки границі контакту тіл, але і двох вільних поверхонь. Завдяки взаємодії на цих граничних поверхнях трьох хвиль: поздовжньої та поперечної в стисливому пружному шарі, а також поздовжньої в шарі ідеальної стислої рідини, виникають моди, які поширюються з дисперсією. Їх фазові швидкості складним чином залежать від частоти.

Відмітимо, що отримане дисперсійне рівняння (8) не залежить від форми пружного потенціалу. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків. Зокрема, якщо ввести додаткові припущення, то можна одержати рівняння для визначення швидкостей хвиль Релея, Стоунлі та Лемба, раніше ґрунтовно досліджених у роботах [8-10]. Вказані частинні випадки враховують наявність початкових деформацій у пружному шарі. Задачі, які було розглянуто в рамках цієї моделі, наведено в [3]. Якщо покласти  $\bar{\sigma}_{ii}^0 = 0$ , то отримаємо рівності для добре досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі та Лемба [1, 2, 11].

**Аналіз числових результатів.** У подальшому дисперсійне рівняння (8) розв'язувалося чисельно. При цьому розрахунки проводилися для системи органічне скло – вода, яка характеризувалася наступними параметрами: пружний шар –  $\rho = 1160$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 1,86 \cdot 10^9$  Па; шар рідини –  $\rho_0 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>,  $a_0 = 1459,5$  м/с.

Зауважимо, що рівняння (8) виведено без будь-яких додаткових вимог до виду функції пружного потенціалу, тому воно має місце для пружних потенціалів довільної форми. У даній роботі для оргскла використовувався найпростіший триінваріантний потенціал у формі Мурнагана [7].

Результати обчислень представлені на рис.1-4.

На рис.1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних величин фазових швидкостей  $\bar{c}$  ( $\bar{c} = c/c_s$ ) мод Лемба від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h}_2$  ( $\bar{h}_2 = \omega h_2/c_s$ ) при відсутності початкових деформацій. Номерами  $n_a$  позначено антисиметричні моди, а  $n_s$  – відповідно симетричні моди.

На рис.2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних фазових швидкостей мод Лемба  $\bar{c}$  від безрозмірної товщини пружного шару (частоти)  $\bar{h}_2$  при взаємодії з товстим шаром рідини з товщиною  $\bar{h}_1 = 20$  ( $\bar{h}_1 = \omega h_1/c_s$ ) теж за відсутності початкових деформацій.

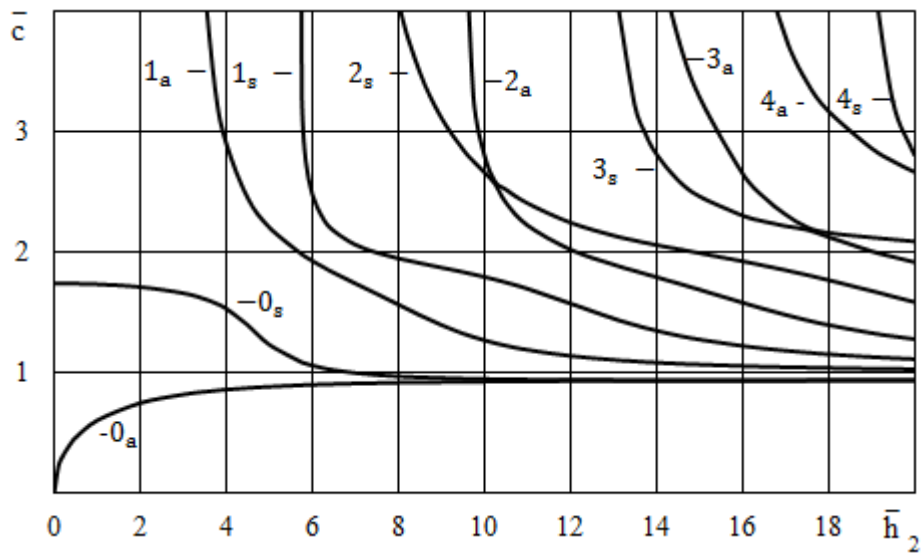


Рисунок 1

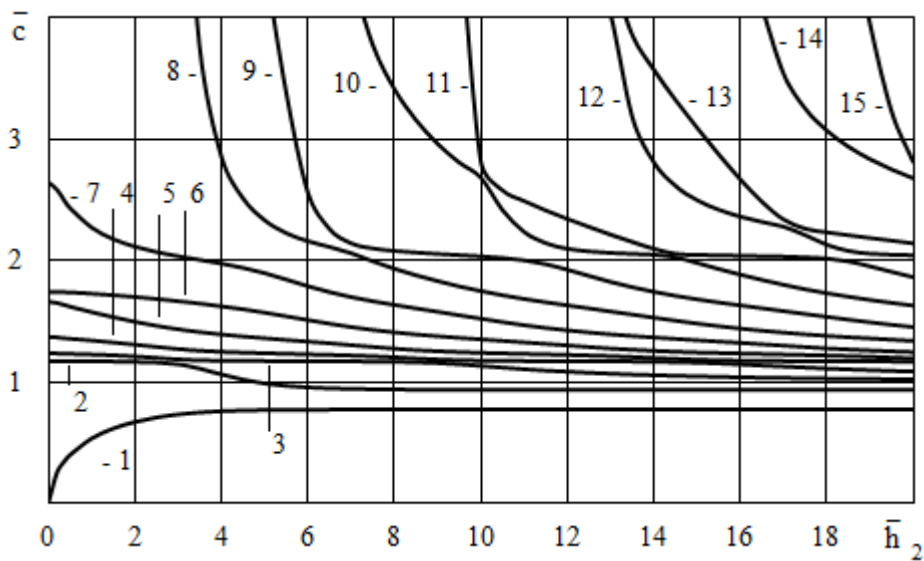


Рисунок 2

Характер впливу попереднього розтягу ( $\bar{\sigma}_{11}^0 = 0,004$ ) на швидкості мод у пружному шарі, який взаємодіє з шаром рідини, ілюструють графіки на рис.3-4, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей  $c_\varepsilon$  ( $c_\varepsilon = \frac{c_\sigma - c}{c}$ ,  $c_\sigma$  – фазова швидкість нормальних хвиль Лемба у попередньо напруженому шарі,  $c$  – фазова швидкість нормальних хвиль у системі при відсутності початкових деформацій) від товщини пружного шару (частоти) для перших 15 мод. На цих рисунках представлені дисперсійні криві для гідропружного хвильоводу, товщина шару рідини якого дорівнює  $\bar{h}_1 = 20$ .

З графіків, представлених на рис.1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди при зростанні товщини пружного шару (частоти) прямує до швидкості хвилі Релея ( $\bar{c}_R = 0,93356$ ) знизу, а швидкість нульової симетричної моди прямує до швидкості хвилі Релея згори. Швидкості усіх вищих мод при збільшенні товщини пружного шару (частоти) прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

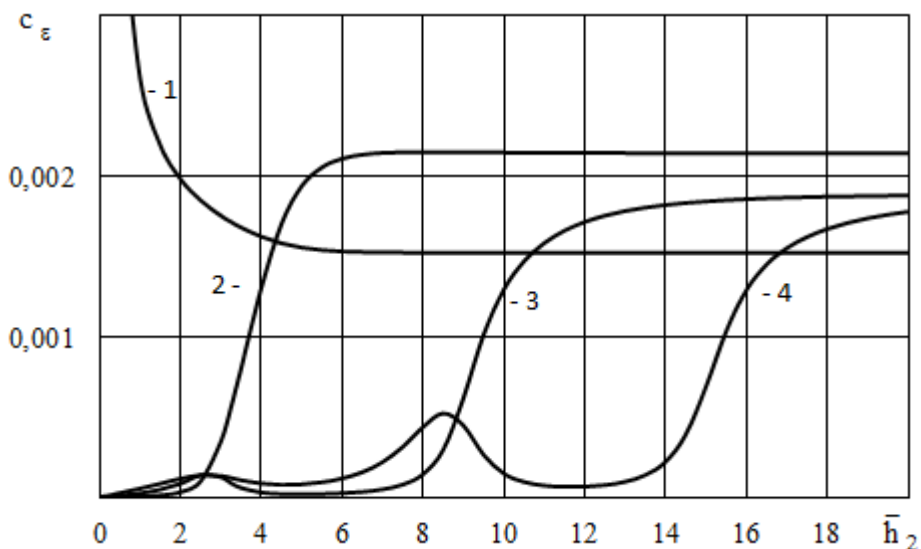


Рисунок 3

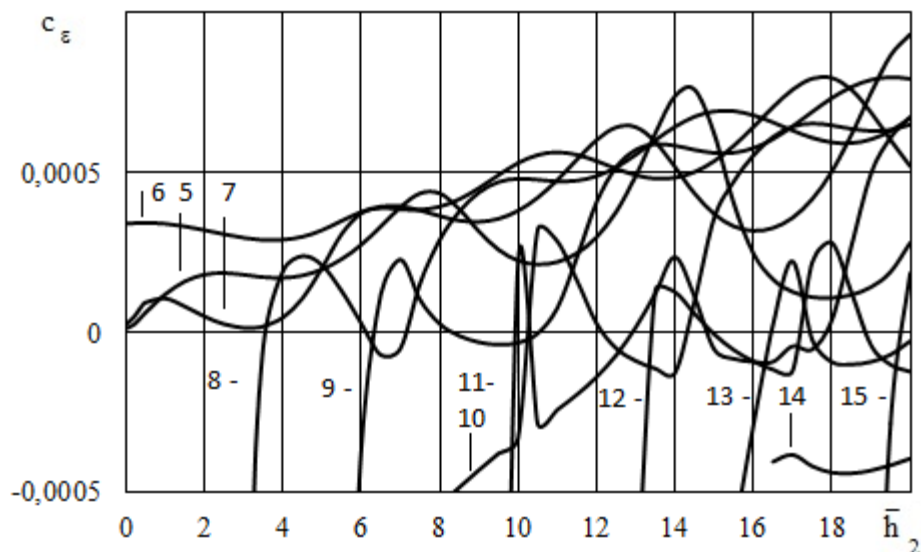


Рисунок 4



Графіки для гідропружної системи, які наведені на рис.2, показують, що при зростанні товщини пружного шару (частоти) швидкість першої моди прямує до швидкості хвилі Стоунлі ( $\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,77171$ ), а швидкість другої моди – до швидкості хвилі Релея ( $\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,93356$ ). Зауважимо, що квазіповерхнева мода 1 при обраних механічних параметрах системи ( $\bar{a}_0 = a_0/c_s = 1,1526 > \bar{c}_R = 0,93356$ ), поширюючись вздовж границі контакту середовищ, локалізується переважно у приповерхневій області твердого тіла [11]. Квазірелеївська мода 2 розповсюджується вздовж вільної поверхні пружного шару. Фазові швидкості усіх наступних мод високого порядку прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла. При цьому вони поширюються в пружному шарі по всій його товщині. Відмітимо, що наявність рідини призводить до збільшення числа мод Лемба в гідропружній системі. При цьому моди, що виникають, мають нульові частоти запірання.

З графіків, зображених на рис.3-4, випливає, що початковий розтяг пружного шару ( $\bar{\sigma}_1^0 = 0,004$ ) призводить до підвищення фазових швидкостей мод 1-7. Швидкості усіх вищих мод 8-15 в околі частот їх зародження стають менше відповідних швидкостей в шарі без початкових напружень. Незважко бачити, що для мод, починаючи з восьмої, і далі для всіх наступних існують товщини пружного шару та певні частоти, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. Ця якісно нова закономірність, яка відсутня у випадку поширення хвиль у необмежених та напівобмежених тілах, вперше була виявлена для пружного шару, що не взаємодіє з рідиною, та приведена в роботі [8]. У розглянутому тут випадку гідропружної системи з товстим рідким шаром кожна мода 8-10 має три такі частоти. Наступні вищі нормальні хвилі мають по п'ять таких частот.

**Висновки.** У рамках тривимірних рівнянь лінеаризованої теорії пружності скінченних деформацій та гідродинаміки ідеальної рідини дано постановку задачі про поширення акустичних хвиль у попередньо деформованому стисливому пружному шарі, що взаємодіє з шаром ідеальної стисливої рідини. Проаналізовано вплив товщини шару рідини та початкової деформації пружного шару на фазові швидкості нормальних хвиль. Приведені дисперсійні криві мод Лемба у широкому інтервалі частот при взаємодії пружного шару з товстим шаром рідини. Показано, що для мод, починаючи з восьмої, існують товщини пружного шару або певні частоти, при яких попереднє деформування не впливає на їх фазові швидкості. Виявлено, що у розглянутому тут випадку товстого шару рідини кожна мода 8 – 10 має три такі частоти, а наступні нормальні хвилі Лемба більш високого порядку мають по п'ять таких частот.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. / И.А.Викторов. – М.: Наука, 1981. – 288с.
2. Гринченко В.Т. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве / В.Т.Гринченко, Г.Л.Комиссарова // Акустичний вісник. – 2005. – 8, № 4. – С.38-45.
3. Багно А.М. Упругие волны в предварительно напряжённых телах, взаимодействующих с жидкостью (Обзор) / А.М.Багно, А.Н.Гузь // Прикладная механика. – 1997. – 33, № 6. – С.3-39.
4. Гузь А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями / А.Н.Гузь // Прикладная механика. – 1980. – 16, № 3. – С 3-21.
5. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями. В 2-х томах / А.Н.Гузь. – К.: Наук. думка, 1986.

6. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями / А.Н.Гузь. – К.: А.С.К., 2004. – 672с.
7. Гузь А.Н. Введение в акустоупругость / А.Н.Гузь, Ф.Г.Махорт, О.И.Гуща. – К.: Наук. думка, 1977. – 152с.
8. Гузь А.Н. Волны в слое с начальными напряжениями / А.Н.Гузь, А.П.Жук, Ф.Г.Махорт. – К.: Наук. думка, 1976. – 104с.
9. Бабич С.Ю. Упругие волны в телах с начальными напряжениями / С.Ю.Бабич, А.Н.Гузь, А.П.Жук // Прикладная механика. – 1979. – **15**, № 4. – С.3-23.
10. Жук А.П. Волны Стоунли в среде с начальными напряжениями / А.П.Жук // Прикладная механика. – 1980. – **16**, № 1. – С.113-116.
11. Волькенштейн М.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела / М.М.Волькенштейн, В.М.Левин // Акустический журнал. – 1988. – **34**, № 4. – С.608-615.

*Надійшла до редколегії 22.05.2015.*

УДК 539.3

ЗЕЛЕНСКИЙ В.С., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.  
БЫСТРОВ В.М., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.  
ДЕКРЕТ В.А., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## **ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА С ОРТОТРОПНЫМИ СЛОЯМИ ПРИ ОДНООСНОМ СЖАТИИ**

**Введение.** Технология производства композитных материалов (КМ) и создания элементов конструкций из КМ предусматривает разработку практических алгоритмов их расчета на прочность и деформативность. При прочностном анализе элементов конструкций и образцов из КМ в качестве одного из механизмов потери их несущей способности и разрушения при сжатии может рассматриваться потеря устойчивости в структуре КМ [1]. Наиболее точным и строгим подходом при исследовании указанного механизма является использование общих уравнений трехмерной линеаризированной теории устойчивости деформируемых тел (ТЛТУДТ) [2, 3] и модели кусочно-однородной среды. В работах [4-6] с использованием указанного подхода исследована устойчивость КМ и образца из КМ слоистой структуры при одноосном сжатии поверхностной нагрузкой армирующих слоев для случая неоднородного докритического состояния, связанного с условиями нагружения. В этих работах задачи устойчивости рассматривались в двумерной постановке для случая плоской деформации. Показано, что в зависимости от граничных условий для конкретной расчетной модели, в композите может иметь место, как внутренняя потеря устойчивости, так и приповерхностная потеря устойчивости, которая соответствует механизму разрушения композита в виде смятия торцов [1]. В работе [7] исследована пространственная задача устойчивости образца в виде слоистой прямоугольной пластины с изотропными слоями при одноосном сжатии в плоскости армирования. Критические параметры устойчивости образца определялись с учетом различных геометрических характеристик внутренней структуры материала. Как показали проведенные исследования, используемый подход, в отличие от приближенных подходов, дает возможность получить результаты, соответствующие физике процессов, происходящих в КМ с принятой в механике точностью. Этот подход также позволяет провести оценку результатов, полученных с применением приближен-

ных теорий и расчетных схем, применяемых при расчете конструкций из традиционных материалов.

В продолжение работ [7, 8] в настоящей статье рассмотрена пространственная задача устойчивости двухкомпонентного КМ с ортотропными и изотропными слоями, находящегося в условиях одноосного поверхностного нагружения в плоскости размещения слоев. С учетом сложности получения аналитических решений для решения задачи устойчивости применяются численные методы. Для построения дискретных моделей, соответствующих дифференциальных задач использована концепция базовых факторов [9] в рамках объектно-ориентированного подхода.

**Постановка задачи.** Рассматривается КМ, который представляет собой периодическую структуру, образованную чередованием изотропных и трансверсально-изотропных слоев. Трансверсально-изотропный материал сохраняет все специфические свойства ортотропного материала с малой сдвиговой жесткостью и вместе с тем позволяет уменьшать число параметров, от которых зависит критическая нагрузка. Композитный материал моделируется бесконечной в направлении  $Ox_1$  областью и имеет конечный размер в направлении  $Ox_2$  и  $Ox_3$  (рис.1). Такая расчетная модель позволяет учитывать, как потерю устойчивости в структуре материала, так и образца в целом.

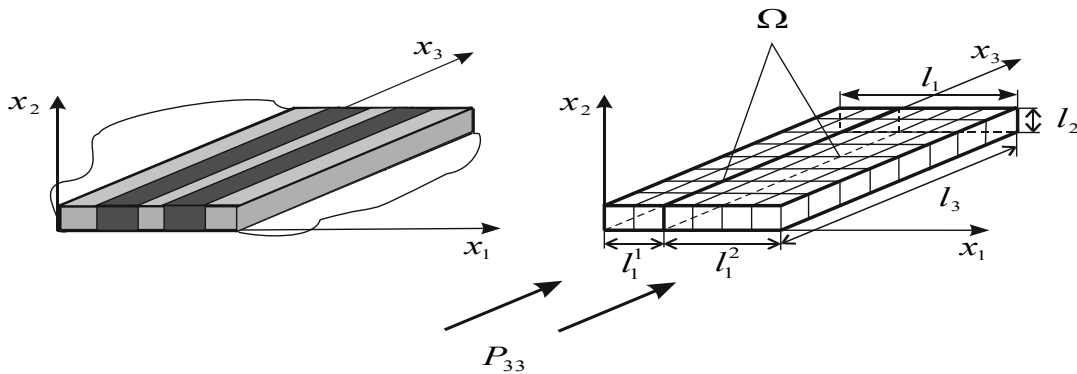


Рисунок 1 – Композитный материал

Рисунок 2 – Расчетная область

Слои размещены параллельно плоскости  $x_1 = const$ . На торце  $x_3 = 0$  слои сжимаются равномерной нагрузкой постоянной интенсивности  $P = P_{33}$ . На противоположном торце используются условия жесткого торцевого закрепления слоев. Расчетная область выбирается из условия периодичности структуры композита и симметрии условий нагружения и закрепления. Граничные условия на боковых сторонах образца соответствуют условиям симметрии. Таким образом, задача устойчивости формулируется на параметре структуры материала  $V = \{0 \leq x_1 \leq (l_1^1 + l_1^2), 0 \leq x_2 \leq l_2, 0 \leq x_3 \leq l_3\}$ , представляющего собой образец из КМ в виде двухслойной прямоугольной пластины (рис.2). Расчетная область дает возможность исследовать устойчивость, как композитного материала, так и элемента конструкции из этого материала с соответствующими граничными условиями. Критические параметры устойчивости определяются при различных геометрических характеристиках компонент композитного материала.

Предполагается, что поверхностное нагружение реализуется в виде «мертвой» нагрузки, что обеспечивает выполнение достаточных условий применимости статического метода ТЛТУДТ [3]. В формулируемой постановке задачи устойчивости начальное состояние является неоднородным. Его компоненты определяются из уравнений линейной теории упругости. Уравнения линейной теории упругости и граничные условия

вместе с основными соотношениями для каждого слоя расчетной области  $k, (k = 1, 2) \in \Omega$  имеют вид:

уравнения равновесия

$$\sigma_{ij,i}^0 = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \text{ при } x_1 = (0, l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{im}^0 &= 0 \text{ при } x_2 = (0, l_2) \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{33}^0 &= P_{33}, \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_m &= 0 \text{ при } x_3 = l_3 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2); \end{aligned} \quad (2)$$

условия на контакте

$$[u_m] = 0, \quad \left[ \sigma_{im}^0 \right] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \quad (3)$$

где  $[ ]$  – скачек функции  $f(x)$ , индекс  $k$  опускаем.

В пределах каждого слоя КМ соотношения закона Гука имеют вид:

$$\sigma_{ij}^0 = \delta_{ij} A_{ik} u_{k,k}^0 + (1 - \delta_{ij}) G_{ij} (u_{i,j}^0 + u_{j,i}^0), \quad (4)$$

где  $A_{ij}, G_{ij}$  – коэффициенты упругости и модули сдвига изотропного и трансверсально-изотропного тела. При вычислении  $A_{ij}, G_{ij}$  для трансверсально-изотропного тела с осью изотропии  $Ox_3$  и плоскостью изотропии  $x_1Ox_2$  необходимо положить:

$$\begin{aligned} E_1 = E_2 = E, \quad E_3 = E', \quad G' = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad G_{13} = G_{23} = G, \\ \nu_{12} = \nu_{21} = \nu, \quad \nu_{13} = \nu_{23} = \nu', \quad \nu_{32} = \nu_{31} = \nu''. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения и граничные условия ТЛТУДТ для рассматриваемой расчетной схемы запишутся в виде:

уравнения в возмущениях

$$\left( \sigma_{im} + \lambda \sigma_{ik}^0 u_{m,k} \right)_i = 0, \quad x \in \Omega; \quad (6)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} \left( \sigma_{33} + \lambda \sigma_{3j}^0 u_{3,j} \right) = 0, \quad u_1 = u_2 = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_i = 0 \text{ при } x_3 = 0 \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2), \\ u_1 = 0 \text{ при } x_1 = (0, l_1) \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3), \\ \sigma_{im} = 0 \text{ при } x_2 = (0, l_2) \wedge (0 \leq x_1 \leq l_1 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3); \end{aligned} \quad (7)$$

условия на контакте слоев

$$[u_m] = 0, \quad \left[ \sigma_{im}^0 \right] = 0 \text{ при } x_1 = l_1^1 \wedge (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge 0 \leq x_3 \leq l_3). \quad (8)$$

Интенсивность критической нагрузки определяется по формуле

$$P_{kp} = \min |\lambda| \frac{1}{(l_1^1 + l_1^2) l_2} \int_0^{l_1^1 + l_1^2} \int_0^{l_2} P_{33}(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0} dx_1 dx_2. \quad (9)$$

где  $\min |\lambda|$  – минимальное по модулю собственное число задачи (6)-(8),  $P_{33}$  – интенсивность начальной нагрузки, приложенной к граничному участку  $x_3 = 0$  (рис.2),  $\wedge$  – знак логического сложения.

Для численного решения задачи методом сеток в расчетной области  $\Omega$  (рис.2) вводится по каждому из направлений  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  неравномерная разностная сетка  $\bar{\omega} = \omega + \gamma$ , состоящая из множества  $\omega$  внутренних и множества  $\gamma$  граничных узлов. Сетка  $\bar{\omega}$  разбивает расчетную область на  $M$  прямоугольных параллелепипедов и содержит  $N$  узлов, в каждом из которых строится аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)-(6), (8)-(13). Дифференциальным задачам (1-5), (6-8) ставятся в соответствие разностные задачи

$$Ay = \Phi, x \in \bar{\omega}, \quad (10)$$

$$Ay = \mu By, x \in \bar{\omega}. \quad (11)$$

Построение задач (10), (11) осуществлялось в соответствии с методикой, изложенной в работе [9]. Для решения дискретных задач (10), (11) использованы численные методы (прямые и итерационные) [10]. Эффективность методики решения дискретных задач (10), (11) достигалась за счет использования динамической разностной сетки и комбинированного применения выбранных методов. Конечная разностная сетка, на которой было получено решение с заданной точностью, содержала 16384 узла.

**Результаты работы.** Рассмотрен КМ, слои которого характеризуются следующими механическими постоянными:  
 изотропный слой:  $E=52$ ГПа,  $G=20$ ГПа,  $\nu = 0,3$ ;  
 трансверсально-изотропный слой:  $E_1=E_2=52$ ГПа,  $E_3=30$ ГПа,  $G_{12}=20$ ГПа,  $G_{13}=G_{23}=10$ ГПа,  $\nu = 0,3$ ,  $\nu_{13} = 0,2$ ,  $\nu_{23} = 0,1$ .

При фиксированном значении параметра  $l_3$  определялись критические характеристики устойчивости КМ для различных значений параметра тонкостенности  $\alpha = \frac{\pi d_2}{2l_1}$ ,

$\alpha = (0,32; 0,24; 0,16; 0,08)$ . При тех же геометрических характеристиках вычислялись критические характеристики устойчивости КМ для расчетной схемы с изотропными слоями.

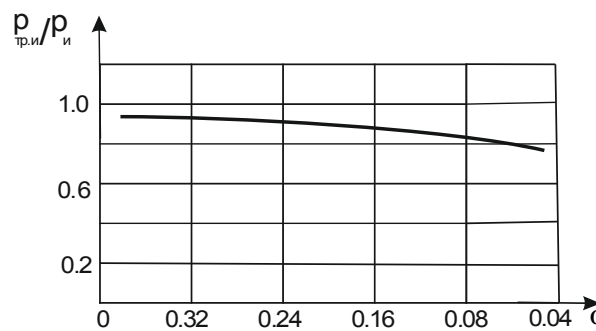


Рисунок 3 – Зависимость отношения критических нагрузок от параметра тонкостенности

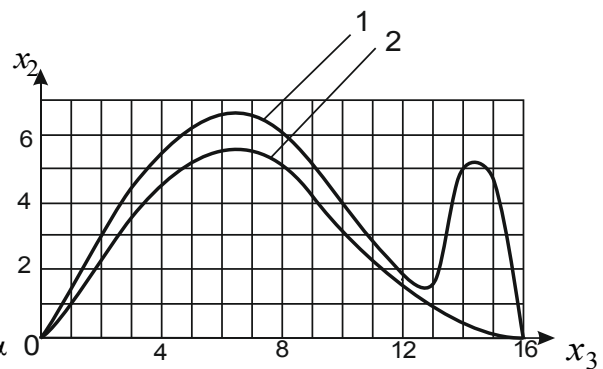


Рисунок 4 – Формы потери устойчивости

На рис.3 приведена зависимость  $P_{тр.и}/P_{и}$  от параметра  $\alpha$ , где  $P_{тр.и}$  – критическая нагрузка полученная для КМ с трансверсально-изотропными и изотропными слоями,  $P_{и}$  – критическая нагрузка, полученная для КМ с изотропными слоями. На рис.4 в качестве примера приведены эпюры смещений  $u_2(l_1^1, l_2, x_3)$  при  $0 \leq x_3 \leq l_3$  на контакте слоев рассмотренных материалов для параметра тонкостенности  $\alpha = 0,16$ . Кривая 1 соответствует КМ с трансверсально-изотропными слоями, кривая 2 – КМ с изотропными слоями. Особенность поведения зависимости  $u_2(l_1^1, l_2, x_3)$  для КМ с трансверсально-изотропными слоями вблизи границы  $x_3 = 0$ , по-видимому, вызвана условиями жесткого защемления слоев.

**Выводы.** Как видно из рис.3 при заданных механических характеристиках с уменьшением параметра тонкостенности  $\alpha$  влияние ортотропии на критические параметры композитного материала возрастает.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь А.Н. Основы механики разрушения композитов при сжатии. В 2-х т. (Т.1. Разрушение в структуре материала / Гузь А.Н. – 592с. Т.2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.) – К.: “ЛИТЕРА”, 2008.
2. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Вища школа, 1986. – 512с.
3. Guz A.N. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies/ Guz A.N. – Berlin: Springer-Verlag Heilberg, 1999. – 555 p.
4. Зеленский В.С. Устойчивость слоистого композитного материала при одноосном нагружении / Зеленский В.С., Декрет В.А., Быстров В.М. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – Випуск 2(19). – С.49-53.
5. Быстров В.М. Численное исследование слоистых композитов при неоднородном докритическом состоянии / Быстров В.М., Декрет В.А., Зеленский В. С. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2014. – Випуск 1(24). – С.157-164.
6. Декрет В.А. Численное исследование устойчивости слоистого композита при одноосном сжатии слоев наполнителя / Декрет В.А., Зеленский В.С., Быстров В.М. // Прикладная механика. – 2014. – № 5. – С.80-91.
7. Зеленский В.С. Влияние геометрических параметров слоистой прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии / Зеленский В.С., Быстров В.М, Декрет В. А. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2013. – Випуск 2(22). – С.41-46.
8. Коханенко Ю.В. Влияние длины прямоугольной пластины на величину критической нагрузки при одноосном сжатии (трехмерная теория устойчивости) / Коханенко Ю.В., Зеленский В.С. // Доп. НАН України. – 2003. – №4. – С.48-51.
9. Статика материалов / Под ред. А.Н.Гузя. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453с. (Механика композитов: в 12 т. Т.3)
10. Бахвалов Н.С. Численные методы / Бахвалов Н.С., Жидков Н.П. – М.: Наука. 1987. – 598с.

Поступила в редколлегию 26.05.2015.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## МЕТОД РЕЙССНЕРОВЫХ АЛГОРИТМОВ В ТЕОРИИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

**Введение.** Для построения уравнений упругого равновесия нетонких трансверсально-изотропных пластин используются разные методы. Одним из эффективных является метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра  $P_k(\xi)$  координаты толщины  $\xi = h^{-1}x_3$ ,  $x_3 \in [-h, h]$ . В случае изгиба пластины компоненты вектора перемещений  $u_j(\bar{x})$  ( $j = 1, 2, 3$ ) представляются формулами [1,2]

$$u_\alpha(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2) P_{2k-1}(\xi) \quad (\alpha = 1, 2); \quad u_3(\bar{x}) = \sum_{k=0}^n u_3^{(2k)}(x_1, x_2) P_{2k}(\xi). \quad (1)$$

Относительно коэффициентов разложения  $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$ , как функций двух независимых переменных, вариационным способом выводится система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия

$$c_{66}\Delta u_+^{(2k-1)} + (c_{12} + c_{66}) \frac{\partial e^{(2k-1)}}{\partial x_\alpha} + \frac{4k-1}{h} \left[ \sum_{s=0}^n \lambda_{2s}^{(k)} \frac{\partial u_3^{(2s)}}{\partial x_\alpha} - \frac{c_{44}}{h} \sum_{s=1}^n \alpha_{2s-1}^{(k)} u_\alpha^{(2s-1)} \right] = 0;$$

$$c_{44}\Delta u_3^{(2k)} + \frac{4k+1}{h} \left[ \sum_{s=1}^n \gamma_{2s}^{(k)} e^{(2s-1)} - \frac{c_{33}}{h} \sum_{s=1}^n \beta_{2s}^{(k)} u_3^{(2s)} \right] = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \quad (2)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $c_{ij}$ ,  $c_{44}$ ,  $c_{66}$  – упругие постоянные материала;

$$\lambda_{2s}^{(k)} = \begin{cases} -c_{44}, & 0 \leq s < k, \\ c_{13}, & k \leq s \leq n; \end{cases} \quad \beta_{2s}^{(k)} = \begin{cases} s(2s+1), & 1 \leq s \leq k, \\ k(2k+1), & k \leq s \leq n. \end{cases}$$

**Постановка задачи.** Изложим способ построения уравнений равновесия трансверсально-изотропных пластин, исходя из метода Рейсснеровых алгоритмов [3]. Представим, согласно [3, 4], коэффициенты разложения  $u_j^{(m)}(x_1, x_2)$  в виде формул

$$u_\alpha^{(2k-1)}(x_1, x_2) = (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2); \quad u_3^{(2k)}(x_1, x_2) = (-1)^k h^{2k} \Delta^k u, \quad (3)$$

где  $u = u(x_1, x_2)$  – произвольная достаточно гладкая вещественная функция. Тогда равенства (1) примут вид

$$u_\alpha(\bar{x}) = \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial \Delta^{k-1} u}{\partial x_\alpha} P_{2k-1}(\xi) \quad (\alpha = 1, 2);$$

$$u_3(\bar{x}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k h^{2k} \Delta^k u P_{2k}(\xi). \quad (4)$$

Здесь  $m = n - 1$  или  $m = n$ .

Согласно (4), компоненты деформаций представляются таким образом

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} P_{2k-1}(\xi); \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} P_{2k-1}(\xi); \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1 \partial x_2} P_{2k-1}(\xi); \\ e_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \sum_{k=1}^m (-1)^k h^{2k-1} \Delta^k u \sum_{s=1}^k (4s-1) P_{2s-1}(\xi) = \sum_{k=1}^m (4k-1) (-1)^k h^{2k-1} \Delta^{(k)} u P_{2k-1}(\xi); \\ e_{\alpha 2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_3} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (-1)^k h^{2k} \left[ \frac{\partial \Delta^k u}{\partial x_\alpha} + (4k+1) \frac{\partial \Delta^{(k)} u}{\partial x_\alpha} \right] P_{2k}(\xi), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\Delta^{(k)} u = \sum_{s=k}^n (-1)^{s-k} h^{2(s-k)} \Delta^s u; \quad \Delta^{(k)} u = \sum_{s=k}^{n-1} (-1)^{s-k+1} h^{2(s-k)} \Delta^s u. \quad (6)$$

Соотношения упругости для трансверсально-изотропного тела принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \left( c_{11} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} + c_{12} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} + (4k-1) c_{13} \Delta^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi); \\ \sigma_{22} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \left( c_{12} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1^2} + c_{11} \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_2^2} + (4k-1) c_{13} \Delta^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi); \\ \sigma_{33} &= \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \left( c_{13} \Delta^k u + (4k-1) c_{33} \Delta^{(k)} u \right) P_{2k-1}(\xi); \quad \sigma_{12} = 2c_{66} \sum_{k=1}^n (-1)^k h^{2k-1} \times \\ &\times \frac{\partial^2 \Delta^{k-1} u}{\partial x_1 \partial x_2} P_{2k-1}(\xi); \quad \sigma_{\alpha 3} = c_{44} \sum_{k=0}^m (-1)^k h^{2k-1} \left( \frac{\partial \Delta^k u}{\partial x_\alpha} - (4k+1) \frac{\partial \Delta^{(k)} u}{\partial x_\alpha} \right) P_{2k}(\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

**Результаты работы.** Предположим, что на плоских гранях пластины  $x_3 = h$ ,  $x_3 = -h$  заданы напряжения

$$\sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (\alpha = 1, 2); \quad \sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = \pm p(x_1, x_2), \quad (8)$$

а на цилиндрической поверхности выполняются однородные условия, выраженные в перемещениях и напряжениях. Для построения уравнений равновесия пластины воспользуемся вариационным принципом, требующим стационарности функционала



$$J(v) = \frac{1}{2} a(u, v) - f(v) < \infty, \quad (9)$$

где  $a(u, v)$  – симметричная билинейная форма

$$a(u, v) = \iiint_{\Omega} \sigma_{ij}(u) e_{ij}(v) d\Omega; \quad (10)$$

$f(v)$  – линейная форма, которая представляется таким образом

$$f(v) = \iint_S [v_3(x_1, x_2, h) + v_3(x_1, x_2, -h)] \frac{1}{2} p(x_1, x_2) dS. \quad (11)$$

Принимая  $v$  за виртуальные значения  $\delta u$  из (9) получим уравнение

$$\iint_S dS \int_{-h}^h \sigma_{ij}(u) \delta e_{ij}(u) dx_3 = \frac{1}{2} \iint_S p(x_1, x_2) \delta(u_3^+ + u_3^-) dS = 0. \quad (12)$$

Из вариационного уравнения осуществляется вывод уравнений упругого равновесия пластины и соответствующие ему граничные условия. Если внести значения функций (5), (7) в уравнение (12) и провести ряд преобразований, то получим дифференциальное уравнение и граничные условия. Поставленная задача в произвольном приближении сопряжена со значительными громоздкими выкладками, поэтому предлагается [4] проводить вывод разрешающих уравнений последовательно, начиная с простейшего приближения  $n = 1, m = 0$ . В этом случае деформации определяются так

$$e_{11} = -h R_1(\xi) \partial_1^2 u; \quad e_{22} = -h R_1(\xi) \partial_2^2 u; \quad e_{12} = -h R_1(\xi) \partial_1 \partial_2 u; \quad e_{j3} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (13)$$

где  $\partial_\alpha = \partial / \partial x_\alpha$ , а компоненты напряжений представляются следующими формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -h R_1(\xi) (c_{11} \partial_1^2 u + c_{12} \partial_2^2 u); \quad \sigma_{22} = -h R_1(\xi) (c_{12} \partial_1^2 u + c_{11} \partial_2^2 u); \\ \sigma_{12} &= -2h c_{66} \partial_1 \partial_2 u; \quad \sigma_{j3} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражения (13), (14) в равенство (12), получим, после усреднения по координате  $x_3$ , уравнение

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ (c_{11} \partial_1^2 u + c_{12} \partial_2^2 u) \partial_1^2 (\delta u) + (c_{12} \partial_1^2 u + c_{11} \partial_2^2 u) \partial_2^2 (\delta u) + \right. \\ \left. + 4c_{66} \partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 \delta u - 3p \delta u / 2h^3 \right\} dS = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда, после интегрирования по частям и применения формул Грина, получим уравнение равновесия пластины  $\Delta \Delta u = 3p / 2c_{11} h^3$  и граничные условия

$$c_{11} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} + 2c_{66} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s} \right) = 0; \quad c_{12} \Delta u + 2c_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = 0, \quad (16)$$

где  $\vec{n}$  – орт внешней нормали к граничной кривой  $L$ ,  $\partial s$  – элемент длины дуги  $L$ .

Для приближения  $n = 1$ ,  $m = 1$  имеем такие значения составляющих тензора деформаций

$$\begin{aligned} e_{11} &= -hP_1(\xi)\partial_1^2 u; \quad e_{22} = -hP_1(\xi)\partial_2^2 u; \quad e_{12} = -hP_1(\xi)\partial_1 u \partial_2 u; \\ e_{33} &= -3hP_1(\xi)\Delta u; \quad 2e_{\alpha 3} = -h^2 P_2(\xi)\partial_\alpha \Delta u \quad (\alpha = 1, 2) \end{aligned} \quad (17)$$

и напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -hP_1(\xi)\left(c_{11}\partial_1^2 u + c_{12}\partial_2^2 u + 3c_{13}\Delta u\right); \quad \sigma_{12} = -2c_{66}hP_1(\xi)\partial_1 \partial_2 u; \\ \sigma_{22} &= -hP_1(\xi)\left(c_{12}\partial_1^2 u + c_{11}\partial_2^2 u + 3c_{13}\Delta u\right); \quad \sigma_{\alpha 3} = -2c_{44}h^2 P_2(\xi)\partial_\alpha \Delta u; \\ \sigma_{33} &= -hP_1(\xi)(c_{13} + 3c_{33})\Delta u. \end{aligned} \quad (18)$$

Учитывая равенства (17) и (18), вариационное уравнение (12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \iint_S \left\{ \left( c_{11}\partial_1^2 u + c_{12}\partial_2^2 u + 3c_{13}\Delta u \right) \partial_1^2 (\delta u) + \left( c_{12}\partial_1^2 u + c_{11}\partial_2^2 u + 3c_{13}\Delta u \right) \partial_2^2 (\delta u) + \right. \\ \left. + 4c_{66}\partial_1 \partial_2 u \partial_1 \partial_2 (\delta u) + 3(c_{13} + 3c_{33})\Delta u \Delta (\delta u) + \right. \\ \left. + 0,6c_{44}h^2 \left( \partial_1 \Delta u \partial_1 \Delta (\delta u) + \partial_2 \Delta u \partial_2 \Delta (\delta u) \right) - 1,5ph^{-3} \left( \delta u - h^2 \Delta (\delta u) \right) \right\} dS = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Отсюда способом, аналогичным изложенному выше, выводим дифференциальное уравнение

$$\left( 1 + \frac{3c_{13} + 9c_{33}}{c_{11}} \right) \Delta \Delta u - \frac{3c_{44}h^2}{5c_{11}} \Delta \Delta \Delta u = \frac{3}{2c_{11}h^3} (p - h^2 \Delta p) \quad (20)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta u}{\partial n} = 0; \quad -c_{66} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{3c_{44}h^2}{5} \frac{\partial \Delta \Delta u}{\partial n} - \frac{3}{4h} \frac{\partial p}{\partial n} = 0; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{c_{12} + 3c_{13} + 9c_{33}}{2c_{66}} \Delta u - \frac{3p}{4h} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Таким же способом определяются уравнения равновесия и граничные условия для последующих приближений.

**Выводы.** Методом Рейсснеровых алгоритмов построены уравнения упругого равновесия трансверсально-изотропных пластин постоянной толщины. Для первых приближений по базовым функциям (полиномам Лежандра) получены дифференциальные уравнения и соответствующие краевые условия на границе области.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / Векуа И.Н. – М.: Наука, 1982. – 285с.
2. Khoma I.Yu. Representation of the solution of the deflection equilibrium equations for thick transversely isotropic plates / Khoma I.Yu. // J. of Math. Sciences. – 2001. – 103, № 3. – P.306-313.

3. Babuška I. Reissnerian algorithms in the theory of elasticity/ Babuška I., Práger M. // Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences. Ser. des Sci. Tech. – 1960. – V. 8, N 8. – P.411-417.
4. Hanuška A. Contribution to the Reissnerian algorithm in the theory of bending of elastic plates / Hanuška A. // Aplikace Matematiky. – 1967. – V. 6, N 12. – P.449-467.

Поступила в редколлегию 11.06.2015.

УДК 534.21

КОВАЛЕНКО А.П., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.  
ШЕКЕРА М.К., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМЕ ОБОЛОЧКА ВРАЩЕНИЯ – ЖИДКОСТЬ

**Введение.** В разного типа технических устройствах зачастую используются механические системы которые можно рассматривать как оболочки вращения с жидкостью. Часто такие системы подвергаются динамическим продольным наружениям (железнодорожные цистерны, бочкообразные конструкции и т.п.). Математическое моделирование таких гидроупругих систем может снизить аварийность и позволит более тщательно учитывать взаимодействие элементов таких систем при продольных ударных нагружениях.

Исследования в этой области проводятся на протяжении последних десятилетий. В работах рассматриваются как правило цилиндрические оболочки с жидкостью [1-5]. Одной из распространенных является модель типа Тимошенко для оболочки и рассмотрение жидкости в акустическом приближении. Рассматриваются задачи как в нелинейной так и в линейной постановке. Для исследования переходных процессов зачастую достаточно ограничиться линейной постановкой задачи. Анализ публикаций показывает, что приемлемую точность решения дают приближенные методы решения задачи о переходных процессах в оболочке с жидкостью в линейной постановке и рассмотрение жидкости в акустическом приближении [6-8].

Целью работы является построение математической модели для исследования переходных процессов в механических системах оболочка вращения-жидкость при продольном динамическом нагружении.

**Основной материал исследования.** Рассматривается упругая тонкостенная оболочка вращения с жидкостью. Вводится цилиндрическая система координат  $x', r', \theta$ , причем ось  $x'$  направлена по оси симметрии оболочки с началом на торце оболочки  $x' = 0$ ,  $l'$  – длина оболочки,  $r' = f'(x')$  – уравнение медиана срединной поверхности вращения оболочки. На срединной поверхности оболочки введена система ортогональных криволинейных координат  $\alpha_1, \alpha_2$  таким образом, что линия  $r' = f'(x')$  совпадает с линией  $\alpha_2 = const$ . Следовательно в каждой точке срединной поверхности заданы базисные векторы  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ , причем  $\vec{e}_1$  направим по касательной к линии  $\alpha_2 = const$ . Единичный вектор  $\vec{n}$  направим по внешней нормали к плоскости, образованной ортами  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$ .

Давление жидкости в состоянии покоя и давление с наружной стороны равны между собой и имеют значение  $P_0$ . В сечениях  $x' = 0$  и  $x' = l'$  находятся жесткие пла-

стины, препятствующие вытеканию жидкости, определенным образом закрепленные на торцах оболочки. Предположим, что торец  $x' = 0$  оболочки свободен, а торец  $x' = l'$  определенным образом закреплен или свободен.

Конечной целью исследований является изучение переходных процессов в системе. Поэтому необходимо выбирать такие модели для оболочки и жидкости, которые в состоянии описывать распространение волновых возмущений. Для описания движения оболочки используются уравнения типа Тимошенко в перемещениях [9]. Для описания закона движения жидкости – уравнения Навье-Стокса [10].

Вектор полного перемещения оболочки  $\vec{\Phi}$  в точке  $P(\alpha_1, \alpha_2, z)$  примем, как обычно, по сдвиговой модели Тимошенко [9] в виде  $\vec{\Phi} = \vec{F} + z\vec{\gamma}$ , где  $\vec{F} = \vec{e}_1 U'_1 + \vec{e}_2 U'_2 + \vec{n} W'$  – вектор перемещений срединной поверхности;  $\vec{\gamma} = \vec{e}_1 \gamma_1 + \vec{e}_2 \gamma_2$  – вектор угла поворота нормального элемента;  $z$  – координата, отсчитываемая вдоль направления, обозначенного ортом  $\vec{n}$ . Рассматривается осесимметричное движение. В этом случае  $U'_2 = \gamma_1 = 0$ . Явный вид дифференциальных операторов теории упругих оболочек типа Тимошенко можно получить из общего случая уравнения движения произвольной оболочки [9]. В работе [11] показана применимость приближенных теорий оболочек при исследовании переходных процессов.

Тогда задача об исследовании переходных процессов в изучаемой системе оболочка-жидкость сведется к решению следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} L_1(U'_1, W', \gamma_2) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 U'_1}{\partial t'^2} &= g_1, \\ L_2(U'_1, W', \gamma_2) - \rho_1 h' \frac{\partial^2 W'}{\partial t'^2} &= (P - P_0) + g_2, \\ L_3(U'_1, W', \gamma_2) - \frac{\rho_1 h'^3}{12} \frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t'^2} &= g_3, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t'} + (\vec{V}' \text{grad} \vec{V}') = \vec{Q} - \frac{\text{grad} P}{\rho} + \frac{\mu \text{grad} \text{div} \vec{V}'}{3\rho} + \frac{\mu \Delta \vec{V}'}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t'} + \text{div} \rho \vec{V}' = 0, \quad (3)$$

$$\Omega(P, \rho) = 0. \quad (4)$$

Здесь (1) – уравнения движения упругой оболочки вращения в перемещениях [9] с учетом напряжений на внутренних стенках, вызванных наличием вязкой жидкости и внешнего давления  $P_0$  [10]. Уравнение (2) – уравнение движения вязкой слабосжимаемой изотропной жидкости в векторной форме [10]. Уравнения (3) и (4) – суть уравнения неразрывности для жидкости [10] и уравнения состояния жидкости [10, 12] соответственно. Неизвестными функциями в этих уравнениях являются  $U'_1, W', \gamma_2, \vec{V}', \rho, P$ .

В уравнениях (1)-(4) приняты следующие обозначения:  $\rho_1, h'$  – плотность материала и толщина стенки оболочки;  $P$  – давление в жидкости;  $g_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – функции, зависящие от параметров жидкости, которые учитывают напряжение на внутренних стенках оболочки (при отсутствии вязкости  $\mu = 0, g_i = 0, (i = \overline{1,3})$ );  $\vec{V}'$  – вектор скорости частиц жидкости;  $\vec{Q}$  – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы жидкости;  $\rho, \mu$  – плотность и коэффициент жидкости,  $\Delta$  – оператор Лапласа в пространстве занятом жидкостью.

В уравнениях (1)  $L_i(U'_1, W', \gamma_2)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – известные дифференциальные операторы теории упругих оболочек типа Тимошенко. Явный вид этих операторов можно получить из общего случая уравнений движения произвольной оболочки, полученных К.З.Галимовым [9]. Эти операторы в тензорных обозначениях имеют вид:

$$\begin{aligned} L_1(U'_1, W', \gamma_2) &= \nabla_i T^{i1} - b_i^1 N^i, \\ L_2(U'_1, W', \gamma_2) &= \nabla_i N^i - b_{ik} T^{ik}, \\ L_3(U'_1, W', \gamma_2) &= \nabla_i M^{i2} - N^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $\nabla_i$  ( $i = 1, 2$ ) – символ ковариантного дифференцирования относительно ковариантных компонент метрического тензора срединной поверхности оболочки  $a_{ik}$ ;

$$\nabla_k N^i = \frac{\partial N^i}{\partial a^k} + \Gamma_{kj}^i N^j, \quad \nabla_j T^{ik} = \frac{\partial T^{ik}}{\partial a^j} + \Gamma^{sk} \Gamma_{js}^i + T^{is} \Gamma_{js}^k, \quad (6)$$

где  $\Gamma_{ik}^j$  – символы Кристоффеля.

В (5) величины  $T^{ik}, N^i, M^{ik}$  ( $i, k = 1, 2$ ) выражаются через перемещения, согласно [9], следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{ik} &= \frac{1}{2} K E^{iksj} (e_{js} + e_{sj}), \\ M^{ik} &= \frac{1}{2} D E^{iksj} (\Omega_{js} + Q_{sj}), \\ N^i &= \frac{1-\nu}{8K(i)} (\omega^i + \gamma^i), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{где } e_{ik} = \nabla_i U'_k - b_{ik} W', \quad \Omega_{ik} = \nabla_i \gamma_k, \quad \omega_i = \nabla_i W' + b_i^k U'_k. \quad (8)$$

$$\text{Здесь } K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E^{ikjs} = a^{ij} a^{ks} + \nu c^{ij} c^{ks}, \quad E, \nu - \text{модуль Юнга и ко-}$$

эффициент Пуассона материала оболочки соответственно;  $K(i)$  ( $i = \overline{1,3}$ ) – постоянные коэффициенты поперечных сдвигов и обжатия;  $a^{ik}$  – контравариантные компоненты первого метрического тензора срединной поверхности оболочки;  $b_{ik}, b_i^k$  – ковариантные и смешанные компоненты второго метрического тензора;  $c^{ik}$  – контравариантные компоненты дискриминантного тензора  $S$  [9].

Подставив (7) с учетом (8) и (6) в (5) получим конкретный вид дифференциальных операторов  $L_i(U'_1, W', \gamma_2)$  ( $i = \overline{1,3}$ ). К системе уравнений (1)-(4) необходимо присоединить начальные и граничные условия.

Согласно принятому выше предположению в начальный момент система оболочка-жидкость находится в состоянии покоя. В этом случае начальные условия запишутся в следующем виде. При  $t' = 0$

$$U'_1 = \frac{\partial U'_1}{\partial t'} = W' = \frac{\partial W'}{\partial t'} = \gamma_2 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial t'} = 0, \quad \bar{V}' = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad P = P_0. \quad (9)$$

В выражении (9)  $\rho_0$  – плотность жидкости в состоянии покоя.

Из условия совместного движения оболочки и прилегающих к ней частиц жидкости получаем условие непроницаемости оболочки [13]:

$$\text{при } x' = 0, l: V'_{x'} = \frac{\partial U'_{x'}}{\partial t'}; \quad \text{при } r' = f'(x'): V'_n = \frac{\partial W'}{\partial t'}. \quad (10)$$

Из условия отсутствия разрыва между жидкостью и стенкой оболочки получаем:

$$\text{при } r' = f'(x'): V'_{\alpha_1} = \frac{\partial U'_1}{\partial t'}. \quad (11)$$

В (10) и (11) приняты следующие обозначения:  $U'_x$  – проекция вектора перемещений оболочки  $\Phi$  на ось  $Ox'$ ;  $V'_{x'}, V'_n, V'_{\alpha_1}$  – составляющие вектора скорости частиц жидкости по координате  $x'$  направлению внешней нормали  $\vec{n}$  и по направлению координаты  $\alpha_1$  соответственно.

В выражениях (10) и (11), как это принято в теории тонких упругих оболочек [9,14], произведен “снос” граничных условий с боковой поверхности  $r' = f'(x') - \frac{h}{2}$  на срединную поверхность  $r' = f'(x')$ .

Граничным условием для продольного смещения оболочки является уравнение движения пластины, закрепленной на торце  $x' = 0$  с учетом внешней силы, напряжения оболочки в сечении  $x' = 0$  и силы давления жидкости в сечении  $x' = 0$ :

$$\text{при } x' = 0: m \frac{\partial^2 U'_{x'}}{\partial t'^2} = F(t') + F_{об}(t') + F_{ж}(t'). \quad (12)$$

Здесь  $F_{об}(t') = 2\pi f'_{(0)} h'_x \sigma'_{x'}(0, t')$ ,  $F_{ж}(t') = -2\pi \int_0^{f'_{(0)}} (P - P_0) r' dr'$ , – масса жесткой пластины,  $\sigma'_{x'}(x', t')$  – проекция напряжения в оболочке на ось  $Ox'$ .

К граничным условиям (10)-(12) необходимо присоединить граничные условия, зависящие от формы оболочки и ее закрепления [15]:

$$M_n(U'_1, W', \gamma_2) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

В выражении (13)  $M_n(U'_1, W', \gamma_2)$  – некоторые дифференциальные операторы на граничных линиях срединной поверхности. Вид операторов  $M_n(U'_1, W', \gamma_2)$  и их число определяются в каждом конкретном случае формой оболочки и характером ее закрепления в пространстве.

**Выводы.** Таким образом, задача об исследовании динамических процессов в системе оболочка вращения – жидкость сводится к совместному решению начально-краевой задачи (1)-(4), (9)-(13). Решение такой задачи в данной постановке представляет значительные трудности, обусловленные наличием ряда факторов, в том числе нелинейностью уравнений. Поэтому представляется возможным линеализовать задачу и применить аналитико-численные методы, позволяющие с приемлемой точностью находить решение задачи [3, 6-8].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алумяэ Н.А. Переходные процессы деформации упругих оболочек и пластинок / Н.А.Алумяэ // Труды VI Всес.конф. по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С.883-889.
2. Мовсисян Л.А. Продольный удар по цилиндрической оболочке / Л.А.Мовсисян // Изв. АН Арм. ССР. Физ.-мат науки. – 1964. – Т.17. – №5. – С.43-46.
3. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок: труды. – М.: Наука, 1966. – С.593-599.
4. Сагомоян А.Я. Осевой удар цилиндрической оболочки о жесткую плоскость / А.Я.Сагомоян // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1973. – №2. – С.173-176.

5. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д.Кубенко. – К.: Наук.думка, 1979. – 184с.
6. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости метода итераций при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2008. – Вып. 2(31). – С.240-244.
7. Коваленко А.П. Исследование практической сходимости численного обращения преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании динамических процессов в цилиндрической оболочке / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2009. – Вып. 2(35). – С.236-240.
8. Коваленко А.П. О применимости интегрального преобразования Лапласа-Карсона при математическом моделировании переходных процессов в цилиндрических оболочках / А.П.Коваленко // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2010. – Вып. 3(39). – С.213-217.
9. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек / К.З.Галимов. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1975. – 326с.
10. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И.Седов. – М.: Наука, 1976. – Т.1. – 535с.
11. Нигул У.К. О применимости приближенных теорий при переходных процессах деформации круговых цилиндрических оболочек / У.К.Нигул // VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок: труды. – М.: Наука, 1966. – С.593-599.
12. Голубева О.В. Курс механики сплошных сред / О.В.Голубева. – М.: Высшая школа, 1972. – 368с.
13. Ильгамов М.А. Граничные условия на поверхности контакта оболочки с жидкостью в эйлерово-лагранжевой форме / Ильгамов М.А. // X всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин, Кутаиси, 1975г.: труды. – Тбилиси: Мецниераба, 1975. – С.170-180.
14. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны / Л.И.Слепян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374с.
15. Григолюк Э.И. Механика твердых деформируемых тел / Э.И.Григолюк, И.Т.Селезов // Т.5. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272с.

Поступила в редколлегию 19.06.2015.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.  
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### **КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖЕСТКОЙ ОСНОВОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЫЕМКУ КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ, ПРИ СЖАТИИ**

**Введение.** Широкое применение пьезоэлектрических материалов, которые отличаются значительной хрупкостью, стимулирует интерес к изучению и анализу распределений силовых и электрических полей в электроупругих телах вблизи концентраторов напряжений [1-6]. В то же время, рассмотрение пространственных задач электроупругости сопряжено со значительными математическими трудностями, поскольку исходная система уравнений для определения электрического и напряженного состояний представляет собой связанную систему дифференциальных уравнений [4]. Решению контактных задач для электроупругих тел с учетом связанности силовых и электрических полей посвящены работы [4-6] и др.

В настоящей работе исследовано контактное взаимодействие (при условиях гладкого контакта) пьезоэлектрического полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную пологую выемку, при сжатии тел. Задача электроупругости рассмотрена в предположении, что поверхность раздела двух тел расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала. С помощью гармонических потенциалов, зависящих от величины зазора между телами при контакте, получено точное решение задачи, найдены геометрические размеры выемки в результате контактного взаимодействия. Как частные случаи из полученного решения задачи электроупругости следуют соответствующие параметры контакта для упругого трансверсально-изотропного полупространства, а также для упругого изотропного тела [7].

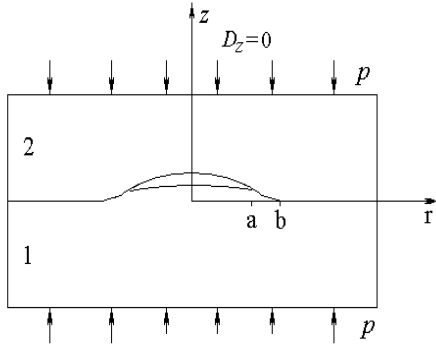


Рисунок 1

**Постановка задачи.** Рассмотрим контактное взаимодействие при сжатии электроупругого трансверсально-изотропного полупространства (тело 1) с жесткой основой (тело 2) (рис.1), что содержит пологую осесимметричную выемку, форма которой описывается выражением

$$f(r) = h_0(1 - r^2 / b^2)^{3/2}, \quad r \leq b, \quad (h_0 \ll b). \quad (1)$$

Предполагается, что плоскость контакта расположена в плоскости изотропии пьезоэлектрического материала, и поверхность полупространства является неэлектропроводной (не содержит электропроводного покрытия). Полагается также, что к телам приложены сжимающие усилия  $p$  и между телами имеет место гладкий (без трения) контакт. Поскольку в жестком теле содержится выемка, то контакт осуществляется не по всей поверхности  $z = 0$ , а по некоторой ее части  $r > a$ , где  $a$  – неизвестный радиус области контакта (рис.1), который зависит от значений усилий  $p$ , геометрии первоначальной выемки, свойств электроупругого полупространства. Дополнив функцию  $f(r)$  нулевым значением в области  $r > b$ , получим

$$f(r) = \begin{cases} h_0(1 - r^2 / b^2)^{3/2}, & r \leq b; \\ 0, & r > b. \end{cases} \quad (2)$$

Воспользовавшись суперпозицией состояний, первое из которых – сжатие вдоль оси  $Oz$ , т.е.  $\sigma_{zz} = -p$ ,  $D_z = 0$ , для второго электроупругого получаем следующие граничные условия в плоскости  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{zz} &= 0, \quad 0 < r < a; \quad u_z^{(1)} = f(r), \quad a < r < \infty; \\ \sigma_{zr} &= 0, \quad 0 < r < \infty; \quad \sigma_{zz} = p, \quad a < r < \infty; \\ D_z &= 0, \quad 0 < r < \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что последнее граничное условие по электрическому состоянию соответствует случаю неэлектропроводной поверхности полупространства. Также при удалении от области контакта имеют место условия на бесконечности

$$\sigma_{zz} \rightarrow -p, \quad D_z \rightarrow 0, \quad \sigma_{zr} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow -\infty. \quad (4)$$

**Основные соотношения.** Уравнения статики для электроупругого трансверсально-изотропного тела имеют вид [4]



$$\begin{aligned}
 & c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,xz} + \\
 & + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,xz} = 0; \\
 & c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2}(c_{11}^E - c_{12}^E)u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2}(c_{11}^E + c_{12}^E)u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E)u_{z,yz} + \\
 & + (e_{31} + e_{15})\Psi_{,yz} = 0; \\
 & (c_{13}^E + c_{44}^E)(u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E(u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\
 & + e_{15}(\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33}\Psi_{,zz} = 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В приведенных уравнениях  $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$  – независимые модули упругости;  $e_{31}, e_{15}, e_{33}$  – пьезомодули;  $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$  – диэлектрические проницаемости.

Решение системы уравнений (5) можно согласно [4] выразить через четыре потенциальные функции  $\Phi_j$  ( $j = \overline{1, 4}$ )

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \tag{6}$$

где  $k_j, l_j$  – некоторые постоянные, а функции  $\Phi_j$  удовлетворяют уравнениям

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j=1, 2, 3), \tag{7}$$

где  $\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$ , значения  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) являются корнями следующего алгебраического уравнения третьего порядка [4]:

$$\begin{aligned}
 & \nu^3(A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2(A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
 & + \nu(A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Значения  $k_j, l_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) в формулах (6) связаны с величинами  $\nu_j$  следующими соотношениями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$a_j = c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15}(1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4). \tag{10}$$

При введении обозначений  $z_j = zn_j^{-1/2}$  ( $j = \overline{1, 4}$ ) функции  $\Phi_1(x, y, z_1), \Phi_2(x, y, z_2), \Phi_3(x, y, z_3), \Phi_4(x, y, z_4)$  становятся гармоническими функциями в соответствующих системах координат.

**Метод решения.** При построении решения граничной задачи электроупругости воспользуемся представлением решений (6). При этом потенциальные функции возьмем в виде гармонических потенциалов специального вида

$$\Phi_i(x, y, z_i) = -\frac{\alpha_i^*}{2\pi} \left( \iint_{S_1} \frac{-h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} \right), \quad (11)$$

где  $h(\xi_1, \xi_2) = h_1(1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2)^{3/2}$ ,  $r(\xi_1, \xi_2) = h_0(1 - \xi_1^2/b^2 - \xi_2^2/b^2)^{3/2}$ ,  $S_1$  и  $S_0$  – круговые площадки радиусов  $a$  и  $b$  соответственно (рис.1). Также положим  $\Phi_4^{(2)} = 0$ . Постоянные  $\alpha_i^*$ , входящие в (11), определим из системы трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left( c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right) &= 1; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left( c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right) / \sqrt{v_j} = 0; \\ \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left( e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \right) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Пока неизвестными остаются такие параметры:  $a$  – значения радиуса площадки контакта (рис. 1);  $h_1$  – максимальная высота зазора в результате контактного взаимодействия. Их значения определим из решения контактной задачи.

Заметим, что идея применения потенциалов вида (11), что связаны с величиной контактного зазора, близка приему использования скачков перемещений для трещины нормального отрыва для описания напряженного состояния в ее окрестности. Принципиальное отличие заключается в том, что поверхность трещины задана, а площадка контакта  $S_1$  и ее радиус  $a$  – заранее не известны и определяются в процессе решения задачи. Для контактных задач в упругом изотропном теле это указано в [8].

С помощью потенциальных функций (11), учитывая (12) и удовлетворяя граничным условиям задачи, приходим к решению интегро-дифференциального уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_1} \frac{h(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \iint_{S_0} \frac{r(\vec{\xi})d_\xi S}{\sqrt{(x-\xi_1)^2 + (y-\xi_2)^2 + z_i^2}} + 2\pi M^*,$$

$$(x, y) \in S_1. \quad (13)$$

Значение  $M^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* k_j / \sqrt{v_j}$ .

После дифференцирования воспользуемся значениями следующих интегралов [9]:

$$\iint_S \frac{\sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{\left[ (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 \right]^{3/2}} d_\xi S = -\frac{\pi^2}{a};$$

$$\iint_S \frac{\xi_1^2 \sqrt{1 - \xi_1^2/a^2 - \xi_2^2/a^2}}{\left[ (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 \right]^{3/2}} d_\xi S = \frac{\pi^2}{16a} \left( 4a^2 - 33x^2 - 3y^2 \right);$$

$$\iint_S \frac{\xi_2^2 \sqrt{1 - \xi_1^2 / a^2 - \xi_2^2 / a^2}}{\left[ (x - \xi_1)^2 + (y - \xi_2)^2 \right]^{3/2}} d\xi S = \frac{\pi^2}{16a} (4a^2 - 3x^2 - 33y^2).$$

Приравнявая коэффициенты при соответствующих степенях декартовых координат, получаем

$$a = b \sqrt{1 - \frac{4pbM^*}{3\pi h_0}}; h_1 = h_0 \left( 1 - \frac{4pbM^*}{3\pi h_0} \right)^{3/2}. \quad (14)$$

Из формул (14) по известным размерам первоначальной выемки (параметры  $b$  и  $h_0$ ), значению сжимающих усилий  $p$ , девяти независимых значениях электроупругих постоянных (входят через значение  $M^*$ ) находим значение радиуса контакта  $a$  и максимальную высоту зазора (после контактного взаимодействия)  $h_1$ . Также, приравняв значение  $a$  к нулю, находим критическое значение нагрузки  $p^* = \frac{3\pi h_0}{4bM^*}$ , при которой выемка в жестком теле полностью заполняется электроупругим материалом.

При переходе к чисто упругому трансверсально - изотропному материалу имеем

$$M^* \rightarrow M^{Trans} = \frac{c_{11} (n_1^{1/2} + n_2^{1/2})(c_{13} + c_{44})}{c_{44} (c_{11}n_1 + c_{13})(c_{11}n_2 + c_{13})}, \text{ где } n_1, n_2 - \text{ корни квадратного уравнения } c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0, \text{ которые зависят от}$$

упругих свойств материала. Заменяв в выражениях (14) значение  $M^*$  величиной  $M^{Trans}$ , получаем параметры контакта чисто упругого трансверсально-изотропного полупространства с жесткой основой (с выемкой). Дальнейший предельный переход к упругому изотропному материалу приводит  $M^{Trans} \rightarrow (1 - \nu) / \mu$ . При взаимодействии упругого изотропного полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку (частный случая рассмотренной контактной задачи), заменяв в формулах (14) величину  $M^*$  значением  $(1 - \nu) / \mu$ , приходим к полному совпадению результатов с данными [7], найденными с помощью сведения контактной задачи к решению парных интегральных уравнений.

**Выводы.** Таким образом, в работе на основе использования гармонических потенциалов специального вида найдено точное решение задачи контактного взаимодействия электроупругого полупространства с жесткой основой, содержащей осесимметричную выемку, при сжатии. В явном виде получены геометрические параметры зазора, образовавшегося в результате контакта, определено критическое значение сжатия, при котором выемка полностью исчезает (заполняется материалом).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Chen W.Q. 3D point force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium / Chen W.Q, Lim C.W. // Int. J. Fract. – 2005. – **131**. – N 3. – P.231-246.
2. Kaloerov S.A. Determination of intensity factors for stresses, induction and field strength in multi-connected electro-elastic anisotropic media / Kaloerov S.A. // Int. Appl. Mech. – 2007. – **43**, № 6. – P.77-84.

3. Li X.F. Three-Dimensional Electroelastic Analysis of a Piezoelectric Material With a Penny-Shaped Dielectric Crack / Li X.F., Lee K.Y. // J. Appl. Mech. – 2004. – 71, N 6. – P.866-877.
4. Podil'chuk Yu.N. Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems / Podil'chuk Yu.N. // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 2. – P.132-170.
5. Кирилюк В.С. О влиянии температурного поля на контактное взаимодействие нагретого плоского эллиптического штампа с пьезокерамическим полупространством / Кирилюк В.С. // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып.46. – С.29-35.
6. Кирилюк В.С. Трехмерная контактная задача для двух пьезокерамических тел с учетом тепловыделения / Кирилюк В.С., Левчук О.И. // Теоретическая и прикладная механика. – 2011. – Вып. 3(49). – С.28-37.
7. Монастирський Б.Є. Осесиметрична контактна задача для півпросторів з геометричним збуренням поверхні / Б.Є.Монастирський // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 1999. – № 6. – С.22-26.
8. Кіт Г.С. Просторові контактні задачі для пружного півпростору і жорсткої основи з поверхневими виїмками / Кіт Г.С., Мартиняк Р.М. // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 1999. – 42, № 6. – С.7-11.
9. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения ньютоновского потенциала и их приложения / М.В.Хай. – К.: Наук. думка, 1993. – 256с.

Поступила в редколлегию 23.06.2015.

УДК 539.3

КИРИЛЮК В.С., д.физ.-мат.н., вед. науч. сотр.  
ЛЕВЧУК О.И., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## СТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ ОРТОТРОПНОГО ТЕЛА С ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

**Введение.** Пространственные задачи механики разрушения для упругих изотропных тел с дискообразными или эллиптическими трещинами изучались в работах [1-3] и др., а для трансверсально-изотропных тел с трещинами – в [4, 5]. Отметим, что при рассмотрении задач для трансверсально-изотропных материалов, в основном, предполагалось, что плоские трещины расположены в плоскостях изотропии трансверсально-изотропного материала. Такое ограничение на ориентацию плоских трещин существенно упрощает нахождение решений задач с помощью представлений решений уравнений статики трансверсально-изотропного тел посредством гармонических функций. Однако, для других ориентаций плоских трещин в трансверсально-изотропном материале, как и для случая упругого ортотропного материала с трещиной, задачи механики разрушения существенно усложняются. Возникающие при этом трудности математического характера не позволяют использовать методы и подходы, успешно применяемые при специальной ориентации плоских трещин (в плоскостях изотропии материала).

Задачи механики разрушения для трещин круговой или эллиптической формы в ортотропных телах, расположенных в главных плоскостях ортотропии материала, исследованы в [6, 7] с помощью применения тройного преобразования Фурье, Фурье-образа функции Грина для ортотропной среды, а также на основе теоремы о вычетах

Коши и численного интегрирования посредством квадратур Гаусса. В [8] рассмотрена задача об эллиптической трещине под внутренним давлением, расположенной произвольным образом в ортотропном материале. В данной работе решена задача механики разрушения для произвольно ориентированной эллиптической трещины в упругой ортотропной среде при растяжении и изгибе, изучено распределение коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) вдоль фронта эллиптической трещины при различных ориентациях трещины в материале.

**Постановка задачи.** Пусть упругая ортотропная среда, оси ортотропии которой совпадают с осями  $0x$ ,  $0y$ ,  $0z$  в системе координат  $(x, y, z)$ , содержит эллиптическую трещину, ориентация которой связана с системой координат  $(x^1, y^1, z^1)$ . Предположим, что от системы координат  $(x, y, z)$  можно перейти к системе  $(x^1, y^1, z^1)$  с помощью поворота осей  $0x, 0y, 0z$  на углы  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно. Упругие свойства ортотропного материала в системе  $(x, y, z)$  описываются девятью независимыми постоянными  $c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}$ . Упругие постоянные  $C_{ijkl}$  связаны с величинами  $c_{mn}$  следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} C_{1111} &= c_{11}; C_{2222} = c_{22}; C_{3333} = c_{33}; C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; C_{1133} = C_{3311} = c_{13}; \\ C_{2233} &= C_{3322} = c_{23}; C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} = c_{55}; C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = c_{66}. \end{aligned} \quad (1)$$

Остальные компоненты тензора  $C_{ijkl}$  равны нулю. Ориентацию трещины можно учесть, переходя к решению задачи об эллиптической трещине в анизотропном упругом материале (в системе  $(x^1, y^1, z^1)$ ), свойства которого находим с помощью преобразования тензора четвертого порядка

$$C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} = C_{mnpq} T_{im} T_{jn} T_{kp} T_{lq}, \quad (2)$$

где  $T_{ij}$  – матрица преобразования

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Матрица  $T_{ij}$  получена в результате последовательного перемножения трех матриц, отражающих правые вращения вокруг каждой из осей координат.

При растяжении и изгибе материала с трещиной (при свободной от нагрузок поверхности) представим напряженное состояние с помощью суперпозиции основного и возмущенного полей напряжений. Для нахождения возмущенного состояния, с которым связано распределение КИН вдоль фронта трещины, приходим к граничным условиям на поверхности эллиптической трещины

$$\sigma_{13}^{\pm} = 0; \sigma_{23}^{\pm} = 0; \sigma_{33}^{\pm} = -(p_0 + p_1 x_1 / a_1 + q_1 x_2 / a_2) ((x_1, x_2) \in S); \vec{u}(\vec{x}) \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где  $S$  – поверхность эллиптической трещины,  $p_0$  – значение растягивающих нагрузок, а  $p_1$  и  $q_1$  – значения изгибающих нагрузок. Отметим, что в настоящей работе случаи налегания берегов для трещины нормального отрыва не исследуются, т.е. предполага-

ем, что неравенство  $p_0 + p_1 x_1 / a_1 + q x_2 / a_2 \geq 0$  имеет место на всей поверхности трещины.

**Метод решения.** Используем интегральное представление функции Грина для анизотропного упругого пространства

$$G_{ij}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5)$$

где  $N_{ij}(\vec{\xi})$  – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kjil}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}, \quad (6)$$

а  $D(\vec{\xi})$  – ее определитель. Для эллиптической трещины в материале при растяжении и изгибе представим поле перемещений для возмущенного состояния с помощью скачков перемещений [9] через поверхность трещины

$$u_i(\vec{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C_{jlm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} b_m(\vec{x}') \xi_l N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi} \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\vec{\xi} dx'_1 dx'_2, \quad (7)$$

где вектор  $\vec{b}(\vec{x}) = [\vec{b}^{(1)} + \vec{b}^{(2)}(x_1 / a_1 + ix_2 / a_2)] \left[ (1 - x_1^2 / a_1^2 - x_2^2 / a_2^2)^{1/2} \right]$ . На основе теоремы Коши о вычетах имеем

$$u_i(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{jlm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_l^M N_{ij}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2, \quad (8)$$

где суммирование проводится для  $\xi_3^M$  – корней уравнения  $D(\vec{\xi}) = 0$  с отрицательной мнимой частью, а вектор  $\vec{\xi}^M$  принимает вид  $\vec{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$ . Напряжения для возмущенного состояния получаем в виде

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q^M \xi_l^M N_{kp}(\vec{\xi}^M)}{\partial D(\vec{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\vec{x}') e^{i\vec{\xi}^M \cdot (\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2.$$

С помощью дальнейших упрощений согласно [9] получаем

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \frac{\eta_1}{a_1}, \frac{\eta_2}{a_2}, \xi_3^M(\eta_1 / a_1, \eta_2 / a_2) \right) \left[ b_m^{(1)} + 3b_m^{(2)}(\eta_1 + i\eta_2) \left( \frac{\eta_1 x_1}{a_1} + \frac{\eta_2 x_2}{a_2} \right) \right] d\varphi, \quad (9)$$

где  $\eta_1 = \cos \varphi$ ;  $\eta_2 = \sin \varphi$ , а функция  $F_{ijm}$  принимает вид

$$F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C_{ijkl}^{(\alpha, \beta, \gamma)} C_{pqm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \xi_q \xi_l N_{kp}(\vec{\xi})}{\partial D(\vec{\xi}) / \partial \xi_3}. \quad (10)$$

При вычислении контурных интегралов (9) воспользуемся методом квадратур Гаусса, и, удовлетворив граничным условиям на поверхности трещины, найдем неиз-

вестные значения скачков перемещений. На основе анализа асимптотических выражений напряжений в плоскости трещины приходим к выражениям КИН

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi}(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{-1/4} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}^{(\alpha, \beta, \gamma)} \left( \frac{x_1}{a_1^2}, \frac{x_2}{a_2^2}, \xi_3^M(x_1/a_1^2, x_2/a_2^2) \right) \left( b_m^{(1)} + b_m^{(2)} \left( \frac{x_1}{a_1} + i \frac{x_2}{a_2} \right) \right);$$

$$K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1, \quad (11)$$

где компоненты нормали в плоскости трещины к ее границе имеют вид  $n_1 = (x_1/a_1^2)/(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}$ ,  $n_2 = (x_2/a_2^2)/(x_1^2/a_1^4 + x_2^2/a_2^4)^{1/2}$ . Полученные выражения служат для оценки КИН.

**Анализ результатов численных исследований.** Исследуем распределение коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта круговой трещины (частного случая эллиптической трещины), при различных ее ориентациях в упругом ортотропном материале, свойства которого соответствуют ортогонально армированному стеклопластику (2:1) согласно [10]. На рис.1 показано изменение КИН  $K_I$  вдоль границы

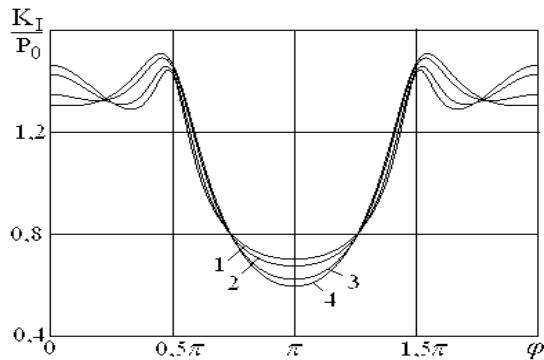


Рисунок 1

дискообразной трещины ( $a = b = 1$ ) при различных ее ориентациях относительно осей ортотропии материала. Линии 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям углов поворота  $\alpha = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ . Кривая 1 получена для случая  $\alpha = 0$ , т.е. трещина расположена в одной из плоскостей ортотропии материала. Также полагалось, что наряду с растягивающими усилиями  $p_0$ , действуют и изгибающие  $p_1 = p_0/2$ , а значение  $q_1 = 0$ .

**Выводы.** Таким образом, в работе проведен аналитико-численный анализ КИН вдоль фронта эллиптической (круговой) трещины (при растягивающих и изгибающих усилиях) с учетом ее расположения в упругом ортотропном материале. Установлено существенное влияние ориентации трещины на распределение КИН.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А.И. Теория упругости / А.И.Лурье. – М.: Наука, 1970. – 939с.
2. Kassir M.K. Three-dimensional crack problems / Kassir M.K., Sih G. – Leyden: Nordhoff Interen. Publ., 1975. – 425 p. – (Mechanics of fracture; V. 2).
3. Shan R.C. Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading / Shan R.C. and Kobayashi A.S. // Eng. Fract.Mech. – 1971. – V.3. – P.71-96.
4. Подильчук Ю.Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (Обзор) / Подильчук Ю.Н. // Прикладная механика. – 1997. – Т.33, № 10. – С.3-30.
5. Chiang C.-R. Some crack problems in transversely isotropic solids / Chiang C.-R. // Acta Mechanica. – 2004. – V.170, № 1. – P.1-9.
6. Kirilyuk V.S. On the stress state of the orthotropic medium with penny-shape crack / Kirilyuk V.S. // Int. Appl. Mech. – 2004. – V.40, № 12. – P.84-91.
7. Kirilyuk V.S. The stress state of an elastic orthotropic medium with elliptic crack under tension and shear / Kirilyuk V.S. // Int. Appl. Mech. – 2005. – V. 41, № 4. – P.358-366.

8. Кирилук В.С. Напряженное состояние упругого ортотропного тела с эллиптической трещиной под внутренним давлением (с учетом ориентации трещины) / Кирилук В.С., Левчук О.И. // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). – 2014. – Вип. 1(24). – С.200-204.
9. Willis L.J. The stress field around an elliptical crack in an anisotropic medium / Willis L.J. // Int.J. Eng. Sci. – 1968. – V.6, № 5. – P.253-263.
10. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. – М.: Наука, 1977. – 415с.

Поступила в редколлегию 23.06.2015.

УДК 539.3

БАЩУК Е.Ю., к.физ.-мат.н., доцент  
БОЙЧУК В.Ю., ассистент

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛАСТИНЫ В ПРЕДЕЛАХ ТОЧНОЙ ПОСТАНОВКИ И БАЛОЧНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Введение.** При исследовании материалов и элементов конструкций с трещинами достаточно широкое распространение получили приближенные расчетные схемы и модели. Одним из распространенных подходов является балочный подход или балочное приближение. По-видимому, впервые балочный подход был предложен в [10]. В последующие годы балочный подход применялся в многочисленных статьях при исследовании и более сложных задач, к таким ситуациям можно отнести, например, [1-3,6, 8] и ряд других публикаций.

Согласно этому подходу, область окрестности трещины заменяется областью, имеющей форму стержня (балки), длина которой принимается равной длине трещины, а ширина выбирается из физических соображений. Например, в случае приповерхностной трещины или трещине, находящейся в полосе, ширина балки выбирается равной расстоянию от трещины до поверхности. При этом граничные условия на концах стержня выбираются по-разному, и очевидно являются сугубо приближенными. Таким образом, при балочном подходе имеется два типа неустранимых погрешностей: погрешность, появляющаяся вследствие уменьшения размерности задачи, и погрешность, обусловленная невозможностью корректной формулировки граничных условий. Единственным подходом, позволяющим получить точные значения критических параметров в задачах устойчивости материалов и элементов конструкций с трещинами, является точный подход.

В данной работе рассматривается плоская задача устойчивости жестко закрепленной пластины с центральной трещиной. Для изотропной пластины получены зависимость критических параметров от длины трещины с применением точного и приближенного подходов.

**Постановка задачи.** Рассматривается прямоугольная изотропная пластина, механические характеристики которой соответствуют строительной стали [9]:  $E = 200 \text{ ГПа}$ ,  $G = 77 \text{ ГПа}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $0,125 \leq \alpha \leq 0,3$ , где  $E$  и  $\nu$  – технические постоянные,  $\alpha = l_1/l_2$  – параметр тонкостенности. Пластина достаточно протяженная в направлении  $0x_3$  и имеет в этом направлении сквозную трещину длины  $2t$ . Вдоль оси  $0x_2$  (в направлении трещины) пластина сжимается нагрузкой постоянной интенсивности  $\overset{\circ}{p}_{22}$ , обес-



печивающей в теле пластины состояние плоской деформации в плоскости  $x_1 0 x_2$ , где пластина имеет размеры  $2l_1 \times 2l_2$  (рис.1, а). К решению задачи устойчивости применяются уравнения ТЛТУДТ и используется второй вариант теории [4]. Для решения задачи уравнений ТЛТУДТ необходимо предварительно найти решение соответствующей задачи линейной теории упругости, из которой определяются начальные напряжения  $\overset{\circ}{\sigma}_{ij}$  в теле пластины с трещиной. Сформулируем задачу упругости.

*Постановка задачи упругости.*

Отыскивается функция  $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = (\overset{\circ}{u}_1, \overset{\circ}{u}_2)$ , удовлетворяющая следующие соотношения:

уравнение равновесия

$$-\frac{\partial \overset{\circ}{\sigma}_{im}}{\partial x_i} = \overset{\circ}{F}_m; \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (1)$$

граничные условия

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad (2)$$

$$\overset{\circ}{u}_1 = 0 \wedge \overset{\circ}{u}_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2,$$

условия на трещине

$$\overset{\circ}{\sigma}_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (3)$$

Закон Гука для изотропного тела имеет вид:

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ii} = A_{im} \overset{\circ}{\varepsilon}_{mm}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{12} = 2G \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}; \quad A_{ii} = \lambda + 2G; \quad A_{12} = \lambda; \quad (4)$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overset{\circ}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overset{\circ}{u}_j}{\partial x_i} \right); \quad \lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где  $\bar{\Omega}$  – расчетная область;  $\overset{\circ}{F}_m$  – компонента массовой силы;  $x = (x_1, x_2)$  – точка на расчетной схеме;  $A_{ij}$  – упругие постоянные (коэффициенты жесткости);  $G$  – модуль сдвига,  $\lambda$  – коэффициент Ламе. В (3)  $x = -0$  соответствует левому берегу трещины.

*Постановка задачи устойчивости.*

Для нахождения критических параметров требуется определить минимальное по модулю и отличное от нуля собственное решение  $(\overset{*}{p}, \overset{*}{\mathbf{u}})$  спектральной задачи, удовлетворяющей следующим соотношениям:

уравнения в возмущениях

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sigma_{im} + p \overset{\circ}{\sigma}_{im} \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = 0, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (5)$$

граничные условия

$$\sigma_{1m} = 0; \quad |x_1| = l_1 \wedge |x_2| \leq l_2; \quad (6)$$

$$u_1 = 0 \wedge u_2 = const; \quad |x_1| \leq l_1 \wedge |x_2| = l_2;$$

условия на сторонах трещины

$$\sigma_{1m} = 0; \quad x_1 = \pm 0 \wedge |x_2| \leq t. \quad (7)$$

Закон Гука определяется соотношением (4), где следует опустить индекс 'о'. Критические параметры определяются из равенства

$$p^{kp} = \overset{*}{p} = p_1; \quad u^{kp} = \overset{*}{\mathbf{u}} = u_1. \quad (8)$$

К приближенному решению задач (1)-(8) применяется сеточный подход. Разностная схема строится вариационно-разностным методом, в которой использована концепция базовой схемы [5]. Решения сеточных уравнений используется с применением метода итерирования подпространств [7] и градиентного спуска [5].

В результате расчетов получены значения критической нагрузки, а также вычислена нагрузка по формуле Эйлера, при  $\alpha = 0,125$  и  $t = 0$ .  $P^{экр}_{кр} = 9,096$ ,  $P^э_{кр} = 8,33$ . То есть эйлерова нагрузка дает заниженные результаты. Также очевидно, что с увеличением трещины, нагрузка уменьшается.

$$t = 0,3, P^{экр}_{кр} = 8,785.$$

**Результаты работы.** На рис.2 приведены формы потери устойчивости компоненты  $u_1(x_1 = const, x_2)$  в сечениях  $|x_1| = 0$  (кривая 1),  $|x_1| = l_1$  (кривая 2) для значения параметра трещины  $t \leq 0,3$ .

При увеличении трещины  $t > 0,3$  имеет место взаимодействие берегов трещины (рис.3) и чем толще пластина, тем сильнее влияние трещины.

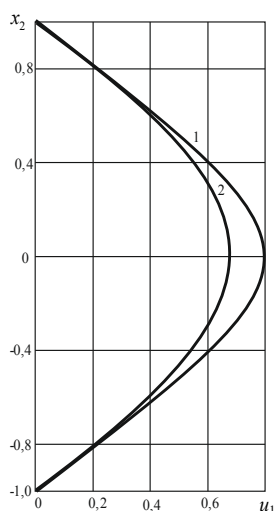


Рисунок 2 – Формы потери устойчивости пластины

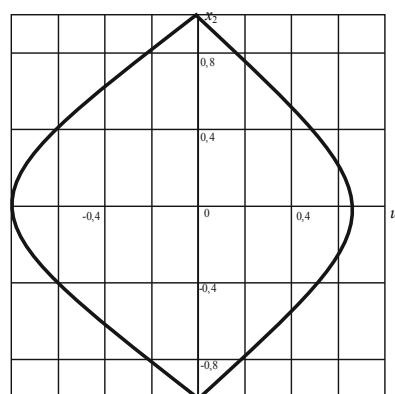


Рисунок 3 – Раскрытие трещины

**Выводы.** Сравнение характера форм потери устойчивости, соответствующих точному и приближенному подходов, показывает, что балочная функция  $u_1^t(x_2) = \cos(0,5\pi x_2/t)$  не совпадает ни с одной из форм устойчивости в сечении  $x_1 = const$  (функции  $u_1 \approx A(x_1)\cos(\pi x_2/2)$ ), соответствующей точному подходу. Качественное отличие этих форм заключается в том, что период функции  $u_1^t(x_2)$  увеличивается с ростом величины  $t$  трещины и функция  $u_1^t$ , конечно же, не зависит от координаты  $x_1$ . Точная форма потери устойчивости в сечении  $x_1 = const$  (функция  $u_1$ ) характеризуется тем, что период функции  $u_1(x)$  не зависит от параметра  $t$  и, кроме того, амплитуда  $A(x_1)$  функции  $u_1(x)$  зависит от величины сечения  $x_1$  (рис.2).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Расчет композитных конструкций с учетом расслоения / [Баженов В.А., Гоцуляк Е.А., Оглобля А.Н. и др.]. – К.: Будівельник, 1992. – 136с.
2. Болотин В.В. Механика расслоения в конструкциях из слоистых композитов / Болотин В.В. // Механика композитных материалов. – 2001. – 37, № 5. – С.585-602.

3. Колебания ребристых оболочек вращения / под ред. И.Я.Амиро. – К.: Наук. думка, 1988. – 172с.
4. Болотин В.В. Устойчивость сжатых элементов с дефектами типа расслоения / Болотин В.В., Забельян З.Х., Курзин А.А. // Проблемы прочности. – 1980. – № 7. – С.3-8.
5. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел / Гузь А.Н. – К.: Наук. думка, 1971. – 276с.
6. Коханенко Ю.В. Численное исследование задач трехмерной устойчивости композитов слоистой и ленточной структуры / Коханенко Ю.В. // Прикладная механика. – 2001. – 37, № 3. – С.35-64.
7. Михайлов А.Н. Обобщение балочного подхода к задачам теории трещин / Михайлов А.Н. // Прикладная математика и техническая физика. – 1969. – № 3. – С.171-174.
8. Парлет Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы / Парлет Б.; пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 382с.
9. Слепьян Л.И. Механика трещин / Слепьян Л.И. – Л.: Судостроение, 1990. – 296с.
10. Тимошенко С.П. Соппротивление материалов / Тимошенко С.П. – М.: Физматгиз, 1960. – 380с.
11. Obreimoff L.W. The splitting strength of mica / Obreimoff L.W. // Proc. Roy. Soc. London. – 1930. – 127 A. – P.290-297.

Поступила в редколлегию 26.06.2015.

УДК 519.2

ВАЦІЛІНА О.В., к.физ.-мат.н., доцент

Національний транспортний університет

### ПОБУДОВА ТАБЛИЦІ З КОМБІНАЦІЙ НА ОСНОВІ ТРИКУТНИКА ПАСКАЛЯ

**Вступ.** З курсу математики (комбінаторики) відомо, що будь-яка  $k$ -елементна підмножина даної  $n$ -елементної множини називається *комбінацією (сполученням)* з  $n$  елементів по  $k$  елементів. Число різних таких комбінацій позначається  $C_n^k$  і обчислюється за формулою:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}, \quad (0 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Властивості числа комбінацій:

$$\begin{aligned} 1) \quad C_n^0 = C_n^n = 1; \quad 2) \quad C_n^1 = n; \quad 3) \quad C_n^k = C_n^{n-k}; \quad 4) \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k; \\ 5) \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Окрім того, що комбінації являються коефіцієнтами розкладу бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n,$$

вони також часто зустрічаються при розв'язуванні багатьох задач комбінаторики та теорії ймовірності [1]. Наприклад:

- Задачі комбінаторики.

Скількома способами можна обрати двох студентів для чергування із групи чисельністю 20 студентів?

*Розв'язування.*

Кількість шуканих способів  $n$  дорівнює кількості комбінацій із 20 елементів по 2, тобто:

$$C_{20}^2 = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190.$$

Отже, існує 190 різних пар студентів, яких можна обрати з 20 студентів.

- Ймовірність настання події  $A$   $k$  разів у  $n$  повторних незалежних випробуваннях (формула Бернуллі)

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де  $p$  – ймовірність настання події  $A$  в одному випробуванні,  $q=1-p$ .

Оптовий магазин запчастин для авто постачає запчастини 10 СТО, від кожної з яких може надійти заявка на наступний день з ймовірністю 0,4, незалежно від заявок інших СТО. Знайдіть:

- найвірогідніше число  $k$  заявок, що надійдуть наступного дня;
- ймовірність отримання магазином такого числа ( $k$ ) заявок.

*Розв'язування.*

Маємо схему Бернуллі. Подія  $A$  («успіх») – «отримання заявки». Ймовірність «успіху»:  $p = P(A) = 0,4$  – за умовою. Тоді ймовірність протилежної події  $\bar{A}$  («невдачі»):  $q = P(\bar{A}) = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$ . Кількість випробувань  $n = 10$ :

- оцінимо значення виразу:  $(n+1)p = (10+1) \cdot 0,4 = 4,4$ .

Оскільки отримане число дробове, то найвірогідніше число заявок  $k$  в день шукаємо як цілу частину цього числа:  $k = [4,4] = 4$ ;

- ймовірність отримання чотирьох заявок із десяти обчислимо за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k};$$

$$P_{10}(4) = C_{10}^4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^6 = \frac{10!}{4!6!} \cdot 0,0256 \cdot 0,467 = 210 \cdot 0,01156 \approx 0,251.$$

Отже, шукана ймовірність отримання найвірогіднішого числа заявок близько 0,251.

- Гіпергеометричний розподіл дискретної випадкової величини.

Гіпергеометричний розподіл виникає, наприклад, у випробуваннях, коли з комплекту, що складається з  $N$  предметів,  $n$  з яких мають певну властивість (нестандартні, пофарбовані, тощо), відбирається навмання  $m$  предметів (одноразово, або послідовно без повернення до комплекту), а випадкова величина  $X$  – кількість предметів із зазначеною властивістю серед відібраних. У загальному випадку  $X$  набуває значень  $0, 1, 2, \dots, m$  з ймовірностями

$$P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

**Постановка задачі.** Спираючись на властивості комбінацій (2), починаючи з верхнього рядка, будемо будувати числовий трикутник (рис.1). Згідно з властивістю 1) комбінацій його бокові сторони складаються з одиниць. Згідно з властивістю 4) кожне число дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним. Контролюємо правильність побудови за властивістю 3) - числа трикутника мають бути симетричними (рівними) відносно вертикальної осі, що проходить через вершину трикутника. Побудову можна продовжувати нескінченно...

Отриманий числовий трикутник називають в європейських країнах трикутником Паскаля на честь Блеза Паскаля, який описав його дивовижні властивості в роботі «Трактат про арифметичний трикутник» (1653 рік). Трикутник, описаний у роботі Б.Паскаля, відрізняється від наведеного на рис.1 поворотом на 45 градусів. Однак, Паскаль не перший помітив трикутну закономірність біноміальних коефіцієнтів. Згадки про цей трикутник зустрічаються у роботах прадавніх математиків і філософів Пінгали, Омара Хайяма та ін. [2, 3].

Таблиця 1. Трикутник Паскаля значень комбінацій  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $C_n^k = C_n^{n-k}$

$k$ або $(n-k)$	1(29)	2(28)	3(27)	4(26)	5(25)	6(24)	7(23)	8(22)	9(21)	10(20)	11(19)	12(18)	13(17)	14(16)	15
1	1														
2	2	1													
3	3	3	1												
4	4	6	4	1											
5	5	10	10	5	1										
6	6	15	20	15	6	1									
7	7	21	35	35	21	7	1								
8	8	28	56	70	56	28	8	1							
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1						
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1					
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1				
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1			
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1		
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876
20	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504
21	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264
22	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544
23	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314
24	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504
25	25	300	2300	12650	53130	177100	480700	1081575	2042975	3268760	4457400	5200300	5200300	4457400	3268760
26	26	325	2600	14950	65780	230230	657800	1562275	3124550	5311735	7726160	9657700	10400600	9657700	7726160
27	27	351	2925	17550	80730	296010	888030	2220075	4686825	8436285	13037895	17383860	20058300	20058300	17383860
28	28	378	3276	20475	98280	376740	1184040	3108105	6906900	13123110	21474180	30421755	37442160	40116600	37442160
29	29	406	3654	23751	118755	475020	1560780	4292145	10015005	20030010	34597290	51895935	67863915	77558760	77558760
30	30	435	4060	27405	142506	593775	2035800	5852925	14307150	30045015	54627300	86493225	119759850	145422675	155117520

0	.....									1
1	.....								1	1
2	.....							1	2	1
3	.....						1	3	3	1
4	.....					1	4	6	4	1
5	.....				1	5	10	10	5	1
6	.....			1	6	15	20	15	6	1
7	.....		1	7	21	35	35	21	7	1
8	.....	1	8	28	56	70	56	28	8	1
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Рисунок 1

**Результати роботи.** Випишемо трикутник Паскаля у вигляді таблиці, де по вертикалі розмістимо значення  $n$ , а по горизонталі  $k$  або в дужках  $(n-k)$ , значення комбінацій при яких рівні, внаслідок симетрії трикутника (табл.1). Таблиця побудована за допомогою прикладної програми Microsoft Excel і дозволяє знаходити комбінації  $C_n^k$  до  $n=30$ .

**Висновки.** Як зазначалося вище, не-

обхідність обчислювати комбінації виникає в багатьох задачах математики і вже при  $n > 6$  їх обчислення потребує певних зусиль і затрат часу. Тому пропонується застосовувати для їх знаходження трикутник Паскаля, вписаний у вигляді таблиці. У даній роботі побудовано таку таблицю до  $n=30$ , що є зручним при знаходженні конкретної комбінації. Отриманий результат пропонується застосовувати у вигляді додатку до підручників з комбінаторики та теорії ймовірності.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для студентов вузов / Гмурман В.Е. – М.: Высшая школа, 2001. – 400с.
2. Вікіпедія. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : [http://uk.wikipedia.org/wiki/Трикутник\\_Паскаля](http://uk.wikipedia.org/wiki/Трикутник_Паскаля).
3. Арбуз. Удивительный треугольник великого француза [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://http://arbuz.uz/u\\_treug.html](http://http://arbuz.uz/u_treug.html).

Надійшла до редколегії 22.05.2015.

УДК 539.3

АНДРУСЕНКО Е.Н., к.т.н., науч. сотр.

Национальный транспортный университет

### НЕЛИНЕЙНОЕ ИЗГИБАНИЕ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ В СВЕРХГЛУБОКОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ СКВАЖИНЕ

**Введение.** Одно из основных препятствий глубокого бурения связано с возможностью появления нештатных ситуаций, вызванных критическими состояниями квазистатического равновесия бурильной колонны (БК), её изгибным выпучиванием, контактным взаимодействием со стенкой скважины и её так называемым “прихватыванием”. При этом возникает две проблемы исследования механики упругого изгиба БК. Первая проблема заключается в определении критического состояния колонны, которая формулируется как задача эйлеровой потери устойчивости длинного вращающегося трубчатого стержня, преднапряжённого переменной по длине продольной силой, вы-

званной силами гравитации и крутящим моментом. Такая задача сформулирована и решена на основе теории прямолинейных балок в работах [1, 2]. В них показано, что она является сингулярно возмущенной, поскольку коэффициент  $EI$  перед старшей (четвертой) производной в разрешающих уравнениях оказывается намного меньше коэффициентов перед другими слагаемыми. При этом форма бифуркационного выпучивания БК представляет собой трёхмерную спираль с переменным шагом.

Практическое внедрение технологий бурения глубоких скважин со сложной пространственной ориентацией их траекторий связано с необходимостью теоретического моделирования механических явлений, сопровождающих их функционирования с целью прогнозирования возможных критических состояний [1, 2]. При этом одним из важнейших аспектов данного направления является теоретическое моделирование поведения колонн глубокого бурения в криволинейных скважинах на этапах их спуска и подъема.

**Постановка задачи об упругом изгибании стержня в криволинейном канале.** Рассмотрим задачу о теоретическом моделировании упругого сгибания БК в криволинейной скважине. Примем, что геометрия траектории в скважине в результате технологических погрешностей может принять форму с нерегулярными несовершенствами. В местах таких несовершенств БК подвергается интенсивному изгибанию, что приводит к возникновению контактных сил, взаимодействующих между поверхностью колонны и стенкой скважины. В процессе выполнения спуско-подъемных операций и функционирования в местах наиболее интенсивных контактных сил генерируются поля сил трения, ориентированных в осевом и окружном направлениях.

Значение этих сил резко возрастают с уменьшением шага несовершенства и радиуса кривизны. Поскольку используемые для анализа механики БК в зарубежной литературе [3, 4] теория гибких нитей оказывается неприемлемой, будем применять теорию гибких криволинейных стержней.

При моделировании упругого деформирования бурильной колонны в наклонно-направленной скважине с геометрическими несовершенствами примем, что искажения проектной траектории скважины, вызванное нарушением технологии бурения или механическими неоднородностями тектонических структур, не может сопровождаться образованием взломов ее осевой линии, которая является дифференцированной по всем трем независимыми пространственными переменными. При этом, однако, если эти несовершенства является мелко масштабными, то они могут приближаться к геометрическим сингулярности. Будем считать также, что осевые линии скважины и БК совпадают.

Пусть уравнения осевой линии скважины в декартовой системе координат имеют вид

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s). \quad (1)$$

Упругое деформирование трубчатой БК в криволинейной скважине в процессе бурения и выполнения спуско-подъемных операций осуществляется под действием распределенных сил тяжести  $\vec{f}^{gr}$ , сил  $\vec{f}^c$  контактного взаимодействия между БК и стенкой скважины, сил  $\vec{f}^{fr}$  и моментов  $\vec{m}^{fr}$  фрикционного взаимодействия, а также сосредоточенных краевых сил и моментов, приложенных в точке подвеса БК и в точке ее контакта с дном скважины. Возникающие при этом в каждом элементе БК внутренняя сила  $\vec{F}$  и момент  $\vec{M}$  удовлетворяют векторным уравнением равновесия [5]:

$$\frac{d\vec{F}}{ds} = -\vec{f}^{gr} - \vec{f}^c - \vec{f}^{fr}, \quad \frac{d\vec{M}}{ds} = -\vec{\tau} \times \vec{F} - \vec{m}^{fr}. \quad (2)$$

После некоторых преобразований соотношения (1), (2) можно выписать разрешающие уравнения для определения сил сопротивления при выполнении движения БК в

наклонно-направленной скважине [6].

В данной работе рассматривается случай спиральных несовершенств. Принято, что в проектном состоянии осевая линия скважины представляет собой четверть дуги эллипса, часть параболы, часть гиперболы. Для этой геометрии решается поставленная выше задача об определении внешних и внутренних силовых факторов, действующих на БК при её движении. Далее на проектную траекторию накладываются спиральные несовершенства [5]

$$h(s) = h_c e^{-\alpha^2 \left( \frac{s-s_c}{S} \right)^2}, \quad (3)$$

где  $h_c$  – наибольшее значение радиуса  $h$ ;  $\alpha$  – коэффициент при показателе экспоненты (функции Гаусса), определяющий скорость убывания  $h(s)$ ;  $s_c$  – значение параметра  $s$  с максимальным значением  $h(s) = h_c$ .

**Результаты численных исследований.** С помощью разработанной методики выполнено компьютерное моделирование операций спуска и подъема БК при удалении по горизонтали нижнего конца скважины от бурильной установки  $L = 8000$  м, глубине скважины  $H = 4000$  м, расстоянии от начальной точки до центра несовершенства  $s_c = 7S/8$ . Отношение линейных скоростей осевого и вращательного движений выбиралось  $v = 50$ . А также  $d = 0,1683$  м – диаметр скважины,  $\delta = 0,01$  м – толщина трубы БК,  $E = 2.1 \cdot 10^{11}$  Па,  $G = 0,8077 \cdot 10^{11}$  Па,  $\gamma_{st} = 7850$  кг/м<sup>3</sup> – плотность стали,  $\gamma_l = 1500$  кг/м<sup>3</sup> – плотность промывочной жидкости,  $\mu = 0,2$ . Длина волны  $\lambda = 96,88$  м.

В табл.1 приведены результаты вычислений значений осевой силы  $F_w$  и крутящего момента  $M_w$  в точке подвеса БК при выполнении операций спуска и подъема. Следует отметить, что при внесении несовершенств в проектную траекторию осевой линии скважины, значения сил сопротивления существенно возрастают при подъеме БК, что может привести к возникновению аварийных ситуаций.

Таблица 1 – Значения сил и моментов в точке подвеса бурильной колонны

	№ п/п		Без несовершенств		С несовершенствами	
			Подъем	Спуск	Подъем	Спуск
$F_w$ , Н	1	Эллипс	$1.76 \cdot 10^6$	$0.74 \cdot 10^6$	$466.28 \cdot 10^6$	$0.15 \cdot 10^6$
	2	Парабола	$1.84 \cdot 10^6$	$0.73 \cdot 10^6$	$619.24 \cdot 10^6$	$0.13 \cdot 10^6$
	3	Гипербола	$1.92 \cdot 10^6$	$0.71 \cdot 10^6$	$727.14 \cdot 10^6$	$0.12 \cdot 10^6$
$M_w$ , Нм	4	Эллипс	$0.88 \cdot 10^3$	$0.84 \cdot 10^3$	$78.18 \cdot 10^4$	$0.18 \cdot 10^4$
	5	Парабола	$1.01 \cdot 10^3$	$0.85 \cdot 10^3$	$103.92 \cdot 10^4$	$0.19 \cdot 10^4$
	6	Гипербола	$1.15 \cdot 10^3$	$0.90 \cdot 10^3$	$122.06 \cdot 10^4$	$0.19 \cdot 10^4$

Особенности изменения продольной силы  $F_w$  и крутящего момента  $M_w$  при выполнении операции подъема можно проследить на рис.1. Здесь кривые 1, 4 соответствуют эллиптической траектории, кривые 2, 5 – параболической, кривые 3, 6 – гиперболической. Как видно из рис.1, все функции в зоне наличия несовершенств резко возрастают. Следует отметить, что наиболее опасной является гиперболическая траектория.



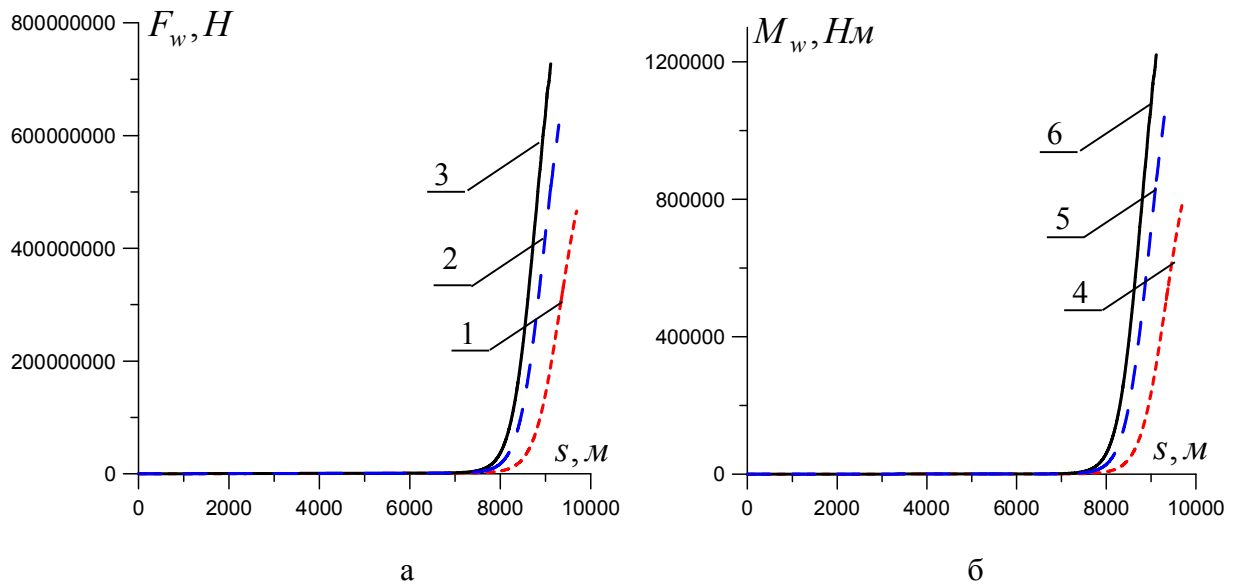


Рисунок 1 – Функции продольной силы  $F_w$  (а) и крутящего момента  $M_w$  (б) (операция подъема)

На рис.2 представлены графики функций  $F_w(s)$  и  $M_w(s)$  при выполнении операции спуска. Как видно, функции осевой силы (рис. 2, а) в зоне несовершенств начинают убывать, а функции крутящего момента (рис. 2, б) на этом промежутке резко возрастают.

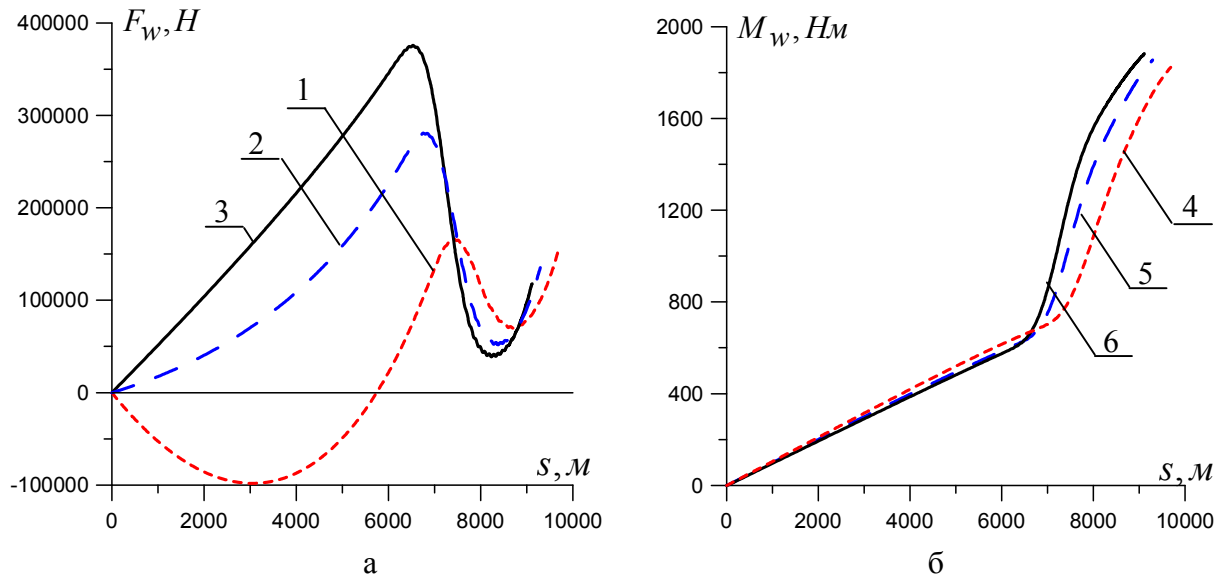


Рисунок 2 – Функции продольной силы  $F_w$  (а) и крутящего момента  $M_w$  (б) (операция спуска)

Можно заключить, что появление геометрических несовершенств в осевой линии скважины может стать причиной прихвата БК.

**Выводы.** Построены уравнения для компьютерного моделирования механического поведения буровых колонн в скважинах со спиральными несовершенствами. С их помощью можно подсчитывать силы контактного и фрикционного взаимодействия БК со стенкой скважины и прогнозировать критические состояния, связанные с эффек-

тами прихвата. Рассмотрены случаи эллиптических, гиперболических, параболических проектных траекторий скважины при выполнении операций спуска и подъема.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Paslay P.R. The stability of a circular rod laterally constrained to be in a contact with an inclined circular cylinder/ Paslay, P.R., Bogy D.B. // J. of Applied Mechanics. – 1964. – 31(3). – P.604-610.
2. Mitchell R.F. Helical buckling of pipe with connectors and torque / Mitchell R.F., Miska S. // SPE Drilling and Completion. – 2006. – 21(2). – P.108-115.
3. Андрусенко Е.Н. Изгиб буровой колонны в криволинейной скважине с несовершенствами осевой линии / Андрусенко Е.Н., Гуляев В.И., Худолий С.Н. // Прикладная математика и механика. – 2012. – Т. 76. – Вып. 3. – С.459-468.
4. Gulyayev V.I. Theoretical simulation of geometrical imperfections influence on drilling operations at drivage of curvilinear bore-holes / Gulyayev V.I., Andrusenko E.N. // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2013. – V.112. – P.170-177.
5. Гуляев В.И. Численное моделирование упругого изгиба буровой колонны в сверхглубокой криволинейной скважине / Гуляев В.И., Луговой П.З., Андрусенко Е.Н. // Прикладная механика. – 2014. – Т. 50, № 4. – С.67-76.
6. Gulyayev V.I. Modeling the Energy-Saving Regimes of Curvilinear Bore-Hole Drivage / Gulyayev V.I., Gaidaichuk V.V., Andrusenko E.N., Shlyun N.V. // J. of Offshore Mechanics and Arctics Engineering. – February, 2015. – V. 137. – № 1. – P.011402-1–011402-8.

Поступила в редколлегию 02.07.2015.

УДК 539.3

КОВАЛЬЧУК С.В., к.физ.-мат.н., доцент  
ДЕГТЯРЬ В.Г., к.физ.-мат.н., доцент

Національний транспортний університет

### НЕУСТАЛЕНИЙ РУХ ҐРУНТОВИХ ВОД ДО СВЕРДЛОВИНИ

**Вступ.** Як відомо, у водонасичених пластах в результаті зміни рівнів ґрунтових вод або при зовнішніх навантаженнях на пласт виникає пружний режим фільтрації. Особливо це різко проявляється в напірних пластах. Основи теорії пружного режиму фільтрації розглянуті в [1].

Якщо проводиться великий відбір води із безнапірних пластів за допомогою вертикальних свердловин при розробці корисних копалин і глибинному водопониженні, було виявлено суттєвий прояв пружного режиму фільтрації і в безнапірних пластах. Цьому присвячена постановка і розв'язування задачі в даній роботі.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу пружного режиму фільтрації до вертикальної свердловини зі сферичним фільтром в напівобмеженому по товщині пласті з рухомою вільною поверхнею.

Нехай на глибину  $\zeta$  перпендикулярно до площини  $XOY$  опущена свердловина з фільтром в точці  $(0,0,\zeta)$ . Вільна поверхня ґрунтових вод, яка була горизонтальна, в процесі роботи свердловини не суттєво викривляється і гранична умова, яка повинна виконуватись на вільній поверхні ґрунтових вод, наперед невідомий, зноситься на площину  $XOY$ . Враховуючи малість такого викривлення допустима вказана лінеаризація задачі.

Вважаючи, що пружний режим фільтрації задовольняє рівняння Фур'є, а потенціал на фільтрі свердловини, який розглядається як потенціал точкового стоку, моде-

люється фундаментальним розв'язком цього рівняння, задача про знаходження цього потенціалу зводиться до знаходження функції впливу крайової задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a^2 \Delta \varphi &= \delta(r - r_0) \delta(t - t_0), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0, \quad z = 0 \left( c = \frac{k}{\mu_0} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\varphi(x, y, z, t)$  – потенціал швидкості фільтрації,

$a^2 = \frac{km}{\mu_c}$  – коефіцієнт п'єзопровідності,

$\delta$  – дельта-функція.

Для розв'язування задачі (1) скористаємось відомою функцією Гріна [2] задачі Неймана, яка є сумою двох фундаментальних розв'язків рівняння Фур'є для двох стоків рівної інтенсивності, розміщених симетрично відносно площини  $z = 0$ , і які забезпечують умову неперетікання  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, z = 0$ .

Розв'язок задачі (1) шукаємо у вигляді суми функції Гріна і деякої функції  $V$ , а саме

$$\varphi = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \right)^3 \left[ e^{-\frac{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}} + e^{-\frac{x^2+y^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right] + V(x, y, z+\zeta, t-t_0), \quad (2)$$

де функція  $V$  задовольняє рівняння Фур'є і вибрана так, щоб виконати граничну умову (1).

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = \frac{\partial V}{\partial \zeta} \Big|_{z=0}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{3}{8a^3\sqrt{\pi^3(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2(t-t_0)}} + \frac{x^2+y^2+\zeta^2}{16a^5\sqrt{\pi^3(t-t_0)^7}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2(t-t_0)}} + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (4)$$

для знаходження  $V(x, y, z+\zeta, t-t_0)$  отримаємо диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \left[ \frac{3}{8a^3\sqrt{\pi^3(t-t_0)}} - \frac{x^2+y^2+\zeta^2}{16a^5\sqrt{\pi^3(t-t_0)^7}} \right] e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2(t-t_0)}}, \quad (5)$$

Запишемо праву частину (5) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi^3(t-t_0)}} \right) e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2(t-t_0)}} \quad (6)$$

і скористаємось інтегральним представленням фундаментального розв'язку оператора Фур'є

$$\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi^3(t-t_0)}} e^{-\frac{x^2+y^2+\zeta^2}{4a^2t}} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2(t-t_0)} e^{i(\alpha x+\beta y+\gamma \zeta)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (7)$$

Тоді отримаємо

$$\frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (8)$$

Такий спеціальний вид правої частини дозволяє вибрати розв'язок, який задовольняє завідомо рівняння Фур'є і рівняння (5), що дає нам для функції  $V$  вигляд

$$V = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int A(\alpha, \beta, \gamma) e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma \zeta)} d\alpha d\beta d\gamma,$$

Підставляючи відповідні похідні  $\frac{\partial V}{\partial \zeta}$  і  $\frac{\partial V}{\partial t}$  в граничну умову, для знаходження функції  $A(\alpha, \beta, \gamma)$  отримаємо просте алгебраїчне рівняння

$$-A(\alpha, \beta, \gamma) a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + c i \gamma A(\alpha, \beta, \gamma) = a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2), \quad (9)$$

звідки

$$A(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{c i \gamma - a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}, \quad (10)$$

$$A = A_1 + i A_2 = -\frac{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + c i \gamma a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 c^2}.$$

Таким чином функція  $V$  знайдена у вигляді

$$v = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int (A_1 + i A_2) e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma \zeta)} d\alpha d\beta d\gamma, \quad (11)$$

де

$$A_1 = -\frac{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 c^2}, \quad A_2 = -\frac{\gamma c a^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 c^2}.$$

Враховуючи симетрію інтервалу інтегрування в (11) і властивості парності  $A_1, A_2$  отримаємо

$$V = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int [A_1 e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma \zeta - A_2 e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma \zeta] d\alpha d\beta d\gamma \quad (12)$$

Отже функція Гріна задачі (1) буде мати вигляд

$$\varphi_G = \left( \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-t_0)}} \right)^3 \left[ e^{-\frac{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}} + e^{-\frac{x^2+y^2+(z+\zeta)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right] -$$

$$-\frac{a^4}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 c^2} e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma (z + \zeta) d\alpha d\beta d\gamma + \quad (13)$$

$$+\frac{c a^2}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int \int \frac{\gamma (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}{a^4 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 c^2} e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 (t-t_0)} \cos \alpha x \cos \beta y \sin \gamma (z + \zeta) d\alpha d\beta d\gamma.$$

**Висновки.** В результаті розв'язування поставленої задачі знайдено вираз для потенціалу швидкості фільтрації (13), що дає можливість з одного боку отримати наближене рівняння вільної поверхні ґрунтових вод при безнапорному пружному режимі фільтрації, а з другого боку визначити величину витрати  $q$  при роботі свердловини.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Щелкачев В.Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме / Щелкачев В.Н. – М.: Гостехиздат, 1959. – 468с.
2. Положий Г.Н. Уравнения математической физики / Положий Г.Н. – М.: Высшая школа, 1964 – 560с.

Надійшла до редколегії 22.06.2015.

УДК 539.3

ДАШКО О.Г., к.физ.-мат.н., ст. науч. сотр.

Институт механики им. С.П.Тимошенко НАН Украины

### ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЙ СЛОЙ С КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ ПРИ ЗАДАННОЙ РАСЩЕПЛЯЮЩЕЙ СИЛЕ

**Введение.** Исследованию концентрации напряжений около отверстий в нетонких трансверсально-изотропных пластинах посвящено много публикаций [1-4]. Для решения задач в этой области широко используется метод разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра координаты толщины [5-7]. В работе [7] найдено решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропной пластины, на граничной поверхности которой задано значение расщепляющей силы, т.е. уравновешенной по толщине пары сил, стремящейся расщепить пластину по срединной плоскости, при отсутствии нормального радиального напряжения.

В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропного слоя с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой заданы однородные граничные условия для радиального смещения и действует уравновешенная по толщине пара сил (расщепляющая сила).

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченный трансверсально-изотропный слой толщиной  $2h$  ( $h = const$ ), содержащий круговую цилиндрическую полость, радиуса  $R$ . На поверхности полости  $R \times [-h; h]$  выполняются условия третьей краевой задачи теории упругости: заданы значения нормального перемещения и касательных напряжений. Будем считать, что нормальное смещение  $u_r(R, \theta, x_3)$  равно нулю, а касательные напряжения задаются формулами  $\sigma_{r\theta}(R, \theta, x_3) = 0$ ,  $\sigma_{r3}(R, \theta, x_3) = -q\xi(1 - \xi^2)$ , где  $q$  – некоторая константа,  $\xi = x_3/h \in [-1, 1]$ . Эти поперечные касательные напряжения представляют уравновешенную по толщине пару сил, стремящуюся расщепить (или сжать) слой вдоль срединной плоскости. Необходимо определить и исследовать напряженное состояние в окрестности полости.

**Результаты работы.** Для сведения трехмерной задачи к двумерной воспользуемся методом разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра от третьей координаты. Предполагая, что деформирование слоя будет симметричным относительно срединной плоскости  $S$ , представим составляющие вектора перемещений и тензора напряжений таким образом [8, 9].

$$\begin{aligned} \{u_\alpha(x_1, x_2, x_3), \sigma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3), \sigma_{33}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_\alpha^{(2k)}(x), \sigma_{\alpha\beta}^{(2k)}(x), \sigma_{33}^{(2k)}(x) \right\} P_{2k}(\xi), \\ \{u_3(x_1, x_2, x_3), \sigma_{\alpha 3}(x_1, x_2, x_3)\} &= \sum_{k=0}^n \left\{ u_3^{(2k+1)}(x), \sigma_{\alpha 3}^{(2k+1)}(x) \right\} P_{2k+1}(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $x = (x_1, x_2) \in S$ . Относительно коэффициентов разложений  $u_j^{(k)}(x)$ , как функций двух независимых переменных, имеем систему уравнений, общее решение которой представляется формулами [9]

$$\begin{aligned} c_{66} u_+^{(0)} &= \kappa^* \overline{\varphi(z) - z \overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}} V_m; \\ c_{66} u_+^{(2)} &= \kappa_2^* h^2 \overline{\varphi''(z)} + h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2)} \partial_{\bar{z}} W_s; \\ c_{66} u_+^{(2k)} &= h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}} V_m + ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{2, n}); \\ c_{66} u_3^{(1)} &= -\kappa_1^* h \left[ \overline{\varphi'(z) + \varphi'(z)} \right] + \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(1)} V_m; \\ c_{66} u_3^{(2k+1)} &= \sum_{m=1}^{2n+1} c_m^{(2k+1)} V_m \quad (k = \overline{2, n}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  – произвольные голоморфные функции;  $V_m$  и  $W_s$  – метгармонические функции (решения уравнения Гельгольца)

$$\Delta V_m - k_m h^{-2} V_m = 0, \quad \Delta W_s - \lambda_s h^{-2} W_s = 0, \quad (3)$$

$k_m$ ,  $\lambda_s$  – корни соответствующих характеристических уравнений;  $\kappa^*$ ,  $\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$  и  $a_m^{(2k)}$ ,  $b_s^{(2k)}$ ,  $c_m^{(2k+1)}$  – константы.

Коэффициенты разложения напряжений  $\sigma_{ij}^{(k)}$  в комплексной форме записываем таким образом

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} &= 4 \left[ \overline{\varphi'(z) + \varphi'(z)} \right] + 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(0)} V_m, \\ \sigma_{11}^{(0)} - \sigma_{22}^{(0)} + 2i\sigma_{12}^{(0)} &= -4 \left[ \overline{z\varphi''(z) + \psi'(z)} \right] + 4h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(0)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m, \\ \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)} &= 2h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_m^{(2k)} V_m, \quad \sigma_{33}^{(2k)} = h^{-1} \sum_{m=1}^{2n+1} d_{3m}^{(2k)} V_m, \\ \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} &= \mu_*^{(2k)} h^2 \overline{\varphi''(z)} + 4h \sum_{m=1}^{2n+1} a_m^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 V_m + 4ih \sum_{s=1}^n b_s^{(2k)} \partial_{\bar{z}}^2 W_s, \\ \sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} &= 2 \sum_{m=1}^{2n+1} p_m^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} V_m + 2i \sum_{s=1}^n q_s^{(2k+1)} \partial_{\bar{z}} W_s \quad (k = \overline{0, n}), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\mu_*^{(2)} = \kappa_2^*$ ,  $\mu_*^{(2)} = 0$  ( $k > 1$ );  $\kappa^*$ ,  $\kappa_1^*$ ,  $\kappa_2^*$  и  $d_m^{(2k)}$ ,  $p_m^{(2k+1)}$ ,  $q_s^{(2k+1)}$  – константы.

На основе формул преобразований

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(2k)} + \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} &= \sigma_{11}^{(2k)} + \sigma_{22}^{(2k)}, \quad \sigma_{rr}^{(2k)} - \sigma_{\theta\theta}^{(2k)} + 2i\sigma_{r\theta}^{(2k)} = e^{-2i\theta} \left( \sigma_{11}^{(2k)} - \sigma_{22}^{(2k)} + 2i\sigma_{12}^{(2k)} \right), \\ \sigma_{r3}^{(2k+1)} + i\sigma_{\theta 3}^{(2k+1)} &= e^{-i\theta} \left( \sigma_{13}^{(2k+1)} + i\sigma_{23}^{(2k+1)} \right), \quad u_r^{(2k)} + iu_\theta^{(2k)} = e^{-i\theta} \left( u_1^{(2k)} + iu_2^{(2k)} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

получаем выражения для коэффициентов разложения напряжений и перемещений в полярной системе координат. Отсюда получаем граничные условия при решении внутренней и внешней краевых задач.

Рассмотрим граничную поверхность полости. В плоскости  $S$  на контуре кругового отверстия радиуса  $R$  имеем такие граничные условия для коэффициентов разложения в ряды перемещений и напряжений

$$\begin{aligned} u_r^{(2k)}(R, \theta) &= 0, \quad \sigma_{r\theta}^{(2k)}(R, \theta) = 0 \quad (k = \overline{0, n}), \\ \sigma_{r3}^{(1)}(R, \theta) &= -0,4q, \quad \sigma_{r3}^{(3)}(R, \theta) = 0,4q, \quad \sigma_{r3}^{(2k+1)}(R, \theta) = 0 \quad (k = \overline{2, n}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для решения данной осесимметричной задачи голоморфные функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  примем в виде  $\varphi(z) = 0$ ;  $\psi(z) = b_2 z^{-2}$ , а метагармонические функции  $V_m$  представим таким образом

$$V_1 = B_0 K_0(\rho x_1), \quad V_2 = C_0 H_0^{(1)}(\rho x_2), \quad V_3 = D_0 H_0^{(2)}(\rho x_3), \quad (7)$$

где  $\rho = r/R$ ,  $x_1 = Rh^{-1}\sqrt{k_1}$ ,  $x_2 = Rh^{-1}\sqrt{k_2}$ ,  $x_3 = \bar{x}_2$ ,  $K_0(\rho x_1)$  – модифицированная функция Бесселя,  $H_0^{(1)}(\rho x_2)$  и  $H_0^{(2)}(\rho x_3)$  – модифицированные функции Ханкеля первого и второго рода,  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$  – постоянные величины. Функции  $W_s$  вихревого решения в осесимметричной задаче отсутствуют. Алгебраическую систему уравнений для определения неизвестных констант получим, подставляя значения данных функций в равенства (2), (4) и учитывая граничные условия (6).

**Результаты численных исследований.** Проведем исследование напряженного состояния трансверсально-изотропного слоя с круговой полостью, на граничной поверхности  $R \times [-h; h]$  которой  $u_r(R, \theta, x_3) = 0$  равно нулю, а касательные напряжения заданы формулами  $\sigma_{r\theta}(R, \theta, x_3) = 0$ ,  $\sigma_{r3}(R, \theta, x_3) = -q\xi(1 - \xi^2)$ ,  $q = const$ ,  $\xi = x_3/h$ . Предполагаем, что для данного слоя коэффициенты Пуассона  $\nu = 0,25$  и  $\nu' = 0,15$ , а отношения модулей упругости  $E/E' = 1,25$  и  $E/G' = 2,5$ . При заданном типе нагрузки и закрепления граничной поверхности доминирующими напряжениями становятся радиальное напряжение  $\sigma_{rr}$  и нормальное поперечное напряжение  $\sigma_{33}$ . Свои максимальные значения радиальные напряжения достигают на граничных плоскостях слоя  $\xi = \pm 1$ , а нормальные поперечные напряжения – на срединной плоскости  $\xi = 0$ .

На рис.1 и 2 представлены кривые зависимости значений напряжений  $\sigma_{rr}$  и  $\sigma_{33}$  относительной толщины слоя в точках на контуре отверстия на граничной плоскости слоя для радиального напряжения и на срединной плоскости для нормального поперечного напряжения.

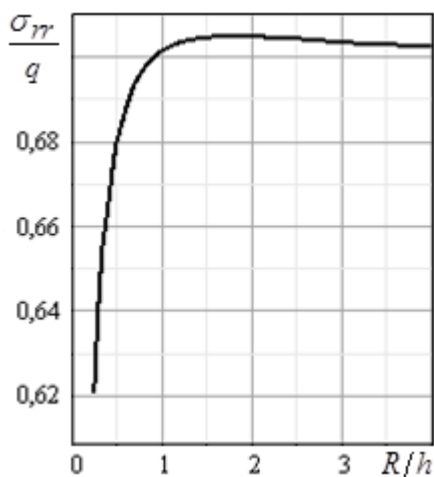


Рисунок 1

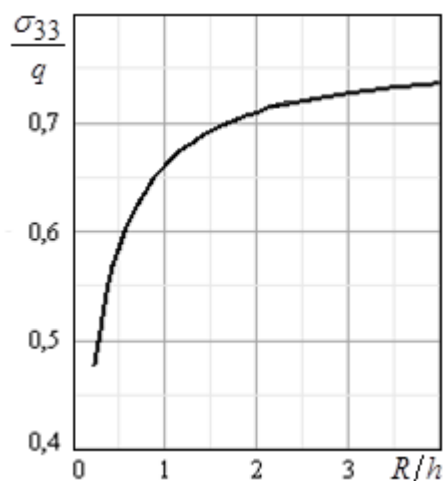


Рисунок 2

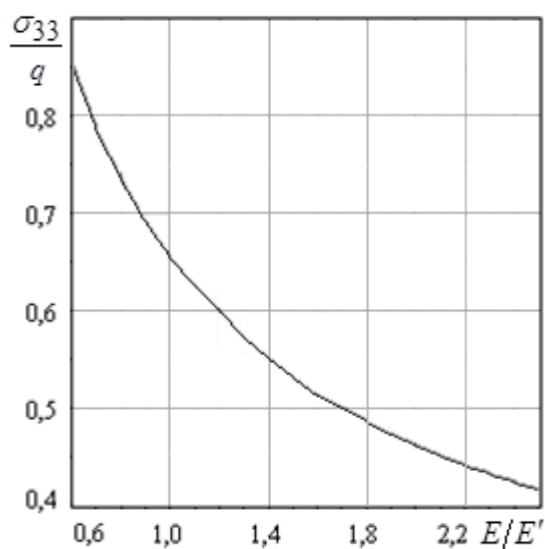


Рисунок 3

Кривая на рис.3 характеризует изменение нормальных поперечных напряжений в зависимости от значения отношения модулей упругости материала слоя на окружности отверстия на срединной плоскости при относительной толщине слоя  $R/h = 0,5$ . С увеличением данного отношения напряжения монотонно убывают.

**Выводы.** В данной работе излагается решение задачи о напряженном состоянии трансверсально-изотропного слоя с круговой цилиндрической полостью, на поверхности которой отсутствуют радиальные перемещения и действует уравновешенная по толщине пара сил (расщепляющая сила). Приведены результаты численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Космодамианский А.С. О концентрации напряжений в трансформной пластине с цилиндрической полостью / Космодамианский А.С., Милишевский И.Х., Шалдырван В.А. // Прикладная математика и механика. – 1977. – Т. 41, № 5. – С.957-960.
2. Роменская Г.И. Решение трехмерной задачи Кирша для трансверсально-изотропной плиты / Роменская Г.И., Шленёв М.А. // Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин: труды. – Тбилиси, 1975. – С.260-269.
3. Фильштинский Л.А. Упругое равновесие многосвязных цилиндрических тел / Фильштинский Л.А., Кушнир Д.В. // Теоретическая и прикладная механика. – 2009. – Вып. 45. – С.90-99.
4. Чехов В.Н. Исследование поля смещений в трехмерной задаче Кирша / Чехов В.Н., Королев К.А. // Современные проблемы концентрации напряжений: междунар. науч. конф.: труды. – Донецк, 1998. – С.253-257.
5. Меунаргия Т.В. Исследование концентрации напряжений около отверстий в пластинах постоянной толщины / Меунаргия Т.В. // Исследование некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та. – 1974. – С.107-120.



6. Хома И.Ю. Влияние расщепляющей силы на напряженное состояние пластины, ослабленной отверстием / Хома И.Ю. // Доклады АН УССР. Сер. А. – 1969. – № 7. – С.643-646.
7. Хома И.Ю. Напряженное состояние трансверсально-изотропной пластины с круговой цилиндрической полостью при заданной расщепляющей силе / Хома И.Ю., Дашко О.Г., Коваленко И.Г. // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 8 (54). – С.3-10.
8. Векуа И.Н. Теория тонких пологих оболочек переменной толщины / Векуа И.Н. // Труды Тбилисского матем. ин-та. – 1965. – 30. – С.3-103.
9. Khoma I.Yu. Representation of the Solution of the Equilibrium Equations for Non-Thin Transversely Isotropic Plates / Khoma I.Yu. // Journal of Mathematical Sciences. – 2000. – 101, № 6. – P.3577-3584.

Поступила в редколлегию 03.07.2015.

УДК 372.851

КРИЛОВА Т.В., д-р пед.н., профессор

Дніпродзержинський державний технічний університет

### ПЕДАГОГІЧНИЙ КОНТРОЛЬ У ВИЩІЙ ШКОЛІ

**Вступ.** Згідно із Законом України «Про вищу освіту» збільшилась кількість годин на самостійну роботу студентів. Це означає, що таку роботу треба організовувати, навчити студентів самостійно вчитися та удосконалювати систему педагогічного контролю.

**Постановка задачі.** Висвітлити проблему педагогічного контролю у вищій школі, визначити його види, форми, функції. Проілюструвати прикладами.

**Результати роботи.** «Контроль (фр. controle) – перевірка чого-небудь, наприклад виконання законів, планів; облік, перевірка рахунків, звітності; установа, що займається перевіркою звітів» [1].

«Педагогічний контроль – це система перевірки результатів навчання, розвитку і виховання студентів» [2].

Залежно від часу проведення педагогічний контроль має наступні види: попередній або вхідний, повторний, поточний, тематичний, рубіжний, підсумковий і заключний.

*Попередній контроль* здійснюється на початку навчального року, семестру або перед вивченням великого розділу програми. Цей контроль здійснюється для діагностування залишкових засвоєних знань, набутих навичок і вмінь. Для його проведення використовуються письмові контрольні роботи, тестування. При навчанні математики вхідний контроль краще проводити за допомогою письмових контрольних робіт, тому що тестування не дає змоги проаналізувати помилки, прослідкувати за логікою мислення виконавця. При перевірці контрольних робіт бажано було б за кожний приклад виставляти окремі бали. З тієї теми, з якої більшість студентів отримали низькі бали, провести додаткові заняття, консультації, а потім знову в поза- аудиторний час провести контрольну роботу. Для першокурсників на початку навчального року провести, так звану, «нульову» контрольну роботу. Зміст письмової контрольної роботи повинен містити приклади на розв'язання дій за звичайними та десятковими дробами, алгебраїчні дії з числами різних знаків, алгебраїчних та тригонометричних перетворень, алгебраїчних, показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь, алгебраїчних та тригонометричних рівнянь й нерівностей, алгебраїчних та геометричних задач. Після переві-

рки та аналізу цих робіт варто провести обов'язкові додаткові заняття з елементарної математики. План і розклад проведення таких занять повинен бути вивішеним на дошці об'яв і повідомлень математичної кафедри, зокрема кафедри вищої математики. Першокурсників слід повідомити про цей захід, а також оголосити прізвища тих студентів, які отримали низькі бали з даної теми і повинні обов'язково бути присутніми на цих заняттях, інші студенти можуть бути присутніми за їх бажанням. Багаторічний досвід роботи автора викладачем кафедри вищої математики свідчить про те, що на ці заняття приходять всі студенти.

*Повторний контроль* проводиться паралельно з вивченням наступної теми з метою перевірки попередньої.

*Поточний контроль* проводиться регулярно на кожному занятті. На практичному занятті, зокрема з вищої математики перевіряються знання теоретичного матеріалу з даної теми і способи розв'язання відповідних прикладів й задач. На початку вивчення таких тем, як «Похідна», «Невизначений інтеграл» варто перевірити знання формул та правил диференціювання чи інтегрування. Щоб студенти краще запам'ятали і вміли застосовувати правило  $\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$ , слід розв'язати зі студентами ба-

гато прикладів. Наприклад, користуючись формулою  $\int \sin(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$  запропонувати студентам наступні приклади  $\int \sin 2x dx$ ,  $\int \sin \frac{1}{2} x dx$ ,  $\int \sin 3x dx$  тощо.

На лекційних заняттях питання, що стосується їх використання при викладенні нового матеріалу, повинні бути заготовлені заздалегідь. При поясненні нового матеріалу можна використовувати метод провокацій. Наприклад, після доведення теореми Коші про відношення приростів двох функцій задати студентам провокаційне питання: «Чи можна простіше довести теорему Коші, використовуючи теорему Лагранжа для приросту кожної функції?» А потім роз'яснити, що таким чином теорему довести неможливо.

*Тематичний контроль* проводиться по завершенню вивчення окремої теми. Цей контроль проводиться у формі колоквиуму або у формі контрольної роботи, яка містить теоретичні питання, зокрема тестування.

*Рубіжний контроль* – це контроль готовності студентів до виконання курсових, дипломних, кваліфікаційних робіт, контроль засвоєння деякого розділу програми відповідної навчальної дисципліни.

*Підсумковий контроль* – це контроль засвоєння теоретичного та практичного матеріалу з даної дисципліни, вивченого за семестр або навчальний рік. Зазвичай він проводиться у формі семестрового екзамену або заліку.

*Заключний контроль* здійснюється відповідною комісією під час державних екзаменів, захисту дипломних і кваліфікаційних робіт, після проведення ЗНО.

Формами педагогічного контролю є усне опитування, різні види контрольних робіт (короткочасні, «летючі», одногодинні, двогодинні, «ректорські», тести тощо), розрахунково-графічні завдання, семінари, колоквиуми, реферати, лабораторні, курсові, кваліфікаційні, дипломні роботи тощо.

Всі види педагогічного контролю детально розглянуто та проілюстровано прикладами в монографії автора [3], а також в роботах [4-6].

Метою усного *опитування* студентів є визначення рівня їх готовності до сприйняття нового навчального матеріалу, нових для них методів доведення формул, теорем та способів розв'язання задач і прикладів. Зазвичай усне опитування відбувається не тільки на початку лекційного та практичного заняття, але й протягом, за необхідністю,

всього заняття. Коротке опитування примушує студентів краще готуватися до лекцій та практичних занять. Крім того, усне опитування розвиває вербальні здібності студентів.

*«Нульова» контрольна робота* проводиться в основному на практичному занятті протягом 5-10 хвилин. Наприклад, перед заняттям, присвяченому розв'язанню прикладних задач векторної алгебри, запропонувати студентам написати на аркуші скалярний, векторний та мішаний добуток в координатній формі в прямокутній системі координат тощо. Поки викладач проглядає ці роботи, студенти повторюють теоретичний матеріал відповідної теми.

Такі контрольні роботи можна проводити також у вигляді тестів закритої форми. Наприклад, тест на визначення типу диференціального рівняння.

*Короткочасна контрольна робота* проводиться протягом 15-20 хвилин, яка може проводитися майже на кожному практичному занятті. Такі контрольні роботи можна рекомендувати особливо при вивченні диференціальних рівнянь і пропонувати студентам розв'язати тільки одне рівняння відповідного типу з метою закріплення навичок та вмінь з розв'язання саме цього типу рівняння.

*Традиційні двохгодинні контрольні роботи* проводяться після вивчення окремої теми або розділу навчального матеріалу відповідної дисципліни, зокрема вищої математики, наприклад, після вивчення тем «Диференціювання функції однієї змінної», «Невизначений інтеграл», «Числові ряди» тощо. Ті студенти, які отримали низькі бали, повинні переписати контрольну роботу в поза аудиторний час.

*«Ректорські» контрольні роботи* містять теоретичні питання і проводяться в декількох групах одночасно (в основному під час лекційних занять).

*Комплексні контрольні роботи* (ККР) бувають двох видів: ККР (самоаналіз) та ККР (атестація). ККР (самоаналіз) проводиться наприкінці вивчення всього курсу відповідної навчальної дисципліни, містить питання майже по всіх розділах програми. ККР (атестація) проводиться під час атестації певної випускової кафедри в присутності перевіряючого.

*Лабораторні роботи* проводяться згідно з розкладом занять та переліком тем для опрацювання й наявністю відповідних методичних вказівок для самостійної роботи студентів з даної теми.

*Домашні завдання* можуть бути загальними та індивідуальними. Досвід викладацької роботи свідчить про більшу ефективність індивідуальних домашніх завдань. Виконання студентами таких завдань підвищує активність навчально-пізнавальної діяльності студентів і стимулює їх самостійну роботу.

Виконання студентами *розрахунково-графічних завдань* забезпечує обернений зв'язок між викладачем і студентами, студенти привчаються самостійно працювати з підручником, конспектом, працювати на комп'ютері.

*Колоквіум* (лат. colloquium – співбесіда) – одна з форм контролю, яка зараз незаслужено забута. Колоквіум виконує подвійну роль. З одного боку, колоквіум передбачає перевірку засвоєних теоретичних знань студентів, а з другого боку, на ньому з'ясовуються і коректуються важкі питання, незрозумілі речі тощо. Звичайно колоквіум проводиться в середині семестру.

*Залік* проводиться на початку сесії. На ньому студенти повинні продемонструвати свої знання, навички і вміння з розв'язування задач і прикладів. Знання теоретичного матеріалу перевіряються при проведенні заліку з теорії, на, так званому, диференційованому заліку. Додатковий стимул у навчанні у студента з'являється, якщо на початку семестру викладач повідомляє про одержання додаткового «автоматичного» заліку за умови виконання студентами всіх домашніх завдань і позитивно оцінених контрольних робіт.

«Екзамен (лат. *examen* – зважування, дослідження, випробування) – 1) одна з форм підсумкового контролю знань, умінь і навичок з якогось навчального предмета, ...» [1]. Екзамен проводиться наприкінці семестру або навчального року. До екзамену допускаються студенти, які не мають заборгованостей, тобто виконали всі заплановані завдання. Екзамени складаються за білетами або за тестами. Але екзаменаційне тестування, зокрема з математичних дисциплін не дає можливості проаналізувати досягнення студентів з даної навчальної дисципліни, прослідкувати логіку їх мислення та виявити, де саме студент зробив помилку чи може він зовсім не знає правильної відповіді на якесь питання [4, 5].

На нашу думку, екзамен з вищої математики доцільніше проводити за білетами. Екзамен може відбуватися в усній, письмовій або письмово-усній формі. Питання екзаменаційних білетів повинні охоплювати весь навчальний матеріал, який планувався навчальною програмою на даний період часу (семестр або 2 семестри).

На наш погляд, найбільш оптимальною є письмово-усна форма екзамену з вищої математики, тому що під час спілкування зі студентом викладач може задати навідні питання, які допоможуть йому більш повно відповісти на екзаменаційне завдання, або допомогти студентові розібратися хоча б в малій частині незасвоєного матеріалу.

Під час письмово-усного екзамену можна дозволити студентам протягом 10 хвилин переглянути конспект, підручник, довідник, але без ніяких записів. Студенту, який добре вчився протягом семестру й підготувався до екзамену, але забувся, з чого починати доведення теореми або як будується допоміжна функція тощо, ці декілька хвилин допоможуть успішно впоратися із завданням. Як і усне опитування, колоквиум, так і усні відповіді студентів на екзамені сприяють розвитку їх вербальних здібностей.

Щоб охопити весь навчальний матеріал за контрольований період та не переобтяжувати екзаменаційний білет, можна запропонувати наступне: білет містить 2 теоретичних питання та 2-3 завдання на розв'язання задач або прикладів.

Завдання екзаменаційних білетів повинні бути рівноцінними. До кожного комплекту екзаменаційних білетів повинна додаватися шкала оцінювання, де для кожного завдання білету надається кількість балів за його правильне розв'язання. (Для кожної контрольної роботи, індивідуального самостійного й розрахунково-графічного завдань також повинні бути розроблені і надані шкали оцінювання).

Екзаменаційна оцінка повинна бути інтегрованою, щоб враховувались бали, які одержував студент протягом його навчання за семестр. В деяких ВНЗ на навчання за семестр відводиться 50 балів і за відповідь на екзамені – теж 50 балів, в інших 40 й 60 балів. Такий підхід до оцінювання засвоєних знань та набутих навичок й вмінь примушує студентів більш добросовісно відноситися до навчання протягом семестру.

Отже, регулярно контролюючи та аналізуючи поточну успішність студентів, можна досягти кращого засвоєння ними математичних знань та отримати їх більш високі результати навчання.

«Під оцінюванням розуміють спосіб, процес і результат встановлення факту відповідності чи невідповідності засвоєних студентами знань, навичок і вмінь цілям і завданням навчання, програмним вимогам» [2]. Оцінка – це чисельний аналог оцінювання, яка має рангові значення.

У ВНЗ України для оцінювання засвоєних знань, набутих навичок і вмінь студентів використовуються такі норми оцінок:

- за національною шкалою («відмінно», «добре», «задовільно», «незадовільно»),
- за 100-бальною шкалою (від 1 до 100 балів),
- за шкалою ECTS (A, B, C, D, E, FX, F).

В роботі [3] наведено багато варіантів різних видів контрольних, лабораторних робіт, індивідуальних та розрахунково-графічних завдань, екзаменаційних білетів зі

шкалою оцінювання, де прописано не тільки бали за правильне виконання завдання, а також скільки балів знімається за опіску, помилку, грубу помилку тощо.

Основними функціями педагогічного контролю є діагностична, контролююча, навчальна, розвивальна, стимулююча та виховна.

*Діагностична функція* полягає у визначенні результатів вивчення та засвоєння учнями або студентами навчальної дисципліни, з метою виявлення, аналізу, оцінювання та корекції навчання цього предмета.

*Контролююча функція* полягає у встановленні рівнів успішності окремих студентів, всієї групи та кількох груп студентів споріднених спеціальностей в цілому.

*Навчальна функція* полягає у використанні різних видів і форм контролю для активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів при вивченні конкретної теми або певного розділу, в забезпеченні зворотного зв'язку для підтримання дієвості та ефективності процесу навчання.

*Розвивальна функція* уможливорює створення умов для інтелектуального розвитку студентів за допомогою різних видів завдань.

*Стимулююча функція* проявляється в бажанні студентів отримати оцінку своєї навчально-пізнавальної діяльності.

*Виховна функція* полягає у формуванні у студентів таких якостей, як організованість, дисциплінованість, відповідальність, сумлінність, працьовитість, наполегливість тощо.

Всі функції педагогічного контролю пов'язані між собою в навчально-виховному процесі вищої школи.

**Висновки.** Успіху в контролюючій діяльності при навчанні студентів математичних дисциплін можна досягти, удосконалюючи систему традиційних та нетрадиційних заходів педагогічного контролю, відбираючи завдання для самостійного опрацювання формального та професійно спрямованого і прикладного характеру, завдання, що потребують не просто відтворення текстів лекцій, підручників, навчальних посібників, а творчого підходу для їх розв'язання. Такі завдання будуть спонукати студентів до навчання, зокрема математики, сприяти їх загальному і математичному розвитку.

#### ЛІТЕРАТУРА

1. Енциклопедія освіти / Акад. пед. наук України; гол. ред. В.Г.Кремінь. – К.: Юрінком Інтер, 2008.–1040с.
2. Слєпкань З.І. Наукові засади педагогічного процесу у вищій школі: навч. посіб. / З.І.Слєпкань. – К.: Вища школа, 2005. – 239с.
3. Крилова Т.В. Проблема навчання математики в технічному вузі: монографія / Т.В.Крилова. – К.: Вища школа, 1998. – 438с.
4. Крылова Т.В. Тестирование, его возникновение и развитие / Т.В.Крылова, П.А.Стебляноко // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету (технічні науки). Тематичний випуск «Математичні проблеми технічної механіки». – Дніпродзержинськ: ДДТУ. – 2012. – С.105-118.
5. Крылова Т.В. Педагогическое тестирование / Т.В.Крылова // Методи удосконалення фундаментальної освіти в школах і ВНЗ (МУФО-2012): XVII міжнар. наук. конф.: матеріали. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – С.38-42.
6. Крылова Т.В. Разработка и формирование педагогических тестов / Т.В.Крылова, Е.М.Гулеша // Методи удосконалення фундаментальної освіти в школах і ВНЗ (МУФО-2012): XVII міжнар. наук. конф.: матеріали. – Севастополь: СевНТУ, 2012. – С.58-61.

Надійшла до редколегії 22.06.2015.