

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

О.А. Харитонова
О.О. Набережна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з дисципліни

«Класична механіка»

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
зі спеціальності **104 «Фізика та астрономія»**
для усіх форм навчання

Затверджено редакційно-видавничою
секцією науково-видавничої ради ДДТУ
протокол № 5 від 18.05.2023р.

Кам'янське
2023

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу Дніпровського державного технічного університету заборонено

Конспект лекцій з дисципліни «Класична механіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 104 «Фізика та астрономія»//укл. Харитонова О.А. Набережна О.О – Кам'янське: ДДТУ, 2023 р. – 97 с.

Укладачі: О.А. Харитонова, к.ф.-м.н., доцент
О.О. Набережна, канд. техн. наук

Відповідальний за випуск: О.Б. Лисенко, зав. каф. ФКС, д.ф.-м.н., професор

Рецензент: Губарєв С.В., канд. техн. наук, доцент

Затверджено на засіданні кафедри ФКС
протокол № 8 від 17.05.2023 року

В конспекті лекцій з дисципліни «Класична механіка» розглянуті найбільш важливі фізичні явища та головні фізичні закони, фізичний зміст величин, що входять у ці закони, основні поняття класичної механіки

Зміст

Вступ.....	4
Тема 1. Основні кінематичні характеристики.....	6
Тема 2. Рівняння руху.....	17
Тема 3. Закони збереження.....	26
Тема 4. Інтегрування рівнянь руху.....	34
Тема 5. Рівняння Лагранжа.....	43
Тема 6. Вільні та вимушені коливання.....	57
Тема 7. Задача двох тіл при пружному зіткненні.....	67
Тема 8. Канонічні рівняння.....	72
Тема 9. Основи механіки суцільних середовищ.....	83
Література.....	96

Вступ

У класичній механіці вивчаються загальні властивості механічного руху тіл під дією сил. При побудові теорії реальні об'єкти замінюються ідеалізованими образами — *моделями*. У моделях враховуються не усі властивості реальних об'єктів, а тільки істотні для розглянутого кола питань. Оцінити істотні властивості може тільки практика.

Найпростішою моделлю в механіці є *матеріальна точка*, що замінює реальне тіло. Така заміна припустима, якщо при заданій точності обчислень розмірами тіла можна зневажити — воно мале в порівнянні з деякою відстанню, що розглядається у поставленій задачі. Це традиційне визначення поняття матеріальної точки знаходить більш глибоке обґрунтування введення цього поняття в зв'язку з можливістю виділення обертального руху тіла навколо центра мас від поступального його руху разом з центром мас і можливістю незалежного їхнього вивчення.

Система матеріальних точок (механічна система) моделює систему взаємодіючих тіл. Окремо узятє матеріальне тіло моделюється безперервною сукупністю матеріальних точок, що знаходяться на незмінній відстані одна від одної (тверде тіло).

Простір моделюється безліччю геометричних точок: безперервним, однорідним, ізотропним, однозв'язковим, тривимірним з геометрією Евкліда. Час у класичній механіці приймається безперервним, однорідним, одномірним і односпрямованим. Усі ці властивості - результат узагальнення багатомірової практичної діяльності людей. Тільки на рубежі двох останніх сторіч практика зажадала внесення змін у ці уявлення (спеціальна теорія відносності).

Математичне вивчення руху вимагає введення системи відліку. З деяким тілом зв'язується незмінно система координат і вибирається відповідний спосіб виміру довжин і проміжків часу. В результаті простір арифметизується: кожній його точці ставиться у відповідність три дійсних числа, кожному моменту часу - одне число. При цьому всі елементи системи відліку ідеалізовані: тіло відліку та одиничний масштаб приймаються абсолютно твердими, годинник — ідеально правильним.

Підкреслимо, що однорідність та ізотропність простору і часу мають місце не у всіх системах відліку, а лише в *інерціальних* системах. Так називаються системи відліку, стосовно яких механічний рух описується законами Ньютона. Перший з цих законів, закон інерції, і затверджує існування інерціальних систем відліку.

Механічним моделям у природі відповідає необмежена безліч конкретних прототипів. Зокрема, це стосується і інерціальних систем відліку. Для будь-якої задачі про механічний рух тіл завжди можливо підібрати конкретну систему відліку, що є прототипом інерціальної. Здійснюваний в такій системі відліку рух описується з задалегідь заданою точністю на основі законів Ньютона.

В астрономії прототипом інерціальної системи є геліоцентрична система; у космонавтиці - звичайно геоцентрична система з осями, спрямованими на зірки; в інженерній і лабораторній практиці в більшості випадків це система відліку, незмінно зв'язана з Землею. Співвідношення між моделлю і реальним об'єктом дуже складне. Закони механіки, хоча і формулюються для моделей, виводяться з експериментів і спостережень над реальними тілами і процесами. На питання про те, чи є знання, придбані шляхом математичного аналізу властивостей моделей, дійсно знаннями про оригінали, може дати відповідь тільки практика. Вона встановлює міру відповідності отриманих наукою істин реальностям нашого світу. Однобічність моделей усувається в процесі розвитку науки. Конкретна модель відіграє роль моменту, ланки в процесі пізнання, що реалізується через відносні істини.

Тема 1 Основні кінематичні характеристики

1.1 Системи координат

Координати точки — числа, що визначають її положення на площині, будь-якій поверхні, у просторі.

1.1.1 Координати точки на площині

Найважливішими системами координат на площині є *декартові* (прямокутні та косокутні) координати. При переході від однієї декартової системи координат до іншої, яка виходить з першої рівнобіжним переносом осей, координати точки змінюються за формулами

$$x = x' + a \quad y = y' + b$$

де x, y — старі координати точки, x', y' — нові, a, b — координати нового початку системи відліку в старій системі координат (рис.1);

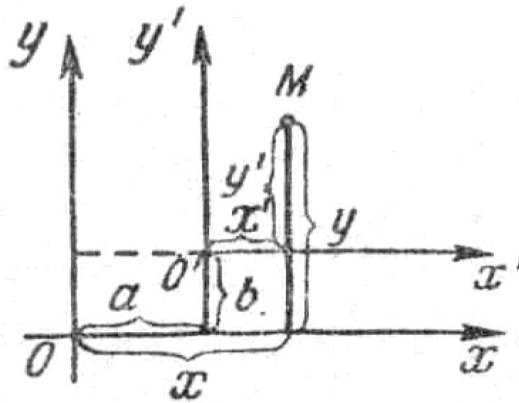


Рис.1

при повороті осей прямокутної системи координат на кут φ , утворений новою віссю абсцис щодо старої (поворот проти годинникової стрілки), — за формулами (рис.2):

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

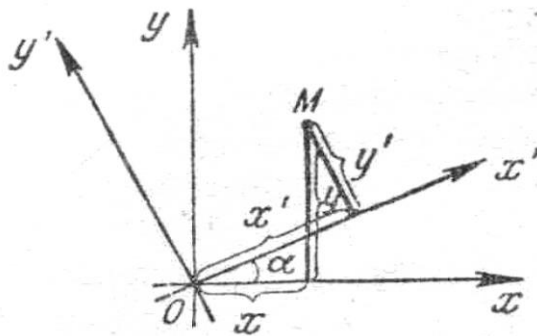


Рис.2

У декартовій системі координат лініями, для яких одна з координат залишається постійною (*координатними лініями*), є прямі, рівнобіжні осям координат:

$$x = \text{const} \quad \text{і} \quad y = \text{const}.$$

Якщо на площині задані 2 сімейства ліній (не обов'язково прямих), що залежать кожне від одного параметру:

$$u = \text{const} \quad \text{і} \quad v = \text{const},$$

і таких, що через кожну точку площини проходить по одній лінії кожного сімейства, то приходять до поняття *криволінійних координат*.

Криволінійні координати точки — значення параметрів, що відповідають координатним лініям, які проходять через цю точку. У випадку, коли всякі 2 координатні лінії з різних сімейств перетинаються під прямим кутом, систем криволінійних координат називається *ортогональною*. Криволінійні координати u і v на площині звичайно задаються рівняннями

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$$

які поєднують їх з декартовими координатами x та y . Через *коефіцієнти Ламе*

$$l_u = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2} \quad l_v = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}$$

у системі ортогональних криволінійних координат визначаються елемент довжини

$$dl = \sqrt{l_u^2 du^2 + l_v^2 dv^2}$$

і елемент площі

$$dS = l_u l_v du dv$$

Найважливішими системами криволінійних координат на площині є наступні.

Полярні координати — числа u і v , зв'язані з прямокутними координатами x та y формулами

$$x = u \cos v \quad y = u \sin v$$

де $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$. Координатні лінії - концентричні окружності з центром O ($u = \text{const}$) і промені, що виходять із O ($v = \text{const}$) (Рис.3).

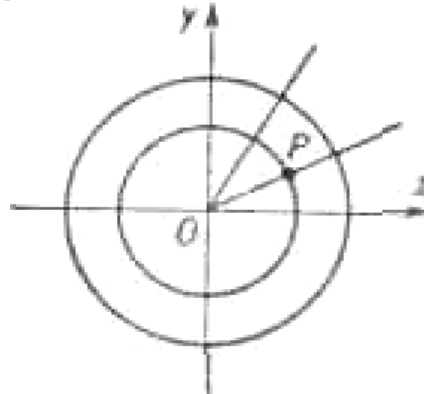


Рис.3

Система полярних координат – ортогональна. За винятком точки O , для якої $u = 0$ а v не визначено (може бути будь-яким числом $0 \leq v < 2\pi$), кожній точці площини Oxy відповідає пара чисел u і v . Геометричний зміст: u – відстань (полярний радіус) точки P від точки O (полюса), v – кут xOP (полярний кут). Полярний радіус часто позначається через r , R , ρ , а полярний кут – φ , ϕ , θ . Коефіцієнти Ляме

$$l_u = 1 \quad l_v = u$$

Елемент довжини

$$dl = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2}$$

Елемент площі

$$dS = u \, du \, dv$$

Еліптичні координати – числа u і v , зв'язані з прямокутними координатами x і y формулами

$$x^2 = \frac{(u+a^2)(v+a^2)}{a^2-b^2} \quad y^2 = \frac{(u+b^2)(v+b^2)}{b^2-a^2}$$

де $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$. Координатні лінії: загальнофокусні еліпси ($u = \text{const}$) і гіперболи ($v = \text{const}$) з фокусами $F_1(-\sqrt{a^2-b^2})$ $F_2(\sqrt{a^2-b^2})$ (Рис.4).

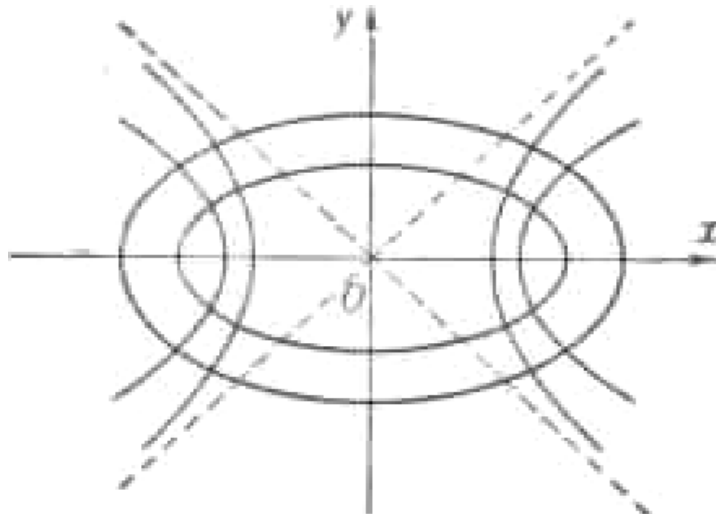


Рис.4

Система еліптичних координат — ортогональна. Кожній парі чисел u і v відповідають чотири точки, по одній в кожному квадранті площини Oxy , симетричні одна одній щодо осей координат. При фіксованих координатах x та y рівнянні деякої точки

$$\frac{x^2}{p+a^2} + \frac{y^2}{p+b^2} = 1$$

має два дійсних кореня – еліптичні координати цієї точки. В еліптичній системі координат коефіцієнти Ляме

$$l_u = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u-v}{(u+a^2)(u+b^2)}} \quad l_v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v-u}{(v+a^2)(v+b^2)}}$$

Параболічні координати – числа u і v , зв'язані з прямокутними координатами x та y формулами

$$x = u^2 - v^2 \quad y = 2uv$$

де $-\infty < u < \infty$, $0 \leq v < \infty$. Координатні лінії – дві системи взаємно ортогональних парабол з осями, розташованими на осі Ox і протилежно спрямованими (рис.5).

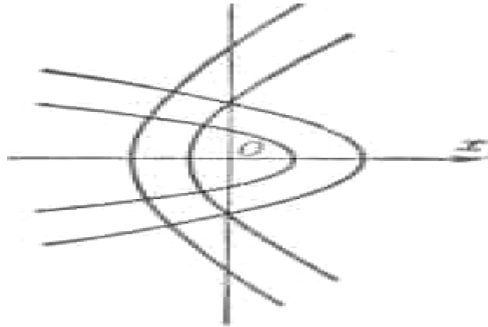


Рис.5

Коефіцієнти Ляме

$$l_u = l_v = 2 \sqrt{u^2 + v^2}$$

Елемент довжини

$$dl = 2 \sqrt{u^2 + v^2} \sqrt{du^2 + dv^2}$$

Елемент площі

$$dS = (u^2 + v^2) du dv$$

1.1.2 Просторові системи координат

Найважливішими системами координат у просторі є декартові (прямокутні) координати. Формули перетворення таких координат при рівнобіжному переносі осей аналогічні плоскому випадку. При повороті осей положення нової системи координат щодо старої може бути цілком охарактеризовано трьома кутами Ейлера. Визначення криволінійних координат у просторі може бути дане аналогічно плоскому випадку; треба лише виходити з трьох однопараметричних сімейств координатних поверхонь. Аналогічно ж визначаються ортогональні криволінійні координати коефіцієнтами Ляме L_u , L_v і L_w , а через них елемент довжини

$$dl = \sqrt{L_u^2 du^2 + L_v^2 dv^2 + L_w^2 dw^2} \quad ,$$

елемент площі поверхні

$$d\sigma = \sqrt{(L_u L_v dudv)^2 + (L_u L_w dudw)^2 + (L_v L_w dvdw)^2}$$

і елемент об'єму

$$dV = L_u L_v L_w du dv dw$$

Найважливішими системами криволінійних координат у просторі є наступні.

Циліндричні координати — числа u , v і w , зв'язані з прямокутними координатами x , y та z формулами

$$x = u \cos v \quad y = u \sin v \quad z = w$$

Координатні поверхні - співвісні з віссю Oz кругові циліндри ($u=\text{const}$); напівплощини, що проходять через вісь Oz ($v=\text{const}$); площини, рівнобіжні Oxy ($w=\text{const}$). Система циліндричних координат — ортогональна (рис.6).

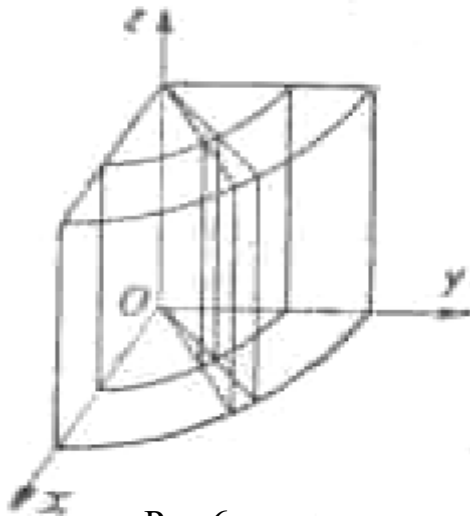


Рис.6

Геометричний зміст: u і v — полярні координати проекції точки на площину Oxy , w — її аппліканта. Коефіцієнти Ляме

$$L_u = L_w = 1 \quad L_v = u$$

Елемент довжини

$$dl = \sqrt{du^2 + u^2 dv^2 + dw^2}$$

Елемент площі поверхні

$$d\sigma = \sqrt{u^2 (dudv)^2 + (dudw)^2 + u^2 (dvdw)^2}$$

Елемент об'єму

$$dV = u du dv dw$$

Сферичні координати (полярні координати в просторі) — числа u , v і w , зв'язані з прямокутними координатами x , y , і z формулами

$$x = u \cos v \sin w$$

$$y = u \sin v \sin w$$

$$z = u \cos w$$

де $0 \leq u < \infty$, $0 \leq v < 2\pi$, $0 \leq w \leq \pi$. Координатні поверхні - концентричні з центром O сфери ($u = \text{const}$), напівплощини, що походять через вісь Oz ($v = \text{const}$), кругові конуси з вершиною O і віссю Oz ($w = \text{const}$) (рис.7).

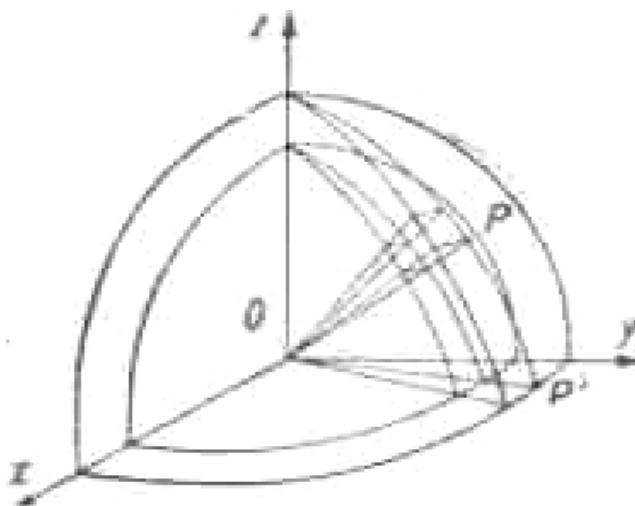


Рис.7

Система сферичних координат – ортогональна. Геометричний зміст параметрів – відстань точки P від O (сферичний полярний радіус), ν -кут xOP' (довгота), w – кут zOP (кут $\pi/2 - w$ називається широтою). Сферичні координати найчастіше позначаються ρ, φ, θ або r, φ, θ . Коефіцієнти Ляме

$$L_u = 1, \quad L_\nu = u \sin w, \quad L_w = u$$

Елемент довжини

$$dl = \sqrt{du^2 + u^2 \sin^2 w d\nu^2 + u^2 dw^2}$$

Елемент площі поверхні

$$d\sigma = \sqrt{u^2 \sin^2 w (dud\nu)^2 + u^2 (dudw)^2 + u^2 \sin^2 w (d\nu dw)^2}$$

Елемент об'єму

$$dV = u^2 \sin w du d\nu dw$$

1.2 Закони руху матеріальної точки

Використовуючи розглянуті положення та постулати, можна експериментально визначити *закон руху* матеріальної точки, тобто визначити положення матеріальної точки в будь-який момент часу відносно даної системи відліку S або визначити його за допомогою радіус-вектора точки як функції часу

$$r = r(t) \tag{1}$$

Кінець цього радіус вектора описує в просторі криву, яка називається *траєкторією* точки (рис.8). Зазначимо, що в класичній механіці постулюється безперервність як координат, так і часу, тобто безперервність функції (1).

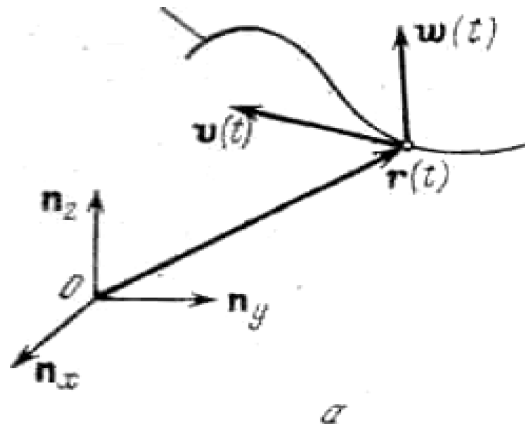


Рис.8

Швидкістю точки відносно системи відліку S називається відношення нескінченно малого приросту dr радіуса-вектора точки до нескінченно малого інтервалу часу dt , за який відбувається вказана зміна радіуса-вектора. Приріст dr відбувається відносно системи S , орти якої пов'язані з тілом S . Тому швидкість точки відносно системи S визначається похідною радіуса-вектора за часом по постійних ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$ (мал.8).

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} \quad (2)$$

де $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r} / dt$.

Прискорення \mathbf{w} точки відносно системи S визначається як перша похідна швидкості за часом при незмінних ортах $\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y, \mathbf{n}_z$. Враховуючи (2), прискорення можна записати у вигляді другої похідної від \mathbf{r} за часом

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$$

де $\dot{\mathbf{v}} = d\mathbf{v} / dt$, $\ddot{\mathbf{r}} = d^2\mathbf{r} / dt^2$

У деяких задачах використовується поняття *секторної швидкості* точки σ

$$\sigma = 1/2 [\mathbf{r} \mathbf{v}] \quad (3)$$

Секторна швидкість дорівнює площі, яку описує радіус-вектор при елементарному переміщенні точки на dr . Отже, модуль секторної швидкості дорівнює швидкості, з якою змінюється площа, описана радіус-вектором точки (рис. 9).

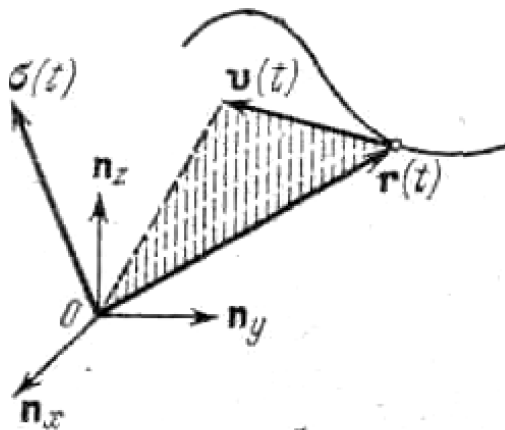


Рис. 9

Радіуси-вектори точок, їх швидкості та прискорення задають за допомогою різних систем координат.

У декартових координатах радіус-вектор точки як функція часу задається координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ також як функції часу. Цей вектор визначає положення точки відносно вибраної системи відліку S у будь-який момент часу. Диференціюючи вираз для радіус-вектор $\mathbf{r}(t)$ за часом при постійних ортах \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z , знайдемо швидкість та прискорення точки у вигляді

$$\mathbf{v} = \dot{x} \mathbf{n}_x + \dot{y} \mathbf{n}_y + \dot{z} \mathbf{n}_z$$

$$\mathbf{w} = \ddot{x} \mathbf{n}_x + \ddot{y} \mathbf{n}_y + \ddot{z} \mathbf{n}_z$$

Отже, проекції швидкості та прискорення точки на декартові осі координат будуть

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z};$$

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z}.$$

У циліндричних координатах $\mathbf{r}(t)$ задається скалярними функціями $\rho(t)$, $\varphi(t)$, $z(t)$ (рис.10)

$$\mathbf{r} = \rho \mathbf{n}_\rho + z \mathbf{n}_z \quad (4)$$

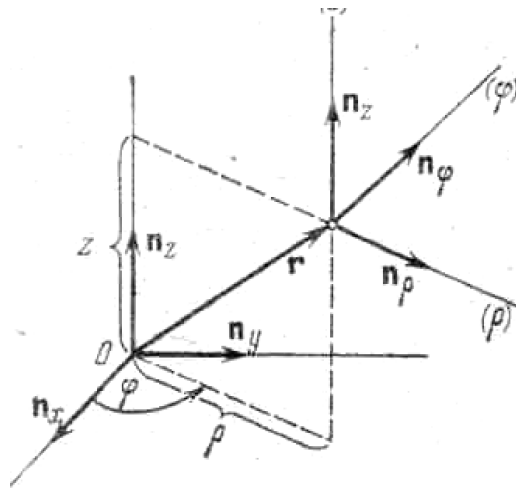


Рис.10

де орти циліндричних координат пов'язані з ортами декартових координат співвідношеннями

$$\mathbf{n}_\rho = \mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi$$

$$\mathbf{n}_\varphi = -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi$$

$$\mathbf{n}_z = \mathbf{n}_z \quad (5)$$

При переміщеннях точки відносно системи S положення ортів \mathbf{n}_ρ та \mathbf{n}_φ змінюється, а положення ортів \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y , \mathbf{n}_z фіксовані. Враховуючи це, у результаті диференціювання \mathbf{r} за часом знайдемо

$$*\mathbf{r} = *\rho \mathbf{n}_\rho + \rho *\varphi \mathbf{n}_\varphi + *z \mathbf{n}_z$$

Зауважуючи далі, що згідно з (5) $\mathbf{n}_\varphi = \varphi *\mathbf{n}_\varphi$, для швидкості точки щодо системи S одержуємо вираз

$$\mathbf{v} = *\rho \mathbf{n}_\rho + \rho *\varphi \mathbf{n}_\varphi + *z \mathbf{n}_z \quad (6)$$

Таким чином, проекції швидкості на координатні осі (ρ) , (φ) , (z) виявляються відповідно рівними

$$v_\rho = *\rho, \quad v_\varphi = \rho *\varphi, \quad v_z = *z$$

Аналогічно, диференціюючи за часом \mathbf{v} і з огляду на залежність \mathbf{n}_φ і \mathbf{n}_ρ від $\varphi(t)$, одержимо прискорення точки відносно S у вигляді розкладання по ортах циліндричних координат:

$$\mathbf{w} = (**\rho - \rho *\varphi^2) \mathbf{n}_\rho + (1/\rho) * (d/dt) * (\rho^2 *\varphi) \mathbf{n}_\varphi + **z \mathbf{n}_z$$

Отже, проекції прискорення на осі (ρ) , (φ) , (z) , відповідно будуть

$$w_\rho = **\rho - \rho *\varphi^2, \quad w_\varphi = (1/\rho) * (d/dt) * (\rho^2 *\varphi), \quad w_z = **z$$

Відзначимо, що проекція прискорення w_φ пов'язана з проекцією секторної швидкості σ_z співвідношенням

$$w_\varphi = (2/\rho) * (d\sigma_z / dt),$$

тому що, згідно з (3), (4), (6)

$$\sigma_z = 1/2 \rho^2 *\varphi$$

У сферичних координатах радіус-вектор точки задається функціями $r(t)$, $\theta(t)$, $\varphi(t)$ (рис. 11).

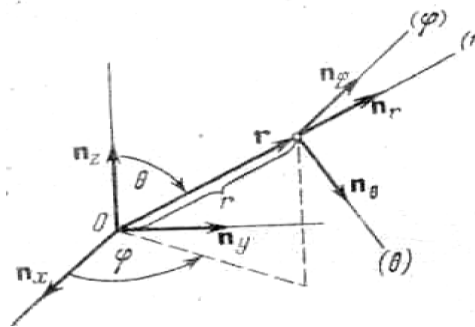


Рис.11

Розкладання радіуса-вектора по ортах сферичних координат і самих ортів визначаються формулами

$$\mathbf{r} = r \mathbf{n}_r$$

$$\mathbf{n}_r = (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \sin \theta + \mathbf{n}_z \cos \theta$$

$$\mathbf{n}_\theta = (\mathbf{n}_x \cos \varphi + \mathbf{n}_y \sin \varphi) \cos \theta - \mathbf{n}_z \sin \theta$$

$$\mathbf{n}_\varphi = -\mathbf{n}_x \sin \varphi + \mathbf{n}_y \cos \varphi$$

Враховуючи, що орієнтація ортів \mathbf{n}_r , \mathbf{n}_θ , \mathbf{n}_φ залежить від положення точки, для її швидкості одержимо вираз

$$\mathbf{v} = \dot{r} \mathbf{n}_r + r \dot{\theta} \mathbf{n}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \mathbf{n}_\varphi$$

Отже, проекції швидкості точки на координатні осі (r) , (θ) , (φ) відповідно будуть

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r \dot{\theta}, \quad v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi}$$

Іноді використовується *природне завдання* руху точки, при якому як аргумент радіуса-вектора точки береться довжина s дуги траєкторії, а сама довжина дуги задається як функція часу

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad s = s(t)$$

(довжина дуги відраховується від початкового положення точки в напрямку її руху). За допомогою векторної функції $\mathbf{r}(s)$ у кожній точці траєкторії можна визначити орти, сукупність яких називається природним тригранником (рис.12).

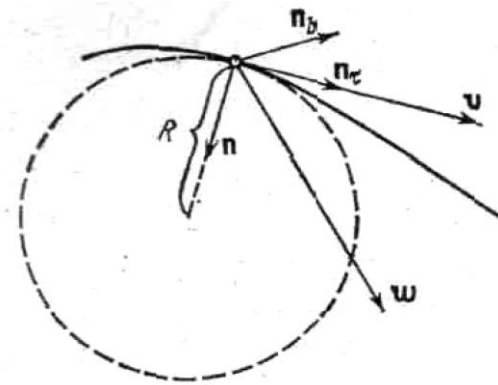


Рис.12

Один з цих ортів \mathbf{n}_τ направляють по збільшенню $d\mathbf{r}$, що визначає дотичну до траєкторії. Оскільки $|d\mathbf{r}|$ з точністю до нескінченно малих вищого порядку дорівнює елементу дуги ds , орт

$$\mathbf{n}_\tau = d\mathbf{r} / ds \quad (7)$$

Другий орт \mathbf{n} направляють по збільшенню $d\mathbf{n}_\tau$, тобто по головній нормалі до траєкторії. Використовуючи (7), знаходимо

$$d\mathbf{n}_\tau / ds = d^2\mathbf{r} / ds^2 = \left| d^2\mathbf{r} / ds^2 \right| \mathbf{n} \quad (8)$$

тобто $\mathbf{n} = d^2\mathbf{r} / \left| d^2\mathbf{r} / ds^2 \right| ds^2$

Орт \mathbf{n} можна записати за допомогою радіуса кривизни траєкторії R , що визначається як відношення збільшення довжини дуги ds до $d\alpha$ -куту між \mathbf{n}_τ та $\mathbf{n}_\tau + d\mathbf{n}_\tau$:

$$R = ds / d\alpha \quad (9)$$

Тому що \mathbf{n}_τ — одиничний вектор, то модуль його збільшення $|d\mathbf{n}_\tau|$ з точністю до величини вищого порядку малості дорівнює куту $d\alpha$ (рис. 13).

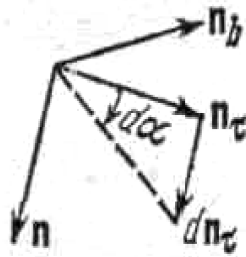


Рис. 13

Тому згідно (8), (9)

$$R = 1 / |d^2\mathbf{r} / ds|$$

Третій орт \mathbf{n}_b природного тригранника задається за допомогою векторного добутку $[\mathbf{n}_\tau \mathbf{n}]$ і визначає бінормаль до траєкторії.

Розкладаючи швидкості точки по «природних» ортах, одержимо

$$\mathbf{v} = s \mathbf{n}_\tau \quad (10)$$

Диференціюючи обидві частини (10) за часом, знайдемо прискорення точки

$$\mathbf{w} = **_s \mathbf{n}_\tau + *_s d\mathbf{n}_\tau / dt$$

Зауважуючи, що згідно (8)

$$d\mathbf{n}_\tau / dt = *_s \mathbf{n} / R$$

остаточно одержимо

$$\mathbf{w} = **_s \mathbf{n}_\tau + \mathbf{n} (*_s)^2 / R$$

З огляду на те, що $*_s = v$, прискорення точки в природних координатах можна записати у вигляді

$$\mathbf{w} = *_v \mathbf{n}_\tau + \mathbf{n} v^2 / R$$

Розглянуті поняття і співвідношення дають можливість вирішувати кінематичні задачі, тобто задачі, у яких рух описується поза зв'язком із причинами, які викликають цей рух.

Контрольні питання:

1. Які є найважливіші системи координат на площині? Визначення координатних ліній.
2. Визначення криволінійних та полярних координат.
3. Визначення еліптичних та параболічних координат.
4. Поняття секторної швидкості точки.
5. Як задається радіус-вектор точки в циліндричних та сферичних координатах?

Тема 2 Рівняння руху

2.1 Принцип найменшої дії Гамільтона

Найбільш загальне формулювання закону руху механічних систем дається так званим *принципом найменшої дії* або *принципом Гамільтона*. Відповідно до цього принципу кожна механічна система характеризується визначеною функцією

$$L(q_1, q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_s, t)$$

або, у короткому записі, $L(q, \dot{q}, t)$, причому рух системи задовольняє наступній умові.

Нехай у моменти часу $t=t_1$ і $t=t_2$ система займає визначені положення, які характеризуються двома наборами значень координат $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$. Тоді між цими положеннями система рухається таким чином, щоб інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (1)$$

мав найменше можливе значення. Функція L називається *функцією Лагранжа* даної системи, а інтеграл (1) - *дією*. Для стислості позначень будемо умовно розуміти під q сукупність усіх координат q_1, q_2, \dots, q_s , а під \dot{q} аналогічно сукупність усіх швидкостей. Варто також вказати, що в такому формулюванні принцип найменшої дії не завжди справедливий для всієї траєкторії руху в цілому, а лише для кожного з досить малих її ділянок. Для всієї ж траєкторії може виявитися, що інтеграл (1) має лише екстремальне, не обов'язково мінімальне значення. Це не істотно при виводі рівнянь руху, що використовують умову екстремальності. Оскільки функція Лагранжа містить тільки перші похідні координат, механічний стан будь-якої системи цілком визначається завданням координат і швидкостей.

Перейдемо до виведення диференціальних рівнянь, які вирішують задачу про визначення мінімуму інтеграла (1). Для спрощення запису формул припустимо спочатку, що система має всього один ступінь свободи, так що повинна бути визначена всього одна функція $q(t)$.

Нехай $q = q(t)$ є саме та функція, для якої S має мінімум. Це значить, що S зростає при заміні $q(t)$ на будь-яку функцію виду

$$q(t) + \delta q(t) \quad (2)$$

де $\delta q(t)$ — функція, мала у всьому інтервалі часу від t_1 до t_2 , тому її називають *варіацією* функції $q(t)$. Оскільки при $t=t_1$ і $t=t_2$ усі порівнювані функції (2) повинні приймати ті самі значення $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$, то повинно бути:

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (3)$$

Зміна S при заміні q на $q + \delta q$ дається різницею

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Розкладання цієї різниці по ступенях δq і $\delta^* q$ (у підінтегральному виразі) починається з членів першого порядку. Необхідною умовою мінімальності S є перетворення в нуль сукупності цих членів; її називають *першою варіацією* або звичайно просто *варіацією* інтеграла. Таким чином, принцип найменшої дії можна записати у вигляді

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (4)$$

або, застосовуючи операцію варіювання

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta^* q \right) dt = 0$$

Однак, $\delta^* q = \frac{d}{dt} \delta q$, тоді проінтегруємо другий член по частинах і одержимо

$$\delta S = \left. \frac{\partial L}{\partial q} \delta q \right|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (5)$$

Але в силу умови (3) перший член у цьому виразі зникає. Залишається інтеграл, який повинний дорівнювати нулю при довільних значеннях δq . Це можливо тільки в тому випадку, якщо підінтегральний вираз тотожно звертається в нуль. У такий спосіб одержуємо рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

При наявності декількох ступенів свободи згідно принципу найменшої дії повинні незалежно варіюватися s різних функцій $q_i(t)$. Очевидно, що ми одержимо тоді s рівнянь виду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (6)$$

Це — шукані диференціальні рівняння; вони називаються в механіці *рівняннями Лагранжа*. Якщо функція Лагранжа даної механічної системи відома, то рівняння (6) встановлюють зв'язок між прискореннями, швидкостями і координатами, тобто являють собою *рівняння руху* системи.

З математичної точки зору рівняння (6) складають систему s рівнянь другого порядку для s невідомих функцій $q_i(t)$. Загальне рішення такої системи містить $2s$ довільних сталих. Для їхнього визначення і тим самим повного визначення руху механічної системи необхідне знання початкових умов, що характеризують стан системи в деякий заданий момент часу, наприклад знання початкових значень усіх координат і швидкостей.

Нехай механічна система складається з двох частин А і В, кожна з яких, будучи замкненою, мала б як функцію Лагранжа відповідно функції L_A і L_B . Тоді в межі, при розведенні частин настільки далеко, щоб взаємодією між ними можна було зневажити, лагранжева функція всієї системи прагне до межі

$$\lim L = L_A + L_B \quad (7)$$

Ця властивість аддитивності функції Лагранжа виражає собою той факт, що рівняння руху кожної з невзаємодіючих частин не можуть містити величини, які відносяться до інших частин системи.

Очевидно, що множення функції Лагранжа механічної системи на довільну сталу саме по собі не відзначається на рівняннях руху. Звідси, здавалося б, могла впливати істотна невизначеність: функції Лагранжа різних ізольованих механічних систем могли б збільшуватися на будь-які різні сталі. Властивість аддитивності усуває цю невизначеність. Вона допускає лише одночасне множення лагранжевих функцій усіх систем на однакову сталу, що зводиться просто до природної свободи у виборі одиниць виміру фізичної величини. Таким чином, функція Лагранжа визначена лише з точністю до доданка до неї повної похідної від будь-якої функції координат і часу.

2.2 Принцип відносності Галілея

Для вивчення механічних явищ треба вибрати ту чи іншу *систему відліку*. У різних системах відліку закони руху мають різний вид. Якщо взяти довільну систему відліку, то може виявитися, що закони навіть зовсім простих явищ будуть виглядати в ній дуже складно. Природно, виникає задача відшукування такої системи відліку, у якій закони механіки виглядали б найбільше просто.

Стосовно до довільної системи відліку простір є неоднорідним і неізотропним. Це значить, що якщо яке-небудь тіло не взаємодіє ні з якими іншими тілами, то, проте, його різні положення в просторі і його різні орієнтації в механічному відношенні не еквівалентні. Те ж саме відноситься в загальному випадку і до часу, що буде неоднорідним, тобто його різні моменти нееквівалентними. Ускладнення, які вносили б такі властивості простору і часу в опис механічних явищ очевидні. Так, наприклад, вільне тіло не могло б бути у спокої: якщо швидкість тіла в деякий момент часу і дорівнює нулю, то вже в наступний момент тіло почало б рухатися в деякому напрямку.

Виявляється, однак, що завжди можна знайти таку систему відліку, стосовно якої простір є однорідним і ізотропним, а час - однорідним. Така система називається *інерціальною*. У ній, зокрема, вільне тіло, яке знаходиться в спокої в деякий момент часу, залишається в спокої необмежено довго.

Можливо тепер відразу зробити деякі висновки про вид функції Лагранжа матеріальної точки, яка вільно рухається в інерціальній системі відліку. Однорідність простору і часу означає, що ця функція не може містити явно ні

радіуса-вектора \mathbf{r} точки, ні часу t , тобто L є функцією лише від швидкості \mathbf{v} . У силу ж ізотропії простору функція Лагранжа не може залежати також і від напрямку вектора \mathbf{v} , тому що є функцією лише від його абсолютної величини, тобто від квадрату $\mathbf{v}^2 = v^2$:

$$L = L(v^2) \quad (8)$$

Через незалежність функції Лагранжа від \mathbf{r} маємо $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0$, і рівняння

Лагранжа мають вигляд

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = 0$$

звідки $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \text{const}$. Але оскільки $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}$ є функцією тільки від квадрату швидкості, тоді

$$\mathbf{v} = \text{const}. \quad (9)$$

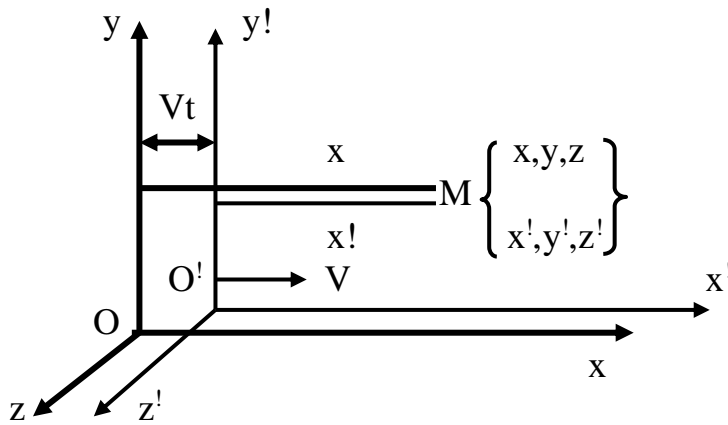
Таким чином, ми дійдемо висновку, що в інерціальній системі відліку усякий вільний рух відбувається з постійною за величиною і напрямком швидкістю. Це твердження складає зміст *закону інерції*. Якщо поряд з наявною інерціальною системою відліку ми введемо іншу систему, яка рухається щодо першої прямолінійно і рівномірно, то закони вільного руху стосовно цієї нової системи будуть такими ж: вільний рух знову буде відбуватися з постійною швидкістю. Досвід показує, однак, що не тільки закони вільного руху будуть однаковими в цих системах, але що вони будуть і у всіх інших механічних відносинах цілком еквівалентними.

Таким чином, існує не одна, а нескінченна безліч інерціальних систем відліку, що рухаються відносно одна одної прямолінійно і рівномірно. В усіх цих системах властивості простору і часу однакові та однакові всі закони механіки. Це твердження складає зміст так званого *принципу відносності Галілея*—одного з найважливіших принципів механіки.

Усе сказане досить ясно свідчить про винятковість властивостей інерціальних систем відліку, у силу яких саме ці системи повинні, як правило, використовуватися при вивченні механічних явищ. Скрізь надалі, де зворотне не оговорено особливо, ми будемо розглядати тільки інерціальні системи відліку.

Повна механічна еквівалентність усієї незліченної безлічі таких систем показує в той же час, що не існує ніякої однієї «абсолютної» системи відліку, яку можна було б протиставити іншим системам.

Розглянемо перехід між системами, одна з яких рухається зі швидкістю \mathbf{V} у напрямку осі x , причому в момент часу $t = 0$ початки координат обох систем збігалися.



Перетворення Галілея запишемо у вигляді

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t$$

Координати \mathbf{r} і \mathbf{r}' однієї і тієї ж точки в двох різних системах відліку O і O' , з яких друга рухається щодо першої зі швидкістю \mathbf{V} , зв'язані один з одним співвідношенням

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t. \quad (10)$$

При цьому мається на увазі, що хід часу однаковий в обох системах відліку:

$$t = t'. \quad (11)$$

Припущення про абсолютність часу лежить у самій основі уявлень класичної механіки.

Формули (10) і (11) називають *перетворенням Галілея*. Принцип відносності Галілея можна сформулювати як вимога інваріантності рівнянь руху механіки стосовно цього перетворення. Цей принцип затверджує фізичну рівноцінність усіх інерціальних систем відліку. Інерціальні системи утворюються шляхом:

- переміщення даної інерціальної системи на довільний вектор у просторі (наслідок однорідності простору);
- поворотом даної системи на довільний кут навколо будь-якої нерухомої осі (наслідок ізотропності простору)
- зміна початку відліку часу, переміщення в часі (наслідок однорідності часу).
- перехід до системи, яка рухається рівномірно і прямолінійно щодо вихідної (наслідок симетрії Галілея).

Принцип відносності накладає визначені обмеження на *сили взаємодії* в системах. У замкнутій системі сили можуть залежати тільки від *різниці координат, різниці швидкостей* точок і не можуть залежати явно від часу. Дійсно, якби сили залежали від самих координат, то при переміщенні системи відліку на постійний вектор змінилися б координати точок, отже і сили, а з ними і закономірності руху, що суперечить принципу відносності.

2.3 Функція Лагранжа вільної матеріальної точки

Переходячи до визначення виду функції Лагранжа, розглянемо спочатку найпростіший випадок - вільний рух матеріальної точки відносно інерціальної системи відліку. Функція Лагранжа в цьому випадку може залежати лише від квадрата вектора швидкості. Для з'ясування виду цієї залежності скористаємося принципом відносності Галілея. Якщо інерціальна система відліку O рухається відносно інерціальної системи відліку O^1 з нескінченно малою швидкістю \mathbf{e} , то $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v} + \mathbf{e}$. Тому що рівняння руху у всіх системах відліку повинні мати однаковий вигляд, то функція Лагранжа $L(v^2)$ повинна при такому перетворенні перейти у функцію L' , яка якщо і відрізняється від $L(v^2)$, то лише на повну похідну від функції координат і часу

$$L' = L(v'^2) = L(v^2 + 2\mathbf{v}\mathbf{e} + \mathbf{e}^2)$$

Розкладаючи цей вираз в ряд по ступенях \mathbf{e} і зневажаючи нескінченно малими вищих порядків, одержимо

$$L(v'^2) = L(v^2) + \frac{\partial L}{\partial v^2} 2\mathbf{v}\mathbf{e}$$

Другий член правої частини цієї рівності буде повною похідною за часом тільки в тому випадку, якщо він залежить від швидкості \mathbf{v} лінійно. Тому $\frac{\partial L}{\partial v^2}$ від швидкості не залежить, тобто функція Лагранжа в розглянутому випадку прямо пропорційна квадрату швидкості

$$L = av^2$$

З того, що функція Лагранжа такого виду задовольняє принципу відносності Галілея у випадку нескінченно малого перетворення швидкості безпосередньо впливає, що функція Лагранжа інваріантна й у випадку кінцевої швидкості \mathbf{V} системи відліку O^1 відносно O . Дійсно

$$L^1 = av'^2 = a(\mathbf{v} + \mathbf{V})^2 = av^2 + 2a\mathbf{v}\mathbf{V} + aV^2$$

або

$$L^1 = L + \frac{d}{dt} (2a\mathbf{r}\mathbf{V} + aV^2t)$$

Другий член є повною похідною і може бути опущений. Постійну a прийнято позначати як $m/2$, так що остаточно напишемо функцію Лагранжа точки, яка вільно рухається, у вигляді

$$L = mv^2/2 \quad (12)$$

Величина m називається *масою* матеріальної точки. В силу властивості аддитивності функції Лагранжа, для системи невзаємодіючих точок маємо

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \quad (13)$$

Варто підкреслити, що лише при врахуванні цієї властивості дане визначення маси набуває реального сенсу. Функцію Лагранжа завжди можна помножити на будь-яку сталу – це не позначиться на рівняннях руху. Для

функції (13) таке множення зводиться до зміни одиниці виміру маси, відношення ж мас часток власне і має реальний фізичний зміст, тому залишається при такому перетворенні незмінним. Очевидно, що маса не може бути негативною. Справді, відповідно до принципу найменшої дії для дійсного руху матеріальної точки з 1 в 2 інтеграл

$$S = \int_1^2 \frac{mv^2}{2} dt$$

має мінімум. Якби маса була негативною, то для траєкторій, по яких частинка спочатку швидко віддаляється від 1, а потім швидко наближається до 2, інтеграл дії приймав би які завгодно великі по абсолютній величині негативні значення, тобто не мав би мінімуму. Корисно помітити, що

$$v^2 = \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = \frac{dl^2}{dt^2} \quad (14)$$

Тому для визначення функції Лагранжа досить знайти квадрат довжини елемента дуги dl у відповідній системі координат. У декартових координатах, наприклад, $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, тому

$$L = m/2 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (15)$$

У циліндричних координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad \text{тому}$$

$$L = m/2 (r^2 + r^2 \varphi^2 + z^2). \quad (16)$$

У сферичних координатах

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \quad \text{тому}$$

$$L = m/2 (r^2 + r^2 \theta^2 + r^2 \sin^2\theta \varphi^2) \quad (17)$$

2.4 Функція Лагранжа системи матеріальних точок

Розглянемо систему матеріальних точок, взаємодіючих одна з одною, але ні з якими сторонніми тілами; таку систему називають *замкнутою*. Виявляється, що взаємодія між матеріальними точками може бути описана додатком до функції Лагранжа невзаємодіючих точок визначеної (залежної від характеру взаємодії) функції координат. Позначивши цю функцію через U , напишемо:

$$L = \sum \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (18)$$

(\mathbf{r}_a -радіус-вектор a -ї точки). Це є загальний вид функції Лагранжа замкнутої системи. Суму

$$T = \sum \frac{m_a v_a^2}{2}$$

називають *кінетичною енергією*, а функцію U -*потенційною енергією* системи. Той факт, що потенційна енергія залежить тільки від розташування

всіх матеріальних точок у певний момент часу означає, що зміна положення однієї з них миттєво позначається на всіх інших; можна сказати, що взаємодія «поширюються» миттєво. Неминучість такого характеру взаємодії у класичній механіці тісно пов'язана з основними передумовами останньої — абсолютністю часу і принципом відносності Галілея. Якби взаємодія поширювалася не миттєво, тобто з кінцевою швидкістю, то ця швидкість була б різна в різних системах відліку, тому що абсолютність часу автоматично означає застосовність звичайного правила додавання швидкостей до всіх явищ. Але тоді закони руху взаємодіючих тіл були б різні в різних (інерціальних) системах відліку, що суперечило б принципу відносності.

Вид функції Лагранжа (18) показує, що час не тільки однорідний, але і ізотропний, тобто його властивості однакові в усіх напрямках. Справді, заміна t на $-t$ не змінює функцію Лагранжа, а отже, і рівняння руху незмінні. Іншими словами, якщо в системі можливий деякий рух, то завжди можливий і зворотній рух, тобто такий, при якому система проходить ті ж стани в зворотному порядку. У цьому розумінні всі рухи, які відбуваються за законами класичної механіки, оборотні.

Знаючи функцію Лагранжа, ми можемо скласти рівняння руху

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_a} = \frac{\partial L}{\partial r_a} \quad (19)$$

Підставивши сюди (18), одержимо:

$$m_a \frac{dv_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial r_a} \quad (20)$$

Рівняння руху в цій формі називаються *рівняннями Ньютона* і являють собою основу механіки системи взаємодіючих часток. Вектор,

$$F_a = - \frac{\partial U}{\partial r_a} \quad (21),$$

який знаходиться в правій стороні рівняння (20), називається *силою*, що діє на a -у точку. Разом з U вона залежить лише від координат усіх часток, але не від їхніх швидкостей. Тому рівняння (20) показують, що і вектори прискорення часток є функціями тільки від координат.

Потенційна енергія виявляється величиною, обумовленою лише з точністю до додатка до неї довільної сталої; такий додаток не змінює рівнянь руху (окремий випадок неоднозначності функції Лагранжа). Найбільш природний і звичайно прийнятий спосіб вибору цієї сталої полягає в тому, щоб потенційна енергія прагнула до нуля при збільшенні відстаней між частками.

Якщо для опису руху використовуються не декартові координати часток, а довільні узагальнені координати q_i , то для одержання лагранжевої функції треба зробити відповідне перетворення

$$x_a = f_a(q_1, q_2, \dots, q_s), \quad *x_a = \sum \frac{\partial f_a}{\partial r_a} *q_k$$

Підставляючи ці вирази у функцію

$$L = 1/2 \sum m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 + \dot{z}_a^2) - U$$

одержимо шукану функцію Лагранжа, що буде мати вигляд

$$L = \sum a_{i,k} (q) \dot{q}_i \dot{q}_k - U (q) \quad (22)$$

де $a_{i,k}$ — функції тільки від координат. Кінетична енергія в узагальнених координатах як і раніше є квадратичною функцією швидкостей, але може залежати також і від координат.

Розглянемо тепер незамкнуту систему А, взаємодіючу з іншою системою В, що робить заданий рух. У такому випадку говорять, що система А рухається в заданому зовнішньому полі, створюваному системою В. Оскільки рівняння руху виходять із принципу найменшої дії шляхом незалежного варіювання кожної з координат як би вважаючи інші відомими, ми можемо для знаходження функції Лагранжа L_A системи А скористатися лагранжевою функцією L усієї системи А + В, замінивши в ній координати q заданими функціями часу.

Припускаючи систему А + В замкнутою, будемо мати:

$$L = T_A (q_A, \dot{q}_A) + T_B (q_B, \dot{q}_B) - U (q_A, q_B)$$

де перші два члени являють собою кінетичні енергії систем А і В, а третій член — їх спільну потенційну енергію. Підставивши замість q задані функції часу та опустивши член $T (q_B(t), \dot{q}_B(t))$, який залежить тільки від часу і тому є повною похідною від деякої іншої функції часу, одержимо:

$$L = T_A (q_A, \dot{q}_A) - U (q_A, q_B(t))$$

Таким чином, рух системи в зовнішньому полі описується функцією Лагранжа звичайного типу з тією лише відмінністю, що тепер потенційна енергія може залежати від часу явно.

Так, для руху однієї частинки в зовнішньому полі загальний вид функції Лагранжа

$$L = mv^2/2 - U (\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

і рівняння руху

$$m \dot{\mathbf{v}} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (24)$$

Однорідним називають поле, у всіх точках якого на частинку діє та сама сила \mathbf{F} . Потенційна енергія в такому полі буде

$$U = - \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} \quad (25)$$

Контрольні питання:

1. Яка функція називається функцією Лагранжа?
2. Які рівняння є рівняннями Лагранжа?
3. Яка система називається інерціальною?
4. Що затверджує принцип відносності Галілея?
5. Який вигляд мають рівняння Ньютона, використовуючи функцію Лагранжа?
6. Які механічні системи називають консервативними?
7. Закон збереження моменту імпульсу

Тема 3 Закони збереження

3.1 Закон збереження енергії.

В процесі руху механічної системи $2s$ величин q_i і *q_i , які визначають її стан, змінюються в часі. Загальне число ступенів свободи системи s , тому $i = 1, 2, \dots, s$. Існують такі функції цих величин, які зберігають під час руху постійні значення, що залежать тільки від початкових умов. Ці функції називають *інтегралами руху*.

Першим інтегралом диференціальних рівнянь руху називається рівність

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c$$

де c – довільна стала, що функціонально поєднує координати точки, яка рухається, їхні похідні за часом і, можливо, час. Шість незалежних перших інтегралів руху надають повну інформацію про рух у просторі. Вирішуючи шість рівнянь

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6,$$

одержимо шість функцій $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, що залежать від часу і шести постійних інтегрування $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$, тим самим цілком визначаються кінематичні рівняння руху і проекції швидкості.

Другим інтегралом руху називається рівність

$$\Phi(x, y, z, c_1, c_2, c_3, t) = c$$

Досить знати три других інтеграла, щоб мати повну інформацію про рух точки. Її координати x, y, z визначаються як функція часу і шести сталих інтегрування, які можуть бути знайдені за початковими умовами руху.

Число незалежних інтегралів руху для замкнутої механічної системи з s ступенями свободи дорівнює $2s-1$. Це очевидно з наступних простих міркувань. Загальне рішення рівнянь руху містить $2s$ довільних сталих. Оскільки рівняння руху замкнутої системи не містять часу явно, то вибір початку відліку часу зовсім довільний, і одна з довільних сталих у рішенні рівнянь завжди може бути обрана у вигляді аддитивної сталої t_0 у часі. Виключивши $t + t_0$ з $2s$ функцій

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \\ ^*q_i &= ^*q_i(t+t_0, C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}), \end{aligned}$$

ми виразимо $2s-1$ довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_{2s-1}$ у вигляді функцій від q і *q , які і будуть інтегралами руху.

Однак далеко не всі інтегралами руху відіграють однаково важливу роль у механіці. Серед них є декілька, сталість яких має дуже глибоке походження, пов'язане з основними властивостями простору і часу – їх однорідністю і ізотропією. Усі ці величини, що зберігаються, мають важливу загальну властивість аддитивності — їхнє значення для системи, що складається з частин, взаємодією яких можна знехтувати, дорівнює сумі значень для кожної з частин окремо.

Саме властивість аддитивності додає відповідним величинам особливо важливу механічну роль. Припустимо, наприклад, що два тіла взаємодіють протягом деякого часу. Оскільки як до, так і після взаємодії кожен з аддитивних інтегралів усієї системи дорівнює сумі їхніх значень для обох тіл окремо, то закони збереження цих величин відразу дають можливість зробити ряд висновків про стан тіл після взаємодії, якщо їхній стан до взаємодії відомий.

Почнемо з закону збереження, що виникає в зв'язку з *однорідністю часу*. В силу цієї однорідності лагранжева функція замкнутої системи не залежить явно від часу. Тому повна похідна функції Лагранжа за часом може бути записана в такий спосіб:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} q_i^* + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i^*} q_i^{**}$$

(якби L залежала явно від часу, до правої сторони рівності додався б член $\frac{\partial L}{\partial t}$. Заміняючи похідні $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ відповідно до рівнянь Лагранжа на $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^*}$, одержимо:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i q_i^* \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^*} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i^*} q_i^{**} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i^*} q_i^* \right)$$

або

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_i q_i^* \frac{\partial L}{\partial q_i^*} - L \right) = 0$$

Отже, обумовлена виразом величина

$$\sum_i q_i^* \frac{\partial L}{\partial q_i^*} - L = \text{const} \quad (1)$$

залишається незмінною при русі замкнутої системи, тобто є одним з її інтегралів руху. Ця величина називається *енергією* системи. Аддитивність енергії безпосередньо впливає з аддитивності функції Лагранжа, через яку вона виражається згідно (1) лінійно. Закон збереження енергії справедливий не тільки для замкнутих систем, але і для систем, що знаходяться в постійному (тобто не залежному від часу) зовнішнім полі; єдина використана в наведеному висновку властивість функції Лагранжа — відсутність явної залежності від часу — мається й у цьому випадку. Механічні системи, енергія яких зберігається, називають *консервативними*.

Лагранжева функція замкнутої системи (або системи, що знаходиться в постійному полі), має вигляд

$$L = T(q, q^*) - U(q),$$

де T — квадратична функція швидкостей. Застосовуючи до неї теорему Ейлера про однорідні функції, одержимо;

$$\sum_i q_i^* \frac{\partial L}{\partial q_i^*} = \sum_i q_i^* \frac{\partial T}{\partial q_i^*} = 2T$$

Підставляючи це значення в (1), знайдемо:

$$E = T(q, \dot{q}) + U(q) \quad (2)$$

у декартових координатах

$$E = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} + U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots) \quad (3)$$

Таким чином, енергія системи може бути представлена у вигляді суми двох істотно різних членів: кінетичної енергії, що залежить від швидкостей, і потенційної енергії, що залежить тільки від координат часток.

3.2 Закон збереження імпульсу

Закон збереження імпульсу виникає в зв'язку з *однорідністю простору*.

В силу цієї однорідності механічні властивості замкнутої системи не змінюються при будь-якому рівнобіжному переносі системи як цілого в просторі. Відповідно до цього розглянемо нескінченно малий перенос на відрізок \mathbf{s} і зажадаємо, щоб функція Лагранжа залишилася незмінною.

Рівнобіжний перенос означає перетворення, при якому всі точки системи зміщуються на той самий відрізок, тобто їхні радіуси-вектори $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a + \mathbf{s}$. Зміна функції L в результаті нескінченно малої зміни координат при незмінних швидкостях часток є

$$\delta L = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} \delta \mathbf{r}_a = \mathbf{s} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$$

де підсумовування здійснюється по всіх матеріальних точках системи. Через довільність \mathbf{s} вимога $\delta L = 0$ еквівалентно вимозі

$$\sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a} = 0 \quad (4)$$

Використовуючи функцію Лагранжа одержуємо звідси:

$$\sum_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = \frac{d}{dt} \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} = 0$$

Таким чином, у замкнутій механічній системі векторна величина

$$\mathbf{P} = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_a} \quad (5)$$

залишається незмінною при русі. Вектор \mathbf{P} називається імпульсом системи. Диференціюючи функцію Лагранжа,

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$$

знайдемо, що імпульс у такий спосіб виражається через швидкості точок:

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a \quad (6)$$

Аддитивність імпульсу очевидна. Більш того, на відміну від енергії імпульс системи дорівнює сумі імпульсів

$$\mathbf{p}_a = m_a \mathbf{v}$$

окремих часток поза залежністю від можливості зневаги взаємодією між ними.

Закон збереження всіх трьох компонентів вектора імпульсу має місце лише при відсутності зовнішнього поля. Однак окремі компоненти імпульсу можуть зберігатися і при наявності поля, якщо потенційна енергія в ньому не залежить від якої-небудь з декартових координат. При переносі уздовж відповідної координатної осі механічні властивості системи не змінюються, і тим же способом ми знайдемо, що проекція імпульсу на цю вісь зберігається. Так, в однорідному полі, спрямованому уздовж осі z , зберігаються компоненти імпульсу уздовж осей x та y .

Вихідна рівність (4) має сама по собі простий фізичний зміст. Похідна

$$\frac{\partial L}{\partial r_a} = -\frac{\partial U}{\partial r_a}$$

являє собою силу \mathbf{F}_a , що діє на a -у частку. Таким чином, рівність (4) означає, що сума сил, які діють на всі частки замкнутої системи, дорівнює нулю:

$$\sum_a \mathbf{F}_a = 0 \quad (7)$$

Зокрема, у випадку системи, що складається усього з двох матеріальних точок, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$ - сила, що діє на першу частку з боку другої, дорівнює по величині, але протилежна по напрямку силі, що діє на другу частку з боку першої. Це твердження відоме за назвою *закону рівності дії і протидії*.

Якщо рух описується узагальненими координатами q_i , то похідні лагранжевої функції по узагальнених швидкостях

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i^*} \quad (8)$$

називаються *узагальненими імпульсами*, а похідні по узагальнених координатах

$$F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (9)$$

називаються *узагальненими силами*. У цих позначеннях рівняння Лагранжа мають вигляд

$$^* p_i = F_i \quad (10)$$

У декартових координатах узагальнені імпульси збігаються з компонентами векторів \mathbf{p}_a . У загальному ж випадку величини p_i є лінійними однорідними функціями узагальнених швидкостей $^* q_i$, що не зводяться до добутку маси на швидкість.

3.3 Центр інерції

Імпульс замкнутої механічної системи має різні значення стосовно різних (інерціальних) систем відліку. Якщо система відліку O^1 рухається щодо системи відліку O зі швидкістю \mathbf{V} , то швидкості \mathbf{v}'_a і \mathbf{v}_a часток стосовно цих систем пов'язані співвідношенням $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Тому зв'язок між значеннями \mathbf{P} і \mathbf{P}^1 дається формулою

$$\mathbf{P} = \sum_a m_a \mathbf{v}_a = \sum_a m_a \mathbf{v}'_a + \mathbf{V} \sum_a m_a$$

або

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^1 + \mathbf{V} \sum_a m_a \quad (11)$$

Завжди існує така система відліку O^1 , у якій повний імпульс звертається в нуль. Поклавши в (11) $\mathbf{P}^1 = 0$ знайдемо, що швидкість цієї системи відліку дорівнює

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} / \sum_a m_a = \frac{\sum_a m_a \mathbf{v}_a}{\sum_a m_a} \quad (12)$$

Якщо повний імпульс механічної системи дорівнює нулю, то говорять, що вона нерухома щодо відповідної системи відліку. Це є цілком природним узагальненням поняття спокою окремої матеріальної точки. Відповідно швидкість \mathbf{V} , що дається формулою (12), набуває сенсу швидкості «руху як цілого» механічної системи з відмінним від нуля імпульсом. Ми бачимо, таким чином, що закон збереження імпульсу дозволяє природним чином сформулювати поняття спокою і швидкості механічної системи як цілого.

Формула (12) показує, що зв'язок між імпульсом \mathbf{P} і швидкістю \mathbf{V} системи як цілого така ж, яка була б між імпульсом і швидкістю однієї матеріальної точки з масою $\mu = \sum_a m_a$, рівній сумі мас усіх часток у системі. Цю обставину можна сформулювати як твердження про *аддитивність маси*.

Права сторона формули (12) може бути представлена як повна похідна за часом від виразу

$$\mathbf{R} = \sum_a m_a \mathbf{r}_a / \sum_a m_a \quad (13)$$

Можна сказати, що швидкість системи як цілого є швидкість переміщення в просторі точки, радіус-вектор якої дається формулою (13). Таку точку називають *центром інерції* системи.

Закон збереження імпульсу замкнутої системи можна сформулювати як твердження про те, що її центр інерції рухається прямолінійно і рівномірно. У такому виді це є узагальнення закону інерції, еквівалентне закону інерції матеріальної точки, «центр інерції» якої збігається з нею самою.

При вивченні механічних властивостей замкнутої системи природно користуватися тією системою відліку, у якій її центр інерції нерухомий. Тим самим виключається з розгляду рівномірний і прямолінійний рух системи як цілого, який не представляє інтересу. Енергію нерухомої механічної системи звичайно називають її *внутрішньою енергією* $E_{\text{вн}}$. Вона містить у собі кінетичну енергію відносного руху часток у системі і потенційну енергію

їхньої взаємодії. Повна ж енергія системи, що рухається як ціле зі швидкістю V , може бути представлена у вигляді

$$E = E_{\text{вн}} + \mu V^2 / 2 \quad (14)$$

Хоча ця формула сама по собі досить очевидна, розглянемо її більш детально. Енергія E та E^1 механічної системи в двох системах відліку O та O^1 зв'язані співвідношенням

$$\begin{aligned} E &= 1/2 \sum m_a v_a^2 + U = 1/2 \sum m_a (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V})^2 + U = \\ &= \mu V^2 / 2 + \mathbf{V} \sum m_a \mathbf{v}'_a + \sum m_a v_a^2 / 2 + U \end{aligned}$$

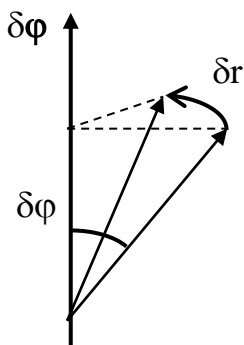
або

$$E = E^1 + \mathbf{V}\mathbf{P}^1 + \mu V^2 / 2 \quad (15)$$

Цією формулою визначається закон перетворення енергії при переході від однієї системи відліку до іншої. Якщо в системі O центр інерції нерухомий, то $\mathbf{P}^1 = 0$, $E^1 = E_{\text{вн}}$ і одержуємо формулу (14).

3.4 Закон збереження моменту імпульсу

Перейдемо до розгляду закону збереження, виникнення якого пов'язано з ізотропією простору. Ця ізотропія означає, що механічні властивості замкнутої системи не змінюються при будь-якому повороті системи як цілого в просторі. Відповідно до цього розглянемо нескінченно малий поворот системи і зажадаємо, щоб її функція Лагранжа при цьому не змінилася.



Введемо вектор $\delta\phi$ нескінченно малого повороту, абсолютна величина якого дорівнює куту $\delta\phi$ повороту, а напрямком збігається з віссю повороту згідно правила правого гвинта стосовно напрямку $\delta\phi$.

Знайдемо, чому дорівнює при такому повороті збільшення радіус – вектора, проведеного з початку координат до якої – небудь точки системи, що повертається. Лінійне переміщення кінця радіус – вектора

зв'язано з кутом співвідношенням

$$|\delta\mathbf{r}| = r \sin \theta \delta\phi$$

Напрямок вектора перпендикулярний до площини, що проходить через \mathbf{r} і $\delta\phi$. Тому ясно, що

$$\delta\mathbf{r} = [\delta\phi \mathbf{r}] \quad (16)$$

При повороті системи міняється напрямком не тільки радіусів-векторів, але і швидкостей усіх часток, при цьому всі вектори змінюються по однаковому закону. Тому збільшення швидкості щодо нерухомої системи координат

$$\delta\mathbf{v} = [\delta\phi \mathbf{v}] \quad (17)$$

Підставимо ці вирази в умову незмінюваності функції Лагранжа при повороті

$$\delta L = \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial r_a} \delta r_a + \frac{\partial L}{\partial v_a} \delta v_a \right) = 0$$

похідні $\frac{\partial L}{\partial v_a}$ заміняємо, згідно визначення, на \mathbf{p}_a , а похідні $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_a}$ відповідно до рівнянь Лагранжа на ${}^* \mathbf{p}_a$. Тоді одержимо

$$\sum_a ({}^* \mathbf{p}_a [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{r}_a] + \mathbf{p}_a [\delta \boldsymbol{\varphi} \mathbf{v}_a]) = 0$$

або, роблячи циклічну перестановку множників і виносячи $\delta \boldsymbol{\varphi}$ за знак суми

$$\delta \boldsymbol{\varphi} \sum_a ([\mathbf{r}_a {}^* \mathbf{p}_a] + [\mathbf{v}_a \mathbf{p}_a]) = \delta \boldsymbol{\varphi} \frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0$$

Внаслідок довільності $\delta \boldsymbol{\varphi}$ випливає, що

$$\frac{d}{dt} \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = 0$$

з чого випливає, що при русі замкнутої системи зберігається векторна величина

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] \quad (18)$$

яка називається *моментом імпульсу* або просто *моментом* системи.

Аддитивність цієї величини очевидна, причому, як і в імпульсі, вона не залежить від наявності або відсутності взаємодії між частками.

Цим вичерпуються аддитивні інтеграли руху. Таким чином, усяка замкнута система має всього сім таких інтегралів: енергія та по три компоненти векторів імпульсу і моменту імпульсу.

Оскільки в визначення моменту входять радіуси-вектори часток, то його значення залежить від вибору початку координат. Радіуси-вектори \mathbf{r}_a та \mathbf{r}'_a однієї і тієї ж точки стосовно початку координат, що знаходяться на відстані a , зв'язані співвідношенням $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}'_a + \mathbf{a}$. Тому маємо:

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] + \sum_a [\mathbf{r}'_a \mathbf{p}_a] + [\mathbf{a} \sum_a \mathbf{p}_a]$$

або

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{a} \mathbf{P}] \quad (19)$$

З цієї формули видно, що тільки в тому випадку, коли система як ціле нерухома (тобто $\mathbf{P} = 0$), її момент не залежить від вибору початку координат. На законі збереження моменту ця невизначеність його значення не позначається, тому що в замкнутій системі імпульс теж зберігається.

Виведемо також формулу, що пов'язує значення моменту імпульсу в двох різних інерціальних системах відліку O та O' , з яких друга рухається щодо першої зі швидкістю \mathbf{V} . Будемо вважати, що початки координат у системах O і O' у даний момент часу збігаються. Тоді радіуси-вектори часток в обох системах однакові, швидкості ж зв'язані за допомогою $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}'_a + \mathbf{V}$. Тому маємо:

$$\mathbf{M} = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] = \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}'_a] + \sum_a m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{V}]$$

Перша сума в правій стороні рівності є момент \mathbf{M}' у системі O' , увівши в другу суму радіус-вектор центра інерції, одержуємо:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + \mu [\mathbf{R} \mathbf{V}] \quad (20)$$

Ця формула визначає закон перетворення моменту імпульсу при переході від однієї системи відліку до іншої, подібно тому, як для імпульсу та енергії. Якщо система відліку O' є така, у якій дана механічна система нерухома як ціле, то \mathbf{V} є швидкість центра інерції останньої, а $\mu\mathbf{V}$ – її повний імпульс \mathbf{P} (відносно O). Тоді

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}' + [\mathbf{R} \mathbf{P}]$$

Іншими словами, момент імпульсу \mathbf{M} механічної системи складається з її «власного моменту» щодо системи відліку, у якій вона нерухома, і моменту $[\mathbf{R} \mathbf{P}]$, пов'язаного з її рухом як цілого.

Хоча закон збереження всіх трьох компонентів моменту (щодо довільного початку координат) має місце тільки для замкнутої системи, у більш обмеженому виді цей закон може мати місце і для систем, що знаходяться в зовнішнім полі.

Найбільш важливим випадком такого роду є поле з центральною симетрією, тобто поле, у якому потенційна енергія залежить тільки від відстані до деякої визначеної точки (центра) у просторі. Очевидно, що при русі в такому полі зберігається проекція моменту на будь-яку вісь, що проходить через центр. Іншими словами, зберігається вектор \mathbf{M} моменту, але визначеного не щодо довільної точки простору, а щодо центра поля.

Інший приклад: однорідне поле уздовж осі z , у якому зберігається проекція M_z моменту, причому початок координат може бути обрано довільним чином.

Відзначимо, що проекція моменту на яку-небудь вісь (назвемо її z) може бути знайдена диференціюванням функції Лагранжа за формулою

$$M_z = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \varphi_a} \quad (21)$$

де координата φ є кут повороту навколо осі z .

Контрольні питання:

1. Які механічні системи називають консервативними?
2. Закон збереження моменту імпульсу.
3. Яку точку називають центром інерції системи?

Тема 4 Інтегрування рівнянь руху

4.1 Одномірний рух

Одномірним називають рух системи з одним ступенем свободи. Найбільш загальний вид лагранжевої функції такої системи, що знаходиться в постійних зовнішніх умовах, є

$$L = 1/2 a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad (1)$$

де $a(q)$ — деяка функція узагальненої координати q . Зокрема, якщо q є декартова координата (назвемо її x),

$$L = 1/2 m \dot{x}^2 - U(x) \quad (2)$$

Відповідні цим лагранжевим функціям рівняння руху інтегруються в загальному виді. При цьому немає навіть необхідності вписувати саме рівняння руху, а варто виходити відразу з його першого інтеграла — рівняння, що виражає закон збереження енергії. Так, для функції Лагранжа (2) маємо:

$$1/2 m \dot{x}^2 + U(x) = E$$

Це є диференціальне рівняння першого порядку, що інтегрується шляхом поділу перемінних. Маємо

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$

відкіля

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \quad (3)$$

Роль двох довільних сталих у рішенні рівняння руху виконують повна енергія E та постійна інтегрування $const$. Оскільки кінетична енергія — величина істотно позитивна, то при русі повна енергія завжди більша потенційної, тобто рух може відбуватися тільки в тих областях простору, де $U(x) < E$.

Нехай, наприклад, залежність $U(x)$ має вид, зображений на рисунку 1.

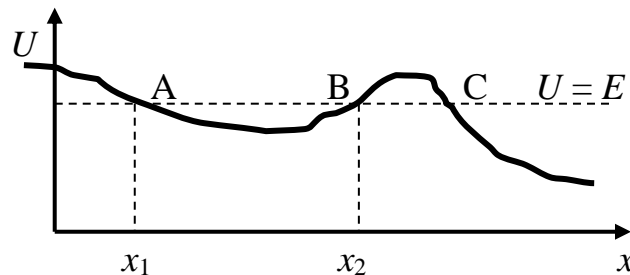


Рис. 1

Провівши на цьому ж графіку горизонтальну пряму, що відповідає заданому значенню повної енергії, ми відразу ж з'ясуємо можливі області руху. Так у зображеному на малюнку випадку рух може відбуватися лише в області АВ або в області праворуч від С. Точки, у яких потенційна енергія дорівнює повній

$$U(x) = E \quad (4)$$

визначають границі руху. Вони є «точками зупинки», оскільки в них швидкість дорівнює нулю. Якщо область руху обмежена двома такими точками, то рух відбувається в обмеженій області простору і він є *фінітним*. Якщо ж область руху не обмежена або обмежена лише з одного боку, - рух є *інфінітним*, частка рухається в нескінченність.

Одномірний фінітний рух є коливальним — частка робить періодично повторюваний рух між двома граничними положеннями (на малюнку в «потенційній ямі» АВ між точками x_1 і x_2). При цьому відповідно до загальної властивості оборотності час руху від x_1 до x_2 дорівнює часу зворотнього руху від x_2 до x_1 . Тому період коливань T , тобто час, за який точка пройде від x_1 до x_2 і назад, дорівнює подвоєному часу проходження відрізка x_1x_2 або згідно (3)

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \quad (5)$$

Причому межі x_1 та x_2 є коренями рівняння (4) при даному значенні E . Ця формула визначає період руху в залежності від повної енергії частки.

4.2 Приведена маса

Повне рішення в загальному виді допускає надзвичайно важлива задача про рух системи, що складається усього з двох взаємодіючих часток («задача двох тіл»).

Як попередній крок до рішення цієї задачі покажемо, яким чином вона може бути істотно спрощена шляхом розкладання руху системи на рух центра інерції і рухи точок щодо останнього.

Потенційна енергія взаємодії двох часток залежить лише від відстані між ними, тобто від абсолютної величини різниці їхніх радіусів-векторів. Тому лагранжева функція такої системи

$$L = 1/2 m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + 1/2 m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2 - U(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (6)$$

Введемо вектор взаємної відстані обох часток

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

і помістимо початок координат у центрі інерції, що дає:

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0$$

З двох останніх рівностей знаходимо:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \mathbf{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad (7)$$

Підставляючи цей вираз в (1), одержимо:

$$L = 1/2 m \dot{r}^2 - U(r) \quad (8)$$

де введено позначення

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (9)$$

величина m називається *приведеною масою*. Функція (8) формально збігається з функцією Лагранжа однієї матеріальної точки з масою m , що рухається в зовнішнім полі $U(r)$, симетричному щодо нерухомого початку координат.

Таким чином, задача про рух двох взаємодіючих матеріальних точок зводиться до рішення задачі про рух однієї точки в заданому зовнішньому полі $U(r)$. За рішенням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ цієї задачі траєкторії $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ та $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ кожної з цих часток m_1 і m_2 окремо (стосовно їхнього загального центра інерції) знаходять за формулами (7).

4.3 Рух у центральному полі

Звівши задачу про рух двох тіл до задачі про рух одного тіла, ми прийшли до питання про визначення руху частки в зовнішнім полі, у якому його потенційна енергія залежить тільки від відстані r до визначеної нерухомої точки - таке поле називають *центральним*. Сила

$$\mathbf{F} = - \frac{\partial U(r)}{\partial \mathbf{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

діюча на частинку, по абсолютній величині залежить при цьому теж тільки від r і спрямована в кожній точці уздовж радіуса-вектора. При русі в центральному полі зберігається момент системи щодо центра поля. Для однієї частки це є

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \mathbf{p}]$$

Оскільки вектори \mathbf{M} та \mathbf{r} взаємно перпендикулярні, сталість \mathbf{M} означає, що при русі частки її радіус-вектор увесь час залишається в одній площині — площині, перпендикулярній до \mathbf{M} .

Таким чином, траєкторія руху частки в центральному полі лежить цілком в одній площині. Ввівши в ній полярні координати r та φ , напишемо функцію Лагранжа у вигляді

$$L = m/2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (10)$$

Ця функція не містить у явному виді координату φ . Всяку узагальнену координату q_i , яка не входить явно в лагранжеву функцію, називають *циклічною*. В силу рівняння Лагранжа маємо для такої координати:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i^*} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

тобто відповідний їй узагальнений імпульс $p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i^*}$ є інтегралом руху. Ця обставина приводить до істотного спрощення задачі інтегрування рівнянь руху при наявності циклічних координат.

У даному випадку узагальнений імпульс

$$P = m r^2 \dot{\varphi}$$

збігається з моментом $M_z = M$, так що ми повертаємося до відомого вже нам закону збереження моменту

$$M = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (11)$$

Помітимо, що для плоского руху однієї частинки в центральному полі цей закон допускає просту геометричну інтерпретацію.

Вираз $1/2 r^2 \dot{\varphi}$ являє собою площу сектора, утвореного двома нескінченно близькими радіусами-векторами та елементом дуги траєкторії (рис. 2). Позначивши її як df , напишемо момент частки у вигляді

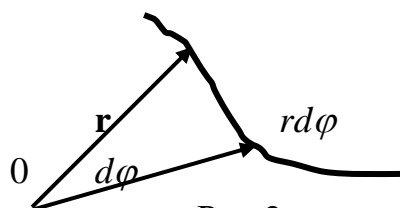


Рис.2

$M = 2m \dot{f}$, де похідну \dot{f} називають *секторною швидкістю*. Тому збереження моменту означає сталість секторної швидкості – за рівні проміжки часу радіус-вектор точки, що рухається,

описує рівні площі (так званий другий закон Кеплера). Закон збереження моменту для частки, що рухається в центральному полі, іноді називають інтегралом площ. Повне рішення задачі про рух частинки в центральному полі найпростіше одержати, виходячи з законів збереження енергії і моменту, не виписуючи при цьому самих рівнянь руху. Виражаючи $\dot{\varphi}$ через M , одержимо:

$$E = m/2 (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) = 1/2 m \dot{r}^2 + M^2/2mr^2 + U(r) \quad (12)$$

Звідси

$$\dot{r} = dr/dt = \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}} \quad (13)$$

або розділяючи перемінні та інтегруючи

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)] - \frac{M^2}{m^2 r^2}}} + \text{const} \quad (14)$$

Перепишемо (11) у вигляді

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt$$

і підставимо сюди dt з (13). Після інтегрування одержимо

$$\varphi = \int \frac{\frac{Mdr}{r^2}}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const} \quad (15)$$

Формули (14) і (15) вирішують у загальному вигляді поставлену задачу. Друга з них визначає зв'язок між r і φ , тобто рівняння траєкторії. Формула (14) визначає в неявному виді відстань r точки, що рухається, від центра як функцію часу. Відзначимо, що кут φ завжди монотонно міняється, а з (11) видно, що $\dot{\varphi}$ ніколи не змінює знака.

Вираз (12) показує, що радіальну частину руху можна розглядати як одномірний рух у полі з «ефективною» потенційною енергією

$$U_{\text{эфф}} = U(r) + M^2/2 m r^2 \quad (16)$$

Величину $M^2/2 m r^2$ називають відцентровою енергією. Значення r , при яких

$$U(r) + M^2/2 m r^2 = E \quad (17)$$

визначають границі області руху по відстані від центру. При виконанні рівності (17) радіальна швидкість \dot{r} звертається в нуль. Це не означає зупинки частки, тому що кутова швидкість $\dot{\varphi}$ не звертається в нуль. Рівність $\dot{r} = 0$ означає «точку повороту» траєкторії, у якій функція $r(t)$ переходить від збільшення до зменшення або навпаки.

Якщо область припустимої зміни M обмежена лише однією умовою $r \geq r_{\min}$, то рух частки відбувається по інфінітній траєкторії - приходить з нескінченності та іде в нескінченність. Якщо область зміни r має дві границі r_{\min} і r_{\max} , то рух є фінітним і траєкторія цілком лежить усередині кільця, обмеженого окружностями $r = r_{\max}$ та $r = r_{\min}$. Це, однак, не означає, що траєкторія неодмінно є замкнутою кривою. За час, протягом якого r змінюється від r_{\min} до r_{\max} і потім до r_{\min} радіус-вектор повернеться на кут $\Delta\varphi$, рівний згідно (15)

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{Mdr}{r^2}}{\sqrt{2m(E - U) - \frac{M^2}{r^2}}} \quad (18)$$

Умова замкнутості траєкторії полягає в тім, щоб цей кут дорівнював раціональній частині від 2π , тобто мав вид $\Delta\varphi = 2\pi m / n$, де m, n — цілі числа. Тоді через n повторень цього періоду часу радіус-вектор точки, зробивши m повних обертів, збіжиться зі своїм первісним значенням, тобто траєкторія замкнеться (рис.3). Однак такі випадки виняткові, і при довільному виді $U(r)$ кут $\Delta\varphi$ не є раціональною частиною від 2π . Тому в загальному випадку траєкторія фінітного руху не замкнута. Вона незлічене число раз проходить через мінімальну і максимальну відстань і за нескінченний час заповнює все кільце між двома граничними окружностями.

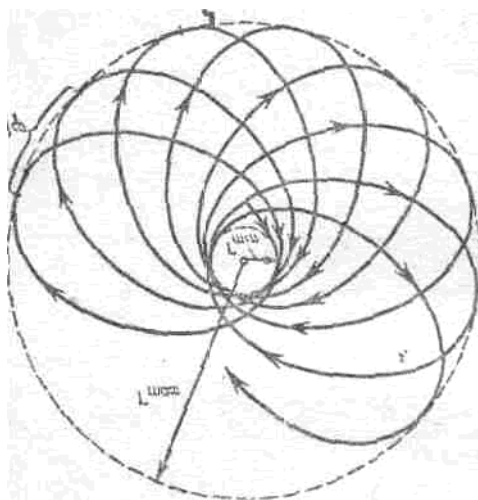


Рис.3

Існують лише два типи центральних полів, у яких усі траєкторії фінітних рухів замкнуті. Це поля, у яких потенційна енергія частки пропорційна $1/r$ або $1/r^2$. Перший з цих випадків відповідає плоскому, а другий так званому просторовому осцилятору.

У точці повороту квадратний корінь (13) (а разом з ним і підінтегральний вираз в (14) і (15)) змінює знак. Якщо відраховувати кут φ від напрямку радіуса-вектора, проведеного в точку повороту, то примкнуті із двох сторін до цієї точки відрізки траєкторії будуть відрізнятися лише знаком φ при кожних однакових значеннях r . Це значить, що траєкторія симетрична щодо зазначеного напрямку. Почавши, скажемо, від якої-небудь із точок $r = r_{\max}$, ми пройдемо відрізок траєкторії до точки $r = r_{\min}$, потім будемо мати симетрично розташований такий же відрізок до наступної точки з $r = r_{\max}$ і т.д., тобто вся траєкторія виходить повторенням у прямому і зворотному напрямках однакових відрізків. Це відноситься і до інфінітних траєкторій, що складаються із двох симетричних траєкторій, які простираються від точки повороту r_{\min} до нескінченності.

Наявність відцентрової енергії (при русі з $M \neq 0$), що звертається при $r \rightarrow 0$ у нескінченність, як $1/r^2$, призводить звичайно до неможливості проникнення часток, що рухаються, до центра поля, навіть якщо останнє саме по собі має характер тяжіння. «Падіння» частки в центр можливо лише, якщо потенційна енергія досить швидко прагне до $-\infty$ при $r \rightarrow 0$. З нерівності

$$m \cdot r^2/2 = E - U(r) - M^2/2mr^2 > 0$$

або

$$r^2 U(r) + M^2/2m < Er^2$$

впливає, що r може приймати прагнучі до нуля значення лише за умови

$$r^2 U(r) \Big|_{r \rightarrow 0} < -M^2/2m \quad (19)$$

тобто $U(r)$ повинне прагнути до $-\infty$ або як $-a/r^2$ при $a > M^2/2m$, або пропорційно $-1/r^n$ при $n > 2$.

4.4 Закони Кеплера

На початку 17 століття, ще до створення Ньютоном динаміки, Кеплер встановив емпірично по спостереженнях за рухом Марса три закони:

1. Планети рухаються по еліпсах, в одному з фокусів яких знаходиться Сонце.

2. Площа, описувана за одиницю часу радіусом-вектором планети щодо Сонця, постійна.
3. Відношення квадратів періодів обертання планет навколо Сонця до кубів великих півосей їхніх орбіт постійно і для всіх планет однаково.

Розглянемо справедливність цих законів на підставі закономірностей руху в центральному полі сил, для яких потенційна енергія пропорційна r і відповідно сила оберненопропорційна r^2 . Такими є гравітаційне або електростатичне поле, перше з яких є полем тяжіння, а друге може бути як полем тяжіння так і відштовхування. Розглянемо поле тяжіння, у якому

$$U = - a/r \quad (20)$$

З позитивною сталою a . Графік ефективної потенційної енергії

$$U_{\text{ЕФ}} = - a/r + M^2/2mr^2 \quad (21)$$

має вид (рис.4).

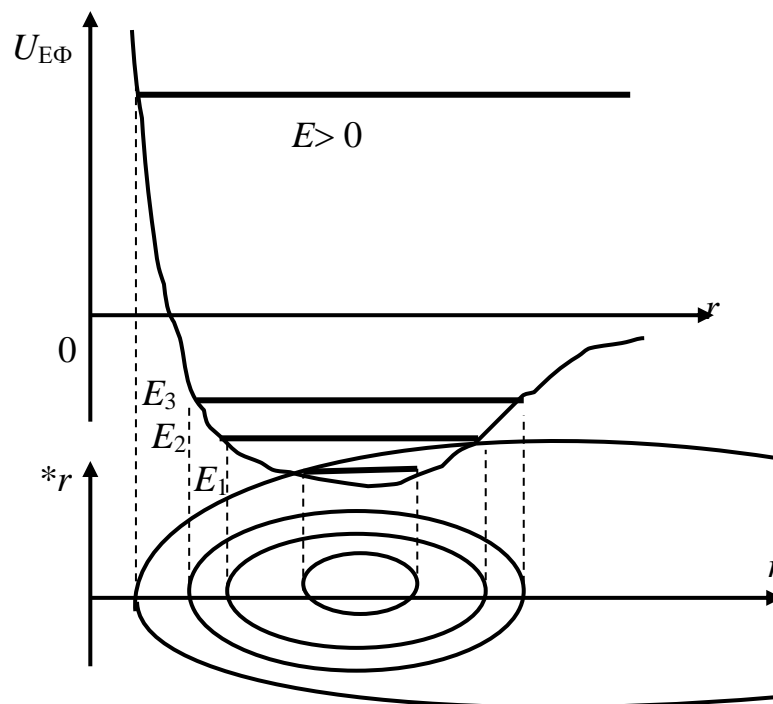


Рис.4

При $r \rightarrow 0$ вона звертається в $+\infty$, а при $r \rightarrow \infty$ прагне до нуля з боку негативних значень. При $r = M^2 / at$ вона має мінімум, рівний

$$(U_{\text{ЕФ}})_{\text{min}} = - a^2 m / 2M^2 \quad (22)$$

З графіка очевидно, що при $E > 0$ рух частки буде інфінітним, а при $E < 0$ – фінітним. Під графіком $U_{\text{ЕФ}}$ розташуємо фазову площину $*r(r)$, з якої випливає, що у випадку руху з різними повними енергіями E_1, E_2 фінітний рух тіла можливий лише тоді, коли $E < 0$, у іншому випадку траєкторія руху не

замикається, а іде в нескінченність – рух інфінітний. Рівняння траєкторії одержимо за допомогою загальної формули

$$\varphi = \int \frac{Mdr}{r^2 \sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M^2}{r^2}}} + \text{const}$$

підстановкою $U = -a/r$ тобто

$$\varphi = \arccos \frac{\frac{M}{r} - \frac{ma}{M}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2 a^2}{M^2}}} + \text{const}$$

Вибираючи початок відліку кута φ так, щоб $\text{const} = 0$ і вводячи позначення

$$p = M^2 / ma, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{ma^2}} \quad (23)$$

перепишемо рівняння траєкторії у вигляді

$$p/r = 1 + e \cos \varphi \quad (24)$$

Отримане рівняння визначає конічний перетин з фокусом на початку координат; p та e – параметр і ексцентриситет орбіти. Вибір початку відліку $\varphi = 0$ визначає найближчу до центра точку – *перигелій* орбіти. Як впливає з (23), при $E < 0$ ексцентриситет $e < 1$, тобто орбіта є еліпсом і рух фінітний. Найменше припустиме значення енергії збігається з (22), при цьому $e = 0$ і еліпс звертається в окружність. Найменша і найбільша відстані до центра (фокуса еліпса) будуть

$$r_{\min} = a(1-e), \quad r_{\max} = a(1+e) \quad (25)$$

Час обертання по еліптичній орбіті або період руху T визначимо з закону збереження моменту у вигляді «інтеграла площин» згідно другого закону Кеплера $M = 2m^* f$. Інтегруючи цю рівність, одержимо

$$2mf = TM$$

де f – площі орбіти. Для еліпса $f = \pi cb$, де

$$c = a / 2E, \quad b = M / \sqrt{2mE}$$

або

$$T = 2\pi c^{3/2} \sqrt{\frac{m}{a}} = \pi a \sqrt{\frac{m}{2E^3}} \quad (26)$$

що безпосередньо впливає з третього закону Кеплера, оскільки період обертання залежить тільки від енергії частки E .

При $E = 0$ ексцентриситет $e = 1$ і частка рухається по параболі з відстанню перигелію $r_{\min} = p/2$. Якщо $E > 0$, то ексцентриситет $e > 1$ і траєкторія руху є гіперболою, що обгинає фокус на відстані перигелію $r_{\min} = c(e - 1)$, де $c = a/2E$ – піввісь гіперболи.

Розглянемо визначення траєкторії руху тіла, запущеного в космос на висоті H над землею з початковою швидкістю v_0 , спрямованою

горизонтально. Відповідно до закону всесвітнього тяжіння, на тіло маси m діє сила тяжіння

$$F = - Gm / r^2$$

Отже, постійна a у виразі (20) буде

$$a = Gm = mg^2$$

де R – радіус Землі, g – прискорення вільного падіння. Потенційна енергія корабля -супутника

$$U = - mg^2 / r$$

Тоді параметри орбіти будуть

$$p = (R + H)^2 v_0^2 / GM \quad e = [(R + H) v_0^2 / GM] - 1$$

У залежності від початкової швидкості v_0 траєкторія руху буде координатна, еліпс, парабола або гіпербола (рис.5).

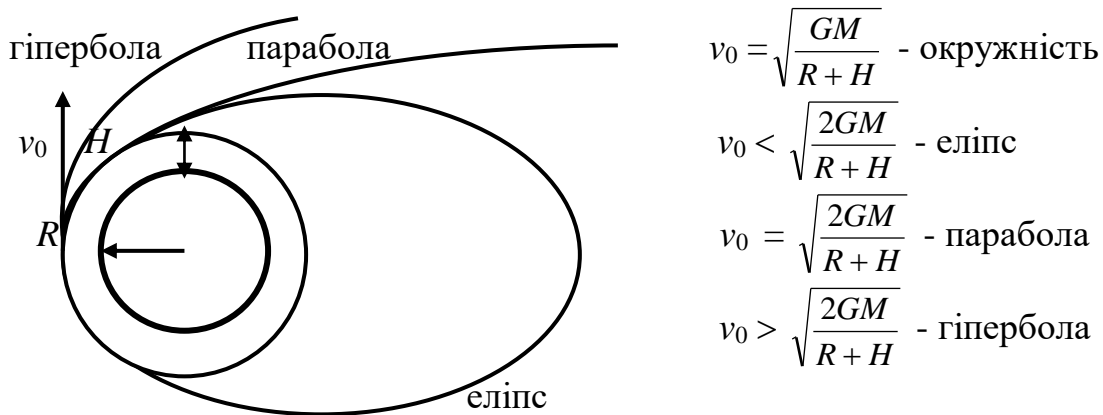


Рис.5

Повна механічна енергія тіла, що рухається, буде

$$E = mv_0^2/2 - Gm / (R+H) \quad (27)$$

Тоді при $E < 0$ траєкторія руху буде представляти еліпс, при $E = 0$ – параболу, при $E > 0$ – гіперболу.

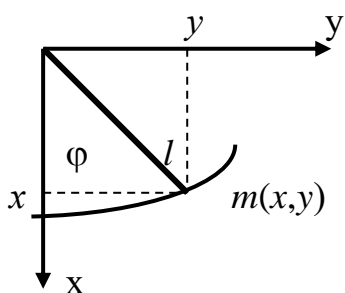
Контрольні питання:

1. Який рух називають одномірним?
2. Яка маса називається приведеною масою?
3. Яке поле називають центральним?
4. Яку координату називають циклічною?
5. Закони Кеплера.

Тема 5 Рівняння Лагранжа

5.1 Зв'язки в системі тіл

Розглянемо механічні системи, у яких взаємодія між тілами (матеріальними точками) має характер «зв'язків», тобто обмежень, що накладаються на взаємне розташування тіл. Фактично такі зв'язки здійснюються шляхом скріплення тіл різними стрижнями, нитками, шарнірами і т.п. Ця обставина вносить у рух новий фактор — рух тіл супроводжується тертям у місцях їхнього зіткнення, в результаті чого задача виходить за рамки чистої механіки. Однак у багатьох випадках тертя в системі виявляється настільки слабким, що його впливом на рух можна цілком знехотити. Якщо до того ж можна знехотити масами «скріпних елементів» системи, то роль останніх зведеться просто до зменшення числа ступенів свободи системи s (у порівнянні з числом $3N$). Для визначення її руху можна скористатися функцією Лагранжа з числом незалежних узагальнених координат, що відповідають фактичному числу ступенів свободи такої системи. Динаміка невільної матеріальної точки зводиться до динаміки вільної матеріальної точки на основі аксіоми про зв'язки – зв'язок можна не враховувати, замінивши його дію відповідною силою – *реакцією зв'язку*. Після заміни матеріальна точка розглядається як вільна, на яку діє сила реакції зв'язку. Такі сили прийнята вважати *пасивними*, а реально задані – *активними*.



Зв'язок можна задати аналітично. Наприклад, у випадку математичного маятника

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

де x, y – координати коливного вантажу масою m . У загальному випадку під зв'язками розуміють обмеження, які не впливають з рівнянь руху, що накладаються на положення швидкості та прискорення точок механічної

системи. Якщо на систему з N точок накладено k зв'язків, то реакція всіх k зв'язків на i -ту точку дорівнює

$$\mathbf{R}_i = \sum_{a=1}^k \mathbf{R}_{a i} \quad (1)$$

Розрізняють зв'язку голономні та неголономні, утримуючі і неутримуючі, стаціонарні і нестаціонарні.

Голономними (такими, що інтегруються) зв'язками називають такі, рівняння яких завжди можна звести до рівнянь виду

$$f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_{N,t}) = 0 \quad (2)$$

де f є функцією тільки координат точок і часу. Ці зв'язки накладають обмеження не тільки на положення, але і на швидкість і прискорення точок системи.

Неголономними (такими, що не інтегруються) зв'язками називають такі, рівняння яких не можна звести до рівнянь, що містять тільки координати точок і час.

Утримуючими зв'язками називають зв'язки, що задаються рівностями.

Неутримуючими зв'язками називають зв'язки, що задаються нерівностями. Утримуючі зв'язки реалізуються будь-яким твердим зв'язком точок, а неутримуючі – іншим зв'язком, наприклад, гнучким.

Стаціонарними називаються зв'язки, рівняння яких не залежить явно від часу, інакше – *нестационарними*.

Основною задачею механіки невіільної системи N точок з голономними зв'язками є відшукування закону руху системи і реакцій зв'язків по заданих силах \mathbf{F}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) і заданих k рівняннях голономних зв'язків.

$$\begin{aligned} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i &= \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \\ f_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) &= 0 \quad (a = 1, 2, \dots, k) \end{aligned} \quad (3)$$

Система (3) являє собою систему $3N + k$ скалярних рівнянь, що містять $6N$ невідомих функцій. Для випадку $k < 3N$ задача є визначеною, коли відомі $6N - (3N + k) = 3N - k$ незалежних співвідношень між положеннями точок і реакціями зв'язків, тобто число незалежних параметрів, що характеризують конфігурацію системи, буде вже не $3N$, а $3N - k$, оскільки k ступенів свободи буде реалізовано відповідними зв'язками.

5.2 Дійсні, можливі і віртуальні переміщення

Дійсним переміщенням $d\mathbf{r}$ точки називається нескінченно мале переміщення цієї точки під дією заданих сил і реакцій зв'язку. Для однієї точки з одним голономним утримуючим зв'язком

$$f(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (4)$$

Можливим переміщенням називається «переміщення» $d\mathbf{r}$ точки, що допускається зв'язком; на відміну від дійсних переміщень можливі переміщення задовольняють тільки рівнянню зв'язку. Дійсне переміщення завжди є одним з можливих. Диференціальне рівняння, якому підлегли можливі переміщення точки, одержимо, узявши диференціал від лівої частини рівняння (4) і прирівнюючи його нулю

$$df = \nabla f d\mathbf{r} + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0 \quad (5)$$

де $\nabla = \mathbf{n}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{n}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{n}_z \frac{\partial}{\partial z}$ - диференціальний оператор «набла».

Віртуальним переміщенням називається уявлюване нескінченно мале «переміщення» точки, що допускається зв'язком у даний фіксований момент часу; у цей момент часу зв'язок «застигає», тобто його зміна в часі умовно припиняється. Віртуальні переміщення не відбуваються під дією сил і не мають тривалості. Представлення про віртуальні переміщення можна одержати, якщо зробити миттєву фотографію поверхні, що рухається, і

розглянути можливі переміщення точки по зображенню цієї поверхні на фотографії. Диференціальне рівняння, якому підлеглі віртуальні переміщення точки, одержимо, обчислюючи диференціал лівої частини рівняння (4) при фіксованому часі, тобто обчислюючи варіацію $f(\mathbf{r}, t)$ і прирівнюючи її нулю

$$\delta f = \nabla f \delta \mathbf{r} = 0 \quad (6)$$

Тут збільшення $\delta \mathbf{r}$ радіуса-вектора точки також «відбувається» при фіксованому часі, тобто є *варіацією* радіуса-вектора. З (5) і (6) видно, що сукупність віртуальних переміщень збігається з можливими переміщеннями тільки у випадку стаціонарних зв'язків, коли $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

Поняття віртуальних переміщень дозволяє визначити *ідеальні* зв'язки. Для ідеальних зв'язків сума робіт усіх реакцій зв'язку на віртуальних переміщеннях точок системи дорівнює нулю

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i \delta \mathbf{r}_i = 0$$

де N - число точок системи. Робота активних сил системи

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \delta \mathbf{r}_i$$

у випадку узагальнених координат

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i \delta q_i$$

де $\mathbf{Q}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_i}$. Величина δA називається можливою або віртуальною

роботою і виражається у вигляді

$$\delta A = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_n \delta q_n$$

Віртуальна робота є лінійною функцією від варіації координат, а величина Q_i називається узагальненою силою відповідної узагальненої координати q_i . Внаслідок незалежності узагальнених координат визначення Q_i можливо в результаті заміни тільки однієї координати q_i на δq_i при фіксованих інших координатах. Для голономної системи це завжди можливо, тому що δq_i не залежать одна від одної. Робота активних сил δA_i при зміні q_i на δq_i визначається формулою $\delta A_i = Q_i \delta q_i$, відкіля

$$Q_i = \delta A_i / \delta q_i$$

Розмірність роботи збігається з розмірністю енергії, тому добуток узагальнених сил на варіацію узагальненої координати збігається з розмірністю енергії системи.

5.3 Рівняння Лагранжа

Рівняння Лагранжа *першого роду* — диференціальні рівняння руху механічної системи в проекціях на декартові осі координат, що містять невизначені множники Лагранжа. Для *голономної системи*, що складається з n матеріальних точок, на яку накладено k зв'язків виду;

$$f_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; t) = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots, k) \quad (7)$$

рівняння Лагранжа мають вигляд

$$\begin{aligned} m_a **x_a &= F_{ax} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_a} \\ m_a **y_a &= F_{ay} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_a} \quad (a = 1, 2, 3, \dots, n) \\ m_a **z_a &= F_{az} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_a} \end{aligned} \quad (8)$$

де m_a — маси точок системи; x_a, y_a, z_a — координати цих точок; F_{ax}, F_{ay}, F_{az} — проекції прикладених до кожної точки активних сил; λ_i — невизначені множники, пропорційні реакціям відповідних зв'язків; t — час. Аналогічні рівняння можуть складатися і для неголономних систем. Рівняння (8) разом з (7) дають систему $3n + k$ диференціальних рівнянь, з яких знаходяться $3n$ невідомих функцій $x_a(t), y_a(t), z_a(t)$, що визначають закон руху точок системи, і k множників $\lambda_i(t)$, що дозволяють визначати проекції реакцій зв'язків за формулами:

$$N_{ax} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial x_a} \quad N_{ay} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial y_a} \quad N_{az} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial z_a}$$

Для відшукування закону руху рівняннями (8) користаються рідко, тому що інтегрування системи $3n + k$ рівнянь, коли n велике, пов'язано з великими труднощами. Однак якщо закон руху буде знайдений іншим шляхом, то по рівняннях (8), у яких ліві частини відомі, можна визначати реакції зв'язків.

Рівняння Лагранжа *другого роду* — диференціальні рівняння руху механічної системи, у яких параметрами, що визначають положення системи, є незалежні між собою узагальнені координати. Для *голономних систем* рівняння Лагранжа другого роду мають у загальному випадку вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

де q_i — узагальнені координати, число яких дорівнює числу s ступенів свободи системи, \dot{q}_i — узагальнені швидкості, Q_i — узагальнені сили.

Для складання рівнянь (9) треба, вибравши q_i , визначити кінетичну енергію системи в її русі відносно інерціальної системи відліку і виразити цю величину явно через q_i і \dot{q}_i , тобто знайти $T(q_i, \dot{q}_i, t)$; час увійде сюди при нестационарних зв'язках. Значення Q_i знаходяться по заданих (активних) силах, у число яких при неідеальних зв'язках включають і сили тертя. З математичної точки зору рівняння (9) являють собою систему звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку щодо координат q_i . Інтегруючи ці рівняння і визначаючи постійні інтегрування та початкові умови, знаходять $q_i(t)$, тобто закон руху системи в узагальнених координатах.

Але порівняно з рівняннями в декартових координатах, рівняння (9) мають ту важливу перевагу, що число їх дорівнює числу ступенів свободи системи і не залежить від кількості наявних у системі матеріальних часток або тіл; крім того, при ідеальних зв'язках з рівнянь (9) автоматично виключаються всі наперед невідомі сили реакцій. Рівняннями Лагранжа 2-го роду, які дають дуже загальний і притому досить простий метод розв'язування задач, широко користуються для вивчення руху різних механічних систем, зокрема в динаміці механізмів і машин, у теорії гіроскопа, у теорії коливань та ін.

Для *неголономної системи*, на яку, крім геометричних зв'язків, що враховуються вибором координат q_i , накладено ще k диференціальних зв'язків, які виражаються рівностями:

$$A_{g0} = \sum_{i=1}^k A_{gi} \dot{q}_i = 0 \quad (g = 1, 2, \dots, k) \quad (10)$$

рівняння Лагранжа другого роду приймають вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{g=1}^k A_{gi} \mu_g \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (11)$$

Рівняння (11) разом з (10) дають можливість визначити s невідомих координат q_i , і k наперед невідомих множників μ_g .

У фізиці особливе значення має та форма рівнянь Лагранжа, яку вони приймають у випадку голономної системи, що знаходиться під дією одних тільки потенційних сил (*консервативні системи*). Якщо ввести функцію Лагранжа (лагранжіан) L , рівну в цьому випадку різниці між кінетичною T і потенційною Π енергіями системи:

$$L = T - \Pi$$

або у випадку узагальнених координат

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T(q_i, \dot{q}_i, t) - \Pi(q_i)$$

Для потенційних сил узагальнена сила $Q_i = - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$, і рівності (9) приймуть

вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (12)$$

Рівняння у формі (12) звичайно і називаються у фізиці рівняннями Лагранжа. Перевага цих рівнянь полягає в тому, що вони дозволяють вивчити рух механічної системи, знаючи для неї одну тільки функцію L , що цілком характеризує систему. Така форма рівнянь має місце не тільки для консервативних систем. Якщо узагальнені сили можна представити через деякий «узагальнений потенціал» $U(q_i, \dot{q}_i)$ у вигляді

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

то рівняння (9) також можна представити у вигляді (12), де $L = T - U$.

Область використання рівнянь (12) виявляється ще більш широкою завдяки їхньому зв'язку з *принципом найменшої дії* Гамільтона. Відповідно до цього принципу, для дійсного руху системи величина

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$$

називається *дією*, і має екстремум, умова існування якого полягає в тому, що функція L повинна задовольняти рівнянням Ейлера, які збігаються з рівняннями (12). Звідси випливає, що рівняння виду (12) справедливі для будь-якої фізичної системи (однорідне середовище, гравітаційне чи електромагнітне поле), яка характеризується відповідною функцією Лагранжа і підкоряється варіаційному принципу, аналогічному принципу найменшої дії. Для середовища або поля, що представляють собою систему з нескінченним числом ступенів свободи, роль узагальнених координат q_i , відіграють такі величини, як зсув частки, щільність, потенціал і т.п., що залежать у загальному випадку від координат x, y, z точок середовища (поля) і від часу; тому для середовища (поля) $q_i = q_i(x, y, z, t)$. Характеристикою системи в цих випадках служить питома (віднесена до одиниці об'єму) функція Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial y} \right)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial q_i}{\partial z} \right)} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (13)$$

Рівняння (13), на відміну від (9) або (12), являють собою систему рівнянь у частинних похідних: число їх дорівнює числу величин q_i .

Рівняння Лагранжа у вигляді (12) справедливі і при рухах зі швидкостями, порівняними зі швидкістю світла, але при цьому у виразі функції Лагранжа L замість кінетичної енергії частки входить величина

$$-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

5.4 Рівняння Лагранжа при різних силах

5.4.1 *Активні сили мають силову функцію.* Силова функція $U(x_1, \dots, z, t)$ після перетворення до узагальнених координат переходить у силову функцію в узагальнених координатах. Іншими словами, узагальнені сили представляються як похідні:

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Рівняння Лагранжа будуть мати вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad \text{або} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial (T+U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T+U)}{\partial q_i} = 0$$

тому що U від q_i не залежить, а значить $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$

Остаточно рівняння руху системи в незалежних координатах здобувають вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (L = T + U) \quad (14)$$

Функція L , яка дорівнює сумі кінетичної енергії і силової функції, називається *функцією Лагранжа*, а рівняння (14) - *рівняннями Лагранжа*.

В окремому випадку, коли активні сили потенційні і зв'язки стаціонарні, існує потенційна енергія $\Pi(q_1, \dots, q_n) = -U(q_1, \dots, q_n)$, тоді функція Лагранжа дорівнює різниці кінетичної і потенційної енергій системи, вираженої через узагальнені координати та узагальнені швидкості:

$$L = T(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - \Pi(q_1, \dots, q_n)$$

5.4.2. *Активні сили мають узагальнену силову функцію.* Сили можуть залежати не тільки від координат і часу, але і від швидкостей. *Узагальненою силовою функцією* називається функція $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$, якщо узагальнені сили системи представляються через цю функцію формулами

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

Рівняння Лагранжа в цьому випадку мають вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i},$$

або

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

де

$$L = T(q, \dot{q}, t) + U(q, \dot{q}, t).$$

Як бачимо, і в цьому, більш загальному випадку, вид рівнянь Лагранжа і структура функції Лагранжа такі ж самі. Узагальнена силова функція $U(q, \dot{q}, t)$ може залежати від узагальнених швидкостей тільки *лінійно* $U = U_0 + U_1$.

Справді, якщо припустити, що в U увійде, наприклад $*q_i^2$, то виявиться, що в Q з'явиться

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} (2\dot{q}_i) = 2\ddot{q}_i,$$

тобто узагальнена сила буде залежати від прискорень. Однак класична механіка обмежується розглядом випадків, коли сили залежать від координат, швидкостей і часу, але не від прискорень.

Прикладом може служити сила Лоренца, яка діє з боку електромагнітного поля на точковий електричний заряд, $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Легко перевірити, що

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{x}},$$

де

$$U = -q\varphi + q(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z).$$

Тут $U(x, y, z, t)$ – скалярний потенціал поля, а $A(x, y, z, t)$ – векторний потенціал. Вони зв'язані з напруженістю \mathbf{E} та індукцією \mathbf{B} залежностями

$$\vec{E} = q \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t} \\ E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t} \\ E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{array} \right.$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \left\{ \begin{array}{l} B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{array} \right.$$

Слід зазначити, що рівняння Лагранжа без зміни форми можуть бути використані для вивчення *відносного* руху. При цьому не потрібно додатково враховувати сили інерції - переносну і Кориоліса. Досить при побудові функції Лагранжа обчислювати абсолютну кінетичну енергію через відносні координати і писати звичайні рівняння Лагранжа.

5.4.3 Сили дисипативні. Сили опору, які залежать від швидкостей точок механічної системи і спричиняють зменшення її повної механічної енергії, називаються *дисипативними* силами. Якщо ці сили залежать лінійно від швидкостей точок, то $\mathbf{F}_k = -\alpha_k \mathbf{v}_k$, якщо $\alpha_k > 0$. У такому випадку узагальненій координаті q_i , відповідає узагальнена дисипативна сила

$$Q_i^d = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N a_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^N a_k \vec{v}_k \cdot \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

де

$$\frac{\partial \vec{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial \dot{q}_i}$$

Тоді маємо

$$Q_i^d = - \sum_{k=1}^N \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{a_k v_k^2}{2} = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{k=1}^N \frac{a_k v_k^2}{2}$$

Остаточно одержимо

$$Q_i^d = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad \text{де } R = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k v_k^2.$$

Функція R називається *дисипативною* функцією. Це функція узагальнених координат і узагальнених швидкостей механічної системи, похідні якої по узагальнених швидкостях, узяті зі зворотним знаком, рівні відповідним узагальненим силам. При наявності узагальнено-потенційних сил і сил, що виявляють дисипативну функцію R , рівняння Лагранжа мають вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

де $L = T + \Pi = T + U_0 + U_1$.

Для з'ясування фізичного змісту дисипативної функції обчислимо потужність дисипативних сил (їхню роботу в одиницю часу):

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^d \cdot \vec{v}_k = - \sum_{k=1}^N a_k \vec{v}_k \cdot \vec{v}_k = - \sum_{k=1}^N a_k v_k^2 = -2R.$$

Якщо на систему діють зовнішні потенційні сили з потенційною енергією Π та дисипативні сили, то зміна кінетичної енергії буде

$$dT = -d\Pi^i - d\Pi^c + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^d \cdot d\vec{r}_k.$$

Відкіля з урахуванням потужності дисипативних сил

$$\frac{d}{dt} (T + \Pi^i + \Pi^c) = -2R.$$

Швидкість зменшення повної механічної енергії системи дорівнює подвоєній дисипативній функції (механічна енергія перетворюється в енергію теплового руху молекул). Цим твердженням розкривається фізичний зміст дисипативної функції.

Іншими прикладами дисипативних сил є:

a) сила опору, пропорційна, наприклад, квадрату швидкості тіла щодо середовища, $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}^2$ (реалізується при досить великих швидкостях);

б) постійна сила тертя ковзання тіла по поверхні іншого тіла, $\mathbf{F} = -kN \mathbf{v}/v$, де N - величина нормальної реакції твердого тіла на тіло, що рухається.

5.4.4 *Гіроскопічні сили*. Гіроскопічними називаються сили, які лінійно залежать від швидкостей

$$Q_i^r = \sum_{k=1}^N \gamma_{ik} \dot{q}_k, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

де $\gamma_{ik} = -\gamma_{ki}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – функції координат і часу (завжди $\gamma_{ii} = 0$). Відмінною ознакою цих сил є рівність нулю їхньої потужності $Q_i^r = 0$.

5.5 Закони збереження узагальненого імпульсу та узагальненої енергії

а) У випадку дії потенційних або узагальнено-потенційних сил введемо такі обмеження, при яких праві частини рівнянь дорівнюють нулю, внаслідок чого вихідні рівності інтегруються.

Рівняння Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

тоді

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0$$

Отже, закон збереження узагальненого імпульсу

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \text{const}$$

і узагальненої енергії

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

тоді

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \text{const}$$

Узагальнена енергія зберігається, якщо функція Лагранжа явно від часу не залежить і всі дисипативні узагальнені сили відсутні. Наявність гіроскопічних сил не є перешкодою для закону збереження енергії, тому що вони не виконують роботи.

Закон збереження узагальненої енергії взагалі не збігається з законом збереження повної механічної енергії.

Закон збереження узагальненого імпульсу включає як окремі випадки закони збереження: 1) ньютонівської кількості руху (і її проєкцій); 2) ньютонівського моменту кількості руху (і його проєкцій).

Математично обидва закони збереження узагальнених мір руху - узагальненого імпульсу та узагальненої енергії - являють собою перші інтеграли рівнянь руху Лагранжа, тобто деякі функції узагальнених координат і швидкостей, що зберігають постійні значення при русі системи (в силу рівнянь Лагранжа).

б) Якщо функція Лагранжа не залежить явно від часу

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

і всі дисипативні сили (зовнішні і внутрішні) відсутні

$$Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

то зберігається *узагальнена енергія* системи у вигляді

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = E$$

в) якщо при виконанні попередніх умов

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

функція Лагранжа представляється у вигляді $L = L_2 + L_1 + L_0$ і зв'язки системи можливо *нестационарні*, то закон збереження узагальненої енергії приводиться до виду

$$L_2 - L_0 = E$$

або

$$T_2 - T_0 + \Pi = E$$

г) якщо, як і раніше, L не залежить явно від часу і всі дисипативні сили відсутні

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

але існує потенційна енергія $\Pi(q_1, \dots, q_n)$, а зв'язки *стационарні*, то закон збереження узагальненої енергії вироджується в закон збереження *повної механічної енергії*

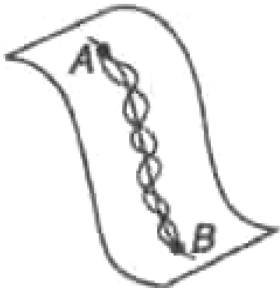
$$T + \Pi = E.$$

Дійсно, у цьому випадку $T = T_2$, $\Pi = \Pi(q_1, \dots, q_n)$, $T_1 = 0$, а значить

$$L_2 - L_0 = T_2 - (-\Pi) = T + \Pi$$

5.6 Одержання рівнянь Лагранжа по варіаційному принципу Гамільтона – Остроградського

Після Ньютона було знайдено багато інших способів побудови динаміки як науки. В основі одного з них лежить варіаційний принцип Гамільтона — Остроградського. Розглянемо цей принцип для випадку голономної механічної системи з ідеальними утримуючими зв'язками, коли активні сили потенційні та стаціонарні.



Спочатку викладемо зміст принципу, а потім покажемо, що рівняння Лагранжа побудовані по цьому принципу.

Як просту ілюстрацію розглянемо рух матеріальної точки по заданій поверхні при відсутності тертя.

Нехай АВ - траєкторія дійсного руху, у якому узагальнені координати - деякі функції часу $q(t)$ (пишемо одну координату для стислості; маємо на увазі їх усі) і узагальнені швидкості $\dot{q}(t)$. Цей рух відбувається між положеннями А та В за час від моменту t_1 до моменту t_2 .

Можна уявити ще й інші рухи точки між тими ж положеннями А і В за той же час від моменту t_1 до моменту t_2 , однак ці рухи природою не реалізуються. Ці обхідні рухи, як і дійсний рух, погоджені зі зв'язками (у прикладі усі вони відбуваються по поверхні) і є нескінченно близькими до дійсного. Тому в будь-який момент руху t , $t_1 \leq t \leq t_2$ координати і швидкості обхідних рухів відрізняються від координат і швидкостей дійсного руху нескінченно мало:

$$\tilde{q}(t) = q(t) + \delta q \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{q}}(t) = \dot{q}(t) + \frac{d}{dt} \delta q. \quad (16)$$

Тут δq - збільшення координати q при фіксованому t , а $\dot{\tilde{q}} - \dot{q} = \delta \dot{q}$ - збільшення швидкості \dot{q} теж при фіксованому t . При цьому безперервні функції δq_i можна вибирати зовсім довільно, тому що узагальнені координати q_i незалежні.

Розглянемо далі інтеграл від функції Лагранжа при дійсному русі

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt, \quad (17)$$

який називається *дією по Гамільтону*. Для обхідного руху дія

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt, \quad (18)$$

Для будь-якої голономної системи з ідеальними утримуючими зв'язками і потенційними активними силами принцип Гамільтона - Остроградського

стверджує: значення дії для дійсного руху менше, ніж його значення для будь-якого обхідного руху:

$$\tilde{S} > S.$$

Інакше: значення дії в дійсному русі мінімальне. Необхідною умовою мінімуму, як звичайно, є рівність нулю головної лінійної частини різниці, у даному випадку - різниці $\tilde{S} - S$. Головна лінійна частина цієї різниці називається першою варіацією дії і позначається σS

$$\delta S = \text{л.ч.}(\tilde{S} - S).$$

Отже, для дійсного руху дія мінімальна і його перша варіація звертається в нуль:

$$0 = \text{л.ч.}(\tilde{S} - S) = \text{л.ч.} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \right\},$$

або

$$0 = \text{л.ч.} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \{L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)\} dt \right\}.$$

Розкладаючи в ряд і обмежуючись лінійною частиною, одержуємо

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt. \quad (19)$$

Тому що операція варіювання σ і операція диференціювання за часом d/dt — незалежні одна від одної, то послідовність їхнього виконання змінимо:

$$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q. \quad (20)$$

Тому другий інтеграл у (19) можна обчислити по частинах

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d \delta q.$$

покладаючи $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = u$ і $d \delta q = d v$,

знайдемо за формулою $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt. \quad (21)$$

Проінтегрована частина випадає, тому що за умовою варіювання

$$\delta q|_{t_1} = 0, \delta q|_{t_2} = 0:$$

у момент t_1 і t_2 положення системи в будь-якому обхідному русі збігається з положеннями А і В у дійсному русі. Підставляючи (19) і (21), одержимо

$$0 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt. \quad (22)$$

Оскільки множник δq – довільна функція, то з (22) випливає

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Ми переконалися, що рівняння Лагранжа дійсно побудовані по варіаційному принципу Гамільтона — Остроградського. Доказ не відрізняється від наведеного також і у тому випадку, коли розглядається система з довільним числом незалежних узагальнених координат q_1, \dots, q_n .

Контрольні питання:

1. Які зв'язки називають голономними та не голономними?
2. Які зв'язки ми називаємо утримуючими і неутримуючими?
3. Які зв'язки ми називаємо стаціонарними і нестаціонарними?
4. Які переміщення ми називаємо дійсними, можливими та віртуальними?
5. Що уявляє собою рівняння Лагранжу першого роду?
6. Що уявляє собою рівняння Лагранжу другого роду?
7. Принцип найменшої дії Гамільтона.

Тема 6 Вільні та вимушені коливання

6.1 Вільні гармонічні коливання

Досить розповсюдженим типом руху механічних систем виявляються так звані *малі коливання*, коли система коливається поблизу свого положення стійкої рівноваги. Розгляд цих рухів ми почнемо з найбільш простого випадку, коли система має всього один ступінь свободи.

Стійкій рівновазі відповідає таке положення системи, у якому її потенційна енергія $U(q)$ має мінімум; відхилення від такого положення призводить до виникнення сили $F = -dU/dq$, яка прагне повернути систему в попереднє положення. Позначимо відповідне значення узагальненої координати за допомогою q_0 . При малих відхиленнях від положення рівноваги в розкладанні різниці $U(q) - U(q_0)$ по ступенях $q - q_0$ досить зберегти перший незникаючий член. У загальному випадку таким є член другого порядку

$$U(q) - U(q_0) = (q - q_0)^2 k / 2$$

де k — додатний коефіцієнт. Будемо надалі відраховувати потенційну енергію від її мінімального значення (тобто покладемо $U(q_0) = 0$) і введемо позначення

$$x = q - q_0 \quad (1)$$

для відхилення координати від її положення рівноваги. Таким чином,

$$U(x) = kx^2/2 \quad (2)$$

Кінетична енергія системи з одним ступенем свободи має в загальному випадку вид

$$\frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q) \dot{x}^2$$

У цьому наближенні досить замінити функцію $a(q)$ просто її значенням при $q = q_0$. Увівши для стислості позначення

$$a(q_0) = m$$

одержимо остаточно наступний вираз для лагранжевої функції системи, яка робить одномірні малі коливання:

$$L = mx^2/2 - kx^2/2 \quad (3)$$

Відповідне цієї функції рівняння руху стверджує

$$m \ddot{x} + kx = 0 \quad (4)$$

або

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (5)$$

де введено позначення

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (6)$$

Два незалежних рішення лінійного диференціального рівняння (5):

$\cos \omega t$ $\sin \omega t$ так що його загальне рішення

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \quad (7)$$

Цей вираз може бути записаний також і у вигляді

$$x = A \cos (\omega t + \alpha) \quad (8)$$

Оскільки $\cos (\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$, то порівняння з (7) показує, що довільні сталі a і α зв'язані з постійними c_1 і c_2 співвідношеннями

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{tg } \alpha = -c_2 / c_1 \quad (9)$$

Таким чином, поблизу положення стійкої рівноваги система робить гармонійний коливальний рух. Коефіцієнт A при періодичному множнику в (8) називається *амплітудою* коливань, а аргумент косинуса — їхньою *фазою*; α є початкове значення фази, що залежить від вибору початку відліку часу. Величина ω називається *циклічною частотою* коливань; у теоретичній фізиці її називають звичайно просто *частотою*.

Частота є основною характеристикою коливань, яка не залежить від початкових умов руху. Відповідно до формули (6) вона цілком визначається властивостями механічної системи як такої. Підкреслимо, однак, що ця властивість частоти зв'язана з передбачуваною малістю коливань і зникає при переході до більш точних наближень. З математичної точки зору вона зв'язана з квадратичною залежністю потенційної енергії від координати.

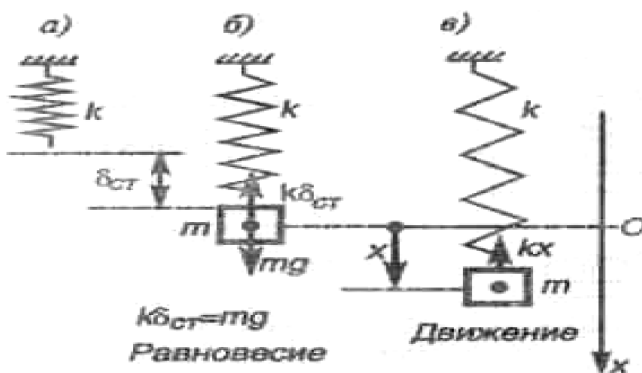
Енергія системи, що робить малі коливання, буде

$$E = mx^2/2 + kx^2/2 = m/2 (*x^2 + \omega^2 x^2)$$

Або підставивши сюди (8),

$$E = 1/2 m\omega^2 A^2 \quad (10)$$

Розглянемо на моделі коливання тіла маси m , підвішеного на пружині з коефіцієнтом пружності k . Опір рухові відсутній, масою пружини зневажаємо (рис. 1).



$$mg = k\delta \quad (11)$$

Рис.1

Якщо вісь x направити вниз, а початок координат помістити на рівні положення рівноваги тіла, то сума проєкцій на вісь x сил, які

діють на коливне тіло, дорівнює $mg - k(x + \delta_{ст})$, і згідно (11) становить $-kx$. Рівняння руху тіла буде

$$m \ddot{x} = -kx$$

або поділивши на m

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \left(\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \quad (12)$$

Таким чином, під дією відновлюючої сили $-kx$, спрямованої до положення рівноваги, тіло робить гармонійні коливання. Період коливань

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}}$$

На рис. 2 показано розгорнення гармонійних коливань (залежність x

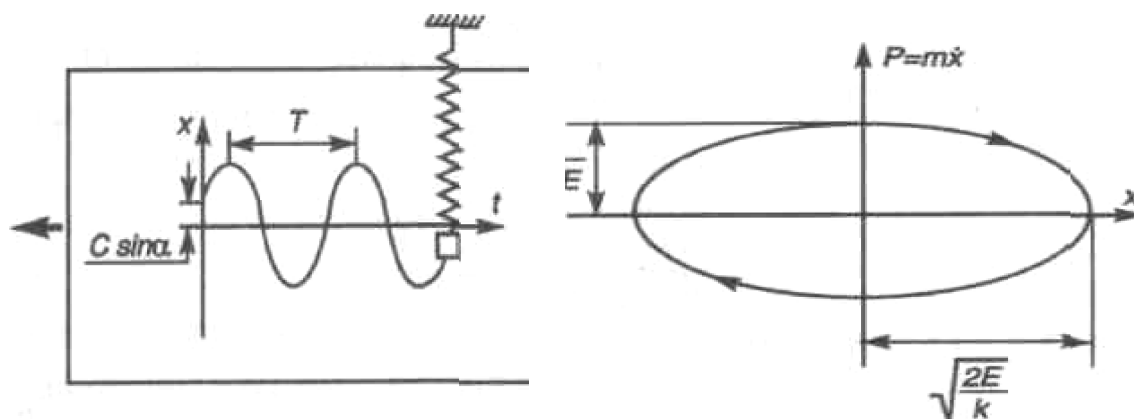


Рис.2

від t згідно (8)). Паралельно праворуч розміщений так називаний фазовий портрет: траєкторія, яку описує точка на площині "координата - імпульс", тобто на площині (x, p) , де $p = m \dot{x}$. Рівняння фазової траєкторії одержимо з закону збереження енергії

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = E$$

або

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} x^2 = E,$$

відкіля

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{2E}{k}}\right)^2} + \frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} = 1. \quad \text{Отже, фазова траєкторія – еліпс.}$$

6.2 Згасаючі коливання

Дотепер ми завжди мали на увазі, що рух тіл відбувається в порожнечі і впливом середовища на рух можна зневажити. У дійсності при русі тіла в середовищі останнє чинить опір, який прагне сповільнити рух. Енергія тіла, що рухається, при цьому зрештою переходить у тепло - дисипується.

Процес руху в цих умовах уже не є чисто механічним процесом, а його розгляд вимагає врахування руху самого середовища і внутрішнього теплового стану як середовища, так і тіла. Зокрема, вже не можна стверджувати в загальному випадку, що прискорення тіла, яку рухається, є функцією лише від його координат і швидкості в даний момент часу, тобто не існує рівнянь руху в тім змісті, який вони мають у механіці. Таким чином, задача про рух тіла в середовищі вже не є задачею механіки.

Існує, однак, визначена категорія випадків, коли рух у середовищі може бути приблизно описаний за допомогою механічних рівнянь руху шляхом введення в них визначених додаткових членів. Сюди відносяться коливання з частотами, малими в порівнянні з частотами, характерними для внутрішніх дисипативних процесів у середовищі. При виконанні цієї умови можна вважати, що на тіло діє «сила тертя», яка залежить (для заданого однорідного середовища) тільки від швидкості.

Якщо до того ж ця швидкість досить мала, то можна розкласти силу тертя по її ступенях. Нульовий член розкладання дорівнює нулю, оскільки на нерухоме тіло не діє ніякої сили тертя, і перший незникаючий член пропорційний швидкості. Таким чином, узагальнену силу тертя $f_{\text{тр}}$, що діє на систему, яка робить одномірні малі коливання з узагальненою координатою x , можна написати у виді

$$f_{\text{тр}} = -rv = -r \dot{x}$$

де (r — позитивний коефіцієнт, який називається коефіцієнтом опору, а знак мінус показує, що сила діє у бік, протилежний швидкості). Додаючи цю силу в праву сторону рівняння руху, одержимо:

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} \quad (13)$$

Розділимо (13) на m і введемо позначення

$$k/m = \omega_0^2 \quad r/m = 2\beta \quad (14)$$

де ω_0 — частота вільних коливань системи при відсутності тертя. Величина β називається показником або *декрементом загасання*.

Таким чином, одержимо рівняння

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (15)$$

Дотримуючись загальних правил рішення лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами, покладемо $x = e^{rt}$ і знаходимо для r характеристичне рівняння

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

відкіля

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Загальне рішення рівняння (15) буде

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Тут варто розрізнити два випадки. Якщо $\beta < \omega_0$, то рішення може бути комплексним або представлене у виді

$$x = A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha) \quad (16)$$

де A і α – сталі величини, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Рух, що виражається цими формулами, являє собою так називані *загасаючі коливання* (рис.3).

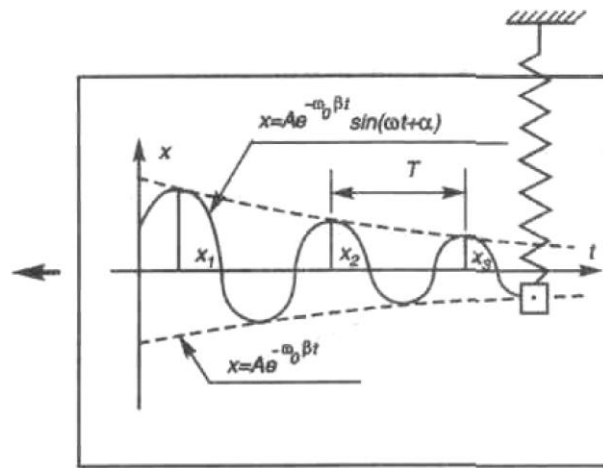


Рис.3

Його можна розглядати як гармонійні коливання з амплітудою, що експоненційно зменшується. Швидкість зменшення амплітуди визначається показником β , а «частота» ω коливань менше частоти вільних коливань під час відсутності тертя; при $\beta < \omega_0$ різниця між ω і ω_0 — другого порядку малості. Зменшення частоти при наявності тертя очевидно, оскільки тертя взагалі затримує рух.

Якщо $\beta < \omega_0$, то за час одного періоду $2\pi/\omega$ амплітуда загасаючого коливання майже не міняється. У цьому випадку має сенс розглядати середні (за період) значення квадратів координати і швидкості, зневажаючи при усередненні зміною множника $e^{-\lambda t}$. Ці середні квадрати, мабуть, пропорційні $e^{-2\beta t}$. Тому й енергія системи в середньому зменшується за законом

$$E = E_0 e^{-2\beta t} \quad (17)$$

де E_0 – початкове значення енергії.

Якщо $\beta > \omega_0$, рух складається з монотонного зменшення x в асимптотичному наближенні до положення рівноваги без коливань, і такий процес називається *аперіодичним загасанням*.

$$x = (c_1 + c_2) e^{-\beta t} \quad (18)$$

При цьому $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ без зміни знаку, або змінюючи знак тільки один раз (рис.4). Якщо $\beta = 0$, то сила опору відсутня, а у випадку $\beta < 0$ сила опору негативна.

Для системи з багатьма ступенями свободи узагальнені сили тертя, що відповідають координатам x_i є лінійними функціями швидкостей і можуть бути написані у виді похідних

$$F_{\text{тр}} = - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (19)$$

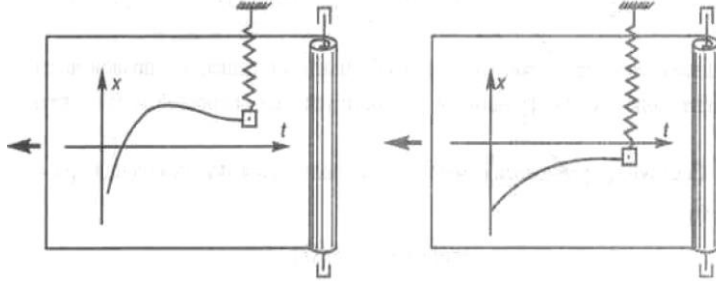


Рис.4

від квадратичної форми

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{i,k} \dot{x}_i \dot{x}_k \quad (20)$$

яку назвемо *дисипативною функцією*.

Сили (20) повинні бути додані до правої сторони рівнянь Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_i} \quad (21)$$

Дисипативна функція має сама по собі важливий фізичний зміст — нею визначається інтенсивність дисипації енергії в системі. Оскільки F -квадратична функція швидкостей, то в силу теореми Ейлера про однорідні функції сума в правій стороні рівності дорівнює $2F$. Таким чином,

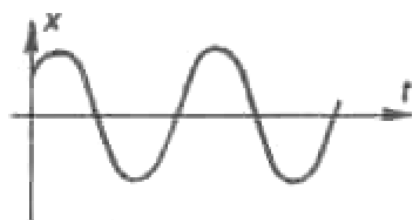
$$\frac{dE}{dt} = - 2F \quad (22)$$

тобто швидкість зміни енергії системи дається подвоєною дисипативною функцією. Тому, що дисипативні процеси приводять до зменшення енергії, то повинно бути завжди $F > 0$, тобто квадратична форма (20) істотно позитивна. При цьому дійсні корені неодмінно негативні, а комплексні мають негативну частину. У протилежному випадку координати і швидкості, а з ними й енергія системи експоненційно зростали б згодом, тим часом як наявність дисипативних сил повинно приводити до зменшення енергії.

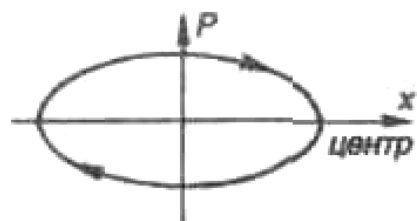
Приведемо на рис.5 набір графіків коливального руху і фазових траєкторій для різних значень β , де на малюнку ліворуч показані тимчасові розгорнення руху при опорі середовища, пропорційному швидкості коливальних, а праворуч – фазові траєкторії цих рухів при різних можливих значеннях β .

Розгортка руху

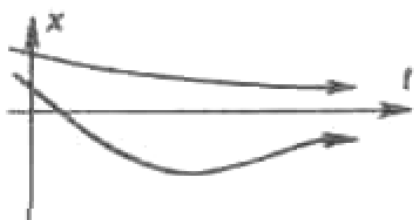
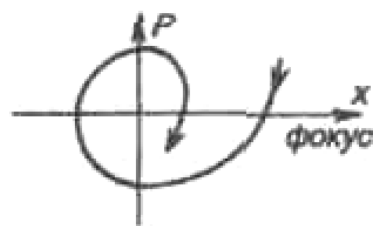
Фазові траєкторії



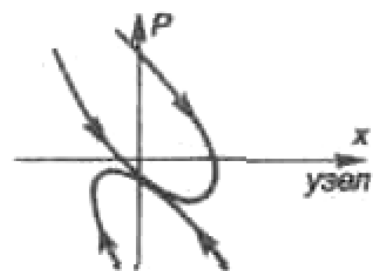
$$\underline{\beta=0}$$



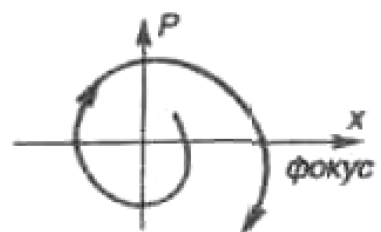
$$\underline{0 < \beta < 1}$$



$$\underline{\beta \geq 1}$$



$$\underline{-1 < \beta < 0}$$



$$\underline{\beta < -1}$$

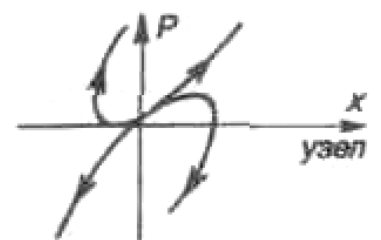


Рис.5

6.3 Вимушені коливання при наявності тертя

Додавши в правій стороні рівняння згасаючих коливань зовнішню силу $F_0 \cos \omega t$, одержимо рівняння руху у вигляді

$$m \ddot{x} = -kx - r \dot{x} + F_0 \cos \omega t$$

Розділимо це рівняння на m

$$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = f \cos \omega t$$

та позначемо $r/m=2\beta$, $k/m=\omega_0^2$, $F_0/m=f$ і одержимо

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos \omega t \quad (23)$$

Рішення цього рівняння зручно знаходити в комплексній формі, для чого пишемо в правій частині $e^{i\gamma t}$ замість $\cos \gamma t$:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f e^{i\gamma t}$$

Частковий інтеграл шукаємо у вигляді

$$x = B e^{i\gamma t}$$

і знаходимо для B :

$$B = f / m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\beta\gamma) \quad (24)$$

Представивши B в вигляді $b e^{i\delta}$, одержимо для b і δ

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\beta^2\gamma^2}} \quad \text{tg } \delta = \frac{2\delta\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad (25)$$

Нарешті, відокремивши речовинну частину від виразу

$$B e^{i\gamma t} = b e^{i(\gamma t + \delta)}$$

одержимо частковий інтеграл рівняння (23), а додавши до нього загальне рішення рівняння без правої частини, яку ми напишемо для визначеності у випадку ($\omega_0 > \beta$), одержимо остаточно:

$$x = a e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta) \quad (26)$$

Перший доданок експоненційно зменшується згодом, так що через досить великий проміжок часу залишається тільки другий член:

$$x = b \cos(\gamma t + \delta) \quad (27)$$

Вираз (25) для амплітуди b вимушеного коливання хоча і зростає при наближенні частоти γ до ω_0 , але не звертається в нескінченність. При заданій амплітуді сили f амплітуда коливання максимальна при частоті

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

При $\beta < \omega_0$ це значення відрізняється від ω_0 лише на величину другого порядку малості.

Розглянемо область поблизу резонансу. Покладемо

$$\gamma = \omega_0 + \varepsilon$$

де ε -мала величина; будемо також вважати, що $\beta < \omega_0$. Тоді в (24) можна приблизно замінити:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0 \varepsilon; \quad 2i\beta\gamma \approx 2i\beta\omega_0$$

тоді

$$b = -f / 2m(\varepsilon - i\beta)\omega_0 \quad (28)$$

$$b = \frac{f}{2m\omega_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}} \quad \text{tg} \delta = \beta / \varepsilon \quad (29)$$

Відзначимо характерну рису ходу зміни різниці фаз δ між коливанням і силою при зміні частоти останньої. Ця різниця завжди негативна, тобто коливання «запізнюється» щодо зовнішньої сили. Вдалині від резонансу, з боку $\gamma < \omega_0$ δ прагне до нуля, а з боку $\gamma > \omega_0$ - до значення $-\pi$. Зміна δ від нуля до $-\pi$ відбувається у вузькій (ширини $\approx \beta$) області частот, близьких до ω_0 ; через значення $-\pi/2$ різниця фаз проходить при $\gamma = \omega_0$. Відзначимо в цьому зв'язку, що під час відсутності тертя зміна фази вимушеного коливання на величину π відбувається стрибком при $\gamma = \omega_0$ (другий член у (26) змінює знак); наявність тертя «розмазує» цей стрибок (рис.6)

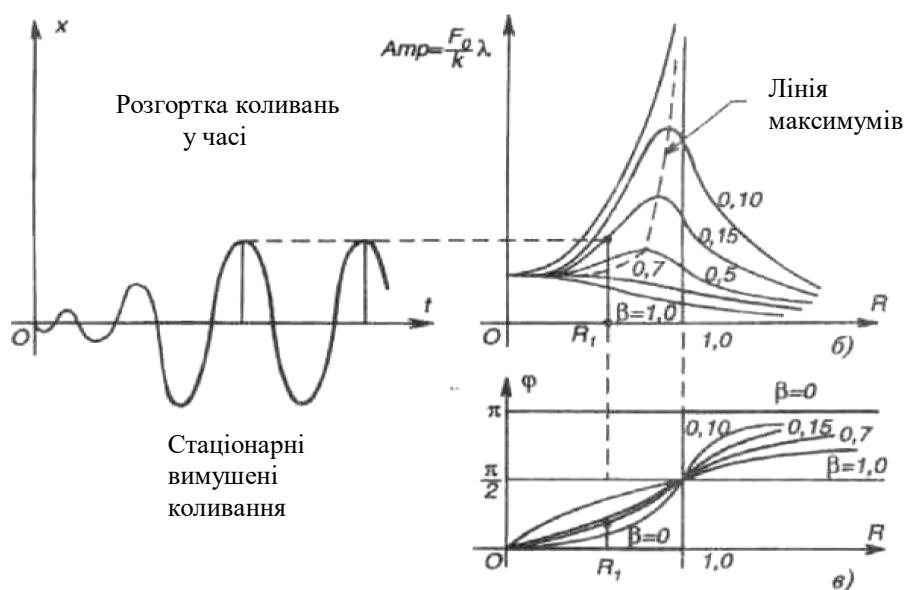


Рис.6

При встановленому русі, коли система робить вимушені коливання (27), її енергія залишається незмінною. У той же час система безупинно поглинає (від джерела зовнішньої сили) енергію, яка дисипується завдяки наявності тертя. Позначимо за допомогою $I(\gamma)$ кількість енергії, яка поглинається в середньому в одиницю часу, як функцію частоти зовнішньої сили. Тоді

$$I(\gamma) = 2F$$

де F -середнє (по періоду коливання) значення дисипативної функції. Для одномірного руху вираз дисипативної функції зводиться до наступного

$$F = \beta m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

Середнє за часом значення квадрата синуса дорівнює $1/2$, тому

$$I(\gamma) = \beta m b^2 \gamma^2 \quad (30)$$

Поблизу резонансу, підставляючи амплітуду коливання з (29), маємо:

$$I(\varepsilon) = f^2 \beta / 4m(\varepsilon^2 + \beta^2) \quad (31)$$

Такий вид залежності поглинання від частоти називається *дисперсійним*. Напівшириною резонансної кривої (рис. 7) називають значення Δp , при якому величина $I(\varepsilon) = A^2/2$ зменшується вдвічі в порівнянні з її максимальним значенням при ω_0 . З формули (31) видно, що в даному випадку ця ширина збігається з показником загасання β .

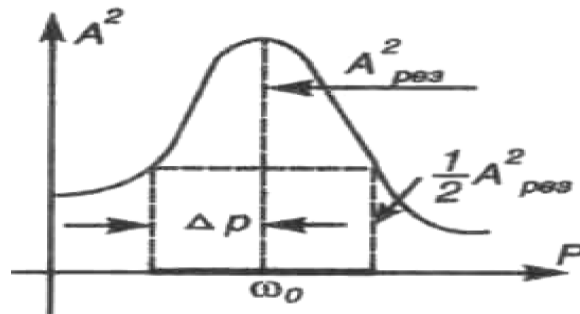


Рис.7

Висота максимуму

$$I(\omega_0) = f^2/4m\beta$$

обернено пропорційна β . Таким чином, при зменшенні показника загасання резонансна крива стає вужчою і вищою, тобто її максимум стає більш гострим. Площа ж під резонансною кривою залишається при цьому незмінною. Остання дається інтегралом

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon$$

Оскільки $I(\varepsilon)$ швидко зменшується при збільшенні ε , так що область великих ε усе рівно не істотна, можна при інтегруванні писати $I(\varepsilon)$ у виді (31), а нижню межу замінити на $-\infty$. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \beta}{4m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \beta^2} = \frac{\pi f^2}{4m} \quad (32)$$

Контрольні питання:

1. Який рух називають згасаючими коливаннями?
2. Яку функцію називають дисипативною?
3. Яким процесом називається аперіодичним загасанням?
4. Фізичний зміст дисипативної функції.

Тема 7 Задача двох тіл при пружному зіткненні

7.1 Пружне зіткнення часток

Основою експериментальних методів сучасної ядерної фізики є вивчення зіткнень і розсіювання часток. Дві частки, рухаючись здалеку (теоретично - з нескінченності), зближуються, взаємодіють і знову розходяться, не змінюючи внутрішнього стану. Це і є пружне зіткнення часток. Воно вивчається на основі законів збереження енергії і кількості руху.

У системі центра мас (ц-системі), яка поступально рухається, зіткнення двох часток виглядає простіше всього, тому що кількість руху ізольованої системи дорівнює нулю, а значить кількості руху цих часток залишаються рівними по величині і протилежними за напрямком, хоча і змінюються в процесі руху.

Величини в ц-системі будемо позначати індексом 0; у лабораторній системі (л-системі) - без індексу. За законом збереження енергії в ц-системі

$$\frac{p_{01}^2}{2m_1} + \frac{p_{02}^2}{2m_2} = \frac{p'_{01}{}^2}{2m_1} + \frac{p'_{02}{}^2}{2m_2} \quad \text{и (1)}$$

де в лівій частині p_{01} , p_{02} - початкові імпульси до зіткнення, а в правій частині p'_{01} , p'_{02} - кінцеві імпульси після зіткнення. Оскільки початкові імпульси часток однакові по величині ($p_{01} = p_{02}$) і кінцеві теж однакові ($p'_{01} = p'_{02}$), те з закону збереження енергії (1) випливає, що імпульси до і після зіткнення однакові: $p_{01} = p_{02} = p'_{01} = p'_{02}$. Звідси випливає: $v_{01} = v'_{01}$ і $v_{02} = v'_{02}$. Таким чином, при пружному зіткненні двох часток їхні швидкості (у ц-системі) тільки змінюють напрямок; кінцеві значення швидкостей по величині такі ж, як і початкові (окремо для часток). Швидкості часток у ц-системі до зіткнення визначаються формулами

$$\vec{v}_{01} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0, \quad \vec{v}_{02} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \quad (2)$$

де $v_0 = v_{01} - v_{02}$, v_1 , v_2 - швидкості в лабораторній системі.

Якщо \vec{n} — одиничний вектор у напрямку швидкості першої частки після зіткнення, то, відповідно до викладеного вище

$$\vec{v}'_{01} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \vec{n}, \quad \vec{v}'_{02} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \vec{n} \quad (3)$$

Напрямок \vec{n} залежить від характеру взаємодії часток. Цим вичерпується аналіз зіткнення двох часток у ц-системі на основі законів збереження. Перейдемо в л-систему. До останніх формул додамо швидкість центра мас

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Одержимо

$$\vec{v}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4)$$

$$\vec{v}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \vec{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Множачи на m_1 і m_2 відповідно, перепишемо формули (4) для імпульсів

$$\vec{p}'_1 = \mu v_0 \vec{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2), \quad (5)$$

$$\vec{p}'_2 = -\mu v_0 \vec{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2).$$

де

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - приведена маса. Результат взаємодії часток представимо

графічно на імпульсній діаграмі. Будуємо окружність радіуса μv_0 і відкладаємо вектори

$$\vec{AO} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2), \quad \vec{OB} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

Якщо вектор $OC = \mu v_0 \vec{n}$ визначає напрямок руху частки m_1 після зіткнення (у ц-системі), то вектори AC і CB визначають імпульси p_1' і p_2' часток у л-системі після зіткнення. Заданим значенням p_1 і p_2 відповідають фіксовані положення точок A і B і деяке значення радіуса. Положення точки C може

бути довільним на окружності - у залежності від характеру взаємодії точок .

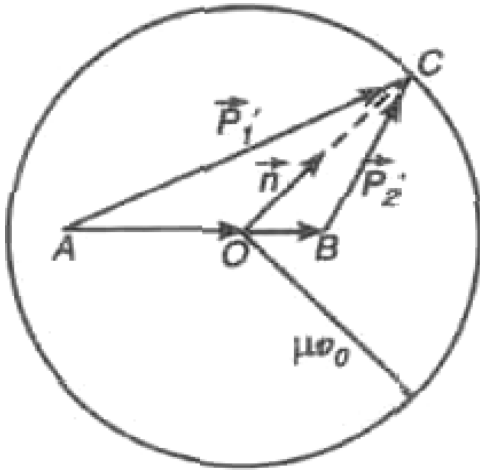


Рис.1

7.2 Рух α -частки в кулонівському полі ядра.

Формула Резерфорда для розсіювання часток.

7.2.1 У 1911 р. англійський фізик Резерфорд встановив ядерну модель будови атома. Здійснювалось "зондування" атома потоком α -частинок великої швидкості. Виявлено скривлення траєкторії α -частинок, їхнє *розсіювання*. Дослідження характеру розсіювання підтвердило існування в центрі атома "точкового" позитивно зарядженого ядра.

Розглянемо спочатку задачу про визначення траєкторії однієї α -частки, а потім встановимо закон розсіювання пучка часток (формулу Резерфорда). Маса α -частки позначимо m , її заряд дорівнює $2e > 0$ (e - абсолютна величина елементарного заряду, рівного заряду електрона); заряд ядра Ze , де Z - порядковий атомний номер елемента. Сила відштовхування α -частки від нерухомого ядра

$$F = k \frac{2Ze^2}{r^2}$$

Скористаємося формулою Біне, підставивши в неї вираз для F

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -k \frac{2e^2 Z}{mc^2}. \quad (6)$$

Зробивши інтегрування одержимо

$$\frac{1}{r} = -A + A_1 \cos\varphi + A_2 \sin\varphi, \quad (7)$$

де

$$A = \frac{2ke^2 Z}{mc^2}.$$

Постійні інтегрування визначаємо по початкових умовах: (α -частка на нескінченності має швидкість v і її прицільна відстань дорівнює l (рис.2), тобто



Рис.2

1) при $\varphi = \pi$, $r = \infty$

2) при $\varphi = \pi$, $1/r \sin \varphi = 1/l$.

По першій умові $0 = -A - A_1$, відкіля $A_1 = -A$. Тому формулу (7) перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{r \sin \varphi} = -A \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} + A_2 = -A \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + A_2.$$

По другій умові $1/l = A_2$ і остаточно

$$\frac{1}{r} = -A(1 + \cos \varphi) + \frac{1}{l} \sin \varphi. \quad (8)$$

Це рівняння траєкторії α -частки визначає гіперболу виду

$$r = p / (-1 + e \cos \varphi)$$

Для подальшого аналізу важливим є визначення кута розсіювання θ . Маючи на увазі в (8) $\varphi = \theta$ і $r = \infty$, знаходимо

$$0 = -A(1 + \cos \theta) + \frac{1}{l} \sin \theta,$$

відкіля

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{1}{Al},$$

або

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mc^2}{2ke^2Zl}.$$

Постійна площ дорівнює величині моменту початкової швидкості α -частки щодо точки O , у якій знаходиться ядро, тобто $c = vt$. Остаточно одержимо

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{mv^2l}{2ke^2Z}. \quad (9)$$

Кут розсіювання θ залежить від маси і швидкості частки, її заряду, прицільної відстані і заряду ядра.

7.2.2. Оскільки простежити за рухом однієї мікрочастинки практично неможливо, знайдене співвідношення безпосередньо не використовується. На практиці доступно вивченню розсіювання пучків часток, коли вони досить розріджені та однорідні по перетині (хоча в дослідах Резерфорда потік α -часток направлявся на металеву плівку) (рис.3).

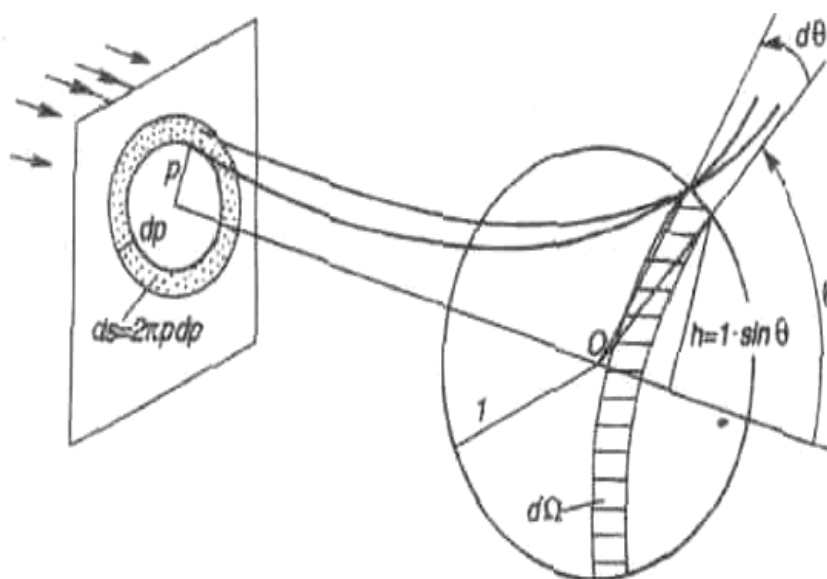


Рис.3

Характеристикою розсіювання, доступною для вимірювання, є ефективний диференціальний перетин розсіювання

$$d\sigma = d / n$$

де d - число часток, що розсіюються в одиницю часу на кути, які лежать в інтервалі між θ і $\theta + d\theta$, n - число часток, що проходять в одиницю часу через одиницю площі поперечного переріза пучка (пучок передбачається однорідним в перетині).

Обчислимо $d\sigma$. Тому, що частки розподілені рівномірно по перетині, то d пропорційно площі кільця з радіусами ρ і $\rho + d\rho$, тоді $dN = 2\pi\rho d\rho$, отже

$$d\sigma = 2\pi \rho d\rho$$

$$d\sigma = 2\pi \rho(\theta) \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\theta.$$

Звичайно $d\rho/d\theta < 0$, тому беремо по модулю. Експериментально розсіювання спостерігається щодо тілесного кута $d\Omega$, а не плоского кута $d\theta$. Тілесний кут вимірюється площею смужки на сфері одиничного радіуса $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$. Тому

$$d\sigma = \frac{\rho(\theta)}{\sin \theta} \left| \frac{d\rho}{d\theta} \right| d\Omega \quad (10)$$

Прицільна відстань ρ визначається формулою (9), де вона позначена буквою l

$$\rho = \frac{2ke^2Z}{mv^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}; \quad \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{2ke^2Z}{mv^2} \cdot \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Підстановка цих значень у (10) дозволяє одержати

$$d\sigma = \left(\frac{ke^2Z}{mv^2} \right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}. \quad (11)$$

Це і є формула Резерфорда, яка визначає ефективний перетин розсіювання. Формула Резерфорда зіграла видатну роль в науці. На її підставі вперше встановлена планетарна модель атома, наявність в атомах ядер, вона дозволяє визначити заряд будь-якого ядра атома, якщо відомий заряд хоча б одного ядра, тому що

$$\frac{Z_2^2}{Z_1^2} = \frac{d\sigma_2}{d\sigma_1}.$$

Ефективний перетин однаковий як для кулонівської сили відштовхування, так і тяжіння.

Контрольні питання:

1. Яку ядерну модель будови атома встановив Резерфорд?
2. Формула Резерфорда, яка визначає ефективний перетин розсіювання?

Тема 8 Канонічні рівняння

8.1 Рівняння Гамільтона

Формулювання законів механіки за допомогою функції Лагранжа (і виведених з її рівнянь Лагранжа) припускає опис механічного стану системи шляхом завдання її узагальнених координат і швидкостей. Такий опис, однак, не є єдино можливим. Ряд переваг, особливо при дослідженні різних загальних питань механіки, представляє опис за допомогою узагальнених координат і імпульсів системи. У зв'язку з цим виникає питання про існування рівнянь руху, які відповідають такому формулюванню механіки.

Новий важливий етап у розвитку теоретичної механіки після Лагранжа зв'язаний з відкриттям Гамільтоном у 1834 р. канонічних рівнянь динаміки. Якщо по методу Лагранжа рух системи описується в узагальнених координатах q_1, \dots, q_n і узагальнених швидкостях $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$, то по методу Гамільтона він описується в узагальнених координатах q_1, \dots, q_n і узагальнених імпульсах p_1, \dots, p_n . Узагальнені імпульси є лінійними функціями узагальнених швидкостей. Обчислюються вони відповідно до визначення шляхом диференціювання функції Лагранжа по узагальнених швидкостях:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1)$$

Перехід від одного набору незалежних перемінних до іншого можна зробити шляхом перетворення, відомого в математиці під назвою перетворення Лежандра. У даному випадку воно зводиться до наступного.

Рівняння (1) відповідають нашому бажанню замінити рівняння другого порядку рівняннями першого порядку. Однак вони дуже несиметричні. На практиці звичайно користаються іншою формою рівнянь першого порядку, саме, так званими *гамільтоновими канонічними рівняннями*, що відрізняються особливою простотою і добірністю.

Розглянемо спочатку найпростіший випадок. Нехай ми маємо справу з однією часткою, яка рухається прямолінійно. Траєкторію цієї частки ми можемо вибрати за вісь x , і тоді положення частки визначиться однією координатою $q = x$, а відповідним їй узагальненим імпульсом буде $p = m \cdot \dot{x}$. Введемо тепер нову функцію H , яку ми визначимо як *суму кінетичної і потенційної енергій*, причому кінетичну енергію ми виразимо не через швидкість, а через імпульс p :

$$H = T + U = p^2/2m + U$$

Цю функцію H ми можемо зв'язати з функцією Лагранжа L . Для цього помітимо насамперед, що кінетична енергія може бути представлена у виді

$$T = p^2/2m = (m \cdot \dot{x}^2)/2m = 1/2 p \cdot \dot{x}$$

Тепер легко перевірити, що

$$p \cdot \dot{x} - L = p \cdot \dot{x} - T + U = p \cdot \dot{x} - 1/2 p \cdot \dot{x} + U = 1/2 p \cdot \dot{x} + U = T + U = H \quad (2)$$

Візьмемо повний диференціал від обох частин (2):

$$d = p d\dot{x} + \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x} - \frac{\partial L}{\partial x} dx \quad (3)$$

Але згідно (1) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p$. Тому перший член у правій частині (3) скорочується з

четвертим, і ми одержуємо

$$d = \dot{x} dp - \frac{\partial L}{\partial x} dx \quad (4)$$

Запишемо повний диференціал H як функцію x і p

$$d = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial x} dx$$

Порівнюючи цей вираз з (4), одержимо

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad p = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

Ці два рівняння першого порядку і є канонічними рівняннями Гамільтона для розглянутого найпростішого випадку. Оскільки

$$H = p^2/2m + U$$

то

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$$

і рівняння (5) запишемо у виді

$$x = \frac{p}{m} \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Перше з цих співвідношень дає $p = m^*x$, тобто визначення кількості руху, друге являє собою ньютонівське рівняння руху для частки, що рухається по осі x .

Повний диференціал функції Лагранжа як функції координат і швидкостей дорівнює

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Цей вираз можна написати у виді

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i. \quad (6)$$

оскільки похідні $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ є, по визначенню, узагальненими імпульсами, то

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{p}_i$ в силу рівнянь Лагранжа. Переписавши тепер другий член в (6) у вигляді

$$\sum_i p_i d\dot{q}_i = d(\sum_i p_i \dot{q}_i) - \sum_i \dot{q}_i dp_i,$$

перенесемо повний диференціал $d(\sum_i p_i \dot{q}_i)$ в ліву сторону рівності і змінивши всі знаки, одержимо з (6);

$$d(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

Величина, що знаходиться під знаком диференціала, являє собою енергію системи, а виражена через координати та імпульси, вона називається *гамільтоновою функцією* системи

$$H(p, q, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (7)$$

З диференціальної рівності

$$dH = -\sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i. \quad (8)$$

у якій незалежними перемінними є координати та імпульси, впливають рівняння

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Це — шукані рівняння руху в перемінних p и q , так звані *рівняння Гамільтона*. Вони складають систему $2s$ диференціальних рівнянь першого

порядку для $2s$ невідомих функцій $p(t)$ і $q(t)$, що заміняють собою s рівнянь другого порядку лагранжевого методу. Через їхню формальну простоту і симетрію ці рівняння називають також *канонічними*.

Повна похідна від функції Гамільтона за часом

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i.$$

При підстановці сюди *q_i і *p_i з рівнянь (9) останні два члени взаємно скорочуються, так що

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (10)$$

Зокрема, якщо функція Гамільтона не залежить від часу явно, то

$$dH/dt = 0,$$

тобто ми знову приходимо до закону збереження енергії. Отже, для консервативних систем H є просто сума кінетичної і потенційної енергії, виражена через координати та імпульси.

Поряд з динамічними перемінними q , *q або q , p функції Лагранжа і Гамільтона містять різні параметри — величини, що характеризують властивості самої механічної системи або діючого на неї зовнішнього поля. Нехай λ — який-небудь з таких параметрів. Розглядаючи його як змінну величину, будемо мати замість (6):

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda,$$

тоді замість (8) одержимо

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i d\dot{p}_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Звідси знаходимо співвідношення

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{p,q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda} \right)_{\dot{q},q}. \quad (11)$$

яке пов'язує частинні похідні по параметру λ від функцій Лагранжа і Гамільтона; індекси в похідних вказують, що диференціювання повинне проводитись в одному випадку при постійних p і q , а в іншому - при постійних q і *q . У формулі (11) часткові похідні за часом від L і від H пов'язані співвідношенням

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t} \right)_{p,q} = - \left(\frac{\partial L}{\partial t} \right)_{\dot{q},q} \quad (12)$$

Цей результат може бути представлений і в іншому аспекті. Нехай функція Лагранжа має вид $L = L_0 + L'$, де L' являє собою малу добавку до основної функції L_0 . Тоді відповідна добавка у функції Гамільтона $H = H_0 + H'$ зв'язана з L' за допомогою

$$(H')_{p,q} = -(L')_{\dot{q},q}. \quad (13)$$

8.2 Дужки Пуассона

Нехай $f(p, q, t)$ - деяка функція координат, імпульсів і часу. Складемо її повну похідну за часом

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right).$$

Підставивши сюди замість \dot{q}_k і \dot{p}_k їхні вирази з рівнянь Гамільтона, одержимо:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H f\}. \quad (14)$$

де ведено позначення

$$\{H f\} = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} \right). \quad (15)$$

Вираз (15) називають *дужками Пуассона* для величин H і f .

Такі функції від динамічних перемінних, котрі залишаються постійними при русі системи, називаються інтегралами руху. З (14) випливає, що умова того, щоб величина f була інтегралом руху ($\frac{df}{dt} = 0$), її треба написати у вигляді

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H f\} = 0. \quad (16)$$

Якщо ж інтеграл руху не залежить від часу явно, то

$$\{H f\} = 0, \quad (17)$$

тобто його дужки Пуассона з функцією Гамільтона повинні звертатися в нуль.

Для будь-якої пари величин f і g дужки Пуассона визначаються аналогічно (15):

$$\{f g\} = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} \right). \quad (18)$$

Дужки Пуассона мають наступні властивості, легко одержані з визначення.

Якщо переставити функції, то дужки перемінять знак; якщо одна з функцій — постійна (c), то дужка дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \{f g\} &= -\{g f\} \\ \{f c\} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Далі

$$\begin{aligned} \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1 g\} + \{f_2 g\}, \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2 g\} + f_2 \{f_1 g\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Узявши частинну похідну від (18) за часом, одержимо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{f g\} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\}. \quad (21)$$

Якщо одна з функцій f або g збігається з одним з імпульсів або координат, то дужки Пуассона зводяться просто до частинної похідної:

$$\begin{aligned} \{f q_k\} &= \frac{\partial f}{\partial p_k}, \\ \{f p_k\} &= -\frac{\partial f}{\partial q_k}. \end{aligned} \quad (22)$$

Формулу (22), наприклад, одержимо, поклавши в (18) $g = q_k$; уся сума зведеться при цьому до одного члена, тому що

$$\frac{\partial q_k}{\partial q_i} = \delta_{ki} \quad \text{а} \quad \frac{\partial q_k}{\partial p_i} = 0$$

Поклавши в (22) функцію f рівною q_i і p_i , одержимо, зокрема,

$$\{q_i q_k\} = 0, \quad \{p_i p_k\} = 0, \quad \{p_i q_k\} = \delta_{ik}. \quad (23)$$

Між дужками Пуассона, складеними з трьох функцій, існує співвідношення

$$\{f \{gh\}\} + \{g \{hf\}\} + \{h \{fg\}\} = 0, \quad (24)$$

яке називається *тотожністю Якобі*.

Для його доказу помітимо наступне. Відповідно до визначення (18) дужки Пуассона $\{fg\}$ є білінійною однорідною функцією похідних першого порядку від величин f і g . Тому, наприклад, дужка $\{h\{fg\}\}$ являє собою лінійну однорідну функцію похідних другого порядку від f і g . Уся ж ліва сторона рівності (24) в цілому є лінійна однорідна функція других похідних від усіх трьох функцій f , g , h . Зберемо разом члени, що містять другі похідні від f . Перша дужка таких членів не містить — у ній є тільки перші похідні від f . Суму ж другої і третьої дужок перепишемо в символічному виді, увівши лінійні диференціальні оператори D_1 і D_2 згідно

$$D_1(\varphi) = \{g \varphi\}, \quad D_2(\varphi) = \{h \varphi\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \{g \{hf\}\} + \{h \{fg\}\} &= \{g \{hf\}\} - \{h \{gf\}\} = \\ &= D_1(D_2(f)) - D_2(D_1(f)) = (D_1 D_2 - D_2 D_1)f. \end{aligned}$$

Легко бачити, однак, що така комбінація лінійних диференціальних операторів не може містити других похідних від f .

Справді, загальний вид лінійних диференціальних операторів є

$$D_1 = \sum_k \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad D_2 = \sum_k \eta_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

де ξ_k і η_k - довільні функції перемінних $x_1, x_2 \dots$. Тоді

$$D_1 D_2 = \sum_{k,l} \xi_k \eta_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

$$D_2 D_1 = \sum_{k,l} \eta_k \xi_l \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{k,l} \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_l},$$

а різниця цих добутків

$$D_1 D_2 - D_2 D_1 = \sum_{k,l} \left(\xi_k \frac{\partial \eta_l}{\partial x_k} - \eta_k \frac{\partial \xi_l}{\partial x_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_l}$$

є знову оператор, який містить тільки однократні диференціювання. Таким чином, у лівій стороні рівності (24) взаємно скорочуються всі члени з другими похідними від f , а оскільки те ж саме відноситься і до функцій g і h , те і весь вираз тотожно звертається в нуль.

Важлива властивість дужок Пуассона полягає в тому, що якщо f і g - два інтеграла руху, те складені з них дужки відповідно до *теорему Пуассона* теж є інтегралом руху

$$\{f g\} = const. \quad (25)$$

Доказати цю теорему зовсім просто, якщо f і g не залежать від часу явно. Поклавши в тотожності Якобі $h=H$, одержимо:

$$\{H\{f g\}\} + \{f\{g H\}\} + \{g\{H f\}\} = 0.$$

Звідси видно, що якщо $\{H g\} = 0$ і $\{H f\} = 0$, то і $\{H\{f g\}\} = 0$, що і необхідно було довести.

Якщо ж інтеграли руху f і g залежать явно від часу, то пишемо на підставі (14);

$$\frac{d}{dt} \{f g\} = \frac{\partial}{\partial t} \{f g\} + \{H\{f g\}\} = 0.$$

Скориставшись формулою (21) і замінивши дужку $\{H\{f g\}\}$ двома іншими за допомогою тотожності Якобі, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{f g\} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} g \right\} + \left\{ f \frac{\partial g}{\partial t} \right\} - \{f\{g H\}\} - \{g\{H f\}\} = \\ &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \{H f\}, g \right\} + \left\{ f, \frac{\partial g}{\partial t} + \{H g\} \right\}. \end{aligned}$$

або

$$\frac{d}{dt} \{f g\} = \left\{ \frac{df}{dt} g \right\} + \left\{ f \frac{dg}{dt} \right\} \quad (26)$$

відкіля очевидний доказ теорему Пуассона в загальному випадку.

Зрозуміло, застосовуючи теорему Пуассона, ми не завжди будемо одержувати нові інтеграли руху, тому що їхнє число взагалі обмежене ($2s - 1$, де s — число ступенів свободи). У деяких випадках ми можемо одержати тривіальний результат — дужки Пуассона зведуться до сталої. В інших випадках знову отриманий інтеграл може виявитися просто функцією вихідних інтегралів f і g . Якщо ж не має місця ні одному ні іншому випадку, то дужки Пуассона дають новий інтеграл руху.

8.3 Дія як функція координат

При формулюванні принципу найменшої дії ми розглядали інтеграл

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (27)$$

узятий по траєкторії між двома заданими положеннями $q^{(1)}$ і $q^{(2)}$, що система займає в задані моменти часу t_1 і t_2 . При варіюванні дії порівнювалися значення цього інтеграла для близьких траєкторій з тими самими значеннями $q(t_1)$ і $q(t_2)$. Лише одна з цих траєкторій відповідає дійсному рухові - та, для якої інтеграл S мінімальний.

Розглянемо тепер поняття дії в іншому аспекті. Саме, будемо розглядати S як величину, що характеризує рух по дійсних траєкторіях, і порівняємо значення, які вона має для траєкторій, що мають загальний початок $q(t_1) = q^{(1)}$, але у момент t_2 проходять через різні положення. Іншими словами, будемо розглядати інтеграл дії для дійсних траєкторій як функцію значень координат у верхній межі інтегрування. Зміна дії при переході від однієї траєкторії до близької до неї іншої траєкторії дається (при одному ступені свободи) виразом

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt.$$

Оскільки траєкторії дійсного руху задовольняють рівнянням Лагранжа, то інтеграл звертається в нуль. У першому ж члені вважаємо на нижній межі $\delta q(t_1) = 0$, а значення $\delta q(t_2)$ позначимо просто, як δq . Замінивши також $\frac{\partial L}{\partial q}$ на

p , одержимо остаточно:

$$\delta S = p \delta q$$

або в загальному випадку для будь-якого числа ступенів свободи

$$\delta S = \sum_i p_i \delta q_i. \quad (28)$$

З цього співвідношення випливає, що часткові похідні від дії по координатах дорівнюють відповідним імпульсам

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i. \quad (29)$$

Аналогічним чином дію можна розуміти як явну функцію часу, розглядаючи траєкторії, що починаються в заданий момент часу t_1 у заданому положенні $q^{(1)}$, але закінчуються в заданому положенні $q^{(2)}$ у різні моменти часу $t_2 = t$. Часткову похідну $\frac{\partial S}{\partial t}$ можна знайти шляхом відповідного варіювання інтеграла. Простіше, однак, скористатися уже відомою нам формулою (29), діючи в такий спосіб.

По самому визначенню дії її повна похідна за часом уздовж траєкторії дорівнює:

$$\frac{dS}{dt} = L.$$

З іншого боку, розглядаючи S як функцію координат і часу в описаному вище змісті і використовуючи формулу (29), маємо

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

Порівнюючи обидва вирази, знаходимо

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i p_i \dot{q}_i.$$

або остаточно

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H. \quad (30)$$

Формули (29) і (30) разом можна записати у вигляді виразу

$$dS = \sum_i p_i dq_i - H dt. \quad (31)$$

для повного диференціала дії як функції координат і часу у верхній межі інтегрування в (27). Припустимо тепер, що змінюються координати (і час) не тільки кінця, але і початку руху. Очевидно, що відповідна зміна S буде даватися різницею виразу (31) на обох кінцях, тобто

$$dS = \sum p_i^{(2)} dq_i^{(2)} - H^{(2)} dt^{(2)} - \sum p_i^{(1)} dq_i^{(1)} + H^{(1)} dt^{(1)}. \quad (32)$$

Це співвідношення вже саме по собі показує, що, яким би не був зовнішній вплив на систему під час руху, її кінцевий стан не може бути довільною функцією початкового, — можливі тільки такі рухи, при яких вираз в правій стороні рівності (32) є повним диференціалом. Таким чином, уже сам факт існування принципу найменшої дії, незалежно від конкретного виду функції Лагранжа, накладає на сукупність можливих рухів певні обмеження. Зокрема, виявляється можливим встановити ряд загальних закономірностей (не залежних від виду наявних зовнішніх полів) для пучків часток, що розлітаються з заданих точок простору. Вивчення цих закономірностей складає предмет так званої *геометричної оптики*.

Цікаво відзначити, що рівняння Гамільтона можуть бути виведені формальним чином з умови мінімальності дії, якщо написати останню, на підставі (31), у виді інтеграла

$$S = \int \left(\sum_i p_i dq_i - H dt \right). \quad (33)$$

і розглядати координати та імпульси як величини незалежного варіювання. Припускаючи знову для стислості, що мається всього одна координата (і один імпульс), пишемо варіацію дії

$$\delta S = \int \left\{ \delta p dq + p \delta q - \frac{\partial H}{\partial q} \delta q dt - \frac{\partial H}{\partial p} \delta p dt \right\}.$$

Перетворення другого члена (інтегрування по частинах) дає:

$$\delta S = \int \delta p \left(dq - \frac{\partial H}{\partial p} dt \right) + p \delta q - \int \delta q \left(dp + \frac{\partial H}{\partial q} \right) dt.$$

На границях інтегрування ми повинні покласти $\delta q = 0$, так що проінтегрований член випадає. Вираз, який залишається, може бути рівним нулю при довільних незалежних δp і δq лише за умови зворотання в нуль підінтегральних виразів у кожному із двох інтегралів:

$$dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt, \quad dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt,$$

тобто, ми одержуємо після розподілу на dt рівняння Гамільтона.

8.4 Рівняння Гамільтона—Якобі

У 8.3 було введено поняття про дію як функцію координат і часу. Було показано, що частинна похідна за часом від цієї функції $S(q, t)$ зв'язана з функцією Гамільтона співвідношенням

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, p, t) = 0,$$

а її часткові похідні по координатах збігаються з імпульсами. Замінивши відповідно до цього імпульси p у функції Гамільтона похідними $\frac{\partial S}{\partial q}$ ми одержимо рівняння

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}; t \right) = 0, \quad (34)$$

якому повинна задовольняти функція $S(q, t)$. Це рівняння в частинних похідних першого порядку; воно називається *рівнянням Гамільтона—Якобі*.

Поряд з рівняннями Лагранжа і канонічними рівняннями рівняння Гамільтона—Якобі також є основою деякого загального методу інтегрування рівнянь руху.

Переходячи до розгляду цього методу, нагадаємо попередньо, що всяке диференціальне рівняння в частинних похідних першого порядку має рішення, яке залежить від довільної функції. Таке рішення називають загальним інтегралом рівняння. У механічних застосуваннях основну роль грає не загальний інтеграл рівняння Гамільтона—Якобі, а так званий *повний інтеграл*; так називається рішення диференціального рівняння в частинних похідних, що містить стільки незалежних довільних сталих, скільки мається незалежних перемінних.

У рівнянні Гамільтона—Якобі незалежними перемінними є час і координати. Тому для системи з s ступенями свободи повний інтеграл цього рівняння повинний містити $s + 1$ довільних сталих. При цьому, оскільки функція S входить у рівняння тільки через свої похідні, то одна з довільних

постійних міститься в повному інтегралі адитивним чином, тобто повний інтеграл рівняння Гамільтона—Якобі має вид

$$S = f(t, q_1, \dots, q_s; \alpha_1, \dots, \alpha_s) + A \quad (35)$$

де $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ і A -довільні постійні.

З'ясуємо тепер зв'язок між повним інтегралом рівняння Гамільтона—Якобі і цікавлячим нас рішенням рівнянь руху. Для цього зробимо канонічне перетворення від величин q, p до нових перемінних, причому функцію $f(t, q, \alpha)$ виберемо як головну функцію, а величини $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ — як нові імпульси. Нові координати позначимо за допомогою $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$... Тому що головна функція залежить від старих координат і нових імпульсів, одержимо

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Але оскільки функція f задовольняє рівнянню Гамільтона—Якобі, то ми бачимо, що нова функція Гамільтона звертається тотожно в нуль:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0.$$

Тому канонічні рівняння для нових перемінних мають вид

$$*\alpha_i = 0 \quad *\beta_i = 0$$

відкіля випливає, що

$$\alpha_i = \text{const} \quad \beta_i = \text{const} \quad (36)$$

З іншого боку, s рівнянь

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

дають можливість виразити s координат q через час і $2s$ постійних α і β . Тим самим ми знайдемо загальний інтеграл рівнянь руху.

Таким чином, рішення задачі про рух механічної системи методом Гамільтона—Якобі зводиться до наступних операцій.

По функції Гамільтона складається рівняння Гамільтона—Якобі і знаходиться повний інтеграл (35) цього рівняння. Диференціюючи його по довільних сталих α і прирівнюючи до нових постійних β , одержуємо систему s алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i \quad (37)$$

розв'язавши яку, знайдемо координати q як функції часу і $2s$ довільних сталих. Залежність імпульсів від часу можна знайти потім за рівняннями

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$

Якщо ми маємо неповний інтеграл рівняння Гамільтона—Якобі, що залежить від меншого ніж s числа довільних сталих, то хоча з його допомогою не можна знайти загальний інтеграл рівнянь руху, але можна

трохи спростити задачу його знаходження. Так, якщо відома функція S , що містить одну довільну сталу α , то співвідношення

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{const}$$

дає одне рівняння, що пов'язує q_1, \dots, q_s і t .

Рівняння Гамільтона—Якобі приймає трохи простішу форму в тому випадку, коли функція H не залежить від часу явно, що справедливо для консервативних систем. Залежність дії від часу зводиться при цьому до доданку $-Et$:

$$S = S_0(q) - Et \quad (38)$$

і підстановкою в (34) ми одержуємо для скороченої дії $S_0(q)$ рівняння Гамільтона—Якобі у вигляді

$$H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}\right) = E.$$

Контрольні питання:

1. Яка величина називається гамільтоновою функцією?
2. Рівняння Гамільтона.
3. Який вираз називають дужками Пуассона?
4. Яке співвідношення називається тотожністю Якобі?
5. Що уявляє собою рівняння Гамільтона-Якобі?

Тема 9 Основи механіки суцільних середовищ

9.1 Механіка системи нескінченно малих часток.

9.1.1 Фізично нескінченно мала частка

Одним з найважливіших об'єктів механіки є системи з дуже великим (практично нескінченним) числом N молекул, що розташовуються в просторі у відомому змісті щільно, тобто утворюють континуум, або суцільне середовище. Виходячи з класико-механістичних уявлень про рух таких систем, можна написати відповідні рівняння руху, однак проінтегрувати їх неможливо. Наприклад, щоб знайти закон руху молекул, що знаходяться в 1 см^3 повітря при атмосферному тиску і кімнатній температурі, треба було б проінтегрувати приблизно 10^{19} рівнянь руху. Тому природно обмежитися наближеним (але практично досить точним) описом руху суцільного середовища. З цією метою розглядається не окрема молекула, а фізично нескінченно мала частка, тобто сукупність молекул, число ΔN яких, з одного боку, досить велике ($\Delta N > 1$), а з іншого боку, дуже мало в порівнянні з числом N молекул у всій системі або в її якій-небудь макроскопічній частині ($\Delta N < N$). Ця сукупність повинна займати фізично нескінченно малий об'єм ΔV , тобто

об'єм, який досить великий, щоб містити велике число молекул, і дуже малий у порівнянні з областю помітної зміни макроскопічних параметрів середовища.

Положення *даної* фізично нескінченно малої частки в момент часу t задають радіусом-вектором центра мас цієї частки, усередненим по фізично нескінченно малому інтервалі часу Δt , що набагато більше, ніж характерний час руху окремої молекули під дією інших молекул, і дуже малий у порівнянні з часом помітної зміни макроскопічних параметрів середовища.

Таким чином, якщо говорять, що фізично нескінченно мала частка в момент часу t знаходиться в точці \mathbf{r} простору, то варто мати на увазі, що у визначеннях цих величин маються неточності порядку Δt і $(\Delta V)^{1/3}$. У механіці суцільних середовищ зазначеними неточностями зневажають і відповідно вважають за можливе розглядати зміни стану частки за нескінченно малий інтервал часу dt , а також розглядати нескінченно мале переміщення $d\mathbf{r}$ частки з точки \mathbf{r} простору в точку $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$.

За аналогією з визначенням швидкості центра мас вважають, що швидкість \mathbf{v} *даної* частки зв'язана з її радіусом-вектором \mathbf{r} співвідношенням

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r} / dt \quad (1)$$

а по аналогії з прискоренням центра мас прискорення \mathbf{w} частки вважають рівним

$$\mathbf{w} = d\mathbf{v} / dt \quad (2)$$

Обговоримо тепер інше важливе поняття механіки суцільних середовищ, а саме поняття про поле. Нагадаємо, що *полем називається будь-яка фізична величина, задана як функція точки простору і часу*. Поля можуть бути скалярними, векторними, тензорними та іншими. Розглянемо, наприклад, скалярне поле щільності маси. Для цього знайдемо середню по фізично нескінченно малому інтервалі часу Δt (що включає в себе даний момент t) масу всіх молекул, які знаходяться у фізично нескінченно малому об'ємі ΔV (який включає в себе кінець даного вектора \mathbf{r}). Потім віднесемо знайдене в такий спосіб середнє значення маси Δm до ΔV і визначимо щільність маси $\rho = \Delta m / \Delta V$ тієї частки, яка у момент часу t знаходиться в точці \mathbf{r} . Повторюючи цю процедуру для будь-якого ΔV в будь-який момент t , знайдемо щільність маси як функцію точки простору і часу, тобто знайдемо поле щільності маси

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

Нескінченно мале переміщення $d\mathbf{r}$ *даної* частки залежить від положення частки до переміщення, тобто від \mathbf{r} , а в загальному випадку і від часу t . Таким чином, переміщення є векторною функцією координат і часу

$$d\mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

Ця функція називається *полем нескінченно малих переміщень*. Звідси, використовуючи (1), можна визначити *поле швидкостей* в середовищі

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \quad (5)$$

Це поле можна також визначити як середню по фізично нескінченно малому інтервалі часу Δt швидкість центра мас матеріальних точок, що знаходяться в об'ємі ΔV .

Отже, у механіці суцільних середовищ макроскопічні рухи дискретної системи, яка складається з нескінченно великого числа мікроскопічних об'єктів-молекул, описуються усередненими величинами, а саме *польовими* («континуальними») функціями. Загальні співвідношення між цими функціями, тобто закони механіки суцільних середовищ, були встановлені у відповідності з дуже великим числом експериментальних даних. Ці закони є основою дуже великої області досліджень руху різних середовищ, а також основою численних технічних додатків.

9.1.2 Закони збереження маси, імпульсу та кінетичного моменту

Розглянуті поля щільності $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ та швидкості $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ пов'язані одне з одним рівнянням, яке є наслідком закону збереження маси. Дослідимо рух даної частки маси Δm . Оскільки ця маса незмінна, то

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0 \quad (6)$$

Тут використана повна похідна за часом, тому що ця похідна характеризує зміну в часі *величини, зв'язаної з часткою, що рухається в просторі*, у даному випадку зміна величини Δm . Нагадаємо, що на відміну від повної похідної частинна похідна за часом характеризує зміну деякої величини згодом у даній *точці простору* (частинну похідну за часом називають також локальною похідною).

З огляду на те, що $\Delta m = \rho \Delta V$, з (6) одержимо співвідношення

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{\rho}{\Delta V} \frac{d\Delta V}{dt} = 0 \quad (7)$$

у який швидкість відносної зміни об'єму частки визначається полем швидкостей. Таким чином, знайдемо рівняння, що зв'язує поле щільності і швидкості та називається *рівнянням неперервності*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (8)$$

Далі, використовуючи вираз для повної похідної за часом від щільності частки

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\dot{r} \operatorname{grad}) \rho \quad (9)$$

одержимо рівняння неперервності в іншій формі, найчастіше вживаній в теоретичній фізиці

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0 \quad (10)$$

В тензорних позначеннях рівняння неперервності має вигляд

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (11)$$

Це диференціальне рівняння зв'язане з визначеним інтегральним співвідношенням. Щоб одержати його, розглянемо *фіксований* об'єм V_0 простору, для якого згідно (10)

$$\int_{V_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} \right) dV = 0.$$

Тепер за допомогою формули Остроградського перетворимо об'ємний інтеграл від дивергенції в поверхневий інтеграл

$$\int_{V_0} \operatorname{div} \rho \mathbf{v} dV = \oint_{\sigma_0} \rho \mathbf{v} d\sigma, \quad (12)$$

тут σ_0 — замкнута поверхня, що обмежує об'єм V_0 , а $d\sigma$ — «елемент поверхні», тобто вектор, рівний по абсолютній величині площі елемента поверхні і спрямований по орті \mathbf{n} , що визначає зовнішню нормаль до цього елемента. У результаті прийдемо до шуканого інтегрального співвідношення відповідно до якого *швидкість зміни маси середовища в об'ємі V_0 простору дорівнює різниці мас часток середовища, що втікають і впливають за одиницю часу через поверхню σ_0 , яка обіймає об'єм V_0* (відповідно до прийнятого визначення нормалі \mathbf{n} швидкість зміни маси позитивна, якщо поверхневий інтеграл негативний, тобто маса втікаючих часток більша, ніж маса часток, що впливають; в іншому випадку швидкість зміни маси буде негативна. Вектор $\rho \mathbf{v}$ називається *щільністю потоку середовища*.

Продовжуючи вивчати рух даної частки маси Δm і з огляду на визначення її швидкості \mathbf{v} , як усередненої швидкості центра мас, напишемо *закон зміни імпульсу частки у вигляді*

$$\Delta m \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}^e. \quad (13)$$

Тут \mathbf{F}^e — сума зовнішніх сил, прикладених до частки. Ця сила залежить від положення частки і часу, тобто повинна бути задана векторним полем. Силу \mathbf{F}^e варто розглядати як результат усереднення правої частини закону зміни імпульсу всіх молекул, з яких складається дана частка середовища. Сила \mathbf{F}^e обумовлена, по-перше, силами взаємної взаємодії молекул середовища і, по-друге, містить у собі зовнішні стосовно всього середовища силові поля. Будемо розглядати *середовище з дуже малим радіусом дії міжмолекулярних сил*. Тоді сила, з яким фізично нескінченно малі частки середовища діють на дану частку, виявляються тільки в тонкому поверхневому шарі цієї частки. Товщиною такого шару в механіці суцільних середовищ свідомо зневажають, а сили, з якими сусідні частки середовища діють одна на одну, вважають *поверхневими силами*. Що стосується зовнішніх силових полів, то вони практично однаково діють на всі молекули, що знаходяться в об'ємі ΔV . Тому ці сили називаються *об'ємними силами*, а якщо ці сили пропорційні масі частки, те їх називають *масовими силами*.

Такими силами є гравітаційні та електромагнітні сили, а також сили інерції, які з'являються при вивченні руху середовища відносно неінерціальних систем відліку.

Отже, у механіці суцільних середовищ передбачається, що сума всіх сил, прикладених до даної частки маси Δm , може бути представлена у вигляді

$$\mathbf{F}^e = \oint_{\Delta\sigma} d\mathbf{F}^\sigma + \mathbf{f} \Delta m, \quad (14)$$

де $d\mathbf{F}^\sigma$ - поверхнева сила, прикладена до елементарної площини $d\sigma$ поверхні частки, $\Delta\sigma$ -поверхня частки, а \mathbf{f} — об'ємна сила, що приходить на одиницю маси. Щодо поверхневої сили $d\mathbf{F}^\sigma$ передбачається, що вона залежить від орієнтації площадки, тобто від напрямку вектора $d\sigma = \mathbf{n} d\sigma$, а також пропорційна величині $d\sigma$ цієї площадки (рис.1).

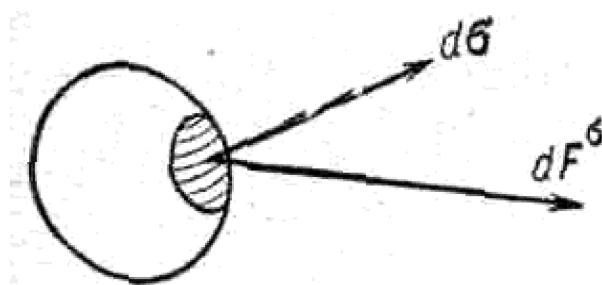


Рис.1

Інакше кажучи, передбачається, що поверхнева сила має вигляд

$$dF_i^\sigma = P_{ik} d\sigma_k, \quad (15)$$

тобто визначатися сукупністю величин P_{ik} і залежить від компонентів вектора $d\sigma$, а саме

$$d\sigma_k = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{n}_k) d\sigma.$$

Сукупність величин P_{ik} називається тензором напруг. Компоненти цього тензора є функціями \mathbf{r}, t і визначають поле напруг у середовищі. Компонента P_{ik} тензора напруг являє собою i -ту компоненту сили, яка діє на одиницю поверхні, перпендикулярної осі x_k . Наприклад, на площадку, перпендикулярну до осі x (вектор $d\sigma$ такої площадки спрямований уздовж x), діє сила $dF_i^\sigma = P_{ix} d\sigma_x$ (рис. 2)

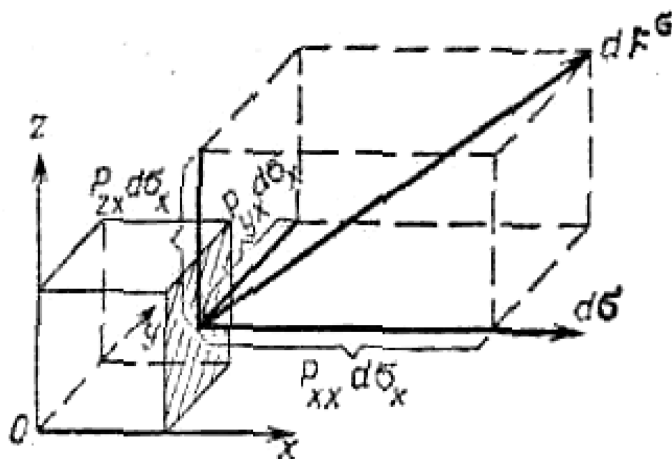


Рис.2

Проекції цієї сили відповідно рівні:

$$dF_x^\sigma = P_{xx} d\sigma_x, \quad dF_y^\sigma = P_{yx} d\sigma_x, \quad dF_z^\sigma = P_{zx} d\sigma_x.$$

Звідси видно, що P_{xx} — нормальна стосовно розглянутої площадки компонента щільності сили, а P_{yx} і P_{zx} - дотичні компоненти щільності сили.

Тепер перетворимо сумарну поверхневу силу, яка діє на дану частку, використовуючи (15), теорему Остроградського і з огляду на малість частки

$$\oint_{\Delta\sigma} dF_i^\sigma = \oint_{\Delta\sigma} P_{ik} d\sigma_k = \int_{\Delta V} \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} dV = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \Delta V. \quad (16)$$

Нарешті, використовуючи (13), (14), (16) і скорочуючи всі члени отриманого рівняння на ΔV , прийдемо до рівнянь руху суцільного середовища

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + \rho f_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (17)$$

Тепер переконаємося в тім, що закон зміни кінетичного моменту частки приводить до вимоги симетрії тензора напружень. Покладемо, що кінетичний момент частки і момент сил, що діють на неї, відповідно рівні

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \Delta m \cdot [r \mathbf{v}] + \mathbf{M}', \\ \mathbf{L}^e &= \oint_{\Delta\sigma} [r d\mathbf{F}^\sigma] + \Delta m \cdot [r \mathbf{f}] + (\mathbf{L}^e)'. \end{aligned} \quad (18)$$

При цьому момент імпульсу центра мас частки пропорційний Δm і, отже, є малою величиною порядку l^3 (l — характерний розмір частки). У той же час момент частки \mathbf{M}' відносно системи центра мас, що поступально рухається, пропорційний Δm l^2 , тобто є величиною порядку l^5 . Момент сил $(\mathbf{L}^e)'$ щодо центра мас частки також є величиною більш високого порядку малості в порівнянні з іншими моментами сил в (18). Отже, доданками \mathbf{M}' і $(\mathbf{L}^e)'$ можна зневажити. Тоді, з огляду на те, що

$$\frac{d}{dt} \Delta m = 0, \quad \text{а} \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

одержимо закон зміни кінетичного моменту частки у вигляді

$$\Delta m \cdot [r \dot{\mathbf{v}}] = \oint_{\Delta\sigma} [r d\mathbf{F}^\sigma] + \Delta m \cdot [r \mathbf{f}]. \quad (19)$$

Далі спроектуємо обидві частин (19) на координатні осі, для чого виразимо компоненти векторних добутків через компоненти векторів-співмножників, тобто запишемо момент прискорення та момент сил у вигляді антисиметричного тензора другого рангу. Тоді одержимо

$$\Delta m \cdot (x_i \ddot{v}_j - x_j \ddot{v}_i) = \oint_{\Delta\sigma} (x_i dF_j^\sigma - x_j dF_i^\sigma) + \Delta m \cdot [x_i f_j - x_j f_i]. \quad (20)$$

Потім перетворимо перший поверхневий інтеграл з (20), використовуючи (15) і формулу Остроградського. У результаті знайдемо, що

$$\oint_{\Delta\sigma} x_i P_{jk} d\sigma_k = \frac{\partial(x_i P_{jk})}{\partial x_k} \Delta V,$$

але

$$\frac{\partial(x_i P_{jk})}{\partial x_k} = \delta_{ik} P_{jk} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k},$$

де δ_{ik} – символ Кронекера. Ось тому

$$\oint_{\Delta\sigma} x_i d\mathbf{F}_j^\sigma = \left(P_{ji} + x_i \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} \right) \Delta V. \quad (21)$$

Нарешті, одержуючи аналогічно (21) вираз для другого поверхневого інтеграла з (20), знайдемо

$$x_i \left(\rho \dot{v}_j - \frac{\partial P_{jk}}{\partial x_k} - \rho f_j \right) - x_j \left(\rho \dot{v}_i - \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} - \rho f_i \right) = P_{ji} - P_{ij}.$$

Звідси внаслідок рівнянь руху (17) одержимо

$$P_{ji} = P_{ij} \quad (22)$$

Таким чином, *тензор напруг є симетричним, тензором*, тобто являє собою сукупність шести незалежних компонентів.

9.2 Механіка в'язкої рідини

9.2.1 Тензор напруг та рівняння руху в'язкої рідини

Модель ідеальної рідини припускає повну зневагу дотичними напруженнями. Однак у дійсності такі напруги мають місце при русі рідин і газів. Вивчимо властивості середовища, у якому напруги залежать від *швидкостей деформацій*, при цьому при наявності *нормальних напруг* відрізняються від нуля і *дотичні напруження*. Таке середовище називають в'язкою рідиною.

Про наявність дотичних напружень свідчать найпростіші експерименти. Наприклад, візьмемо дві плоскі тверді пластинки, між якими знаходиться рідина, і закріпивши одну з них, будемо рухати другу пластину паралельно першій з малою постійною швидкістю. Дослід покаже: щоб підтримувати швидкість постійною, до неї потрібно прикласти силу, пропорційну площі пластини і відношенню її швидкості до відстані між обома пластинами; з досліду також випливає, що коефіцієнт пропорційності, названий коефіцієнтом в'язкості, буде залежати від властивостей середовища. Щоб врахувати дотичні напруження, представимо тензор напруг у вигляді

$$P_{ik} = -\rho \delta_{ik} + \tau_{ik} \quad (1)$$

де другий член визначає силу, пропорційну похідним швидкості по координатах, тобто силу, яка залежить від швидкості руху часток середовища

відносно одна одної. Це допущення, зроблене ще Ньютоном, засновано на експериментах, подібних розглянутому.

Отже, «в'язкий» тензор напруг τ_{ik} повинний бути однорідною лінійною формою відносно похідних $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$, причому формою, симетричною щодо перестановки індексів. У силу вимоги знаходження виразу τ_{ik} помітимо, що з компонентів тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ можна утворити два симетричних тензори, пов'язаних зі швидкостями деформацій різного характеру, а саме, зі швидкостями деформацій чистого зрушення і рівномірного стиснення. Такими тензорами є

$$S_{ik} = v_{ik} - V_{ik} \quad (2)$$

$$V_{ik} = \frac{1}{3} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \delta_{ik} \quad (3)$$

де V_{ik} — тензор швидкостей деформації. Дійсно, симетричний тензор S_{ik} зв'язаний тільки з деформаціями зрушення, оскільки $S_{ik} = 0$ при рівномірному стисканні. У цьому випадку всі члени дорівнюють нулю

$$\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)_{i \neq k} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Компоненти симетричного тензора V_{ik} пропорційні дивергенції швидкості, тобто зв'язані тільки зі швидкістю зміни об'єму часток середовища. Справді, якщо $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \neq 0$ при $i \neq k$, а при $i = k$ $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0$, тобто якщо і мають місце тільки

деформації зсуву, то $V_{ik} = 0$. Таким чином, використовуючи тензори S_{ik} та V_{ik} , з якими зв'язані дві можливі деформації різного характеру, а також з огляду на вимогу лінійності τ_{ik} відносно похідних

$\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ знайдемо

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad (4)$$

де скалярні величини η і ξ відповідно називаються *першим* і *другим* коефіцієнтами в'язкості, які залежать від щільності і температури середовища.

Середовище, для якого «в'язкий» тензор напруг τ_{ik} має вид (4), називається *лінійною в'язкою рідиною* (звичайно її коротко називають в'язкою рідиною). Таке середовище є *ізотропним*, оскільки його властивості визначаються скалярними величинами η і ξ .

Одержимо рівняння зміни імпульсу в'язкої рідини

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\xi \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} \right) + \rho f_i \quad (5)$$

Ці рівняння описують необоротні процеси, причому необоротність зв'язана з тензором τ_{ik} , оскільки при інверсії часу $t \rightarrow -t$ $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ змінюють знак тільки ті члени (5), які зв'язані з τ_{ik} , а інші члени не змінюють знаку. Тому дисипація енергії (перехід частини механічної енергії в теплову) буде визначатися потужністю «в'язких» напруг, яка виділяється при деформаціях частки, тобто дисипативною функцією виду

$$D = \tau_{ik} v_{ik} \quad (6)$$

Оскільки $\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \omega_{ki} + v_{ki}$, дисипативну функцію можна також представити у формі

$$D = \tau_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \quad (6')$$

Для перетворення (6') використаємо вираз τ_{ik} через симетричні тензори S_{ik} і V_{ik} , а також очевидний вираз для тензора $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = S_{ik} + V_{ik} + \omega_{ik} \quad (7)$$

Тоді, маючи на увазі, що

$$S_{ik} \omega_{ik} = 0 \quad V_{ik} \omega_{ik} = 0 \quad (8)$$

та враховуючи, що $\delta_{ik} * \delta_{ik} = 3$, а

$$\begin{aligned} S_{ik} V_{ik} &= \frac{1}{3} \frac{dv_\alpha}{dx_\alpha} \left(\frac{1}{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) \delta_{ik} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{dv_\alpha}{dx_\alpha} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} - \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\beta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

знайдемо вираз для дисипативної функції в'язкої рідини

$$D = 2\eta S_{ik} S_{ik} + 3\xi V_{ik} V_{ik} \quad (10)$$

Тепер, використовуючи (1) і (6), одержимо потужність усіх напруг, пов'язаних з деформацією

$$P_{ik} v_{ik} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + D \quad (11)$$

Використовуючи (11), прийдемо до рівняння зміни енергії в'язкої рідини

$$\rho \frac{de}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + D - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (12)$$

Нарешті, використовуючи (10), знайдемо рівняння зміни *ентронії* в'язкої рідини

$$\rho T \frac{ds}{dt} = D - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}, \quad D > 0 \quad (13)$$

де D визначене в (6) або (10). Таким чином, з нерівності $D > 0$ та (10) випливає нерівність

$$2\eta(S_{ik}S_{ik}) + 3\xi(V_{ik}V_{ik}) > 0$$

з якої через позитивну визначеність форм $S_{ik}S_{ik}$ і $V_{ik}V_{ik}$ випливає, що коефіцієнти в'язкості завжди *позитивні*

$$\eta > 0, \quad \xi > 0 \quad (14)$$

Рівняння (5), (12) і (13) разом з рівнянням безперервності є *системою рівнянь руху в'язкої рідини*. Вона стає замкнутою, якщо її доповнити рівняннями стану

$$2\eta(S_{ik}S_{ik}) + 3\xi(V_{ik}V_{ik}) > 0 \quad (15)$$

а також емпіричним законом Фур'є, відповідно до якого щільність потоку тепла пропорційна градієнту температури:

$$q = -\chi \text{grad}T \quad (16)$$

де χ — коефіцієнт теплопровідності, що є заданою функцією щільності і температури ($\chi > 0$, оскільки потік q завжди спрямований від частки з більшою температурою до частки з меншою температурою). Відзначимо, що рівняння (15) у даному випадку використовується для описування незворотних процесів, якщо градієнти швидкості, температури та інших величин малі і є можливість зневажити ступенями цих градієнтів (починаючи з других і вище), а також зневажити похідними вищих порядків по координатах.

9.2.2 Рівняння Нав'є-Стокса

Рівняння руху в'язкої рідини трохи спрощуються, якщо коефіцієнти в'язкості можна вважати постійними для даної рідини величинами. Дійсно, у цьому випадку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} &= \eta \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} \right) + \xi \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} = \\ &= \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_k} + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} \end{aligned} \quad (17)$$

причому суми других похідних можна записати у формі

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_k} = \Delta v, \quad \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{div} v \quad (18)$$

Таким чином, рівняння (5) приводять до рівняння Нав'є – Стокса

$$\rho \frac{dv}{dt} = -grad p + \eta \Delta v + \left(\frac{\eta}{3} + \xi \right) grad div v + \rho f \quad (19)$$

Якщо рідину можна вважати нестисливою, то в силу рівняння безперервності $div \mathbf{v} = 0$ і, отже, тензор $V_{ik} = 0$ (див. (3)), а тензор напруг (4) і дисипативна функція (10) перетворюються відповідно до виду

$$\tau_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) \quad (20)$$

$$D = \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (21)$$

Тому системою рівнянь руху нестисливої в'язкої рідини є наступна замкнута щодо невідомих \mathbf{v} і p система

$$div v = 0, \quad (22)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} grad p + v \Delta v + f \quad (23)$$

де $\nu = \eta/\rho$ —питома в'язкість (ν часто називають *кінематичним* коефіцієнтом в'язкості, а перший коефіцієнт в'язкості — *динамічним* коефіцієнтом в'язкості). Якщо система (22)—(23) розв'язана, тобто поля тиску і швидкості знайдені, то поле температури може бути визначене за допомогою рівнянь (12) і (13) разом з (15) і (16).

Граничною умовою до рівнянь руху в'язкої рідини є *умова звертання в нуль швидкості середовища на нерухомій твердій поверхні* σ_0

$$v|_{\sigma_0} = 0 \quad (24)$$

Ця умова, пов'язана з уявленнями про молекулярну взаємодію між молекулами середовища і поверхні, підтверджується на досліді в досить великому інтервалі щільностей і температур. Помітимо, що на твердій поверхні, яка рухається, швидкість середовища повинна дорівнювати швидкості \mathbf{U} відповідного елемента поверхні:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}_\sigma) = \mathbf{U}(\mathbf{r}_\sigma) \quad (25)$$

(тут \mathbf{r}_σ — радіус-вектор елемента поверхні). Часто необхідно обчислювати силу, яка діє на нерухому тверду поверхню з боку рідини. У зв'язку з цим одержимо вираз для сили, що діє на елемент $d\sigma$ поверхні. Ця сила повинна дорівнювати потоку імпульсу через елемент $d\sigma$. Тому знайдемо тензор Π_{ik} щільності потоку імпульсу для в'язкої рідини. Для цього розглянемо рівняння зміни імпульсу в'язкої рідини

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + \rho f$$

і представимо це рівняння у вигляді

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p \delta_{ik} - \tau_{ik} \quad (26)$$

Звідси, з огляду на граничну умову (24), знайдемо силу dF_1^σ , яка діє з боку в'язкої рідини на елемент $d\sigma$ нерухомої твердої поверхні:

$$dF_i^\sigma = (-pn_i + \tau_{ik}n_k)d\sigma \quad (27)$$

(нагадаємо, що орт \mathbf{n} спрямований по нормалі, зовнішньої до поверхні твердого тіла, тобто усередину рідини).

Тепер розглянемо питання про схожість стаціонарних течій нестисливої в'язкої рідини під час відсутності заданих сил. Визначимо поняття схожості, для чого розглянемо два різних стаціонарних потоки. Якщо кожній точці \mathbf{r}_1 простору у випадку одного потоку можна поставити у відповідність точку \mathbf{r}_2 простору у випадку іншого потоку за допомогою перетворення

$$\mathbf{r}_2 = k \mathbf{r}_1 \quad (28)$$

де постійна k однакова, для всіх точок порівнюваних просторових областей, і при цьому виявиться, що будь-яка величина Q_1 , яка характеризує перший потік в будь-якій точці \mathbf{r}_1 , зв'язана з відповідною величиною Q_2 , що характеризує другий потік у точці $\mathbf{r}_2 = k\mathbf{r}_1$, співвідношенням

$$Q_2(r_2)|_{r_2=k r_1} = k_Q Q_1(r_1) \quad (29)$$

з постійною k , то такі стаціонарні потоки називаються подібними, а постійні k , k_Q називаються *коефіцієнтами подібності*.

Щоб з'ясувати критерій подібності, представимо рівняння Нав'є—Стокса (23) у безрозмірній формі. Для цього задамо постійні величини, які характеризують течію нестисливої в'язкої рідини, а саме: питому в'язкість ν , розмір l неоднорідності і швидкість U потоку (наприклад, у випадку обтікання кулі l і U будуть відповідно дорівнювати радіусу кулі і швидкості потоку на нескінченності). Тоді, вводячи безрозмірні функції та оператори

$$\tilde{r} = \frac{r}{l}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\nu}{U}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \tilde{\nabla} = l \nabla, \quad \tilde{\Delta} = l^2 \Delta \quad (30)$$

з (23) для стаціонарних течій при $\mathbf{f} = 0$ знайдемо

$$(\tilde{\nu} \tilde{\nabla}) \tilde{\sigma} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{R} \tilde{\Delta} \tilde{\sigma} \quad (31)$$

$$\text{де} \quad R = \frac{Ul}{\nu} \quad (32)$$

— число Рейнольдса (це єдина безрозмірна комбінація розмірних величин U , l , ν , які характеризують течію). З рівняння (31) випливає закон подібності Рейнольдса, відповідно до якого *два стаціонарних потоки нестисливої в'язкої рідини, що обтікають геометрично подібні тіла під час відсутності заданих сил, є подібними, якщо обидва потоки характеризуються тим самим числом Рейнольдса*. Дійсно, якщо: числа R і граничні умови для обох течій однакові, то рішеннями рівняння (31) у цих двох випадках будуть ті самі функції виду

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\tilde{r}, R), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{r}, R) \quad (33)$$

Звідси з урахуванням (30) для швидкостей і радіусів-векторів двох потоків, що задовольняють закону Рейнольдса, одержимо вирази

$$\tilde{\sigma} = \frac{\nu_2}{U_2} = \frac{\nu_1}{U_1}, \quad \tilde{r} = \frac{r_2}{l_2} = \frac{r_1}{l_1} \quad (34)$$

які визначають подібність течій.

Рішення рівняння Нав'є—Стокса у вигляді (33) дозволяє прийти і до інших практично важливих висновків. Наприклад, підставляючи (33) у (27), з огляду на (30) і інтегруючи по поверхні тіла, знайдемо, що сила, яка діє на тіло з боку потоку, який обтікає, повинна мати вид

$$F^{\sigma} = \frac{\rho U^2}{2} \sigma \Psi(R) \quad (35)$$

де σ - «ефективна» площа, пропорційна квадрату характерного розміру тіла ($\sigma \sim l^2$).

На закінчення відзначимо, що рішення розглянутих рівнянь в'язкої рідини лише формально можуть існувати при будь-яких числах R . Стаціонарна течія тіла є стійкою при малих числах Рейнольдса, тобто має місце шарувата або *ламінарна* течія. В іншому випадку частки рухаються безладно, відбуваються хаотичні пульсації швидкості, тобто має місце *турбулентний* рух.

Контрольні питання:

1. Яка функція називається полем нескінченно малих переміщень?
2. Рівняння неперервності.
3. Закон зміни імпульсу частки.
4. Яке середовище називають в'язкою рідиною?
5. Яке середовище називаються лінійною в'язкою рідиною?

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. Єжов С.М. Класична механіка: Підручник/С.М.Єжов, М.В.Макарець, Е41 О. В Романенко. - К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2008. - 479 с.
2. Класична механіка (курс лекцій): навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів фізико-математичних спеціальностей. – Умань: ПП «Жовтий», 2015. – 160 с.
3. Шутов Б.М. Конспект лекцій з механіки. - К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2007. - 141 с.

Додаткова

4. Іро Гаральд. Класична механіка / Пер. з нім. Гайда Р., Головач Ю. — Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 1999. — 464 с. ISBN 966-613-013-0
5. Теоретична фізика [Текст] : підручник у 2-х т. / А. М. Федорченко. - К. : Вища школа, 1992 - 1993. Т. 1 : Класична механіка і електродинаміка. - 1992. - 535 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Класична механіка» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня зі спеціальності 104 «Фізика та астрономія»

Укладачі: Харитонova Олена Анатоліївна
Набережна Ольга Олександрівна

Підписано до друку «18» 05 2023 р.
Формат A5 Обсяг 4,45 др. арк.
Тираж 50 екз. Замова 320

Дніпровський державний технічний університет
51918, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2