

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ДНІПРОВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
(ДДТУ)**

**СИСТЕМНИЙ ПІДХІД, МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ  
ПРОЦЕСІВ ПРОКАТУВАННЯ  
З АНАЛІЗОМ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТАЛОСТІ**

*Навчальний посібник*

**Кам'янське  
«ДДТУ»  
2021**

УДК 621.771  
С40

**Колектив авторів:**  
**О. П. Максименко, О. В. Нікулін,**  
**В. М. Самохвал, Д. І. Лобойко**

***Рецензенти:***

- Я. В. Фролов** — д-р техн. наук, проф. (Національна металургійна академія України)  
**В. В. Кухар** — д-р техн. наук, проф. (Приазовський державний технічний університет)  
**Г. В. Левченко** — д-р техн. наук, проф. (Інститут чорної металургії імені З. І. Некрасова НАН України)

*Рекомендовано до друку вченою радою  
Дніпровського державного технічного університету (протокол № 8 від 26.11.2020 р.)*

С40 Системний підхід, методи досліджень процесів прокатування з аналізом поздовжньої сталості : навчальний посібник / О. П. Максименко, О. В. Нікулін, В. М. Самохвал та ін. — Кам'янське : ДДТУ, 2021. — 347 с.

**ISBN 978-966-175-210-7**

*Навчальний посібник містить структурні елементи, які охоплюють основні етапи виконання досліджень за темою кваліфікаційної роботи, а саме: основи системного підходу, планування експерименту, вимірювання та обробку експериментальних даних, теоретичні дослідження явища поздовжньої сталості процесів гарячого та холодного прокатування. Кожен з розділів містить теоретичні відомості, приклади та завдання, питання для контролю знань, літературу. Посібник призначено для здобувачів вищої освіти другого рівня зі спеціальності 136 – Металургія за освітньо-науковою програмою "Обробка металів тиском". Може бути корисним для здобувачів освіти третього рівня вищої освіти та наукових співробітників.*

**УДК 621.771**

**ISBN 978-966-175-210-7**

© О. П. Максименко,  
О. В. Нікулін,  
В. М. Самохвал та ін., 2021  
© ДДТУ, 2021

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	7
1. ПРОБЛЕМНІ СИТУАЦІЇ, СИСТЕМНИЙ ПІДХІД І МОДЕЛЮВАННЯ.....	10
1.1. Від проблемної ситуації до математичної моделі.....	10
1.2. Основи прикладного системного підходу.....	16
1.3. Прикладні застосування системного аналізу.....	27
1.4. Моделювання та моделі.....	35
1.5. Процес математичного моделювання.....	43
1.6. Типи математичних моделей і методологія їх конструювання.....	48
1.7. Завдання №1. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків при вирішенні проблемного питання.....	52
1.8. Питання для контролю знань.....	54
1.9. Перелік літератури до розділу 1.....	54
2. ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ.....	57
2.1. Основи теорії експерименту.....	57
2.2. Аналіз розмірностей.....	65
2.3. Теорія подібності.....	70
2.4. Планування експерименту типу $2^k$ .....	76
2.5. Планування експерименту за допомогою греко-латинських квадратів.....	86
2.6. Метод крутого сходження.....	96
2.7. Плани другого порядку.....	98
2.8. Композиційне планування експериментів.....	105
2.9. Завдання №2. Аналіз розмірності для цільової функції.....	114
2.10. Завдання №3. Розробка плану експерименту.....	114
2.11. Питання для контролю знань.....	115
2.12. Перелік літератури до розділу 2.....	116

---

---

3. ВИМІРЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ	118
3.1. Методи експериментальних досліджень поздовжнього прокатування.....	118
3.1.1. Тензометрія.....	119
3.1.2. Метод координатних (ділительних) сіток.....	123
3.1.3. Оптичні методи дослідження фізичного тіла.....	125
3.1.4. Метод оптично чутливих покриттів.....	130
3.1.5. Візіопластичність.....	131
3.1.6. Метод муар.....	133
3.1.7. Аналогії та моделювання.....	137
3.2. Вимірювальна інформація та похибки.....	138
3.2.1. Основні визначення.....	138
3.2.2. Забезпечення точності вимірювань в експериментальних дослідженнях.....	146
3.2.3. Визначення показників прецизійності в умовах однієї лабораторії.....	151
3.2.4. Визначення показників прецизійності з залученням кількох лабораторій.....	156
3.2.5. Вимірювальна інформація за результатами багатократних вимірювань.....	160
3.3. Статистичний аналіз результатів експериментів.....	173
3.3.1. Аналіз експериментальних даних за допомогою $\chi^2$ -критерія.....	174
3.3.2. Використання критерію Стьюдента для перевірки гіпотези про рівність середніх двох сукупностей.....	181
3.3.3. Дисперсійний аналіз.....	188
3.3.4. Кореляція та регресія.....	190
3.4. Завдання № 4. Оцінка показників повторюваності в умовах лабораторії.....	203
3.5. Завдання № 5. Аналіз взаємозв'язку параметрів за коефіцієнтом кореляції.....	205
3.6. Питання для контролю знань.....	206
3.7. Перелік літератури до розділу 3.....	207

---

---

4. ТЕОРІЯ І ТЕХНОЛОГІЯ ПРОКАТУВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТАЛОСТІ.....	210
4.1. Аналіз граничних умов прокатування в сталому режимі.....	210
4.1.1. Граничні умови захоплення штаби в сталому режимі.....	210
4.1.2. Втрата рівноваги штаби в валках при наявності випередження.....	214
4.1.3. Залежність параметрів процесу прокатування від натягіння.....	221
4.2. Рівновага поздовжніх сил в осередку деформації.....	230
4.2.1. Аналіз рівноваги горизонтальних сил в осередку деформації.....	230
4.2.2. Порівняльний аналіз зміни результуючої поздовжніх сил і випередження.....	241
4.2.3. Методика оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатування.....	256
4.2.4. Дослідження енергетичної взаємодії в осередку деформації при прокатуванні.....	258
4.3. Поздовжня стійкість штаби в осередку деформації при прокатуванні з натягінням.....	264
4.3.1. Методи розрахунку напружень тертя при прокатуванні.....	265
4.3.2. Двохзвенна модель тертя в осередку деформації при прокатуванні.....	266
4.3.3. Методика оцінки поздовжньої стійкості штаби в осередку деформації при прокатуванні з натягінням.....	274
4.3.4. Порівняльний аналіз дослідних і розрахункових епюр контактних напружень при прокатуванні з натягінням штаби.....	279
4.3.5. Дослідження впливу натягіння штаби на результуючу поздовжніх сил пластично деформованого металу.....	286
4.4. Приклади оцінки поздовжньої стійкості штаби в валках при холодному прокатуванні.....	297
4.4.1. Вплив натягіння штаби на сумарний момент при безперервному прокатуванні.....	297

---

---

4.4.2. Методика розрахунку енергосилових параметрів при холодному тонколистовому прокатуванні.....	307
4.4.3. Склад основного обладнання та елементи технології на безперервному тонколистовому стані 1680 холодного прокатування.....	312
4.5. Дослідження та оцінювання поздовжньої стійкості штаби при гарячому прокатуванні в умовах виробництва.....	315
4.6. Питання для контролю знань.....	332
4.7. Перелік літератури до розділу 4.....	333
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	341
Додаток А. Критичні значення для критерію Кохрена.....	345
Додаток Б. Критичні значення для критерію Грабса.....	346

## ПЕРЕДМОВА

Підготовка магістрів в Україні, яка дає повну вищу освіту здобувачам, ускладнюється гострою нестачею сучасної науково-технічної літератури [1]. За останні 20—25 років різко знизилися тиражі навчальної та науково-технічної літератури, згорнуто її поширення через бібліотечну мережу, в тому числі і через бібліотеки навчальних закладів. Тому при підготовці магістрів і докторів філософії з технічних наук часто доводиться користуватися застарілою літературою, яка не завжди є репрезентативною або актуальною по перспективним науковим напрямкам. Зрозуміло, використання інформаційних технологій та мережевих ресурсів пом'якшує ситуацію, однак не знімає актуальності підготовки друкованих видань з урахуванням сучасних результатів науки і техніки, розвитку методології і методик прикладних і фундаментальних наук.

Практична необхідність використання системного підходу обумовлена потребою розв'язання складних, міждисциплінарних задач різної природи, що виникають в умовах світової економічної глобалізації, стрімкого розвитку сучасної техніки і технологій, наростанням погроз звершення природних і техногенних катастроф і катаклізмів. Отже, актуалізується створення і використання методології, освоєння теорії і практики системного аналізу для формування і багатокритеріального оцінювання ефективних варіантів складних рішень і стратегій управління в різних сферах практичної діяльності людини. Тому системна підготовка стає необхідною майбутньому фахівцю.

Слід особливо відзначити, що ефективність і достовірність своєчасного передбачення, об'єктивного прогнозування, сталого розвитку, системного аналізу різних альтернатив можливих рішень і стратегій дій в практичній діяльності багато в чому залежить від здатності системного дослідника своєчасно освоїти і ра-

---

---

ціонально використовувати можливості методології системного аналізу [2].

Сучасна металургія характеризується швидким розвитком техніки і технологій. Технологічні машини стають більше швидкокодуючими та продуктивними, а технології — більш ефективними й досконаліми. При цьому виникають протиріччя, які стримують їх розвиток.

Темпи розвитку методів проектування та засвоєння машин і технологій відстають від темпів зростання їх складності й розширення сфер використання. Погіршується співвідношення між тривалістю розробки і впровадження технологічних машин та часом їх морального старіння й втрати конкурентних спроможностей. Тому уміння вивчити та вдосконалити діючі техніку і технології є необхідними умовами їх ефективного використання. Наукові дослідження та отримання їх результатів становляться повсякденністю.

Тісний зв'язок між наукою і виробництвом сприяв неподільності наукової та інженерної діяльності. Саме вміння провести наукове дослідження та використати отримані результати, яке пов'язане з успішністю моделювання, є складовою професійних компетентностей сучасних фахівців з техніки.

Моделювання в цілому і, зокрема, побудова математичної моделі є сполучною ланкою наукового дослідження з проектуванням і вдосконаленням технічної системи. Основи науки про системи або деякі її розділи входять до навчальних програм з багатьох профільних дисциплін. Наявність етапу математичного моделювання реалізує з'єднання цих видів діяльності [3]. Внаслідок цього здійснюється конкретне застосування отриманих знань. В інженерній діяльності поєднуються проектувальний, технологічний та дослідницький етапи на основі системного опису технічних та виробничих об'єктів. З урахуванням викладеного для магістрантів спеціальності «Металургія», які спеціалізуються по позовжній прокатці, підготовлено навчальний посібник.



---

---

Бакалаври вже достатньо підготовлені для практичної роботи і подальшого навчання, тобто обізнані з основами технології ОМТ, будовою та конструкцією технологічного обладнання й багатьма спорідненими дисциплінами, деякі мають певний виробничий досвід. Тому автори почали з використання системного підходу для демонстрації взаємопроникнення спеціальних дисциплін і математичного моделювання, об'єднання їх в одне ціле для подальшого практичного використання і досліджень.

У посібнику не пропонується універсальних методик для досліджень технічних об'єктів. Кожний дослідник повинен знайти свій шлях при виконанні роботи, оскільки дослідження та вдосконалення складного об'єкта, як правило, є унікальною проблемою. Для її розв'язання потрібний нестандартний, можливо винахідницький підхід, дотримання авторського права, запобігання плагіату. У зв'язку з цим при відборі матеріалів посібника використано теоретичні положення та схеми, приклади об'єктів і результатів дослідження, моделювання та вдосконалення систем прокатного виробництва листа та сортових профілів, які вже пройшли апробацію та виступають як навчальні зразки. Тобто підхід до навчання розвивальний, у відміну від директивного.

# 1. ПРОБЛЕМНІ СИТУАЦІЇ, СИСТЕМНИЙ ПІДХІД І МОДЕЛЮВАННЯ

## 1.1. Від проблемної ситуації до математичної моделі

У реальному житті доводиться, як правило, стикатися з ситуаціями, тобто з сумами обставин, в яких потрібно діяти більш-менш успішно. Слід приймати до уваги, що велика частина ситуацій, які виникають у виробничій діяльності, наукових дослідженнях, управлінні, відноситься до проблемних. Прийmemo, що проблемна ситуація перед нами виникає тоді, коли необхідний комплекс дій не відповідає відпрацьованим шаблонам і ми не знаємо, що треба робити. При раціональній організації діяльності в такому разі переходимо від проблемної ситуації до проблеми, а потім до задач.

Під проблемою будемо розуміти різновид питання, що має чітко поставлену мету, але при цьому шляхи досягнення цієї мети не можуть бути встановлені досить визначено в даний момент часу. Проблема може бути вирішена (або передбачається її розв'язання) за допомогою декількох задач, тобто проблема складніше задачі (рис. 1.1).

Під задачею ми будемо розуміти різновид питання, що має чітко поставлену мету і конкретний шлях (кілька шляхів) її розв'язання.

Аналізуючи реальні ситуації, ми повинні ставити задачі або проблеми. Розглянемо кілька ситуацій, які можна віднести до проблемних ситуацій.

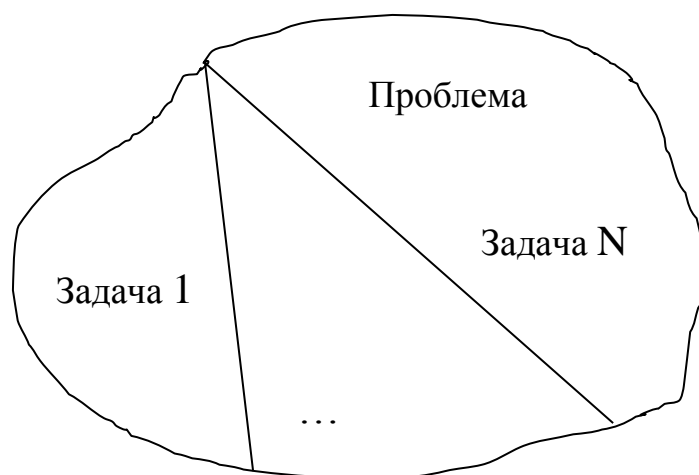


Рис. 1.1. Проблема і задачі

Перетворення рідкого чавуну і сталевого брухту в рідку сталь, що відбувається в конвертері, являє собою складне поєднання хімічних і теплових процесів, що протікають у відносно короткий час. При цьому необхідно отримати сталь заданого хімічного складу, що має певну температуру. При управлінні плавкою операторами відсоток «непотрапляння» в заданий хімічний склад буває значним. Можна керувати процесом за допомогою комп'ютера. Але що покласти в основу програм управління?

Уявімо далі, що нам вдалося виплавити сталь необхідного хімічного складу. Далі слідує отримання заготовки на машині безперервного лиття. При такій розливці рідка сталь заливається в кристалізатор з водяним охолодженням, де здійснюється первинне затвердіння (кристалізація) металу. На виході з кристалізатора в тонкій оболонці затверділого металу відбувається безперервне формування заготовки. Якщо оболонка дуже тонка внаслідок якихось відхилень («збурень») в ході процесу, наприклад, через те, що швидкість витяжки різко зросла (стрибок), може статися прорив рідкої сталі, а це є аварією і веде до тривалої зупинки машини. Далі центральна частина безперервно литої заготовки може залишитися рідкою і при вході в валки прокатного

стану, що також призведе до небажаних наслідків. Як бути в цьому випадку?

При розборі наведених ситуацій не зовсім чітко поставлена мета. Для проблемних ситуацій це цілком нормально і для організації робіт перш за все треба чітко окреслити мету. Для отримання якісної сталі необхідно вчасно зупинити конвертер. Розв'язання ситуації у використанні автоматизованої системи управління, робота якої неможлива без відповідних математичних моделей. Далі, проблема стійкості процесу безперервного розливання вирішується створенням відповідної АСУВ на основі персональних комп'ютерів і математичних моделей [4, 5].

Розвиток наукового підходу до вирішення задач обробки металів тиском отриманих злитків і узагальнення накопиченого практичного досвіду є передумовами створення ефективних технічних рішень, спрямованих на вдосконалення металургійного виробництва.

В останні десятиліття активно використовують аналітичні методи дослідження із застосуванням обчислювальної техніки та комп'ютерного моделювання процесів обробки металів тиском. Це значно прискорило проведення досліджень, дозволило залучити більшу кількість параметрів при аналізі, отже, більш глибоко вникати в суть досліджуваних процесів [6].

Але, як зазначав Ф. Е. Долженков, «на жаль, всякі великі нововведення, як правило, містять в собі можливість і негативних наслідків. Явище, що розглядаються, не є винятком відносно негативних наслідків. Експериментальні методи зневажають, в багатьох теоретичних дослідженнях прокатування неприпустимо спрощують фізичну сутність процесу, використовують моделі, далекі від реального процесу прокатування. Єдиним результатом подібних досліджень може бути лише інформаційний шум» [6].

Незважаючи на численні дослідження в теорії прокатування збереглися суперечності щодо взаємозалежності основних показників процесу. До того ж, і сама фізична сутність процесу прока-

---

---

тки ще далеко не повністю пізнана. По ряду найважливіших питань мають місце суперечливі судження, а деякі взагалі не можуть бути пояснені з позиції сучасної теорії прокатки.

Ось деякі приклади.

Відомо, що випередження і відставання металу в осередку деформації виражаються через коефіцієнти видовження в зонах випередження і відставання відповідно.

Участь випередження у формуванні витяжки смуги сприяло тому, що між випередженням і витяжкою почали розуміти пряму залежність — чим більше витяжка, тим більше випередження. Тим часом, випередження висловлює лише частину витяжки, а саме витяжку в зоні випередження — в зоні, де умови для поздовжньої деформації найменш сприятливі. У зоні випередження горизонтальні проекції питомих сил тертя і тиску мають один і той же напрямок, зворотній напрямку прокатки. Це створює опір поздовжньому переміщенню металу і сприяє розвитку розширення.

Таким чином, при інших рівних умовах розвиток зони випередження за рахунок зони відставання сприяє збільшенню як випередження, так і розширення при зменшенні загальної витяжки смуги.

Звідси впливає дуже важливий практичний висновок про можливість підвищення ефективності процесу прокатки за рахунок збільшення витяжної здатності валків і зниження енергетичних витрат при роботі з мінімальним можливим випередженням.

У зв'язку з цим становить інтерес від'ємне випередження. Наприклад, при періодичному прокатуванні свинцевих смуг розмірами  $27 \times 50 \times 900$  мм в валках із середнім діаметром 249 мм і змінним радіусом на ділянках із змінним обтисненням мало місце від'ємне випередження — до 12 % і більше без пробуксовок.

Д. І. Старченко стверджував, що від'ємне випередження — це вже не випередження, а відставання, хоча вони мають різні

значення і визначають різні швидкості смуги, відповідно, на виході і вході металу в осередок деформації.

Виходячи з викладеного, більш правильно було б визначати і відставання, і випередження, як явища входу і виходу смуги з валків зі швидкістю, відмінною від окружної швидкості валків з подальшою деталізацією цих явищ.

Ще одне протиріччя пов'язано з явищем так званого прилипання металу до поверхні валків в осередку деформації. Визнаючи в певних умовах наявність часткового або повного прилипання, багато авторів допускають помилкові судження в частині розвитку в цих умовах розширення, випередження, витяжки.

При наявності повного прилипання по дузі торкання як в поздовжньому, так і поперечному напрямках процес прокатування протікає цілком нормально. І розширення, і випередження, і витяжка отримують значний розвиток, як і в звичайному процесі. Тільки якщо в звичайному процесі випередження і розширення утворюються в основному за рахунок ковзання металу по поверхні валків, то при наявності повного прилипання випередження, яке вимірюється методом кернових відбитків, утворюється за рахунок вирівнювання швидкостей течії металу по висоті розкату за межами геометричного осередку деформації, а розширення — за рахунок переходу бічних граней розкату на контактні поверхні.

Численні дослідження випередження показали, що в міру збільшення обтиску воно спочатку зростає, а потім, досягнувши деякого максимального значення, знижується майже за симетричною кривою. Це ж впливає і з аналізу залежності між кутами захоплення  $\alpha$ , нейтрального перерізу  $\gamma$  і тертя  $\beta$ , запропонованої І. М. Павловим.

У реальних умовах при високих обтисненнях виявлена інша залежність. Так, під час прокатування свинцевих зразків товщиною 12,5 мм в валках діаметром 125 мм з грубою накатаною поверхнею і при середніх обтисненнях випередження спочатку зростає. Але, досягнувши максимуму, воно незначно падає, потім

---

---

при подальшому збільшенні обтиснення різко зростає і при обтисненні 85 % досягає 6,8 %. Якісно така ж залежність відмічена і під час гарячої прокатки в гладких шліфованих валках в вакуумі.

Таке аномальне зростання випередження при підвищених обтисненнях не може бути пояснено з позицій сучасної теорії прокатки. Тим часом, пояснення цього феномена може істотно збагатити наші уявлення про кінематику і динаміку процесу поздовжньої прокатки [6].

В даний час поряд з розвитком методів розв'язання певних технічних задач все більша увага приділяється проблемам методології проектування, взагалі інженерної діяльності. Перш за все це пов'язано з тим, що ускладнення технологічних процесів і задач, що стоять перед фахівцями, перехід до складних технічних систем відбувається в протиріччі з традиційними принципами проектування та інженерії, коли після вибору одного з варіантів технологічного процесу для нього здійснюється розробка технічної документації, купується обладнання, виготовляється оснащення тощо. Після апробації процесу може виявитися, що реальні показники процесу значно відрізняються від прийнятих для проектування. Створюється можливість проникнення у виробництво неефективних процесів. Нове — це завжди пошук, ризик. Але в даний час такий пошук, здійснюваний методом проб і помилок, в умовах складного виробництва обходиться дуже дорого. Традиційні методи проектування стають малоефективними.

Основні труднощі проектування на сучасному етапі пов'язані з синтезом, з взаємною ув'язкою всього різноманіття майбутньої техніки і технології. Ці труднощі зростають експоненціально зі збільшенням числа параметрів, які визначають процес. Розв'язання наявних проблем проектування технологічних процесів може бути досягнуто на основі розробки і використання нових науково обґрунтованих методів проектування. При цьому першочерговим завданням є створення форми системного опису процесу [7].

## 1.2. Основи прикладного системного підходу

У самій природі науки лежить прагнення до синтезу та узагальнення знань. Виявлення і вивчення конкретного наповнення цього процесу — завдання сучасних досліджень в галузі наукознавства. Більшість сучасних наук побудована за системним принципом. Системний підхід ґрунтується на тому, що обраний об'єкт розглядається як сукупність взаємопов'язаних елементів (компонентів), що має вхід (ресурси), вихід (мета), зв'язки з зовнішнім середовищем та, як правило, зворотний зв'язок. Реалізація підходу являє собою сучасну форму застосування теорії пізнання і методології до дослідження процесів, що відбуваються в природі, техніці, суспільстві, мисленні. Сутність системного підходу орієнтована на реалізацію вимог загальної теорії систем, згідно з якою об'єкт при його дослідженні повинен розглядатися як велика і складна система та, одночасно, як елемент більш загальної системи.

Об'єктом наукового дослідження є предмет або явище матеріального світу, які існують незалежно від людської свідомості або їх відображення в людській свідомості. Об'єкт дослідження може бути як матеріальним (кристал, теплота, швидкість тощо), так і теоретичним (абсолютно тверде тіло, ідеальний газ, точка тощо). Матеріальні об'єкти дослідження поділяються на натуральні (фізичні, природні), що існують у природі, та штучні (технічні), створені цілеспрямовано (рис. 1.2).



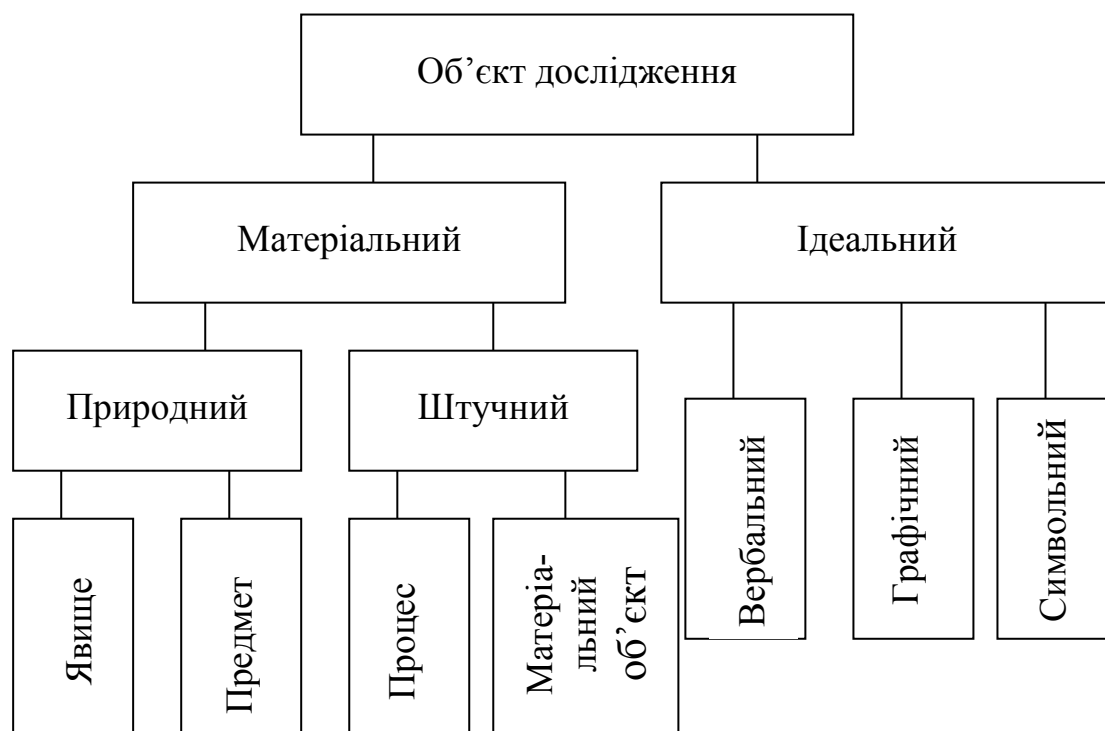


Рис. 1.2. Види об'єктів наукового дослідження

Серед штучних об'єктів виділяються технічні об'єкти та процеси. Основною особливістю технічних об'єктів є їх цілеспрямоване створення за певним образом. Створення єдиної методики сучасної інженерної діяльності як взаємозв'язаних процесів дослідження та проектування технічних об'єктів ґрунтується на використанні системного підходу, що дає змогу розглядати об'єкт дослідження і об'єкт проектування як технічну систему, призначену для виконання заданих функцій і взаємодії зі зовнішнім середовищем.

Сучасні технологічні процеси обробки металів тиском є складними системами, які визначаються великим числом параметрів. В даний час для розгляду складних систем широко застосовуються методи системного комплексного дослідження. Основні ідеї і принципи проектування та дослідження складних систем виражені в системному підході. Для сучасного фахівця вони є очевидними і природними, проте їх дотримання і реалізація ча-

сто пов'язані з певними труднощами, зумовленими особливостями ситуації. Найбільшу популярність здобув системний аналіз. Діючі інженери використовують системний підхід без звернення до посібників із системного аналізу. Проте інтуїтивний підхід без застосування правил системного аналізу може виявитися недостатнім для вирішення завдань інженерної діяльності, що чимраз більш ускладнюються.

*Основний загальний принцип* системного підходу полягає в розгляді частин явища або складної системи з урахуванням їх взаємодії. Системний підхід включає виявлення структури системи, типізацію зв'язків, визначення атрибутів, аналіз впливу середовища.

Системний підхід розглядають як напрям наукового пізнання і соціальної політики. Теорія систем — дисципліна, в якій конкретизуються положення системного підходу; вона присвячена дослідженню і проектуванню складних, в тому числі технічних, систем, можливо слабо структурованих. Характерними прикладами таких систем є виробничі системи.

Вже на етапі проектування приймається, що досягнення мети системи відбувається у багатокрокових процесах прийняття рішень. Тому методи ухвалення рішень часто виділяють в окрему дисципліну, яка називається «Теорія прийняття рішень».

Системний аналіз об'єднав цілий ряд напрямків, таких як системотехніка, системне управління проектами, системне проектування організацій тощо, в рамках яких були успішно розв'язані багато задач проектування складних систем [7].

Конструктор і технолог, які створюють нові види продукції, розробляють і вдосконалюють різні об'єкти техніки і технології, мають справу з так званими технічними об'єктами. Технічних об'єктів багато, і вони дуже різноманітні, але є щось спільне, властиве їм усім: будь-який об'єкт складається із сукупності окремих елементів; елементи можуть володіти не тільки різною формою, але і різними фізико-хімічними властивостями; елементи

---

---

певним чином пов'язані між собою. Ці загальні характеристики і визначають будь-який об'єкт як систему.

Системою будемо називати таку сукупність елементів, що володіють різними властивостями, параметрами і просторовою структурою, яка забезпечує виконання визначених цілей та функцій. Безперервно лита заготовка, електросталеплавильна піч, прокатний стан, технологічний процес виробництва певного виду прокату, тощо — все це системи в металургійній промисловості. Узагальнюючи, відзначаємо, що система — це не просто множина елементів, а їх сукупність, пов'язана технологічно, структурно, функціонально.

Ефективне вирішення інженерної задачі можливо лише на основі всебічного, цілісного розгляду розроблюваної системи та її розвитку в процесі взаємодії з навколишнім середовищем. Лише такий системний підхід здатний привести до новаторських рішень, включаючи складні винаходи і наукові відкриття.

В теорії систем користуються низкою термінів, серед них до базових слід віднести такі поняття.

*Система* — множина елементів, які перебувають в стосунках і зв'язках між собою при досягненні деякої мети.

*Елемент* — складова системи, яку при проектуванні та аналізі недоцільно піддавати подальшому розчленуванню.

*Складна система* — система, яка характеризується великим числом елементів і великим числом взаємозв'язків елементів. Складність системи визначається також видом взаємозв'язків елементів, властивостями цілеспрямованості, цілісності, розчленування, ієрархічності, багатоаспектності.

*Підсистема* — частина системи (підмножина елементів та їх взаємозв'язків), яка має властивості системи.

*Надсистема* — система, стосовно якої дана система є підсистемою.

*Структура* — відображення сукупності елементів системи та їх взаємозв'язків. Поняття структури відрізняється від поняття

самої системи також тим, що при описі структури беруть до уваги лише типи елементів і зв'язків без конкретизації значень їх параметрів.

*Параметр* — величина, яка виражає властивість або системи, або її частини, або середовища, що впливає на систему. Параметри розділяють на зовнішні, внутрішні та вихідні, що виражають властивості елементів системи, самої системи, зовнішнього середовища відповідно. Вектори внутрішніх, вихідних і зовнішніх параметрів можна позначати, відповідно.

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \vec{R} = (r_1, r_2, \dots, r_k)$$

*Фазова змінна* — величина, яка характеризує внутрішнє наповнення елемента або підсистеми.

*Стан* — сукупність значень фазових змінних, зафіксованих в одній часовій точці процесу функціонування.

*Динаміка системи* — зміна стану системи в процесі функціонування.

*Вектор змінних (вектор змінних стану)* — обмежена за кількістю множина фазових змінних, за умови визначення поведінки системи набором їх значень.

*Простір станів* — множина можливих значень вектору змінних стану.

*Фазова траєкторія* — представлення динаміки системи у вигляді послідовності точок в просторі станів.

Будь-яка технічна система володіє такими системними характеристиками, як зв'язок з навколишнім середовищем  $H$ , функція  $F$ , структура  $S$  і сукупність властивостей.

Навколишнє середовище  $H$  системи теоретично включає все, що не входить в дану систему. Під функцією розуміють деяку стабільну здатність системи до певних дій (рис. 1.3).

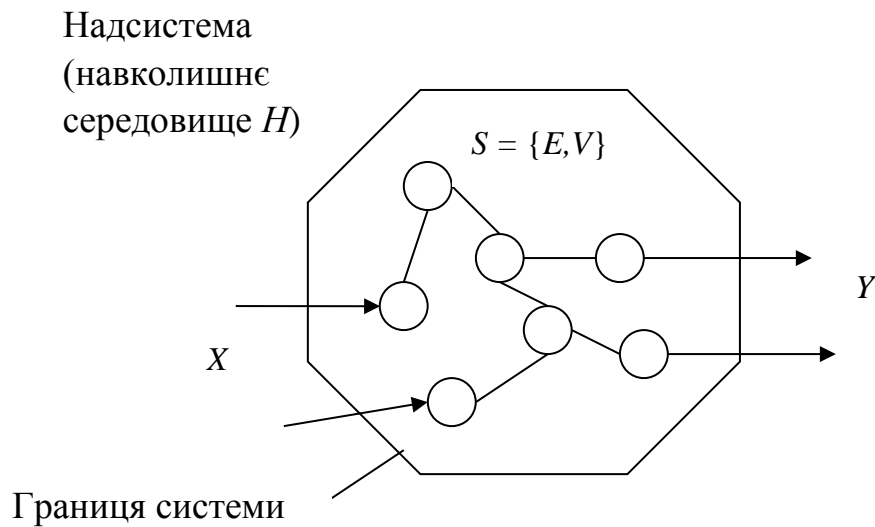


Рис. 1.3. Об'єкт як система

Поняття структури  $S$  характеризує внутрішню організацію, порядок і побудову системи, тобто — це сукупність елементів і відносин між ними. Якщо  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  — множина елементів, а  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  — множина відносин між ними, то структура системи може бути представлена у вигляді графа  $S = \{E, V\}$ . Вхід системи являє собою зовнішнє відношення «навколишнє середовище  $\rightarrow$  система», а вихід — зовнішнє відношення «система  $\rightarrow$  довкілля».

Кожна система, її елементи мають властивості  $Z$ , властивим саме цій системі і точно її визначальними, такими, наприклад, як розміри, маса, швидкість, форма, а також технологічність, транспортабельність і особливо здатність що-небудь робити (або для чого-небудь бути призначеною), тобто функціонувати. У зв'язку з цим для сукупної характеристики системи вибирають ряд істотних властивостей

$$Z = (z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Залежно від виду елементів, з яких складається система металургійної промисловості, можна виділити:

$Q$  — систему (систему типу виріб), елементами якої є складові вироби (наприклад, безперервно лита заготовка, круглий профіль, швелер, катанка тощо);

$T$  — систему (технічну систему), елементами якої є деталі і вузли технічного об'єкта (технологічного обладнання, машини тощо);

$P$  — систему (систему типу процес), елементами якої є виробничі операції. Це може бути або технологічний процес, або процес транспортування. Для даних систем розглядається три характерні типи завдань.

Завдання аналізу — задана структура системи, необхідно визначити характер та особливості її функціонування.

Завдання синтезу — задані характер функціонування та інші вимоги до системи, необхідно визначити структуру, яка задовольняє поставленими вимогами.

Завдання «чорного ящика» — задана система, структура якої невідома або відома частково, визначити її функціонування і, можливо, структуру.

У техніці дисципліну, яка спрямована на дослідження складних технічних систем, їх проектування, вдосконалення по результатах експлуатації, часто називають системотехнікою.

Предметом системотехніки є, по-перше, організація процесів створення, використання і розвитку технічних систем; по-друге, методи і принципи проектування і дослідження технічних систем.

В системотехніці важливо правильно сформулювати цілі системи й організувати дії з позиції поставлених цілей. Тоді можна відокремити першочергові частини і розділи при проектуванні й моделюванні, потім перейти до постановки оптимізаційних задач. Інтерпретація і реалізація системного підходу мають місце в множині підходів з іншими назвами. Такими є структурний, блочно-ієрархічний, об'єктне орієнтований підходи.

---

---

При структурному підході виконують синтез варіантів системи з компонентів (блоків) і оцінюють варіанти при їх частковому переборі з попереднім прогнозуванням характеристик компонентів.

Блочно-ієрархічний підхід при складанні або аналізі системи використовує ідеї декомпозиції складних описів об'єктів і відповідно засобів їх створення на різних ієрархічних рівнях з врахуванням відповідних аспектів, вводить поняття стилю проектування (висхідне і низхідне), встановлює зв'язок між параметрами сусідніх рівнів.

Низка важливих структурних принципів, використовуваних при розробці інформаційних систем, передусім їх програмного забезпечення, виражена в об'єктно-орієнтованому підході до проектування. Цей підхід має такі переваги у вирішенні проблем управління складністю та інтеграції:

- 1) вносить в моделі додатків велику структурну визначеність, розподіляючи представлені в додатку дані і процедури між класами об'єктів;
- 2) скорочує об'єм специфікацій, завдяки введенню в описи ієрархії об'єктів і стосунків наслідування між властивостями об'єктів різних рівнів ієрархії;
- 3) зменшує вірогідність спотворення даних унаслідок помилкових дій даних в об'єктах.

Для всіх підходів до проектування складних систем характерні такі особливості:

1. Структуризація процесу проектування, що виражається декомпозицією проектних завдань і документації, виділенням стадій, етапів, проектних процедур. Ця структуризація є суттю блочно-ієрархічного підходу до проектування.
2. Ітераційний характер проектування.
3. Типізація й уніфікація проектних рішень і засобів проектування.

Для якісної характеристики складних систем використовують такі поняття:

*Цілісність* — характеризує взаємопов'язаність елементів і наявність залежності вихідних параметрів від параметрів елементів, при цьому більшість вихідних параметрів не є повторенням або сумою параметрів елементів.

*Ієрархічність* — виражає можливість та доцільність ієрархічного опису, тобто представлення у вигляді декількох рівнів, між складовими яких є відносини ціле-частина.

*Цілеспрямованість* — властивість штучної системи, що виражає призначення системи. Ця властивість потрібна для оцінки ефективності варіантів системи.

Складовими частинами системотехніки є такі основні розділи:

- ієрархічна структура систем, організація їх проектування;
- аналіз і моделювання систем;
- синтез та оптимізація систем.

При моделюванні систем розрізняються два підходи:

- створення моделей складних систем (modeling);
- аналіз властивостей систем на основі дослідження їх моделей (simulation).

При синтезі також розрізняють два напрями діяльності:

- синтез структури проектованої системи (структурний синтез);
- вибір значень параметрів елементів системи (параметричний синтез).

Ці напрями діяльності відносяться до області ухвалення проектних рішень.

З урахуванням громіздкості системного підходу при розв'язанні складної задачі або вирішенні проблеми доцільно науково представити основні етапи використання системного аналізу.

**Етапи системного аналізу.** Системологія, або системний аналіз, є прикладною наукою. Вона спрямована на розв'язання



«життєвих», слабо структурованих задач. Укрупнено системний аналіз складається з чотирьох етапів постановки задач, структуризації системи, побудови і дослідження моделі [8]. Зручно користуватися блок-схемою, яка візуалізує процес (рис. 1.4).

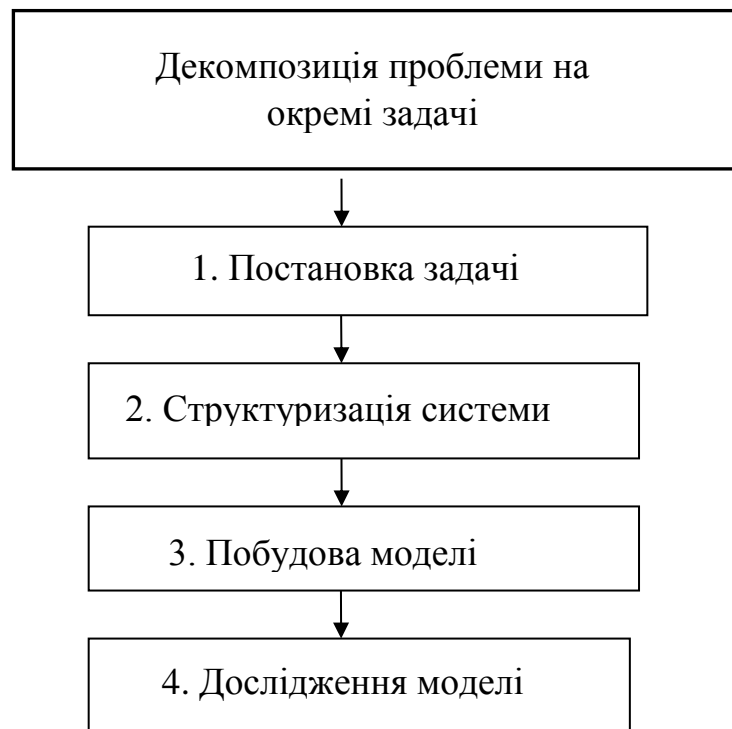


Рис. 1.4. Блок-схема системного розв'язання задачі

**Постановка задачі.** На цьому етапі потрібно з'ясувати, що ми хотіли від керованої системи — для чого вона створена, як функціонує, в яких термінах може бути сформульована її мета і в чому вона полягає, як оцінюється ефективність її роботи, які існують обмеження. З'ясування відповідей на ці питання практично не піддається формалізації. Успіх визначається мистецтвом і досвідом фахівців з системного аналізу, глибиною розуміння досліджуваної системи, умінням встановити контакти з працюючими в системі фахівцями. В той же час цей початковий етап має

визначальне значення, від нього залежить успіх всієї подальшої роботи.

**Структуризація системи.** Цей етап починається з локалізації системи, встановлення її меж. Для цього визначають повний набір елементів, в тій чи іншій мірі пов'язаних з поставленим завданням, і ділять їх на два класи — ті, що входять у досліджувану систему, і її зовнішнє середовище. Визначення елементів системи і її зовнішнього середовища істотно залежить від постановки задачі.

Структуризація даної системи полягає в розбитті її на підсистеми відповідно до поставлених завдань. Взагалі кажучи, ділити систему на підсистеми можна за будь-якою ознакою, але важливо знайти таку структуру, яка забезпечує найкращу ефективність розв'язання задачі. Не можна забувати при цьому, що сукупність функцій, які виконуються підсистемами, забезпечує виконання функцій системи в цілому. При необхідності кожна підсистема може бути теж структурована.

У зовнішньому середовищі локалізують системи, яким досліджувана система або підпорядкована, або перебуває з ними у взаємодії. Визначаються пріоритети цих систем за принципом близькості зв'язків з досліджуваною.

Завершується етап структуризації визначенням всіх істотних зв'язків між досліджуваною системою і системами, виділеними у зовнішньому середовищі.

**Побудова моделі.** Ми створюємо для себе певне уявлення про досліджуваний об'єкт або процес, що допомагає краще зрозуміти його функціонування і побудову, його характеристики, тобто створюємо модель. Моделі значно полегшують розуміння системи, дозволяють проводити дослідження в абстрактному плані, прогнозувати поведінку реальної системи у важливих для нас умовах. Основне призначення і перевага моделі полягає в тому, що в ній сконцентровані важливі чинники реальної системи, які підлягають вивченню в конкретному дослідженні. Несуттєві

фактори або відсутні в моделі, або відображені в ній в невеликому ступені.

Найбільш важлива перевага моделі — можливість простими засобами змінювати її параметри; вводити деякі зміни з метою вивчення реакції системи. В реальних умовах отримати аналогічні відомості значно важче і дорожче, а іноді і просто неможливо (наприклад, вивчення роботи системи в аварійних умовах).

Щоб модель можна було добре вивчити і проводити з нею експерименти, вона сама повинна бути досить простий. Однак чим простіше модель, тим в меншій мірі вона відповідає процесу або об'єкту, що досліджується. Тому моделювання завжди компроміс між простотою моделі і точністю, яка забезпечується нею.

При моделюванні складних систем використовують різні види моделей. Найбільш потужним засобом дослідження, аналізу і синтезу є математичні моделі.

**Дослідження моделі.** Цей етап проводиться після того, як модель отримана і перевірена на відповідність (адекватність) реальної системі. Основним призначенням цього етапу є з'ясування поведінки модельованої системи в різних умовах, при різних станах самої системи та її зовнішнього середовища. Для цього варіюють параметри моделі, що характеризують стан об'єкта, і задають на її входи різні значення параметрів. Отримані результати дозволяють з'ясувати поведінку реальної системи в відповідних умовах і визначити, які слід ввести зміни в модель, а потім і в реальну систему для поліпшення її функціонування. Системний підхід є не стільки засобом для розв'язання задач, скільки методом постановки завдань. Це якісно вищий, ніж просто предметний, спосіб пізнання.

### **1.3. Прикладні застосування системного аналізу**

Системний підхід в теорії і технології обробки металів тиском не призначений для заміни традиційних методів аналізу про-

цесів. Велика частина відомостей, необхідних для опису процесів формозміни, змащення, витрат енергії і зносу з системної точки зору, може бути отримана за допомогою традиційних методів аналізу. Технологічні параметри, такі, як напруги, деформації, потужність і робота при обробці, потік і кількість отриманого тепла та інші важливі показники процесу обробки, визначаються відомими інженерними або науковими методами. При застосуванні системних методів до складного досліджуваного об'єкта системний підхід проявляється в формах будівництва моделей, тобто наведення системи у вигляді структурної схеми (блок-схеми) або системи рівнянь / нерівностей таким чином, щоб можна було використовувати модель для математичного дослідження характеристик системи. Далі розвиваються логічні системні підстави, за допомогою яких можна краще дослідити процеси в системі, враховуючи різні аспекти і впливаючі фактори. У загальній теорії детальний математичний аналіз слід використовувати після обговорення основних понять, він призначений для уточнення і розвитку системного мислення.

В разі механічної системи опис за допомогою простих співвідношень між входами і виходами недостатній: функціональний опис системи має бути доповнено докладним вивченням структури системи і впливів її зміни під дією трибологічних процесів на функціональну поведінку системи. Щоб розробити зручну основу для опису динамічної функціональної поведінки і динамічного структурного стану системи, потрібно ввести деякі спрощення: перше спрощення слід зробити, застосовуючи методи «розподілу чорного ящика» або «відділення» системи. Розподіл чорного ящика ефективний в природничих або технічних науках: модель може поділятися на менші ящики до тих пір, поки діючі основоположні принципи [9]. Відділення від системи здійснюється за допомогою введеної оболонки. Оболонку системи слід розмістити як можна ближче до провідних елементів механічної систе-

---

---

ми, формулюючи задачу для взаємодіючих поверхонь у відносному русі.

Прийняте формулювання системного підходу для механічних систем повинне включати наступні етапи:

*А. Щодо функцій системи*

1. Відділення системи від мегасистеми (надсистеми) шляхом вибору оболонки (границь).
2. Визначення всіх маючих значення входів і виходів.
3. Опис функціональних співвідношень між входами і виходами.

*Б. Щодо структури системи*

1. Ідентифікація елементів системи.
2. Визначення взаємозв'язків між елементами.
3. Визначення відповідних властивостей елементів.

Із застосуванням запропонованого трактування системного підходу розглядається задача поздовжньої сталості розкату при прокатуванні [10].

Використовується поняття самоорганізації. Самоорганізація — це здатність систем в природі і техніці, що розвиваються, до самоускладнення, створення більш впорядкованих структур у ході еволюції та їх спрямованості знаходити ефективні альтернативи об'єднанням в системи з зменшеною енергоємністю.

Зокрема, вдосконалення процесів прокатки для забезпечення ресурсозбереження та підвищення безпеки виробництва в сучасних умовах вимагає залучення системного підходу. У його прикладних аспектах технологічний процес можна розглядати як динамічну систему, що розвивається та зберігає стійкість. Оцінка і дослідження стійкості служить вдосконаленню технології прокатки.

Зміни технологічних параметрів процесу прокатки при його вдосконаленні повинні бути встановлені таким чином, щоб не змінився стан системи-технології, що оцінюється як стійке: розкат деформується в клітях прокатного стану в нормативному ре-

жимі, варіації величин не призводять до неконтрольованого зміни параметрів.

Відомо [11, 12], що через порушення умов захвату розкату в одній з клітей стану може початися пробуксовка, яка і буде приводити до неконтрольованої зміни стану динамічної системи. Саме в цьому напрямку рекомендується розглядати критеріальну параметризацію поздовжньої стійкості прокатки. Допустимі стабільні незначні зміни усереднених показників процесу. Якісна зміна таких показників (перехід від від'ємних до додатних значень, скачки інтенсивності зміни величин) визначають границю стійкості і нестійкості стану системи.

Прийнято оцінювати стійкість процесу прокатки наявністю зони випередження в осередку деформації, яка визначається кутом нейтрального перетину  $\gamma$  [1]. При  $\gamma > 0$  існує ресурс сил тертя, які сприяють захопленню розкату валками. Граничним буде випадок, коли  $\gamma = 0$  і далі за формулою Екелунда-Павлова визначається кут захоплення  $\alpha = 2f$ . Однак проведені дослідження показали, що і при розвиненій зоні випередження можливі випадки, коли з ростом  $\alpha$  процес обривається через буксування, хоча і  $\alpha < 2f$ . В роботі О. П. Чекмарьова та ін. [13] стверджується, що причиною втрати рівноваги смуги при наявності випередження є значні розтяжні поздовжні нормальні напруження, які виникають під час прокатки з кутами захоплення, більшими, ніж коефіцієнт тертя.

Необхідні для аналізу епюри контактних напружень можна отримати при розв'язанні диференціального рівняння Т. Кармана з використанням коректної для умов завдання моделі тертя. Знаючи епюри контактних напружень і використовуючи умову пластичності, неважко розрахувати поздовжні внутрішні напруження  $\sigma_x$ , поточні поздовжні сили та їх середньо інтегральне результуюче значення. У подальшому — використання результуючої поздовжніх сил в якості критерію поздовжньої стійкості, тобто збереження системності технології прокатки при виконанні заходів по її вдосконаленню, наприклад, ресурсозбереження.

Термін «сталість» («стійкість») дуже багатозначний в науково-технічній літературі, будучи у вживанні і при дослідженні класичної стійкості по Ляпунову, і при аналізі організаційної жорсткості. Для всіх можливих трактувань цього терміна загальним моментом є інтуїтивне розуміння того, що слово «стійкий» позначає, що щось (іншими словами, система) здатне реагувати на зміни в навколишньому середовищі (наприклад, збурення, випадкові перешкоди) та як і раніше зберігати приблизно ту ж саму поведінку протягом скінченого або, можливо, нескінченного проміжку часу. Абсолютно ясно, що при настільки нечіткому і туманному «визначенні» спроби математичного аналізу стійкості свідомо скрутні. Проте, таке «визначення» створює деяку інтуїтивну основу для більш точних висновків.

Для більшої ясності викладу зручно ввести дві категорії поняття стійкості. Першу з них назвемо «класичною», вона використовується для аналізу в задачах дослідження результатів зовнішніх впливів на фіксовані системи, коли змінюється лише навколишнє середовище, але не сама система. Як простий приклад подібної ситуації можна навести класичний маятник.

На відміну від класичного рівноважного підходу, центральним елементом сучасних поглядів на питання стійкості є поняття «структурної стійкості». Тут основним завданням є виявлення якісних змін в траєкторії руху/розвитку при змінах структури самої системи. Фактично вивчається поведінка даної системи по відношенню до поведінки всіх «близьких» до неї аналогічних систем.

Якщо розглянута система веде себе «майже так само», як і «сусідні», то кажуть, що вона «структурно стійка»; в іншому випадку — «структурно нестійка». Для уточнення цього поняття необхідно чітко визначити, що таке «близька» система, який клас допустимих збурень і що значить «схожість поведінки». Проте, основна ідея залишається прозорою, досить малі зміни структурно стійкої системи повинні призводити до відповідно малих змін її поведінки.

Положення стійких рівноважних станів і відповідних областей тяжіння залежить від динаміки досліджуваної системи, тому важливо знати, як вони змінюються при невеликій зміні самої системи. Питання щодо того, чи призведе така зміна до зміщення даного стану системи в іншу область тяжіння, представляє великий практичний інтерес, оскільки це призвело б до різких якісних змін в подальшій поведінці системи. В якості одного з інструментів дослідження таких питань може розглядатися теорія катастроф.

Зазвичай в теорії катастроф передбачається, що поведінкою досліджуваного процесу управляє деяка потенційна функція, локальні мінімуми якої відповідають рівноважним станам. Дуже важливо мати на увазі, що при такому підході не обов'язково точно знати, що це за функція — досить визнати лише сам факт її існування. Для механічних систем — це функція енергій або потужностей. Припустимо далі, що можна вимірювати значення деяких вихідних змінних, що генеруються системою у відповідь на вхідні дії. В «елементарній» теорії катастроф передбачається, що всі рівноважні виходи фіксовані, тобто фіксують значення вхідних параметрів і чекають переходу в рівноважний стан. Потім змінюють значення вхідних параметрів і знову чекають встановлення рівноваги. За результатами випробувань (натурних або обчислювальних) отримують поверхню рівноважних станів в просторі виходів, яку можна зобразити як багатозначну функцію входів. У першому наближенні можна сказати, що «катастрофа» відбувається тоді, коли виникає стрибкоподібна зміна вихідних параметрів при безперервній зміні входів. Для того щоб проілюструвати ці міркування про важливість аналізу областей тяжіння, приймаємо, що перехід від однієї області тяжіння до області тяжіння іншого стійкого стану можна зобразити, як це показано на рис. 1.5.

Точка  $X$  спочатку належить області тяжіння стану  $P$ , яка розташована «ближче». Внаслідок змін динаміки системи область



тяжіння  $P$  звужується з  $I$  до  $II$ , а область тяжіння  $Q$  розширюється з 1 до 2. Тепер точка  $X$  притягається до  $Q$ , а не до  $P$ .

Звичайно, положення  $P$  і  $Q$  самі залежать від структури системи, тому об'єкти, зображені точками, по суті, є областями, що містять  $P$  і  $Q$ , але важливо лише те, що області  $P$  і  $Q$  відокремлені одна від одної, отже, збурення в структурі системи, що призводять до зображеної вище ситуації породжують розриви безперервності в виходах, якщо спостерігаються виходи виявляються рівноважними станами.

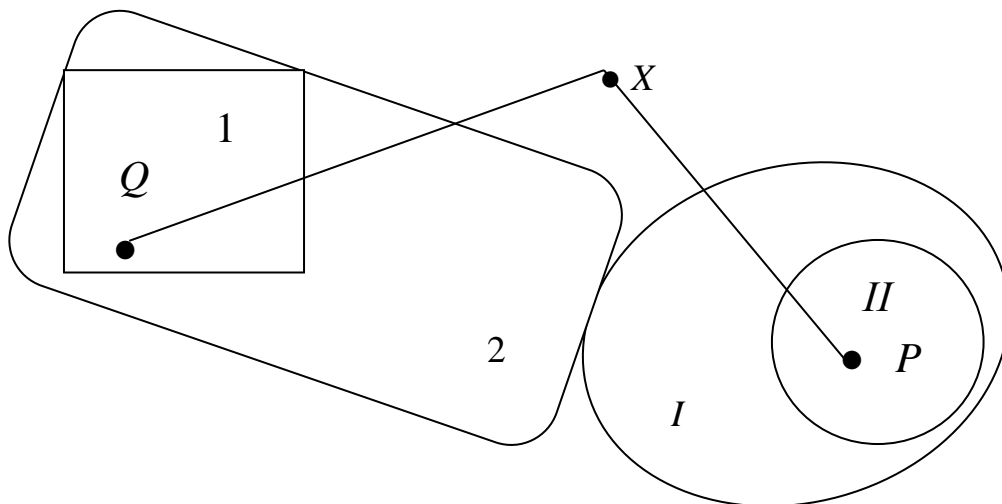


Рис. 1.5. Зсув областей тяжіння

Далі коротко торкнемося поняття «адаптивності». Визнано, що одна з найбільш бажаних властивостей системи є її здатність сприймати зовнішні впливи (очікувані або неочікувані) без незворотних фатальних змін в її поведінці. Іншими словами, адаптованість в деякому сенсі є мірою життєздатності або виживання системи. Природно, для формулювання цього поняття в математичних термінах необхідно точно визначити, які дії вважаються «допустимими» і що слід розуміти під «виживанням». Проте, навіть такий інтуїтивний опис адаптованості показує, що це поняття тісно пов'язане з поняттям області тяжіння і зі зміщенням цих об-

ластей під дією природних або штучних збурень. Якщо ці збурення переміщують даний стан системи в область тяжіння «фатального стану», то ясно, що система не має властивості адаптованості по відношенню до даного класу збурень. В іншому випадку вона в тій чи іншій мірі володіє адаптивністю.

Переходимо до конкретики системного аспекту поздовжньої стійкості прокатування. В основі методу, який дозволяє оцінити граничну захоплюючу здатність валків в сталому режимі [14], лежить розгляд поздовжніх нормальних напружень і сил, що виникають в металі при пластичній деформації. Вихідними даними для їх визначення є епюри контактних нормальних напружень, які можна отримати при розв'язанні диференціального рівняння Т. Кармана з використанням коректної для даних умов моделі тертя. Знаючи розподіл тиску в зоні контакту, і використовуючи рівняння пластичності, неважко розрахувати поздовжні внутрішні напруги, поточні поздовжні сили та їх середньо інтегральне результуюче значення. При стійкому прокатуванні ця результуюча не може бути спрямована по ходу прокатки (бути додатною), тому що вона є силою опору, реактивної силою. З цього випливає, що граничні умови прокатки наступають тоді, коли сила дорівнює нулю. Якщо ця сила є стискаючою (від'ємною), процес відбувається стійко і розкат в осередку деформації знаходиться в рівноважному стані.

При цьому, як уже згадувалося, втрата рівноваги смуги може виникати і при наявності зони випередження. Це можливо тому, що при подальшому збільшенні кута захоплення втягуючих метал в валки сил стає недостатньо, щоб одночасно погасити приріст виштовхуючи сил і врівноважити результуючу.

Аналіз цієї результуючої дозволяє дати оцінку поздовжньої стійкості розкату в осередку деформації, і встановити чи будуть дотримуватися умови, при яких прокатка ведеться без пробуксовки. Таким чином, поздовжню стійкість смуги в осередку деформації, тобто прокатку без пробуксовок, можна оцінити за значен-

---

---

ням середньо інтегральної результуючої сили пластично деформованого металу.

#### 1.4. Моделювання та моделі

Наукові й науково-технічні дослідження тісно пов'язані з моделюванням. Поняття модель і моделювання широко використовуються фахівцями й мають різні застосування в діяльності.

Під *моделлю* об'єкта в науці і техніці зазвичай розуміють інший об'єкт, що імітує деякий набір властивостей модельованого об'єкта. *Моделюванням* називається заміна одних об'єктів (оригіналів) іншими (моделями), які відображають властивості та поведінку об'єктів, та дії дослідника з моделями.

Теорія моделювання як окремий науковий напрям теоретичного й практичного призначення відокремилася в історії наук досить недавно і становить взаємопов'язану сукупність положень, означень, методів і засобів побудови й вивчення моделей.

Будь-який об'єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, однак кожного разу дослідників цікавить скінченна та невелика їх частина. Модель не може й не повинна повторювати всі характеристики оригінала, інакше губиться призначення моделювання. Практика моделювання передбачає облік деяких змінних і відмову від інших. Тому моделі об'єктів перебувають у відношенні подібності до натури, але відрізняються від неї. Сенс етапу моделювання — забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об'єкта відповідно завданню роботи.

Перед фахівцями постає задача виділити основні в дослідженні властивості об'єкту й перенести їх на модель. Основною метою при побудові моделі за рахунок спрощення або обґрунтованої заміни об'єкту є можливість, досліджуючи модель, отримати результати, що можна застосовувати до початкового об'єкта.

Моделювання й засвоєння систем бажано виконувати з урахуванням їх природи, а прийняття рішень — з використанням апарату нечітких множин, стохастичної природи результатів обчислень, експертних висновків.

Розглянемо технологічну систему. Для дослідження причинно-наслідкових взаємозв'язків між параметрами (чинниками) та наслідками у процесі функціонування використаємо діаграму Ісікави. Діаграма Ісікави — відома як діаграма «риб'ячої кістки» (*Fishbone Diagram*), або причинно-наслідкова діаграма, а також як діаграма «аналізу кореневих причин». Ця діаграма використовує графічний спосіб дослідження та визначення найістотніших причинно-наслідкових взаємозв'язків між чинниками та наслідками у досліджуваній ситуації чи проблемі та дає можливість виявити ключові взаємозв'язки між різними чинниками та достеменно зрозуміти досліджуваний процес. Діаграма сприяє визначенню головних чинників, які впливають на проблему, що розглядається, та попередження або усунення їх дії [15].

Ключове завдання полягає в тому, щоб мати від трьох до шести основних категорій, які охоплюють усі можливі впливи. Фактично максимальна глибина такого дерева досягає чотирьох або п'яти рівнів. Коли така створювана діаграма є повною, вона відтворює доволі повну картину усіх можливих причин визначеної проблеми. Для того, щоб прийняти правильне рішення, спрямоване на вирішення проблеми або її невідповідності, проводять аналіз за якого необхідно визначити, чому той чи інший процес виходить за певні межі, тобто причину виникнення невідповідностей; внести зміни у процеси, розробити і реалізувати, корегуючи зміни з метою усунення причин цих невідповідностей. Аналізуючи невідповідності, необхідно виявити і фіксувати усі чинники, навіть ті, які видаються незначними.

Для того, щоб прийняти правильне рішення, поставлену проблему краще візуалізувати, тобто зобразити у графічному ви-

гляді. Досліджувана проблема, зображена на діаграмі, — це «голова риб'ячої кістки». «Хребет» на діаграмі умовно зображується у вигляді прямої горизонтальної стрілки. «Кістки», які зображуються нахиленими стрілками, — причини і чинники, що впливають на цю проблему. На діаграмі Ісікави у лівому напрямку відображають основні «кістки» (категорії), які мають стосунок до проблеми, що розглядається (рис. 1.6).

Усі можливі причини розподіляються за принципом «6М»:  
**Man** (Людина) — причини, пов'язані з людським чинником;  
**Materials** (Матеріали) — причини, пов'язані з матеріалами;  
**Machines** (Обладнання) — причини, пов'язані з обладнанням;

**Methods** (Методи, технологія) — причини, пов'язані з технологією роботи, з організацією процесів;

**Measurements** (Вимірювання) — причини, пов'язані з методами вимірювання.

**Management** (Керування) — причини, пов'язані з методами проектування і керування.

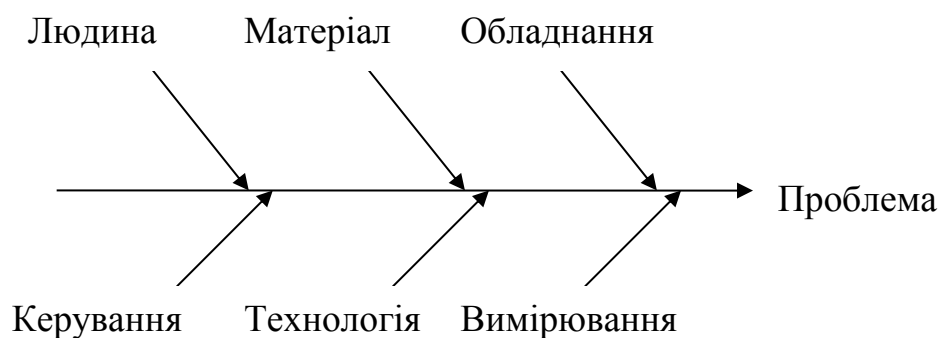


Рис. 1.6. Схема побудови діаграми Ісікави

Основні категорії розподіляють у спадному порядку, починаючи з тієї категорії, яка має найбільшу ймовірність того, що її причини викликали проблему. Тобто категорія з причинами є основною і буде розміщена ближче до «голови риби». Для кожної

категорії зображуються додаткові «кістки», що відображають окремі причини, а у них, своєю чергою, додаються свої причини. В такій спосіб отримуємо розгалужене дерево, яке зв'язує причини виникнення невідповідності, що знаходиться на різному рівні деталізації. Тобто можна дійти до первинних причин, вирішення яких істотно вплине на усунення усіх невідповідностей.

Загальні правила побудови діаграми причинно-наслідкових зв'язків:

По-перше, потрібно сформулювати проблему. Вона записується з правого боку посередині чистого аркуша паперу, до якої зліва напрямлена основна горизонтальна стрілка — «хребет».

Далі за принципом «6М» зображуються основні причини (причини рівня 1), що впливають на проблему — «великі кістки». Вони з'єднуються нахиленими стрілками з «хребтом».

Потім відображають вторинні причини (причини рівня 2), які впливають на головні причини («великі кістки»), а ті, своєю чергою, є наслідком вторинних причин. Вторинні причини записуються і розташовуються у вигляді «середніх кісток», що приєднуються до «великих». Причини рівня 3, які впливають на причини рівня 2, розташовуються у вигляді «дрібних кісток», що приєднуються до «середніх» тощо.

Під час аналізу повинні виявлятися усі чинники, навіть ті, які здаються незначними, оскільки мета схеми — знайти найправильніший шлях і найефективніший спосіб вирішення проблеми.

Причини (чинники) оцінюють і рангують за їх значущістю, виділяючи значно важливіші, які мають найімовірніший вплив на показник якості.

Діаграму треба проаналізувати на наявність усієї необхідної інформації.

Користуючись діаграмою Ісікави розглянемо вплив усіх чинників, що впливають на якісні характеристики поверхневого шару деталі за фрикційного зміцнення.

---

---

Вибираємо показник — якісні характеристики поверхневого шару.

Записуємо його посередині правого краю аркуша, проводимо до нього горизонтальну стрілку.

Визначаємо головні чинники, що впливають на якісні характеристики поверхневого шару, використовуючи метод 4М: обладнання, технологія, матеріал, вимірювання. Записуємо їх по обидва боки від «хребта» діаграми і проводимо від них стрілки до основної «кістки хребта».

В нашому випадку основними чинниками є: фізико-хімічні процеси, умови зміцнення, деталь, зміцнювальний інструмент.

Визначаємо чинники другого рівня:

для фізико-хімічних процесів:

- швидкість охолодження;
- швидкість нагрівання;
- температура нагрівання;
- масо-перенесення;
- швидкість зсувного деформування;

для умов зміцнення:

- режими обробки;
- технологічне середовище;
- технологічна схема зміцнення;
- характеристика обладнання;

для деталі:

- характеристика деталі
- матеріал;

для зміцнювального інструменту:

- фізико-механічні властивості;
- форма і розміри робочої частини;
- матеріал.

Записуємо їх поряд з відповідними чинниками першого рівня і з'єднуємо стрілками.

Визначаємо чинники третього рівня, які впливають на чинники другого рівня

Ми отримали категорії, які дають змогу детальніше охарактеризувати процес фрикційного зміцнення деталей машин, який є ефективним методом підвищення довговічності деталей машин в експлуатації. В результаті відібрана інформація, необхідна для прийняття керуючих рішень.

Приклад, пов'язаний з прокатним виробництвом – побудова діаграми причини-наслідки Ісікави для аналізу проблеми «Якість прокату», представлено на рис. 1.7.

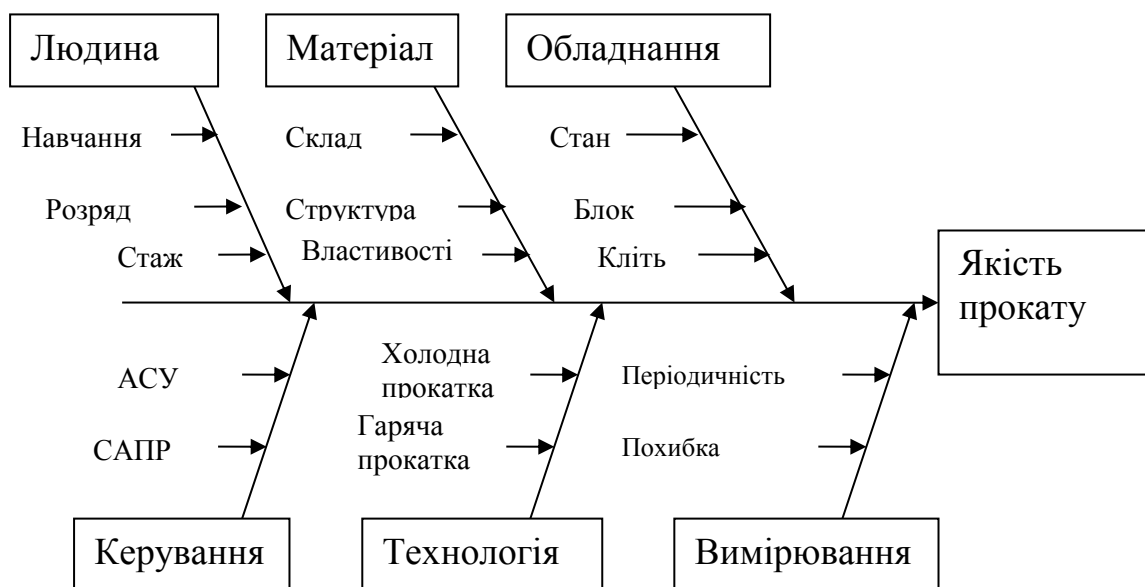


Рис. 1.7. Діаграма Ісікави проблеми «Якість прокатного виробу»

Застосування діаграми Ісікави в процесі професійної підготовки та при її вдосконаленні обумовлено наступними дидактичними перевагами:

- вона дозволяє графічно відобразити причинно-наслідкові взаємозв'язки для досліджуваної проблеми;
- дає можливість провести змістовний аналіз ланцюжка взаємопов'язаних факторів, що впливають на проблему;



- зручна і проста для розуміння при навчанні і при аналізі виробничих ситуацій.

Завдяки методичним перевагам діаграма Ісікави широко застосовується при організації виробничих і прикладних досліджень в металургії, машинобудуванні та ін. [15].

До недоліків застосування діаграми можна віднести складність правильного визначення взаємозв'язку досліджуваної проблеми і причин в разі, якщо проблема є комплексною, тобто входить складовою частиною в більш складну проблему. Іншим недоліком може бути обмежений простір для побудови і зображенні на сторінці всього ланцюжка причин даної проблеми. Але цей недолік може бути подоланий при побудові діаграми Ісікави із застосуванням програмних засобів.

Діаграма Ісікави дає змогу стимулювати творче мислення, представити взаємозв'язок між причинами і зіставити їх відносну важливість. У той самий час не розглядається логічна перевірка ланцюжка причин, що ведуть до першопричини, тобто відсутні правила перевірки у зворотному напрямку — від першопричини до результатів. Поглиблення та уточнення аналізу досліджуваних процесів можна отримати при вдосконаленні моделювання.

Усі моделі можна поділити на дві категорії: експериментальні й теоретичні моделі. Теоретичні моделі будуються на мові тієї чи іншої предметної галузі. Розрізняють фізичні, технічні, економічні моделі тощо. Часто фундаменталізація їх побудови приводить до математичних моделей, тобто у практиці дослідників усього світу прийнято на основі моделі предметної галузі записувати відповідну математичну модель. Математичні моделі можуть бути аналітичними, геометричними, топологічними, статичними, динамічними, логічними тощо, в залежності від підходів до відображення властивостей об'єктів.

Основною перевагою математичної моделі є можливість досліджувати властивості й поведінку моделі в усіх чи багатьох ситуаціях, спираючись на формальні методи встановлення відно-

шень або за рахунок обчислень. Використовуючи розроблений математичний апарат, можна спробувати вийти за межі прийнятої логіки та отримати якісно нові результати. Контрольована точність математичних методів допомагає визначити ступінь прийнятності отриманих результатів. З іншого боку, обчислювальні експерименти на основі математичних моделей дозволяють докладно та глибоко вивчати об'єкти в обсязі, недоступному іншим теоретичним методам. Особливо значущим математичне моделювання стає тоді, коли об'єкт дослідження є в одиничному екземплярі, натурний експеримент дуже тривалий або його вартість занадто висока.

Створення математичної моделі є творчим актом, оскільки для того ж самого об'єкта можна побудувати кілька різних моделей, причому алгоритм побудови не завжди формалізовано. Дослідник може взяти за основу той чи інший набір характеристик. Поведінку об'єкту можна описати, використовуючи різний математичний апарат. Наприклад, вибрати неперервну або дискретну, детерміновану або стохастичну модель. Цей вибір визначає як метод дослідження, так і (опосередковано) можливість отримати ті чи інші результати. Унаслідок різних підходів до створення математичних моделей розрізняють структурну й функціональну моделі. Структурна модель із деякою точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При її побудові структуру об'єкта спрощують. У результаті модель повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів. Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом зі зміною факторів в різних ситуаціях зі зміною впливів. Структуру об'єкта при цьому не аналізують. Така математична модель повторює поведінку об'єкта (зміну характеристик, які моделюються) у випадках, для яких встановлені результати спостережень. Виродженим випадком такого підходу є модель типу чорної скриньки. Обидва типи моделей мають переваги й недоліки. Функціональну модель зазвичай побудувати легше, але вона може втратити адекватність

---

---

за межами області експериментального дослідження. З іншого боку, більш складний структурний підхід дозволяє створити модель, яка залишиться адекватною в багатьох ситуаціях.

Однак при помилках фізичного або формального характеру при реалізації математичної моделі можна отримати неправильне рішення. Тому особливе значення отримує апробація моделей з точки зору коректності закладених у них фізичних та інших основних положень і правильності неминучих спрощень. Ця перевірка повинна проводитися на основі методів подібності і моделювання.

Роль експерименту, а разом з цим і моделювання, збільшується з розвитком предметних галузей. Експеримент являється не тільки шляхом безпосереднього розв'язання тих чи інших науково-технічних задач, але і допомагає знаходити та систематизувати нові знання.

## **1.5. Процес математичного моделювання**

Процес математичного моделювання має складну структуру, де кожен етап взаємодіє з іншими, а результати одного етапу визначають результати й можливість перебігу інших. Математичне моделювання потрібно розглядати у двох часових масштабах. Загалом процес розвивається послідовно по етапах, але на кожному етапі дослідник ітеративно повертається до вже пройдених етапів, поки не задовольниться результатом, щоб перейти до наступного. На кожній ітерації дослідник можливо знайде і виправить помилки. Кількість помилок із часом має зменшуватись, тому ступінь адекватності зростає.

На етапі аналізу предметної області можна побудувати кілька моделей різних типів. Однак на етапі тестування кардинально змінити тип моделі вже дуже скрутно. Якщо процес перебігає задовільно, то неадекватність слід виправляти на ранніх етапах. Досвід показує, що без суттєвих втрат на останніх етапах можли-

ві лише дрібні зміни, наприклад, можна підвищити точність деякого параметра.

В схематичному виді математичне моделювання можна поділити на кілька загальних етапів, які корисно словесно описати та дотримуватися у практиці досліджень.

*Аналіз предметної області.* Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, в якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта. Далі формулюють модель предметної області. Вже на цьому етапі об'єкт дослідження замінюють образом — моделлю. В ній визначають, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

*Математичне формулювання задачі.* На основі предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів та об'єктів і відображає властивості системи — закони, яким вона підпорядковується, зв'язки, що властиві його складовим частинам, тощо. Для вивчення записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Наприклад, якщо модель складається з систем рівнянь або нерівностей, тоді треба визначитися з методами їх розв'язання. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати шукані розв'язки, які в свою чергу можуть надати відповіді на питання дослідження або привести до нових знань про об'єкт.

*Числовий експеримент.* Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису об'єкту або процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними. Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Наприклад, для непе-

---

---

первної моделі будують дискретний аналог, як при розв'язанні варіаційної задачі методом скінчених елементів.

*Тестування моделі.* Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Наприклад, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригінала, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю. Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів, відповідно, а не їх кількісні характеристики. Крім того, для моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони (закон Ньютона у фізиці) або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

*Аналіз та інтерпретація результатів.* На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі. Наприклад, за допомогою методів математичного моделювання в дослідженнях О. А. Самарського було теоретично знайдено фізичний ефект Т-шару. Без цього етапу дослідження не можна вважати таким, що відбулося, оскільки воно залишається „річчю в собі” й не має практичної користі.

На основі математичного моделювання наука робить відкриття, які входять до фонду наукових знань, створюючи запас нових ідей.

### ***Основні вимоги до математичної моделі***

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деякі вимоги, що мають рекомендаційний суб'єктивний характер. Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

*Вимога адекватності.* Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

а) Правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками. Наприклад, стійкість руху в моделі свідчить про його стійкість для реального об'єкта.

б) Правильний якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності. Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

*Невраховані фактори.* Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття стійкості (грубості) моделі, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реальному середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша — стійка чи нестійка.

*Простота та оптимальність моделі.* Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність — суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба

---

---

у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами часу і ресурсів та задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних показників та осмислювати результат.

*Ієрархія змінних.* Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші — другорядними. Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни у часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення — основні масштаби шкали часу та шкали розмірів в просторі. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри. Швидкі змінні поділяють на короткочасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один усталений режим з іншим. За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином установлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних. Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул системи, до рівнянь динаміки тіла із частинними похідними, що використовують поняття температури й густини.

*Інші вимоги.* Дослідники зазначають інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі — феноменологічні й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі. У класичній механіці це, наприклад, закони Ньютона й закон Гука або Бернуллі. У процесі побудови моделі дуже важливим є правильний вибір параметрів, що характеризують стан об'єкта чи процесу, а також кількості степенів вільності, під якою розуміють кіль-

кість однорідних скалярних параметрів. Кількість параметрів може бути скінченною або нескінченною. Незважаючи на те, що реальні об'єкти мають нескінченну кількість параметрів, дослідники намагаються працювати зі скінченною кількістю, оскільки це значно полегшує аналіз і розв'язання задач. При моделюванні наперед вибраних характеристик цього зазвичай достатньо.

## **1.6. Типи математичних моделей і методологія їх конструювання**

Основою моделювання є теорія подібності, яка стверджує, що абсолютна подібність має місце лише за умови заміни одного об'єкта іншим, точно таким самим. При моделюванні абсолютна подібність не має місця, вимагається лише, щоб модель достатньо адекватно відображала властивості функціонування об'єкта, що досліджується. Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання можна поділити на детерміновані та стохастичні, статичні й динамічні, дискретні, дискретно-неперервні й неперервні. Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій. Статичне моделювання передбачає незначну змінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому. Динамічне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу. Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних моделей.

Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різницеві рівняння, рівняння з післядією та інтегральні. Вони ґрунтуються на



визначенні зв'язків приростів функцій від приростів аргументів. Вигляд математичної моделі залежить не тільки від природи реального об'єкта, але також від задач і можливостей дослідника, необхідної достовірності й точності розв'язання задачі.

Математичне моделювання можна поділити на аналітичне та імітаційне. При аналітичному моделюванні зазвичай використовують математичний апарат, тобто запис функціональних співвідношень [16]. Отримані співвідношення вивчають формальними математичними методами. При імітаційному моделюванні на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта. При розробці математичних моделей використовують такі підходи.

*Балансовий підхід.* В основі балансового підходу лежить припущення, що приріст змінної, яка описує процес, дорівнює різниці функції, що забезпечує збільшення кількості (функція приросту) і функції, що забезпечує зменшення кількості (функція збитку). Якщо розглядати проміжок часу  $\Delta t$ , то

$$x(t + \Delta t) - x(t) = B(t, x(t), \Delta t) - D(t, x(t), \Delta t).$$

Тут  $B(t, x(t), \Delta t)$  — збільшення фазової змінної, а  $D(t, x(t), \Delta t)$  — її зменшення. Одна з ефективних математичних моделей, що використовує цей підхід — модель Леонтьєва.

*Гамільтонів (варіаційний) підхід.* Найкращі результати в математичному моделюванні динамічних процесів отримані у класичній механіці [2]. Це зумовлено, з одного боку, історичними особливостями. Усі перші наукові роботи були пов'язані з морською навігацією, рухом планет тощо, тому математичний апарат розв'язання цих проблем цілком усталений. З іншого боку, для виведення рівнянь руху був запропонований формалізм Гамільтона, що добре себе зарекомендував. Він полягає в наступному. Якщо система у фазовому просторі змінює стан із положення

$x_0$  у момент часу  $t_0$  до положення  $x_1$  у момент  $t_1$ , то інтеграл (сума) рухів має бути мінімальним:

$$I[x(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t)) dt \rightarrow \min.$$

Функція  $L(t, x(t), x'(t))$  називається функцією Лагранжа та є різницею кінетичної й потенціальної енергій. Необхідна умова екстремуму функціонала  $I[x(t)]$  — рівність нулю його першої варіації. На підставі цього твердження математична модель динаміки процесу набуває вигляду рівняння Ейлера – Лагранжа

$$L_x(t, x, x') - \frac{d}{dt} L_{x'}(t, x, x') = 0.$$

Методологія побудови досить широкого класу математичних моделей така: на основі кінетичної й потенціальної енергій складають функцію Лагранжа. Математичну модель при цьому описують диференціальними рівняннями другого порядку у звичайних або частинних похідних.

*Моделі, що базуються на фундаментальних законах природи.* Найпоширеніший метод побудови моделей полягає в застосуванні фундаментальних законів природи (закони збереження енергії, матерії та імпульсу, Ньютона, закон Гука тощо) і конкретної ситуації.

*Метод аналогій.* Один із підходів, що широко застосовують при побудові математичних моделей – це метод аналогій. Якщо при моделюванні деякого об'єкта складно чи неможливо використати фундаментальні закони природи чи варіаційні принципи, то можна скористатися принципом подібності. Застосування аналогій до раніше вивчених явищ є одним із плідних підходів у моделюванні.

*Ієрархічний підхід.* Тільки у виняткових випадках вдається цілком побудувати модель. Зазвичай через багатofакторність процесу, складність залежностей і кількість зв'язків це зробити

неможливо. Тому природним стає підхід від простого до складного. При такому підході будують ланцюг (ієрархію) моделей, що поступово ускладнюються, кожна з яких включає попередню як частинний випадок.

*Лінійні й нелінійні моделі.* Моделювання з використанням лінійних систем здійснюють головним чином із таких причин:

1. За певних обмежень (малі часові проміжки) нелінійні процеси завжди можна апроксимувати лінійними (криву можна замінити відрізками прямих).

2. Точні розв'язки лінійних систем можна визначити в аналітичній формі.

3. Для лінійних систем існують ефективні методи оцінки збурень.

4. Розроблено високоякісні обчислювальні методи розв'язання лінійних систем.

Аналітичні методи розв'язання нелінійних систем є скоріш винятком, ніж правилом. Навіть якщо можна отримати розв'язок нелінійної системи в аналітичному вигляді, то виникають труднощі при її якісному дослідженні. Основною властивістю лінійних систем є принцип суперпозиції. Він полягає у такому.

Нехай входи  $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$  викликали реакцію системи  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$ . Тоді вхід, що є сумою входів  $f_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , викликає реакцію, що дорівнює сумі  $q_i(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а вхід, пропорційний входу  $f(t)$  із коефіцієнтом пропорційності  $k$ , викликає реакцію  $q(t)$  із тим самим коефіцієнтом пропорційності. Оскільки на площині цей закон є рівнянням прямої лінії, то такі системи називають лінійними. Лінійні динамічні системи частіше за все описують системами лінійних звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь у частинних похідних і лінійними різницевидами та інтегральними рівняннями. Швидкість зміни змінної пропорційна її значенню в поточний момент часу – це основне припущення при побудові лінійних динамічних систем. Вочевидь одна з перших моделей такого типу – це модель зміни чисельності населення

(Мальтуса). В її основі лежить твердження, що швидкість зміни населення пропорційна чисельності, помноженій на коефіцієнт  $k(t)$ , що дорівнює різниці коефіцієнтів народжуваності  $\alpha(t)$  та смертності  $\beta(t)$ , тобто

$$\frac{dN}{dt} = k(t) \cdot N(t), k(t) = \alpha(t) - \beta(t)$$

Модернізація лінійних моделей здійснювалась у двох напрямках. Вважалося, що в околі стаціонарного (усталеного) процесу на динаміку системи діють невеликі збурювальні впливи. Так з'явилися квазілінійні моделі

$$\dot{N}(t) = A(t) \cdot N(t) + \varepsilon F(t, N(t)).$$

З іншого боку, припускали, що коефіцієнт біля фазової змінної залежить, у тому числі, від  $N(t)$ . Таким чином уможливили обмеження області значень змінних і наблизили динаміку лінійної моделі до реального процесу. Найпростіша модель такого типу — це система Лотки — Вольтерра [16]:

$$\begin{cases} \dot{N}_1(t) = [\alpha - \beta N_2(t)] N_1(t), \\ \dot{N}_2(t) = [\gamma - \delta N_1(t)] N_2(t). \end{cases}$$

## 1.7. Завдання № 1. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків при вирішенні проблемного питання

Використовуючи діаграму Ісікави, виявити причинно-наслідкові зв'язки при вирішенні проблемного питання (за можливості метризації найбільш значимі фактори для цільової функції), яке є основним за темою кваліфікаційної роботи.

Наприклад, якщо тема роботи стосується досліджень поздовжньої сталості розкату в процесі прокатування (проблемне питання), то цільовою функцією є показник сталості і, відповідно аналізуються всі фактори, які можуть впливати на нього. Інший

---

---

приклад, якщо тема роботи стосується досліджень зношення валків певної кліти (групи клітей), відповідно, цільовою функцією є величина зношення і аналізуються всі фактори, які можуть впливати на неї.

Послідовність дій при виконанні завдання:

- визначення проблемного питання (цільової функції);
- побудова діаграми Ісікави з відображенням основних факторів з використанням принципу 6М;
- доповнення діаграми вторинними факторами для кожного з основних з попереднього етапу;
- проведення аналізу вторинних факторів з метою виявлення можливих факторів наступного рівня;
- аналіз всіх виявлених факторів за рівнем їх впливу на рішення проблемного питання (за можливістю використовувати цільову функцію, відомості з літератури та побудову рангового ряду факторів у напрямку зменшення їх впливу);
- визначення переліку найбільш значимих факторів, для яких можливе проведення досліджень та отримання нових наукових знань.

Завдання оформити як окремий документ, титульний лист якого повинен містити загальну інформацію (повна назва закладу вищої освіти, факультет, кафедра), назву документу (відповідає назві даного розділу), назву дисципліни, інформацію про виконавця, прізвище та ініціали особи, що перевіряє документ і оцінює ступінь виконання завдання. В основній частині завдання навести остаточний вид діаграми Ісікави, ранговий ряд факторів та обґрунтування вибору найбільш значимих факторів, для яких можливе проведення досліджень.

## 1.8. Питання для контролю знань

1. Як пов'язані проблемна ситуація з задачами дослідження об'єкту?
2. В чому полягає користь системного підходу у дослідженнях?
3. Які принципи складають основу системного підходу?
4. Яка різниця між системою і множиною?
5. Що таке елемент системи?
6. Які системи відносяться до складних?
7. Що таке підсистема?
8. Що таке надсистема?
9. Що таке параметр системи?
10. Що таке фазова змінна системи?
11. Що таке динаміка системи?
12. Який зв'язок між станом і динамікою системи?
13. Що таке вектор змінних стану?
14. Що таке простір станів системи?
15. Що таке фазова траєкторія системи?
16. Які основні поняття системотехніки?
17. Що називається моделлю системи?
18. Що описує математична модель об'єкту?
19. Призначення та можливості діаграми Ісікави.
20. Поясніть терміни «фактор», «змінна», «цільова функція», «адекватність».

## 1.9. Перелік літератури до розділу 1

1. Василев Я.Д. Теория продольной прокатки: Учебник для магистров вузов / Я.Д. Василев, А.А. Минаев. — Донецк : УНИТЕХ, 2010. — 456 с.

2. Згуровский М.З. Системный анализ. Проблемы, методология, приложения: монография/ М.З. Згуровский, Н.Д. Панкратова. — К. : Наукова думка, 2011. — 727 с.
3. Пальчевський Б.О. Дослідження технологічних систем (моделювання, проектування, оптимізація): навч. посіб. / Б.О. Пальчевський. — Львів: Світ, 2001. — 232 с.
4. Згуровський М.З. Вступ до комп'ютерних інформаційних технологій: навч. посіб./ М.З. Згуровський, І.І. Коваленко, В.М. Михайленко. — К. : Вид-во Європ. ун-ту, 2006. — 265 с.
5. Прудковский Б.А. Зачем металлургу математические модели? / Б.А. Прудковский. — М. : Наука, 1989. — 192 с.
6. Долженков Ф.Е. Уширение, опережение и вытяжка при продольной прокатке (О некоторых противоречиях современной теории прокатки) / Ф.Е. Долженков // Известия вузов. Черная металлургия. — 2003. — № 5. — С. 41 — 44.
7. Аксенов Л.Б. Системное проектирование процессов штамповки / Л.Б. Аксенов. — Л. : Машиностроение, 1990. — 240 с.
8. Кононюк А. Е Системология. Общая теория систем / А.Е. Кононюк. — В 4-х кн. Кн. 1. — К. : Освіта України. 2014. — 564 с.
9. Чихос Х. Системный анализ в трибонике / Х. Чихос. — М. : Мир, 1982. — 352 с.
10. Максименко О.П. Системный аспект продольной устойчивости процесса прокатки / О.П. Максименко, А.В. Никулин, Д.И. Лобойко // Збірник наукових праць Дніпровського державного технічного університету (технічні науки) / Кам'янське: ДДТУ. — 2019. — Вип. 2(35). — С. 16—23.
11. Грудев А.П. Теория прокатки / А.П. Грудев. — 2-е перераб. и доп. изд. — М. : СП Интермет Инжиниринг, 2001. — 280 с.

12. Максименко О.П. Продольная устойчивость полосы в валках с анализом контактных условий: Монография / О.П. Максименко, Д.И. Лобойко, М.К. Измайлова. — Днепродзержинск: ДГТУ, 2016. — 213 с.
13. Экспериментальное исследование максимальных углов захвата при установившемся процессе прокатки / А.П. Чекарев, В.И. Прокофьев, В.П. Галицкий и др. // Обработка металлов давлением: Науч. труды, ДМетИ. — М. : Металлургия, 1967. — Вып. LI. — С. 79—88.
14. Максименко О.П. Методика оценки продольной устойчивости процесса прокатки / О.П. Максименко, Р.Я. Романюк // Вестник Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». — Харьков : НТУ «ХПИ». — 2009. — № 33. — С. 84—90.
15. Исикава К. Японские методы управления качеством / К. Исикава. (Сокр. пер. с англ.; под ред. А.В. Гличева). — М. : Экономика, 1988. — 214 с.
16. Хусаінов Д.Я. Введення в моделювання динамічних систем: навч. посібник / Д.Я. Хусаінов, І.І. Харченко, А.В. Шатирко. — К.: Вид-во КНУ, 2010. — 128 с.



---

---

## 2. ОСНОВИ ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ

### 2.1. Основи теорії експерименту

Інженерний експеримент — основа галузевих наукових досліджень. Терміном «інженерний експеримент» позначають експерименти, які моделюють певні технологічні процеси і потребують застосування відповідного обладнання та засобів вимірювань, коли змінні фактори задаються через параметри роботи обладнання або вихідної сировини. Залежно від своєї основної мети експерименти можуть бути використані: для перевірки гіпотези або теорії; для збору необхідної інформації і уточнення деякого припущення; для збору необхідної інформації і уточнення певної гіпотези (пропозиції); для визначення оптимальних умов реалізації технологічного процесу і т. ін. [1—4].

Залежно від того, впливає експериментатор на досліджуваний об'єкт цілеспрямовано чи ні, розрізняють експеримент (активний експеримент) і спостереження (пасивний експеримент).

Щоб пасивний експеримент був ефективним, він повинен бути: відповідно організований, вестися для вирішення чітко поставленого завдання; цілеспрямованим (слід фіксувати тільки необхідні для вирішення поставленого завдання параметри і активно їх вишукувати); планомірним і систематичним. При проведенні пасивного експерименту необхідно широко використовувати методи математичної статистики, в тому числі методи теорії кореляції. Застосування пасивного експерименту доцільно лише тоді, коли неможливо управляти об'єктом дослідження. У інших випадках більш привабливим є активний експеримент (надалі просто експеримент).

За очікуваними кінцевими результатами експерименти діляться на якісні та кількісні. Кількісні експерименти є кращими, однак вимагають, як правило, великої кількості вимірювальної апаратури, а результати їх — складної математичної обробки;

тому, на першому етапі, коли експеримент носить пошуковий характер, можливе застосування якісного експерименту — це дозволяє за час, відведений на експеримент, перевірити велику кількість гіпотез з мінімальними економічними витратами.

Експеримент може проводитися безпосередньо на об'єкті (натурний експеримент) або на його моделі (модельний експеримент або моделювання).

Прикладом натурального експерименту може служити промисловий експеримент.

Модельний експеримент набув значного поширення у багатьох наукових областях і є необхідним у тих випадках, коли натурний експеримент неможливий через технічні, або економічні труднощі.

Моделювання проводиться з тим, щоб за результатами дослідів на моделі отримати уявлення про процеси, що протікають в об'єкті (натурі). Моделювання може бути фізичним і математичним.

При фізичному моделюванні експеримент проводиться на моделі зі збереженням фізичної природи і геометричної подоби об'єкта. Фізичне моделювання широко поширене при експериментальному дослідженні процесів обробки металів тиском.

При математичному моделюванні вивчається математична залежність, якою описано фізичний процес, що досліджується. При цьому в моделі зазвичай протікає процес іншої фізичної природи, але описуваний такою ж математичною залежністю, що і в натурі.

Теоретичною основою фізичного моделювання є теорія подібності.

Протягом довгого часу експеримент проводився в наступній послідовності. Експериментатор по черзі, з певним кроком, змінював значення одного з параметрів об'єкту, що впливають на процес, залишаючи значення інших параметрів постійними, і вимірював відповідні значення параметрів процесу. Результати такого експерименту представлялися у вигляді графіків і таблиць.

---

---

Надалі при проведенні експериментів стали широко застосовувати методи математичної статистики метод найменших квадратів, коефіцієнт кореляцій і т. ін. Це набагато підвищило ефективність експериментальних досліджень, тому що дозволило представляти результати дослідження у вигляді рівнянь регресії і обумовлювати їх точність. Однак і при цьому експеримент не досить ефективно використовувався.

Одним із шляхів підвищення ефективності досліджень є застосування математичних методів планування експерименту.

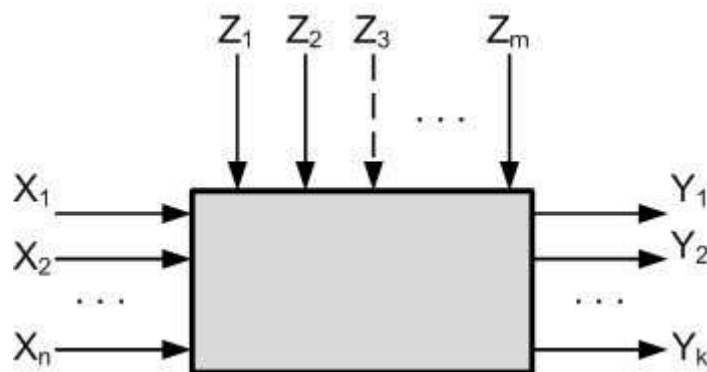
Планування експерименту — це процедура вибору числа і умов проведення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленого завдання з необхідною точністю. При цьому важливо наступне:

- прагнення до мінімізації загального числа дослідів;
- одночасне варіювання всіма змінними, що визначають процес, за спеціальними правилами – алгоритмами;
- використання математичного апарату, який формалізує багато дій експериментатора;
- вибір чіткої стратегії, що дозволяє приймати обґрунтовані рішення після кожної серії експериментів.

Завдання, для вирішення яких може використовуватися планування експерименту, надзвичайно різноманітні: пошук оптимальних умов, побудова інтерполяційних формул, вибір істотних чинників, оцінка та уточнення констант теоретичних моделей, вибір найбільш прийнятних, з деякої множини, гіпотез про механізм явищ, дослідження діаграм «склад-властивість».

Одним з основних понять в плануванні експерименту є «об'єкт дослідження», для опису якого зручно користуватися уявленням про кібернетичну систему (рис. 2.1), яку називають іноді «чорним ящиком». Вхідним стрілками зліва і зверху позначені вхідні величини, які певним чином впливають на поведінку «чорного ящика». Серед цих можуть бути «керовані» величини, які дослідник може фіксувати на певному значенні. Такі величи-

ни приймаються як фактори, вплив яких можна дослідити. До вхідних величин також відносять і «некеровані» та випадкові величини. Стрілки праворуч зображують вихідні величини, які називають параметрами оптимізації (зустрічаються й інші назви: критерій оптимальності, цільова функція, вихід «чорного ящика», функція відгуку та ін.).



$X_1, X_2, \dots, X_n$  — «керовані» фактори, які дослідник може змінювати;  
 $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$  — «некеровані» або випадкові фактори, які дослідник не може змінювати;  
 $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  — функції відгуку.

Рис. 2.1. Схема «чорного ящика» [4]

Під математичною моделлю об'єкта дослідження розуміється рівняння, що зв'язує параметр оптимізації  $y$  з факторами  $x_i$ .

$$y_i = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

функція  $\varphi(x)$  називається функцією відгуку.

Кожен фактор може приймати в досліді одне з декількох значень, званих рівняннями фактору.

Фіксований набір рівнів факторів (умови проведення одного з можливих дослідів) визначає одне з можливих станів «чорного ящика».

Основною характеристикою об'єкту дослідження є його складність, обумовлена числом різних станів. Іншими його хара-

---

---

ктеристиками є керованість (можливість переведу в потрібний помітний стан за бажанням експериментатора) і ступінь відтворюваності результатів (міра помилки повторних дослідів).

Залежно від об'єкту і мети експерименту параметр оптимізації може бути економічним (прибуток, собівартість), техніко-економічним (продуктивність, ККД, надійність), техніко-технологічним (показники кількості і якості продукту, фізичні характеристики процесу) і т. ін.

Параметр оптимізації повинен бути:

- 1 кількісним і виражатися одним числом;
- 2 вимірюваним (повинен бути відомий спосіб його вимірювання);
- 3 однозначним (заданому набору рівнів факторів має відповідати одне, з точністю до помилки експерименту, значення параметру оптимізації);
- 4 ефективним з точки зору досягнення мети;
- 5 простим і легко обчислюваним та мати фізичний зміст;
- 6 існуючим для всіх помітних станів об'єкту;
- 7 статистично ефективним (визначним з найбільш можливою точністю).

Фактори можуть бути як кількісними, так і якісними. При цьому окремий фактор завжди має бути керований і однозначним, а сукупність факторів повинна задовольняти вимогам сумісності і відсутності лінійної кореляції між факторами.

Планувати експеримент можна тільки в тому випадку, якщо рівні факторів підкоряються волі експериментатора. Фактори повинні безпосередньо впливати на об'єкт дослідження, тому що важко керувати фактором, якщо він є функцією інших змінних, але в плануванні експерименту можуть брати участь складні фактори, такі, як логарифми, співвідношення та інше.

Точність фіксації факторів повинна бути висока, інтервал між найближчими рівнями фактору, так званий інтервал (крок) варіювання, повинен бути не менше помилки при фіксації факто-

ру на даному рівні (в іншому випадку, рівні фактору будуть не-виразними), але не настільки великою, щоб рівні факторів виявилися за межами області визначення.

Для спрощення умов експерименту і обробки експериментальних даних рівні факторів кодують, змінюючи масштаби і початок відліку по осях факторів (рисунок 2.2). Для факторів з безпервною областю визначення кодування виконують за формулою.

$$X_i = \frac{x_i - x_{i0}}{I_i}, \quad (2.2)$$

де  $X_i$  — кодове значення фактору;  $x_i$  — натуральне значення фактору;  $x_{i0}$  — натуральне значення нульового (основного) рівня фактору (умовно прийнята центральна точка на осі фактору, щодо якої варіюють фактором);  $I_i$  — інтервал варіювання.



Рис. 2.2. Схема кодування факторів

Найважливішим етапом в плануванні експерименту є вибір виду математичної моделі, як системи математичних співвідношень, які використовують для прогнозування значень цільової функції — вихідного параметру процесу, що моделюється. Це означає, що за значеннями цільової функції, отриманими в досліді на певному факторному просторі, визначеному межами зміни вхідних параметрів процесу, визначаємо параметри математичної моделі. Якщо така модель дозволяє розраховувати цільову функцію з достатньою точністю, її вважають адекватною, тобто такою,

що відповідає досліджуваному процесу. Якщо точність недостатня, за результатами аналізу даних, приймається рішення про коригування складу факторів (вхідних параметрів), діапазонів їх зміни, виду моделі та інше.

При виборі математичної моделі, зазвичай виходять з того, що функцію відгуку (якщо вона має складний вид) можна розкласти в ряд Тейлора, представивши її у вигляді алгебраїчного поліному. При цьому припускають максимальну простоту моделі при дотриманні її адекватності. В разі неадекватності моделі її послідовно ускладнюють або переглядають область досліджень.

Спочатку модель представляють у вигляді алгебраїчного поліному першого ступеня, наприклад

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3, \quad (2.3)$$

або неповної другого ступеня

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + b_{13}x_1x_3, \quad (2.4)$$

Коефіцієнти регресії  $b_i$  в рівняннях (2.3) або (2.4) визначають використовуючи дані експерименту. Наступний етап — перевірка адекватності моделі. Якщо модель адекватна, то мета експерименту досягнута. Якщо модель неадекватна, то її ускладнюють, представляючи її у вигляді алгебраїчного поліному другої степені

$$\begin{aligned} y = & b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{23}x_2x_3 + \\ & = b_{13}x_1x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

проводять додаткові дослідження і обчислюють коефіцієнти регресії  $b_i$ , в моделі (2.5). Якщо вона знову виявляється неадекватною, можливо підвищення степені поліному або зміна виду моделі (степенева, експоненціальна, логарифмічна).

Після завершення приладового оснащення експерименту і перевірки точності апаратури, а також проведення аналізу розмірностей, дослідник повинен визначити інтервали між дослід-

ними даними і скласти план експерименту. Вибір кінцевої сукупності експериментальних точок є необхідним і важливим етапом планування, здійснюваним до початку проведення дослідів. Вибір експериментальних точок слід починати з визначення екстремальних показань вимірювальної апаратури. До типових обмежень, що накладаються на встаткування при проведенні дослідів відносять: граничний тиск, температура плавлення металу, гранична швидкість руху, межі виміру навантаження, виділення тепла, яке обумовлене розмірами печі, тощо. Ці граничні значення можна визначити з паспортних даних або інших документів ще до проведення дослідів.

Існує два основні критерія, на основі яких проводиться вибір експериментальних точок:

1. Відносна точність даних на різних ділянках області досліджуваних значень. У багатьох випадках отримані дані мають неоднакову точність на різних ділянках області досліджуваних значень. Якщо аналіз помилок показує, що на якійсь ділянці дані викликають найбільший сумнів, то намагаються замінити цю ділянку більшим числом точок. При цьому слід пам'ятати загальне правило, що чотири додаткових відліки підвищують точність дослідів у два рази, а дев'ять відліків — у три рази.

2. Характер експериментальної функції. Якщо функція частково або повністю відома, то доцільно вибрати план експерименту з однаковими інтервалами між точками. Якщо очікується, що функція є простою, наприклад залежність тиску  $P$  від швидкості  $V$  визначається, як

$$\Delta P = k \frac{\rho V}{2g},$$

де  $k$  — чисельний коефіцієнт;  $\rho$  — густина;  $g$  — прискорення вільного падіння, то привести це рівняння до лінійного виду можна шляхом логарифмування



$$\lg \Delta P = \lg \frac{k \cdot \rho}{2g} 2 \lg V$$

Побудовою графіку залежності  $\lg \Delta P$  від  $\lg V$  можна одержати криву з рівномірним розподілом точок, взявши однакові збільшення  $\lg V$ , а не  $V$ .

Причиною розгляду інтервалів між точками є прагнення до того, щоб у будь-якій частині експериментальної кривої мати таку ж точність, як і в будь-якій іншій частині.

Розглянемо лише найбільш поширені в дослідженнях процесів обробки металів тиском методи планування експерименту, в яких будемо стикатися в основному з моделями виду (2.3) — (2.5).

## 2.2. Аналіз розмірностей

Метод аналізу розмірностей можна розглядати як віртуальний аналог фізичного моделювання процесу, але за допомогою засобів розмірностей фізичних величин. Суть методу полягає в тому, що з параметрів, які характеризують систему, складається вираз-модель, що має потрібну розмірність і певним чином відтворює функціонування фізичної системи. Цей метод не дає повних відомостей про співвідношення між змінними, яке, у кінцевому рахунку, повинно бути виявлене експериментально. Тим не менше цей метод дозволяє значно скоротити обсяг експериментальних робіт [URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод\\_аналізу\\_розмірностей](https://uk.wikipedia.org/wiki/Метод_аналізу_розмірностей)].

Для правильного застосування аналізу розмірностей дослідник повинен знати характер і число фундаментальних змінних в його експерименті. Фундаментальною змінною називають будь-яку величину, що впливає на експеримент і здатна змінюватись незалежно від інших змінних. Фундаментальні змінні необхідно відрізняти від регульованих (залежних) змінних.

Якщо експериментатору дійсно відомі ці змінні, то він може відразу ж перетворити їх, застосувавши Пі-теорему Букінгема, яка стверджує:

«якщо рівняння включає  $n$  фізичних змінних, то його можна переписати за допомогою множини з  $p = n - k$  безрозмірних параметрів  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_p$ , сконструйованих з початкових змінних».

Символом  $k$  позначено певну кількість незалежних за розмірностями фізичних величин.

Однорідним щодо розмірностей є рівняння, форма якого не залежить від вибору основних одиниць.

Неоднорідні рівняння не можуть дати повного математичного опису природнього явища або процесу.

Можна не знати всіх змінних, що впливають на експеримент, але необхідно уявляти собі, що ці змінні і утворені ними безрозмірні комбінації існують незалежно від того, відомі вони чи ні.

Якщо не вдається отримати систему безрозмірних комбінацій, то це є вірною ознакою, що було щось пропущене.

В основу аналізу розмірностей покладені два припущення [5]:

1. Будемо вважати, що заздалегідь відомо від яких параметрів та змінних залежать результати дослідження. Іншими словами, дослідник перед тим як проводити аналіз розмірностей, повинен підібрати аналог, який би, в певній мірі, ілюстрував взаємодію між параметрами та результатами процесу, що досліджується. Це по суті означає, що дослідник повинен уявляти процес ще до його вивчення.
2. Отримана функціональна залежність між параметрами та результатами фізичного процесу завжди є такою, що відноситься до ступеня, що не завжди правильно описує цей функціональний зв'язок.

Зазначимо, що аналіз розмірностей не дає ніяких вказівок до складання переліку змінних та параметрів, істотних для процесу, що розглядається. Тому складання такого переліку залежить від попередньої інформації про закономірності явища, яке вивчається, тобто значною мірою від інтуїції дослідника. Тому в ряді випадків застосування аналізу розмірностей може привести до неправильних результатів.

Разом з тим метод аналізу розмірностей дозволяє отримати безрозмірні параметри, які скорочують об'єм експериментальних досліджень, що важливо при проведенні дослідів в промислових умовах.

Розглянемо методіку проведення аналізу розмірностей на прикладі вивчення механізму надходження технологічного мастила в осередок деформації при прокатуванні. Теорія гідродинамічного змащування, розроблена для підшипників ковзання та кочення, а також для зубчатих передач, дозволяє оцінити які фундаментальні змінні можуть впливати на товщину шару мастила в контакті валка і штаби. Зауважимо, що при прокатуванні вхідна зона перед осередком деформації в певній мірі подібна до гідродинамічного клину підшипників ковзання. З робіт механіків відомо, що гідродинамічна підйомна сила шару мастила в підшипниках ковзання залежить від кутової швидкості цапфи, навантаження на підшипник, в'язкості мастила та геометричних параметрів, які визначаються співвідношення діаметрів цапфи і вкладишу, властивостями їх матеріалів та п'єзокоефіцієнтом в'язкості мастила.

Припускаючи, що такі самі параметри впливають на товщину плівки мастила в осередку деформації при прокатуванні, можемо записати функціональну залежність

$$\xi_0 = \phi_1(\Delta h; \eta_0; \mathcal{G}; E; V; \sigma_T; R),$$

де  $\Delta h$  — абсолютне обтиснення, мм;  $R$  — радіус валків, мм;  $V = V_0 + V_B$  — сума швидкостей поверхні штаби, що прокату-

ється, та валків мм/с;  $\eta_0$  — динамічна в'язкість мастила, Па·с;  $\mathcal{G}$  — п'єзокоефіцієнт в'язкості, Па<sup>-1</sup>;  $E = \frac{E_1 + E_2}{2}$  — середній модуль пружності першого роду, Па;  $\sigma_T$  — межа текучості матеріалу штаби на вході в осередок деформації, Па;  $\xi_0$  — товщина плівки мастила на вході в осередок деформації, мм.

Припустимо, що загальний зв'язок між параметрами та результатом дослідження визначається степеневою функцією

$$\xi_0 = \phi_1(\Delta h^a; \eta_0^b; \mathcal{G}^c; E^d; V^e; \sigma_T^f; R^q)$$

Зведемо розмірності усіх змінних, що входять до цієї залежності, до трьох основних

- сила — М;
- час — Т;
- довжина — L.

Підставивши у основну залежність розмірності величин, отримаємо рівняння розмірностей

$$L = \phi_2\left(L^a; (MTL^{-2})^b; (L^2M^{-1})^c; (ML^{-2})^d; (LT^{-1})^e; (ML^{-2})^f; L^q\right)$$

Припускаючи, що рівняння розмірностей є однорідним відносно розмірностей, можна отримати наступні співвідношення для показників степенів:

- для М:  $0 = b - c + d + f$ ;
- для Т:  $0 = b - e$ ;
- для L:  $1 = a - 2b + 2c - 2d + e - 2f + q$ .

З цієї системи рівнянь отримуємо:

$$\begin{aligned} b &= e; \\ f &= c - b - d; \\ q &= 1 - a - b. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані співвідношення для показників степенів у основну функціональну залежність, отримаємо

$$\xi_0 = \phi_3(\Delta h^\alpha; \eta_0^b; \mathcal{G}^c; E^a; V^b; \sigma_T^{c-b-a}; R^{1-a-b})$$

Поєднаємо члени з однаковими показниками степенів і в результаті отримаємо залежність

$$\frac{\xi_0}{R} = \phi_4\left(\left(\frac{\Delta h}{R}\right)^a; \left(\frac{\eta_0 \cdot V}{\sigma_T \cdot R}\right)^b; (\mathcal{G} \cdot \sigma_T)^c; \left(\frac{E}{\sigma_T}\right)^d\right).$$

Всі складові цієї залежності є безрозмірними комбінаціями. Розкладемо цей вираз в ряд та використовуючи лише перші члени ряду, отримаємо критеріальне рівняння для розрахунку товщини плівки мастила при холодному прокатуванні

$$\frac{\xi_0}{R} = K\left(\left(\frac{\Delta h}{R}\right)^a; \left(\frac{\eta_0 \cdot V}{\sigma_T \cdot R}\right)^b; (\mathcal{G} \cdot \sigma_T)^c; \left(\frac{E}{\sigma_T}\right)^d\right), \quad (2.6)$$

Звернемо увагу на те, що отримані в результаті аналізу розмірностей комбінації параметрів відповідають критеріям, які прийняті у відповідних теоріях. Так, з теорії прокатування відношення  $\frac{\Delta h}{R}$  являє собою кут захвату в другій степені.

В теорії пружності та пластичності відношення  $\frac{\sigma_T}{E}$  є в першому наближенні граничною відносною деформацією згідно закону Гука.

В гідродинаміці критерій  $\frac{\eta_0 \cdot V}{\sigma_T \cdot R}$  є в'язкісно-швидкісним параметром, а критерій  $\mathcal{G} \cdot \sigma_T$  — реологічний параметр матеріалів.

Таким чином, всі отримані в даному виразі критерії відповідають відомим співвідношенням в теоріях прокатування, пружності, пластичності та гідродинаміки. Крім цього, якщо правильно проведений аналіз розмірностей, то, згідно Пі-теореми Букінгема, кількість основних розмірностей повинна дорівнювати різниці між кількістю фізичних параметрів та числом отриманих

безрозмірних критеріїв. В даному випадку ця умова виконується — кількість фізичних величин вихідного рівняння становить 7, число основних розмірностей 3, відповідно отримано 4 безрозмірних критерія.

У випадку якщо у основному виразі розмірність присутня тільки один раз, то слід шукати ще параметр з такою ж розмірністю, який впливає на результат.

Крім цього відзначимо, що проводити досліди у відповідності з рівнянням у вигляді степеневого одночлену простіше у порівнянні з залежністю, що містить сім змінних. Але головна перевага у використанні отриманої залежності при проведенні дослідів полягає в тому, що об'єм експериментальної роботи зменшується. Це важливо при проведенні дослідів в промислових умовах.

### 2.3. Теорія подібності

Теорія подібності — це вчення про умови подібності фізичних об'єктів.

Теорія подібності спирається на вчення про розмірність фізичних величин і служить науковою основою моделювання, як методу пізнання і дослідження різних об'єктів, в якій основну роль відіграє метод аналогій, тобто схожості об'єктів за деякими ознаками. Фізичні явища, процеси або системи подібні, якщо у подібні моменти часу в подібних точках простору значення змінних величин, що характеризують стан однієї системи, пропорційні відповідним величинам іншої системи. Коефіцієнт пропорційності для кожної з величин називається коефіцієнтом подібності (URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія\\_подібності](https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_подібності)).

Функційні зв'язки між критеріями подібності дозволяють правильно організувати проведення експериментальних досліджень та інтерпретувати результати як досліджень, так і розрахунків.

Наприклад, в процесах обробки металів тиском при рівномірній деформації розміри деформованого тіла змінюються відпо-

відно до закону постійності об'єму. Відповідно, якщо забезпечити збереження пропорцій між розмірами різних тіл, то вони будуть подібними [6]

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = n = \text{const.}$$

Тобто, для тіл різних розмірів забезпечується подібність за геометричними параметрами з коефіцієнтом подібності  $n$ .

Крім геометричної подібності відрізняють також фізичну подібність, тобто подібність за іншими фізичними величинами, наприклад швидкість, температура, напруження та інше. Щоб фізичні явища (процеси) були подібними необхідно забезпечити подібність за всіма параметрами, що характеризують ці явища. При цьому, кожна з фізичних величин може мати свій коефіцієнт подібності, відмінний від величин інших розмірностей.

Подібність фізичних явищ може характеризуватись і за безрозмірними комплексами. У таких випадках коефіцієнти подібності називають інваріантами або критеріями подібності.

Теорія подібності ґрунтується на трьох основних теоремах [6]:

I теорема: «Якщо фізичні процеси подібні один одному, однойменні безрозмірні критерії подібності цих процесів мають однакову величину»;

II теорема: «Рівняння, які описують фізичні процеси, можуть бути представлені у вигляді функціонального зв'язку між критеріями подібності»;

III теорема: «Для того щоб фізичні процеси були подібні один одному, необхідно і достатньо, щоб ці процеси були якісно однакові, а їхні однойменні визначальні критерії — чисельно однакові» (URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія\\_подібності](https://uk.wikipedia.org/wiki/Теорія_подібності)).

Теорія подібності дозволяє, не інтегруючи диференційні рівняння, які описують фізичні явища, отримувати з цих рівнянь критерії подібності та встановлювати критеріальні залежності, які справедливі для усіх подібних між собою процесів.

На основі теорії подібності розробляються методи моделювання. Моделювання має за основу заміщення реальних об'єктів їх умовними зразками, аналогами, математичними моделями. Відповідно до цього, відрізняють фізичне та математичне моделювання.

При фізичному моделюванні процес, що досліджується, відтворюють на аналогічному об'єкті, з збереженням фізичної сутності та геометричної подібності (масштабування).

При математичному моделюванні процес моделюють через систему залежностей між його параметрами. Зрозуміло, що адекватність моделі залежить від рівня розуміння дослідником явища, що вивчається, та закладених у модель математичних співвідношень.

Розглянемо особливості застосування теорії подібності для процесу пластичної деформації. Виходячи з співвідношень диференціальних рівнянь рівноваги, рівнянь зв'язку між напруженнями і відносними деформаціями, рівнянь зв'язку між компонентами напружень і швидкостями течії, отримано функціональну залежність, яка відображає взаємозв'язок між параметрами пластичної деформації [6]

$$\varphi_1\left(\frac{x}{l}; \frac{y}{l}; \frac{z}{l}; \frac{\sigma}{k}; \frac{\tau}{k}; \frac{p}{k}; \frac{V\eta}{kl}; \alpha t; \varepsilon; f\right) = 0,$$

де  $x, y, z$  — геометричні параметри;  $\sigma, \tau, p$  — напруження та тиск;  $V$  — швидкість;  $\eta$  — динамічна в'язкість матеріалу;  $\alpha t$  — коефіцієнт лінійного розширення та температура;  $\varepsilon$  — ступінь деформації;  $f$  — коефіцієнт тертя;  $l$  — будь-який геометричний параметр деформованого тіла, який застосовують для масштабування (отримання безрозмірних величин);  $k$  — характерний параметр процесу з розмірністю Н/мм<sup>2</sup> для масштабування.

Зрозуміло, що перші три безрозмірні параметри використовують для забезпечення геометричної подібності.



Відношення  $\frac{\sigma}{k}$  та  $\frac{\tau}{k}$  характеризують напружений стан при пластичній деформації і можуть бути використані для забезпечення подібності властивостей матеріалів.

Критерій  $\frac{p}{k}$  використовують для забезпечення силової подібності. Тобто, якщо тиск на контактній поверхні моделі та реального об'єкту однаковий  $p_M = p_p$ , то можемо стверджувати, що дотримана силова подібність. Іншими словами – виконується закон пластичної подібності.

Адже середній тиск визначається як відношення сили прокатування  $F$  до площі контактування металу з валками  $S$ , відповідно

$$\left(\frac{F}{S}\right)_M = \left(\frac{F}{S}\right)_p,$$

Аналогічно для питомої роботи, тобто роботи деформації  $A$  віднесеної до обсягу деформованого тіла  $W$

$$\left(\frac{A}{W}\right)_M = \left(\frac{A}{W}\right)_p.$$

З останніх двох виразів можемо записати

$$F_p = \frac{S_p}{S_M} F_M = n_2 \cdot F_M,$$

$$A_p = \frac{W_p}{W_M} A_M = n_3 \cdot A_M.$$

Коефіцієнти подібності  $n_2$  та  $n_3$  відображають масштаб сили та роботи.

Закон пластичної подібності також буде дійсним і стосовно швидкісного критерія  $\frac{V\eta}{kl}$ . З співвідношення  $\left(\frac{V\eta}{kl}\right)_M = \left(\frac{V\eta}{kl}\right)_p$ , за

умови подібності матеріалів  $\eta_M = \eta_p$ , характерного параметру процесу  $k_M = k_p$ , та подібності у часі  $t_M = t_p$ , отримуємо

$$V_p = n_4 V_M,$$

де  $n_4$  — коефіцієнт (масштаб) подібності для швидкості.

На основі теорії подібності пластичної течії для процесу прокатування може бути отримане критеріальне рівняння, що містить 9 складових

$$\varphi_2 \left( \frac{l_d}{H}; \frac{B}{H}; \frac{\Delta h}{H}; \frac{\sigma}{k}; \frac{\tau}{k}; \frac{p}{k}; \frac{V\eta}{kH}; \alpha t; f \right) = 0,$$

Розглянемо приклад моделювання процесу прокатування з застосуванням теорії подібності, що передбачає визначення критеріїв подібності та складання критеріального рівняння. За основу моделі приймаємо диференціальне рівняння рівноваги Т. Кармана [7]

$$dp_x = \left[ \beta \sigma_s \mp \frac{t_x}{\operatorname{tg}(\varphi)} \right] \frac{dh}{h}.$$

Використовуючи кулонівську модель тертя на поверхні контактування металу з валками та заміну  $\frac{dh}{\operatorname{tg}(\varphi)} = dx$ , після перетворень, отримаємо

$$dp_x h - \beta \sigma_s dh \mp 2 f p_x dx = 0.$$

Розділивши всі складові рівняння на  $dp_x h$ , отримаємо

$$1 - \frac{\beta \sigma_s dh_x}{dp_x h_x} \mp 2 f \frac{p_x dx}{dp_x h_x} = 0$$

З аналізу рівняння видно, що умови рівноваги визначаються критеріями

$$\frac{\beta \sigma_s}{p_x}; \quad \text{та} \quad 2f \frac{x}{h_x}.$$

Величина  $x$  змінюється від 0 до  $l_d$ . Так як тиск ми визначаємо як середню величину по осередку деформації, то й  $x$  приймаємо середнім, тобто  $x = \frac{l_d}{2}$ . Аналогічно і для  $h_x = \frac{H + h}{2}$ .

Отже, рівняння рівноваги у критеріальному вигляді може бути представлено як

$$\varphi_4\left(\frac{\beta\sigma_s}{p_x}; f; \frac{l_d}{H_{сер}}\right) = 0.$$

З цього рівняння отримуємо функціональну залежність для визначення тиску

$$\frac{p_x}{\beta\sigma_s} = \varphi_5\left(f; \frac{H_{сер}}{l_d}\right).$$

Згідно отриманої залежності середній тиск в осередку деформації, окрім опору металу деформуванню, визначається двома критеріями — коефіцієнтом тертя та параметром форми.

Але відомі залежності, що ґрунтуються на врахуванні лише одного з наведених критеріїв. Наприклад формули М. Я. Бровмана [8]

$$\frac{p_x}{\beta\sigma_s} = 0,75 + 0,25 \frac{l_d}{H_{сер}}, \text{ при } \frac{l_d}{H_{сер}} > 2 ;$$

$$\frac{p_x}{\beta\sigma_s} = 0,5 \left( \frac{l_d}{H_{сер}} + \frac{H_{сер}}{l_d} \right), \text{ при } 0,5 \leq \frac{l_d}{H_{сер}} \leq 2$$

Для порівняння виконаємо аналіз відомої формули, шляхом представлення її в критеріальному вигляді. Однією з найпростіших формул для визначення тиску при прокатуванні є емпірична залежність С. Н. Петрова [6]

$$p = \frac{kh}{h - 0,66fl_d}$$

Помноживши ліву і праву частини рівняння на знаменник і перенісши всі складові до лівої частини, отримаємо

$$ph - p \cdot 0,66fl_d - kh = 0.$$

Розділивши всі складові на  $kh$ , отримаємо рівняння у безрозмірній формі

$$\frac{p}{k} - 0,66f \frac{pl_d}{kh} - 1 = 0.$$

З отриманого рівняння видно, що процес прокатування визначається трьома безрозмірними критеріями

$$\frac{p}{k}; \quad f; \quad \frac{l_d}{h}.$$

Отже, в критеріальному вигляді формулу Петрова можемо представити у вигляді

$$\frac{p}{k} = \varphi_5 \left( f; \frac{l_d}{h} \right).$$

З аналізу отриманої залежності можна стверджувати, що тиск буде визначатись опором металу деформуванню  $k$ , умовами тертя  $f$ , та геометричним параметром  $\frac{l_d}{h}$ . Тобто отримана залежність аналогічна залежності на основі рівняння Кармана.

Аналогічний аналіз, виконаний з використанням теорії подібності, для інших формул, дозволяє представити їх у критеріальному виді

- формула Целікова  $\frac{p}{k} = \varphi_6 \left( \frac{R}{H}; \frac{\Delta h}{H}; f \right);$

- формула Екелунда  $\frac{p}{k} = \varphi_6 \left( \frac{R}{H}; \frac{\Delta h}{H}; \frac{V \cdot \eta}{k_1 \cdot l}; f \right).$

Отже, для всіх формул для визначення тиску при прокатуванні характерно врахування тертя та геометричних параметрів осередку деформування.

## 2.4. Планування експерименту типу $2^k$

Повним факторним експериментом (ПФЕ) називається такий експеримент, при реалізації якого визначається значення параметра оптимізації при всіх можливих поєднаннях рівнів варію-

---

---

вання факторів. Якщо ми маємо  $k$  факторів (чинників), кожен з яких може встановлюватися на  $q$  рівнях, то для того, щоб здійснити ПФЕ, необхідно поставити  $N = q^k$  дослідів (URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Повний\\_факторний\\_експеримент](https://uk.wikipedia.org/wiki/Повний_факторний_експеримент)).

Найбільшого поширення набули експерименти, в яких фактори варіюють на двох рівнях, тобто експерименти типу  $2^k$ . Такі експерименти дозволяють отримати моделі лінійного виду (2.3) або поліноміальні моделі виду (2.4) [9, 2].

Планування, проведення та обробка результатів ПФЕ складається з наступних основних етапів:

- вибір залежних (параметр оптимізації, цільова функція) і незалежних (фактори) змінних;
- кодування незалежних змінних (факторів);
- складання плану-матриці експерименту;
- рандомізація дослідів;
- реалізація плану експерименту;
- визначення коефіцієнтів моделі та оцінка їх значимості;
- перевірки відтворюваності дослідів та адекватності моделі.

Кодування факторів необхідно для переводу натуральних факторів в безрозмірні величини, щоб мати можливість побудувати стандартний ортогональний план - матрицю експерименту, при цьому користуються виразом (2.2). В якості нульового рівня факторів зазвичай вибирають центр інтервалу, в якому передбачається проводити експеримент. В промислових умовах нульовий рівень відповідає значенням факторів при існуючому технологічному режимі.

Фактори варіюють (змінюють) на двох рівнях: на верхньому (кодове позначення «+1» або «+») і на нижньому (кодове позначення «-1» або «-»).

Складання плану-матриці експерименту здійснюється наступним чином: рівні фактора  $X_1$  чергуються у кожному досліді,  $X_2$  — через два досліді,  $X_3$  — через чотири і т.д.

Проілюструємо порядок проведення повнофакторного експерименту на прикладі досліджень залежності коефіцієнту тертя при гарячому прокатуванні від основних факторів. З апріорної інформації відомо, що на коефіцієнт тертя впливають температура металу, швидкість прокатування, матеріал та стан поверхні валків та інші фактори. В прикладі обмежимося дослідженнями двох факторів: температура металу; стан поверхні валків, який будемо оцінювати за показником класу шорсткості  $k_{ш}$ . Відомо, що температура металу при гарячому прокатуванні змінюється у межах 850-1250 °С. Клас шорсткості  $k_{ш}$  змінюються від 1-го (груба поверхня з насічкою або наваркою) до 7-го (шліфовані валки).

Кожен з цих двох факторів будемо змінювати на двох рівнях. Таким чином, для встановлення залежності  $\mu_y = \varphi \left[ (t^\circ C), \text{клас шорсткості} \right]$  отримуємо експеримент типу  $2^2$  (двофакторний експеримент з двома рівнями факторів).

У відповідності до вищезазначеної послідовності планування експерименту проведемо кодування факторів. В якості нульового рівня факторів зазвичай вибирають середину інтервалу, в якому виконують дослідження. В таблиці 2.1 наведені вибрані значення факторів.

Зв'язок між кодovими і натуральними представленнями факторів може бути заданий співвідношенням

$$X_1 = \frac{A_i - A_{i0}}{\delta_i},$$

де  $A_i$  — натуральне значення факторів;  $A_{i0}$  — значення і-го фактору на нульовому рівні; (для температури  $A_{i0} = 1050^\circ C$ ; для шорсткості  $A_{i0} = 4$ );  $\delta_i$  — інтервал варіювання і-го фактору.

Таблиця 2.1. Кодування факторів

Інтервал варіювання і рівні факторів	$t$ °C	Клас шорсткості $k_u$
Нульовий рівень факторів	1050	4
Інтервал варіювання $\delta_i$	150	2
Нижній рівень $X_i = -1$	900	2
Верхній рівень $X_i = +1$	1200	6
Кодове позначення	$X_1$	$X_2$

Для складання план-матриці експерименту проведемо чергування рівнів факторів. Зазвичай для  $X_1$  рівні чергуються для кожного дослідів, для  $X_2$  — через два дослідів. План-матриця для прикладу, що розглядається наведена в табл. 2.2.

Отже, план експерименту містить чотири варіанти поєднання факторів, або чотири точки плану. В кожній такій точці виконуємо по два дослідів для забезпечення можливості визначення статистичних характеристик.

Таблиця 2.2. План-матриця ПФЕ типу  $2^2$ 

Номер дослідів	Рівні факторів	
	$X_1$	$X_2$
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Проведемо рандомізацію дослідів, для зменшення впливу систематичних похибок, цього скористаємося таблицями випадкових чисел. В результаті отримали наступну послідовність виконання дослідів: 3, 1', 4, 2, 4', 1, 3', 2'.

Результати дослідів, в процесі реалізації плану експерименту, зводимо до таблиці виду 2.3.

В таблиці показано стовпчик  $X_1 X_2$ , введення якого дозволяє оцінити коефіцієнт регресії при взаємодії факторів.

Таблиця 2.3. План-матриця ПФЕ типу  $2^2$

Дослід	$X_1$	$X_2$	$X_1 X_2$	$y_{u1}$	$y_{u2}$	$\bar{y}_u = \frac{y_{u1} + y_{u2}}{2}$
1	-1	-1	+1	0,36	0,40	0,38
2	+1	-1	-1	0,28	0,30	0,29
3	-1	+1	-1	0,19	0,17	0,18
4	+1	+1	+1	0,13	0,15	0,14

$y_{u1}, y_{u2}$  – результати дослідів ( $y_u = \mu_i$ ), індекси 1, 2 відповідають двом паралельним дослідом.

Відтворюваність дослідів можна оцінити за допомогою критерію Кохрена (табл. 2.4):

$$G = \frac{\sigma_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^n \sigma_u^2} \leq G(0,05; f_n; f_u); \quad (2.7)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{p=1}^m (y_{up} - \bar{y}_u)^2}{m-1},$$

де  $\sigma_u^2$  — дисперсія, яка характеризує розсіювання результатів дослідів на  $u$ -му поєднанні рівнів факторів;  $p=1,2,\dots,m$  — кількість паралельних дослідів;  $\sigma_{u \max}^2$  — найбільша дисперсія у відповідному рядку плану;  $G(0,05; f_n; f_u)$  — табличне значення критерія Кохрена при 5 % рівні значимості;  $f_n$  — кількість незалежних оцінок дисперсії  $f_n = n = 4$ ;  $f_u$  — кількість ступенів свободи кожної оцінки,  $f_u = m = 1$ .



Процес вважається відтворюваним, якщо виконується нерівність (2.7).

Таблиця 2.4. Критичні значення критерія Кохрена [4]

		$f_u = m - 1$									
		1	2	3	4	5	6	8	10	36	144
$f_n = n$	2	0,998	0,975	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	0,79	0,66	0,58
	4	0,908	0,77	0,68	0,63	0,59	0,56	0,54	0,49	0,37	0,31
	6	0,78	0,62	0,53	0,48	0,44	0,42	0,38	0,36	0,26	0,21
	8	0,68	0,52	0,44	0,39	0,36	0,34	0,30	0,28	0,20	0,16
	10	0,60	0,44	0,37	0,33	0,30	0,28	0,25	0,23	0,17	0,13
	15	0,47	0,33	0,28	0,24	0,22	0,20	0,18	0,17	0,11	0,09
	20	0,39	0,27	0,22	0,19	0,17	0,16	0,14	0,13	0,09	0,07
	30	0,29	0,2	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,06	0,05
	40	0,24	0,16	0,13	0,11	0,1	0,09	0,08	0,07	0,05	0,04
	60	0,17	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,06	0,05	0,03	0,02

Розраховуємо величину критерію Кохрена для нашого експерименту. Для цього визначимо  $\sigma_u^2$  для кожної з точок плану (паралельні досліді). Для точки 1:

$$\sigma_1^2 = \frac{(0,36 - 0,38)^2 + (0,4 - 0,38)^2}{2 - 1} = 8 \cdot 10^{-4}$$

Аналогічно для інших

$$\sigma_2^2 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_3^2 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_4^2 = 2 \cdot 10^{-4}; \quad \sigma_{\max}^2 = 8 \cdot 10^{-4}.$$

$$G = \frac{8 \cdot 10^{-4}}{8 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}} = 0,57; \quad G = (0,05; 4; 1) = 0,9065.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що поставлені досліді відтворювані, так як умова 2.7 виконується.

Знайдемо дисперсію відтворюваності (помилку досліді):

$$G_y = \frac{\sum_{u=1}^n \sigma_u^2}{n} = \frac{8 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 10^{-4}}{4} = 4 \cdot 10^{-4}.$$

Далі знаходимо значення коефіцієнтів регресії, тобто коефіцієнти моделі. Для плану розмірності  $2^2$  можливо отримання звичайної лінійної моделі (три коефіцієнти регресії) або лінійної моделі з врахуванням взаємодії факторів (чотири коефіцієнти регресії). Обираючи модель з взаємодією,

$$y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_{12} X_1 X_2;$$

отримаємо

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^n \bar{y}_u}{n}; \quad b_0 = \frac{0,38 + 0,29 + 0,18 + 0,14}{4} = 0,25;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{u=1}^n X_{1u} \bar{y}_u}{n}; \quad b_1 = \frac{-0,38 + 0,29 - 0,18 + 0,14}{4} = -0,03;$$

аналогічно:  $b_2 \approx -0,09$ .

$$b_{12} = \frac{\sum_{u=1}^n x_{1u} x_{2u} \bar{y}_u}{n}; \quad b_{12} \approx +0,01.$$

Проведемо оцінку значимості коефіцієнтів регресії. Вона виконується за допомогою критерія Стюдента (табл. 3.4). Коефіцієнт вважається значимим, якщо виконується нерівність:

$$|b_i| \geq \Delta b_i = t(0,05; f_y) \frac{\sigma_y}{\sqrt{n}}, \quad (2.8)$$

$t(0,05; f_y)$  — 5 %-ва точка розподілу Стюдента з  $f_y$  ступенями свободи дисперсії відтворюваності. Для нашого випадку:

$$t(0,05; 4) = 2,7764; \quad f_y = n = 4$$

Тоді:

$$\Delta b_i = 2,7764 \cdot \frac{\sqrt{4 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{4}} = 2,7764 \cdot 10^{-2}.$$

У відповідності з даним виразом всі коефіцієнти регресії значимі за виключенням взаємодії факторів  $b_{12} = 0,01$  і рівняння (модель), що пов'язує цільову функцію з факторами набуває виду:

$$y = 0,25 - 0,03X_1 - 0,09X_2.$$

Перевірка адекватності лінійної моделі виконується за допомогою критерію Фішера (табл. 2.5).

Адекватність обґрунтована, якщо виконується наступна нерівність:

$$F = \frac{\sigma_{\text{ад}}^2}{\sigma_y^2} \leq F(0,05; f_{\text{ад}}; f_y), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{\text{ад}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^n (\bar{y}_u - y_u)^2}{n - m - 1},$$

де  $\sigma_{\text{ад}}^2$  — дисперсія адекватності;  $y_u$  — розрахункові значення відгуку по рівнянню;  $F(0,05; f_{\text{ад}}; f_y)$  — критерій Фішера для 5%-го рівня значимості;  $f_{\text{ад}}$  — кількість ступенів свободи дисперсії адекватності,  $f_{\text{ад}} = n - k_{\text{в}}$  ( $k_{\text{в}}$  — кількість коефіцієнтів регресії, що визначається);  $f_{\text{ад}} = 4 - 3$ ;  $f_y$  — число ступенів свободи дисперсії відтворюваності (помилка дослідів), воно може бути знайдене лише у випадку проведення паралельних дослідів. При кількості паралельних дослідів рівних двом і загальній кількості дослідів чотирьом:  $f_y = 4$ .

Таблиця 2.5. Критерій Фішера за рівня значимості  $\alpha=0,05$  [URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій\\_Фішера](https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій_Фішера)]

Число ступенів свободи $f_2$	Число ступенів свободи $f_1$								
	1	2	3	4	7	10	16	24	40
1	161	200	216	225	237	242	246	249	251
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47
3	10,13	9,55	9,28	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71
5	6,61	5,79	5,41	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67
12	4,75	3,88	3,49	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16
18				2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07
20		3,5	3,1	2,9				2,1	

Перевіримо адекватність моделі, для цього, використовуючи отриману модель, розраховуємо значення  $y_u$  для різних рівнів факторів, що задані умовами дослідів:

Дослід	$y_u$
1	0,37
2	0,31
3	0,19
4	0,13

Потім знайдемо  $\sigma_{ад}^2$ :

$$\sigma_{\text{ад}}^2 = \frac{(0,38 - 0,37)^2 + (0,29 - 0,31)^2 + (0,18 - 0,19)^2 + (0,14 - 0,13)^2}{4 - 2 - 1} = 7 \cdot 10^{-4}.$$

Визначимо величину критерія Фішера:

$$F = \frac{7 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 1,75.$$

Критичне (табличне) значення критерія Фішера:

$$F_{(0,05;1;4)} = 7,7086.$$

Порівнюючи значення критеріїв Фішера робимо висновок про адекватність лінійної моделі отриманої за результатами планованого експерименту.

При необхідності за допомогою співвідношення

$$X_1 = \frac{A_i - A_{ia}}{\delta_i},$$

модель з кодovаними факторами можна привести до виду з звичайним представленням факторів:

$$\mu_y = 0,25 - 0,03 \frac{t - 1050}{150} - 0,09 \frac{k_{\text{ш}} - 4}{2}.$$

Після перетворень, отримаємо

$$\mu_y = 0,64 - 0,0002 \cdot t - 0,045 \cdot k_{\text{ш}}.$$

Таким чином, на основі проведення планованого експерименту отримана адекватна лінійна модель залежності коефіцієнту тертя при сталому процесі прокатування, яка враховує вплив температури металу і класу шорсткості поверхні валків.

## 2.5. Планування експерименту за допомогою греко-латинських квадратів

Часто при проведенні експериментів на результат дослідження можуть впливати побічні (зовнішні) фактори. Причому ці побічні фактори можуть безупинно змінюватися в часі або ж дискретно. Тому неможливо виключити вплив цих факторів на результат або прагнути звести до мінімуму їх ефект шляхом рандомізації. Зокрема в цьому випадку використовують для планування експерименту латинські і греко-латинські квадрати [9, 3]. Розглянемо приклад використання планування експерименту у вигляді греко-латинського квадрата 4 x 4 (на результат діють чотири фактори, кожний з яких змінюється на чотирьох рівнях). Раніше була отримана формула для визначення товщини шару мастила у осередку деформації при прокатуванні (2.6).

Позначимо безрозмірні параметри цієї формули наступним чином:

$$\frac{\xi_0}{R} = R_p; \quad \frac{\Delta h}{R} = \alpha^2; \quad \frac{\eta_0 V}{\sigma_T R} = A; \quad \theta \sigma_T = B; \quad \frac{E}{\sigma_T} = D.$$

Відповідно, рівняння (2.6) набуде виду

$$R_p = N \cdot \alpha^{2a} \cdot A^b \cdot B^c \cdot D^d. \quad (2.10)$$

Якщо в досліді знайти показники ступенів  $2a, b, c, d$  і чисельний коефіцієнт  $N$ , то отриману залежність можна використовувати для аналізу впливу гідродинаміки на товщину шару мастила в осередку деформації. Зазначимо, що в досліді досить визначити тільки показники ступенів.

З рівняння (2.10) випливає, що результат визначається чотирма критеріями (факторами)  $\alpha, A, B, D$ . При проведенні експерименту кожен критерій змінювали на чотирьох рівнях. У результаті був отриманий план експерименту у вигляді греко-латинського квадрата. Греко-латинським квадратом називається

такий план експерименту, у якому кожне значення рівня зустрічається тільки один раз у рядку і один раз у стовбці, причому комбінації критеріїв  $\alpha, A, B, D$  не повинні повторюватися (таблиця 2.6).

Цей план має три обмеження на рандомізацію. Кожне обмеження на рандомізацію зменшує експериментальну помилку. Умови дослідів для кожного гнізда греко-латинського квадрата наведено в таблиці 2.6. Одиниці розмірностей фізичних величин наступні:  $\xi_0, \text{мм}; \eta_0, \text{кг/мм}^2 \times \text{с}; V_g$  і  $V_0, \text{мм/с}; R, \text{мм}; \theta, \text{мм}^2/\text{кг}; \sigma_T, \text{кг/мм}^2; E, \text{кг/мм}^2; t, ^\circ\text{C}$  – середня температура мастильного шару перед осередком деформації. Товщину шару мастила в дослідах визначали краплинним методом [10].

Результати експерименту по впливу гідродинамічних факторів на товщину мастильної плівки представлені в таблиці 2.7.

За отриманими результатами знайдемо залежність величини  $R_p$  від критерію  $A$ . Для цього необхідно усереднити вплив інших факторів. При функціональній залежності виду (2.10) це досягається шляхом логарифмування результатів експерименту і відшукування середніх логарифмів.

Таблиця 2.6. Умови проведення дослідів

Кут захвату	Значення технологічних і безрозмірних параметрів при значеннях			
	$B_2 = 5,181$	$B_1 = 6,17$	$B_3 = 3,34$	$B_4 = 2,6$
<i>l</i>	2	3	4	5
$\alpha_2 = 0,030$	$D_1 = 290$	$D_3 = 650$	$D_4 = 840$	$D_2 = 450$
	$A_1 = 7,08 \cdot 10^{-10}$	$A_2 = 3,16 \cdot 10^{-9}$	$A_3 = 4,36 \cdot 10^{-9}$	$A_4 = 1,2 \cdot 10^{-8}$
	$E = 1,6 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^5$
	$\sigma_T = 550$	320	245	200
	$\theta = 0,0095$	0,019	0,014	0,0125
	$\eta = 0,0875$	0,37	0,43	0,16
	$\sum \nu = 480$	285	280	1650
	$t = 70$	40	10	40
мастило (масло)	касторове	бraitсток	бавовняне	касторове
$\alpha_1 = 0,021$	$D_4 = 840$	$D_2 = 450$	$D_1 = 290$	$D_3 = 650$
	$A_4 = 1,2 \cdot 10^{-8}$	$A_3 = 4,36 \cdot 10^{-9}$	$A_2 = 3,16 \cdot 10^{-9}$	$A_1 = 7,08 \cdot 10^{-10}$
	$E = 2,2 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$
	$\sigma_T = 260$	245	370	250
	$\theta = 0,02$	0,023	0,0093	0,0103
	$\eta = 1,2$	0,062	0,07	0,035
	$\sum \nu = 285$	1780	1800	550
	$t = 25$	425	80	16
мастило (масло)	бraitсток	індустріальне 20	касторове	мастило ПКС
$\alpha_3 = 0,040$	$D_2 = 450$	$D_4 = 840$	$D_3 = 650$	$D_1 = 290$
	$A_2 = 3,16 \cdot 10^{-9}$	$A_1 = 7,08 \cdot 10^{-10}$	$A_4 = 1,2 \cdot 10^{-8}$	$A_3 = 4,36 \cdot 10^{-9}$
	$E = 1,6 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^5$
	$\sigma_T = 360$	250	250	300
	$\theta = 0,015$	0,0246	0,0133	0,0096
	$\eta = 0,14$	0,08	0,38	0,085
	$\sum \nu = 1080$	230	850	1650
	$t = 6$	20	35	90
мастило (масло)	бавовняне	індустріальне 20	касторове	касторове



Продовження таблиці 2.6

1	2	3	4	5
$\alpha_3 = 0,070$	$D_3 = 650$	$D_1 = 290$	$D_2 = 450$	$D_4 = 840$
	$A_2 = 3,16 \cdot 10^{-9}$	$A_4 = 1,2 \cdot 10^{-8}$	$A_1 = 7,08 \cdot 10^{-10}$	$A_2 = 3,16 \cdot 10^{-9}$
	$E = 2,1 \cdot 10^5$	$1,1 \cdot 10^5$	$1,6 \cdot 10^5$	$0,9 \cdot 10^5$
	$\sigma_T = 320$	360	350	107
	$\theta = 0,019$	0,014	0,0096	0,024
	$\eta = 0,37$	1,05	0,03	0,09
	$\sum \nu = 285$	450	890	405
	$t = 40$	45	100	20
мастило (масло)	бraitсток	касторове	касторове	індустріальне 20

Таблиця 2.7. Результати дослідів

Значення відгуку для наступних комбінацій безрозмірних параметрів				
Кут захвату	Параметр			
	$B_2$	$B_1$	$B_3$	$B_4$
$\alpha_2$	$D_1; A_1$	$D_3; A_2$	$D_4; A_3$	$D_2; A_4$
	$R_p = \xi_0/R =$ $= 1,5 \cdot 10^{-6};$	$R_p = 5,5 \cdot 10^{-6};$	$R_p = 5,0 \cdot 10^{-6};$	$R_p = 8,5 \cdot 10^{-6};$
	$\lg R_p =$ $= 0,1703 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,7404 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,6990 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,9294 - 6$
$\alpha_1$	$D_4; A_4$	$D_2; A_3$	$D_1; A_2$	$D_3; A_1$
	$R_p = 4,0 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 7,2 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 4,5 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 1,15 \cdot 10^{-6}$
	$\lg R_p =$ $= 1,2041 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,8573 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,6532 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,0607 - 6$
$\alpha_3$	$D_2; A_2$	$D_4; A_1$	$D_3; A_4$	$D_1; A_3$
	$R_p = 4,0 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 1,3 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 6,4 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 2,7 \cdot 10^{-6}$
	$\lg R_p =$ $= 0,6021 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,1004 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,8062 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,4314 - 6$

Продовження таблиці 2.7

$\alpha_4$	$D_3; A_3$	$D_1; A_4$	$D_2; A_1$	$D_4; A_2$
	$R_p = 2,3 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 7,65 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 0,5 \cdot 10^{-6}$	$R_p = 1,3 \cdot 10^{-6}$
	$\lg R_p =$ $= 0,3617 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,8837 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,6990 - 6$	$\lg R_p =$ $= 0,1139 - 6$

Для випадку  $A_1 = 7,079 \cdot 10^{-10}$

$$\sum \lg R_p = \bar{6},1703 + \bar{6},1004 + \bar{7},6990 + \bar{6},0607 = \bar{24},0304.$$

Кодове значення  $\bar{6},1703$  представляє собою вираз  $-6,0 + 0,1703$ . Аналогічно слід розглядати і інші величини, що належать до виразу для визначення  $\sum \lg R_p$ .

При інших числових значеннях параметра  $A$  усереднені величини результату наступні:

	$A_2$	$A_3$	$A_4$
$(\lg R_p)_{\text{cp}}$	$\bar{6},5249$	$\bar{6},5873$	$\bar{6},9559$
$(R_p)_{\text{cp}}$	$3,49 \cdot 10^{-6}$	$3,867 \cdot 10^{-6}$	$9,035 \cdot 10^{-6}$

Знаходимо середні значення:

$$(\lg R_p)_{\text{cp}} = \bar{24},0304 \div 4 = \bar{6},0076 ;$$

$$(R_p)_{\text{cp}} = 1,017 \cdot 10^{-6}$$

На основі цих даних побудований графік (рис. 2.3, а), який дозволяє визначити величину показника степеня у фактору  $A$ .

$$b = 0,75.$$

Прямі на графіку (рис. 2.3) проведені з використанням методу найменших квадратів.

Аналогічно обчислені середні значення результатів для різних рівнів факторів  $\alpha; B$  і  $D$  (див. таблицю 2.8).

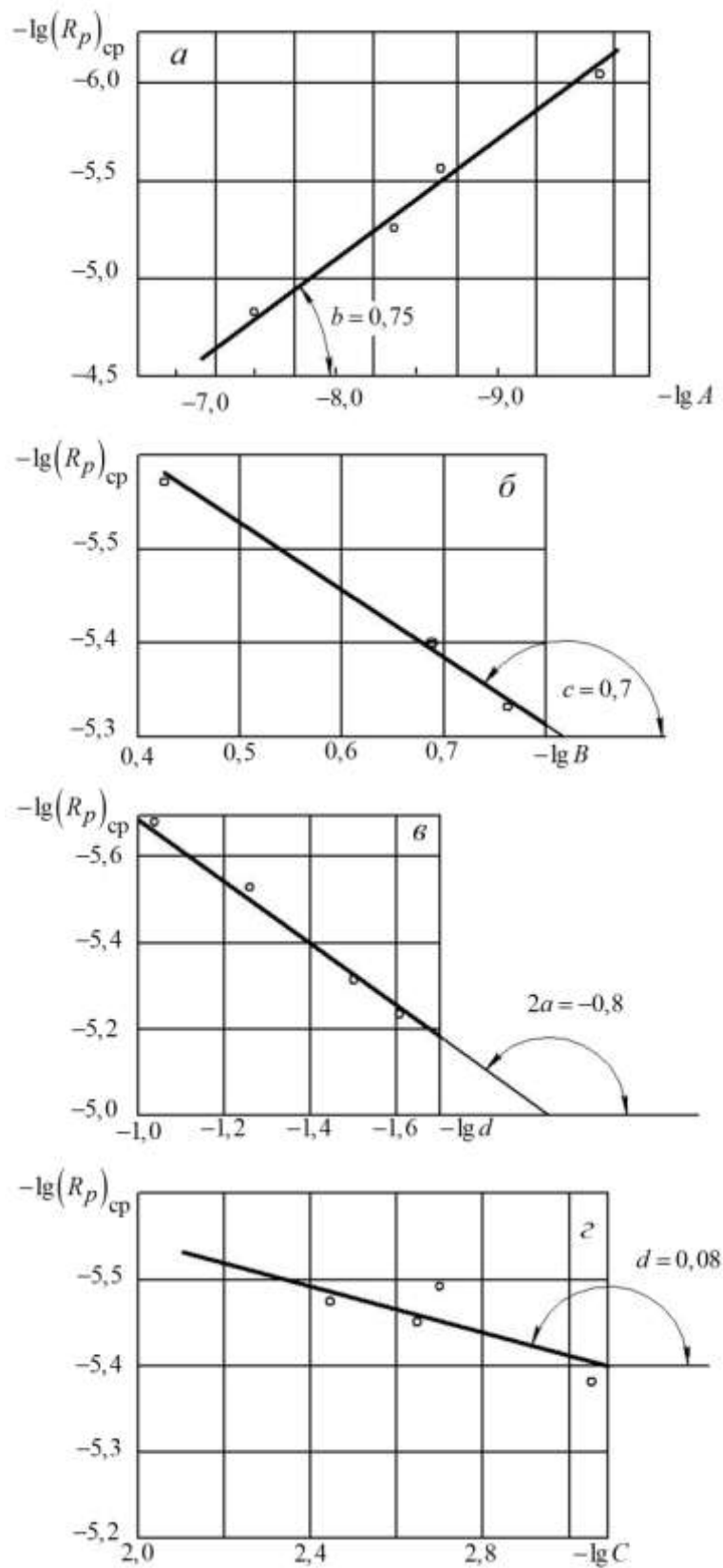


Рис. 2.3. Визначення показників степенів у функціональній залежності (2.10)

Побудовані графіки (рис. 2.3, б, в, г), що показують залежність середнього логарифма результату від величини логарифма кожного з факторів і знайдені числові значення показників степенів:

$$2a = -0,8; c = 0,7; d = -0,07.$$

Наступний етап дослідження полягав у визначенні вірогідності отриманих значень показників степенів. Для цього проведемо дисперсійний аналіз і встановимо, чи є ефект того або іншого фактору значимим або ж відмінність у результаті пояснюється появою випадкових помилок. Припустимо, що кожне отримане в досліді значення  $R_p$  представляється випадковою величиною і ефекти взаємодії відсутні, тоді при дослідженні експерименту можна застосувати чотирифакторний дисперсійний аналіз.

Таблиця 2.8. Середні значення результату по рівням

	$(\lg R_p)_{\text{cp}}$	$(R_p)_{\text{cp}}$
$B_1$	$\bar{6},6455$	$4,421 \cdot 10^{-6}$
$B_2$	$\bar{6},5845$	$3,842 \cdot 10^{-6}$
$B_3$	$\bar{6},4643$	$2,913 \cdot 10^{-6}$
$B_4$	$\bar{6},3839$	$2,420 \cdot 10^{-6}$
$D_1$	$\bar{6},5346$	$3,425 \cdot 10^{-6}$
$D_2$	$\bar{6},5220$	$3,327 \cdot 10^{-6}$
$D_3$	$\bar{6},4953$	$3,107 \cdot 10^{-6}$
$D_4$	$\bar{6},5293$	$3,382 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_1$	$\bar{6},6938$	$4,942 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_2$	$\bar{6},6342$	$4,307 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_3$	$\bar{6},4850$	$3,055 \cdot 10^{-6}$
$\alpha_4$	$\bar{6},2646$	$1,84 \cdot 10^{-6}$

Математична модель даного плану експерименту має вигляд:

$$\mu_{ijmn} = \mu + T_i^A + T_j^B + T_m^\alpha + T_n^D + \varepsilon_{ijmn}, \quad (2.11)$$

де  $\mu$  — середнє сукупності, у яку входить вибірка з 16 результатів досліджу;  $T_i^A, T_j^B, T_m^\alpha, T_n^D$  — ефект впливу кожного із критеріїв на результат;  $\varepsilon_{ijmn}$  — випадкова похибка експерименту.

Для зручності обчислень додаємо до логарифму результату (таблиця 2.8) число 5,8, ця операція не впливає на розрахунки  $F$  — статистик. Закодовані дані (їх можна вважати як відхилення від середнього значення) представлено в таблиці 2.9.

Оцінка ефекту кожного з факторів може бути зроблена таким чином.

1. Знайдемо суму відхилень середніх  $T_m^\alpha$  для кожного рівня фактору  $\alpha$  (див. таблицю 2.9).

Таблиця 2.9. Закодовані значення результатів дослідів

Кут захвату, рад	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$\alpha_2 = 0,030$	-0,0297	0,5404	0,4990	0,7294	$T_2^\alpha = 1,7390$
$\alpha_1 = 0,021$	1,0041	0,6573	0,4532	-0,1393	$T_1^\alpha = 1,0753$
$\alpha_3 = 0,040$	0,4021	-0,0996	0,6062	0,2314	$T_3^\alpha = 1,1401$
$\alpha_4 = 0,070$	0,1617	0,6837	-0,501	-0,0861	$T_4^\alpha = 0,2583$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 X_{ijmn}^2 = 4,0429 \quad \text{— сума квадратів усіх відхилень;}$$

$$T_{\text{заг}} = 5,1127$$

$\alpha_2$	$\alpha_1$	$\alpha_3$	$\alpha_4$
$T_2^\alpha = 1,7390$	$T_1^\alpha = 1,9753$	$T_3^\alpha = 1,1401$	$T_4^\alpha = 0,2583$

2. Зводимо ці значення в квадрат і знайдемо їх суму і середній квадрат

$$\left(T_2^\alpha\right)^2 = 3,024; \left(T_1^\alpha\right)^2 = 3,900; \left(T_3^\alpha\right)^2 = 1,3; \left(T_4^\alpha\right)^2 = 0,0667;$$

$$\sum \left(T_m^\alpha\right)^2 = 8,2907; \sum \left(T_m^\alpha\right)_{cp}^2 = 2,0667$$

3. Знайдемо загальну суму відхилень середніх

$$T_{заг} = \sum_1^4 T_m^\alpha = 5,1127$$

4. Визначимо суму квадратів відхилень середніх по фактору  $\alpha$

$$S_\alpha = \left(T_m^\alpha\right)_{cp}^2 - \frac{T_{заг}^2}{N}; \quad S_\alpha = 2,0727 - \frac{5,1127^2}{16} = 0.4390,$$

де  $N$  — загальне число випробувань (дослідів).

Аналогічно знайдені суми квадратів відхилень середніх по факторах А, В, Д, результати наведено в таблиці 2.10.

5. Визначимо загальну суму квадратів відхилень:

$$S_{общ} = \sum_1^4 \sum_1^4 \Delta X_{ijmn}^2 - \frac{T_{заг}^2}{N};$$

$$S_{общ} = 4,0829 - \frac{5,1127^2}{16} = 2,4492$$

6. Знайдемо суму квадратів помилки:

$$S_{ош} = S_{общ} - S_\alpha - S_A - S_B - S_D;$$

$$S_{ош} = 0,0102.$$

Таблиця 2.10. Відхилення по факторах

	Фактор					
	<i>B</i>		<i>D</i>		$\alpha$	
Сума відхилень для кожного рівня факторів	$T_j^B$	1,7818	$T_m^D$	1,3386	$T_n^\alpha$	1,9753
		1,5382		1,2878		1,7390
		1,0574		1,1690		1,1401
		0,7354		1,3174		0,2583
Квадрат суми відхилень кожного рівня факторів	$(T_j^B)^2$	3,175	$(T_m^D)^2$	1,792	$(T_n^\alpha)^2$	3,900
		2,366		1,658		3,024
		1,119		1,367		1,300
		0,5408		1,736		0,0667
Сума квадратів відхилень	$\sum(T_j^B)^2$	7,2008	$\sum(T_m^D)^2$	6,553	$\sum(T_n^\alpha)^2$	8,2907
Середній квадрат	$(T_j^B)_{cp}^2$	1,8002	$(T_m^D)_{cp}^2$	1,6382	$(T_n^\alpha)_{cp}^2$	2,0727
Сума квадратів відхилень по фактору	$S_B$	0,1667	$S_D$	0,0045	$S_\alpha$	0,4390

7. Перевіримо гіпотезу  $H_0(T_i^A = T_j^B = T_n^f = T_m^D = 0)$  для кожного з факторів.

а) для фактору  $\alpha$  :

$$F_{3,3} = \frac{S_\alpha / K_{ct}}{S_{ou} / l_{ct}}$$

$$F_{3,3} = \frac{0,4390 / 3}{0,0102 / 3} = 43,2,$$

де  $K_{ct}$  і  $l_{ct}$  — число ступенів свободи фактору  $\alpha$  і похибки експерименту відповідно,  $K_{ct} = 3$ ;  $l_{ct} = 3$ .

Табличне значення  $F_{3,3}^{kp} = 9,28$  при похибці I роду, що становить рівень значимості  $\alpha_{00} = 0,05$

Розраховане значення критерію Фішера більше за табличне. Це свідчить про те, що гіпотезу  $H_0$  слід відкинути і, отже, існує цілком певна залежність між результатом  $R_p$  і кутом захвату  $\alpha$ .

Для факторів

$$A \rightarrow F_{3,3} = 179;$$

$$B \rightarrow F_{3,3} = 16,4;$$

$$D \rightarrow F_{3,3} = 0,44.$$

Порівняння розрахованих значень критерію Фішера з табличними показує, що, як і в попередньому випадку, існує тісний зв'язок між факторами  $A$ ,  $B$  і результатами експерименту. Фактор  $D$  не впливає на величину  $R_p$ , її зміни можуть бути зв'язані тільки з появою випадкових помилок. У цьому випадку виконується  $H_0$  гіпотеза, що вказує на те, що існує рівність між середніми значеннями результату для кожного рівня фактору  $D$ .

Таким чином, ефект фактору  $D$  відсутній, отже  $f = 0$ , тоді формула (2.9) набуває виду:

$$R_p = N \cdot \alpha^{-0.8} A^{0.75} B^{0.7}. \quad (2.12)$$

Невідому постійну  $N$  легко визначити по наявних експериментальних даних з урахуванням формули (2.12). Середнє значення її становить:

$$N = 0,24.$$

Таким чином, на основі аналізу розмірностей і теорії планування експерименту отримано залежність для розрахунків товщини шару мастила в зоні входу в осередок пластичної деформації при прокатуванні. При тонкоплівочному змащуванні (товщина шару від 1,5 мкм і менше) формула (2.12) дає кращі результати в порівнянні з раніше запропонованими залежностями.

## 2.6. Метод крутого сходження

В результаті реалізації факторного експерименту отримують рівняння регресії, яке описує функцію відгуку в деякій обмеженій



області факторного простору. Якщо мета експерименту — побудова інтерполяційної формули, то дослідження на цьому закінчується. Однак на практиці адекватна модель па першому етапі дослідження необхідна для вибору напрямку руху до області оптимуму. Отримана модель являє собою розкладання аналітичної функції в ряд Тейлора в околицях точки нульового рівня факторів в багатфакторному просторі. При цьому коефіцієнти регресії є приватні похідні функції відгуку за відповідними факторів. Тому, якщо  $i, j, \dots, z$  — одиничні вектори в напрямку координатних осей, то

$$\text{grad } y = b_1 i + b_2 j + \dots + b_k z. \quad (2.13)$$

Цей вислів задає найкоротший напрямок руху до екстремуму (рис. 2.4). Очевидно, що для здійснення такого руху необхідно змінювати фактори пропорційно відповідними коефіцієнтами регресії.

У геометричній інтерпретації перша похідна являє собою кут нахилу дотичної до кривої, тобто

$$b_i = \text{tg} \varphi$$

Значення функції в точках, що лежать на градієнті, можна визначити з виразу

$$y(d) = y_0 + I_i \varphi \quad (2.14)$$

Рух по градієнту в кожному конкретному випадку являє собою крокову операцію, яка триває до тих пір, поки не будуть виходити результати нижче попередніх. Поблизу точки з найбільш високим результатом ставиться нова серія дослідів з метою опису функції відгуку в області оптимуму або відшукання нового напрямку руху до оптимуму.

У загальному випадку, коли розглядається система з  $k$  факторами, процедура не змінюється, тому що всі ефекти незалежні один від одного. При цьому, щоб рух здійснювалося за градієнтом, необхідно зберігати співвідношення творів коефіцієнтів ре-

гресії на інтервал варіювання, які можуть все одночасно множитися або ділитися на будь-яке позитивне число (це іноді необхідно при виборі кроку руху по градієнту).

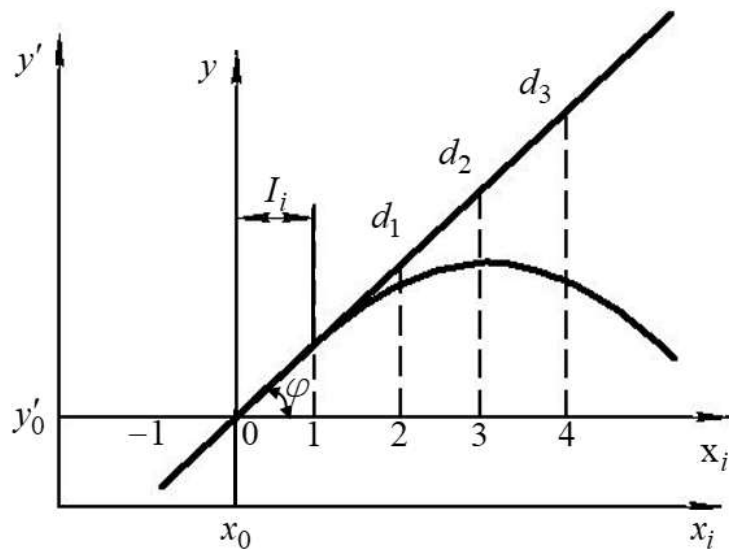


Рис. 2.4. Графік руху по градієнту  $\kappa = 1$

Умови кожного наступного дослідження при русі по градієнту визначається шляхом одночасного додавання до рівнів факторів в попередньому досліді відповідної величини  $b_i I_i$  (або  $k b_i I_i$ , де  $k$  — будь-яке позитивне число, однакове для всіх факторів). Вихідними умовами при русі по градієнту є значення нульового рівня факторів.

В області обробки металів тиском метод руху по градієнту (круте сходження) може використовуватися для вирішення завдань підвищення точності і поліпшення якості продукції, зниження витрат металу, підвищення продуктивності і т.д.

## 2.7. Плани другого порядку

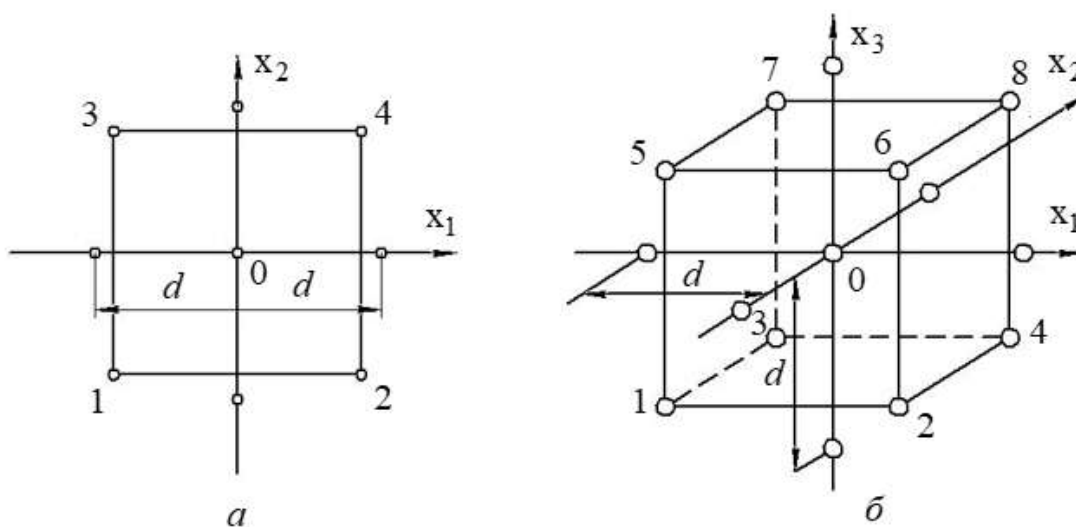
Якщо поверхня відгуку має значну кривизну, то вона не може бути адекватно описана неповним квадратним рівнянням, згі-

дно моделі (2.4), навіть в дуже вузькій області. У цих випадках, керуючись спільною ідеєю покрокового експерименту, необхідно спробувати описати досліджувану поверхню відгуку повним рівнянням другого ступеня. Для цього треба провести експеримент таким чином, щоб кожен фактор варіював хоча б на трьох рівнях [11]. При цьому планування типу  $3^k$  не є кращим рішенням, тому що призводить до необхідності постановки невиправдано великого числа дослідів при  $k > 3$ . У зв'язку з цим, плани першого порядку типу  $2^k$  використовують в якості ядра, на якому потім добудовується конструкція плану другого порядку. Такі плани отримали назву композиційних і повністю відповідають ідеї покрокової процедури. Оскільки експериментатор спочатку реалізує ПФЕ і перевіряє гіпотезу лінійної апроксимації, переконавшись, в її неспроможності, і робить наступний крок: добудовує ПФЕ до плану другого порядку, реалізує його і перевіряє гіпотезу про адекватність рівняння другого ступеня. Покажемо це на прикладі.

На першому етапі реалізують серію дослідів для побудови лінійної моделі. У задачі з двома факторами — це дослід в чотирьох точках (рис. 2.5, а). При трьох факторах (рис. 2.5, б) можна поставити  $1/2$  — репліку ПФЕ, наприклад, точки 2, 3, 5, 8. Потім ставлять досвід в центрі (на нульовому рівні факторів) для перевірки адекватності: модель виявилася неадекватною. Отже, необхідно робити наступний крок:  $1/2$  — репліку добудовують до повного факторного експерименту, тобто реалізують дослід в усіх вершинах куба. Потім ставлять ще кілька дослідів в точках, розташованих на відстані  $d$  від центра, це так звані зоряні точки. З рис. 2.5 видно, що при побудові плану другого порядку область експерименту розширюється. Отримано два композиційних плану другого порядку при  $k = 2$  ( $N = 9$ ) і  $k = 3$  ( $N = 15$ ). У загальному вигляді кількість дослідів при реалізації композиційного плану другого порядку визначається за формулою

$$N = 2^k + 2k + 1 \quad (2.15)$$

З центральних композиційних планів другого порядку широко поширені ортогональні (ЦКОП) і рототабельні (ЦКРП) плани. З них ми розглянемо тільки ортогональні плани другого порядку, які не потребують складних обчислень за допомогою ЕОМ, найбільш прості і зручні.



*a* — при  $k = 2$ ; *b* — при  $k = 3$

Рис. 2.5. Побудова планів другого порядку

В результаті реалізації ЦКОП можна отримати коефіцієнти регресії в рівнянні другого ступеня, вид якого відрізняється від звичайної форми запису:

$$y = b'_0 + \sum_{1 \leq i \leq k} b_i X_i + \sum_{1 \leq i < j \leq k} b_{ij} X_i X_j + \sum_{1 \leq i \leq k} b_{ii} (X_i^2 - \varphi), \quad (2.16)$$

де  $\varphi = \sqrt{\frac{2^k}{N}} = \frac{\sum_{u=1}^N X_{iu}^2}{N} X_i^2$  — допоміжний параметр, що забезпечує ортогональність плану

Побудова центрального композиційного ортогонального плану другого порядку при наявності ядра зводиться до нарощу-

вання точок, розташованих в центрі плану (на нульовому рівні факторів) і на відстані від центру, яке обчислюється за формулою

$$d = \sqrt{\frac{N \cdot \varphi - 2^k}{2}} \quad (2.17)$$

У табл. 2.11 наведені величини  $\varphi$  і  $d$ , розраховані для  $k \leq 7$ .

Коефіцієнти регресії в математичній моделі (2.16) визначають за досить простою формулою і незалежно один від одного

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N X_{iu} \cdot y_u}{\sum_{u=1}^N X_{iu}^2} \quad (2.18)$$

Знаменник у виразі (2.18) не залежить від результатів дослідів, тому його можна обчислити заздалегідь, що спрощує обробку результатів експерименту.

Користуючись даними табл. 2.12, побудуємо ортогональні плани другого порядку для двох (табл. 2.13) і трьох факторів (табл. 2.14). При  $k > 4$  план будується аналогічно. При побудові ортогональних планів на число нульових точок не накладається обмежень, тому можна прийняти мінімум цих точок  $N_0 = 1$ .

Після визначення коефіцієнтів регресії за формулою (2.18) розраховують їх дисперсії

$$S_{b_i}^2 = \frac{S_y^2}{\sum_{u=1}^N X_{iu}^2} \quad (2.19)$$

Залишкова сума квадратів

$$S_k = \sum_{u=1}^N y_u^2 - \sum_{i=0}^{k_i} b_i \sum_{u=1}^N X_{iu} \cdot y_u \quad (2.20)$$

з числом ступенів свободи

$$f_R = N - k_1; \quad (2.21)$$

$$f_R = N - k_1 = 0,5(k + 2)(k + 1).$$

Таблиця 2.11. Параметри ортогональних планів другого порядку

Ядро плану	Загальна кількість дослідів N	$\varphi$	$d$
$2^2$	9	$2/3 \approx 0,0667$	1,0000
$2^3$	15	$\sqrt{\frac{8}{15}} \approx 0,7303$	1,2154
$2^4$	25	$4/5 \approx 0,8$	1,4142
$2^{5-1}$	27	$\frac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,7698$	1,5467
$2^5$	43	$\frac{4\sqrt{86}}{43} \approx 0,8627$	1,5960
$2^{6-1}$	45	$\frac{4\sqrt{10}}{15} \approx 0,8433$	1,7244
$2^6$	77	$8\sqrt{\frac{1}{77}} \approx 0,9117$	1,7606
$2^{7-1}$	143	$8\sqrt{\frac{2}{143}} \approx 0,9001$	1,8848
$2^7$	143	$8\sqrt{\frac{2}{143}} \approx 0,9461$	1,9095

Щоб перейти від виразу (3.56) до звичайної форми запису, знаходять величину

$$b_0 = b'_0 - \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi \cdot b_{i_i} \quad (2.22)$$

яка оцінюється з дисперсією

$$S_{b_0}^2 = S_{b'_0}^2 + \sum_{1 \leq i \leq k} \varphi \cdot S_{b_{i_i}}^2 \quad (2.23)$$

Таблиця 2.12. Значення  $\sum_{i=1}^N X_{iu}^2$  для ортогональних планів другого

порядку

Стовбчик в матриці планування		$X_0$	$X_i$	$X_i \cdot X_j$	$X_i^2 - \varphi$
Значення $\sum_{i=1}^N X_{iu}^2$ при ядрі типу:	$2^2$	9	6	4	2
	$2^3$	15	10,9544	8	4,364
	$2^4$	25	20	16	8
	$2^{5-1}$	27	20,7846	16	8,241
	$2^5$	43	37,0944	32	16,767
	$2^{6-1}$	45	37,9471	32	17,684
	$2^6$	77	70,1994	64	19,217
	$2^{7-1}$	79	71,1049	64	25,241
	$2^7$	143	135,2924	128	26,589

Таблиця 2.13. Ортогональне планування другого порядку для  $k = 2$

Дослід	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_1^2$	$X_2^2$	$X_1 X_2$	$y$
Планування типу $2^2$	+1	-1	-1	1/3	1/3	+1	$y_1$
	+1	+1	-1	1/3	1/3	-1	$y_2$
	+1	-1	-1	1/3	1/3	-1	$y_3$
	+1	+1	-1	1/3	1/3	+1	$y_4$
Зіркові точки	+1	-1	0	1/3	-2/3	0	$y_5$
	+1	+1	0	1/3	-2/3	0	$y_6$
	+1	0	-1	-2/3	1/3	0	$y_7$
	+1	0	+1	-2/3	1/3	0	$y_8$
Нульова точка	+1	0	0	-2/3	-2/3	0	$y_9$

Таблиця 2.14. Ортогональне планування другого порядку для  $k = 3$

Дослід	$X_0$	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_1^2 - \frac{11}{15}$	$X_2^2 - \frac{11}{15}$	$X_3^2 - \frac{11}{15}$	$X_1 \cdot X_2$	$X_1 \cdot X_3$	$X_2 \cdot X_3$	$y$
План типу $2^3$	+1	-1	-1	-1	4/15	4/15	4/15	+1	+1	+1	$y_1$
	+1	+1	-1	-1	4/15	4/15	4/15	-1	-1	+1	$y_2$
	+1	-1	+1	-1	4/15	4/15	4/15	-1	+1	-1	$y_3$
	+1	+1	+1	-1	4/15	4/15	4/15	+1	-1	-1	$y_4$
	+1	-1	-1	+1	4/15	4/15	4/15	+1	-1	-1	$y_5$
	+1	+1	-1	+1	4/15	4/15	4/15	-1	+1	-1	$y_6$
	+1	-1	+1	+1	4/15	4/15	4/15	-1	-1	+1	$y_7$
	+1	+1	+1	+1	4/15	4/15	4/15	+1	+1	+1	$y_8$
Зіркові точки	+1	-1,215	0	0	23/30	-11/15	-11/15	0	0	0	$y_9$
	+1	+1,215	0	0	23/30	-11/15	-11/15	0	0	0	$y_{10}$
	+1	0	-1,215	0	-11/15	23/30	-11/15	0	0	0	$y_{11}$
	+1	0	+1,215	0	-11/15	23/30	-11/15	0	0	0	$y_{12}$
	+1	0	0	-1,215	-11/15	-11/15	23/30	0	0	0	$y_{13}$
	+1	0	0	+1,215	-11/15	-11/15	23/30	0	0	0	$y_{14}$
Нульова точка	+1	0	0	0	-11/15	-11/15	-11/15	0	0	0	$y_{15}$

У наведеній главі розглянуті окремі методи досить широкого спектру можливих планів експериментів. В спеціальній літературі описані більш складні плани експериментів. Разом з тим, викладене, в певній мірі, дозволяє оцінити переваги планування інженерного експерименту, особливо при проведенні дослідів в промислових умовах.



## 2.8. Композиційне планування експериментів

Для розв'язання інженерних задач нестандартного типу, які виникають, наприклад, при налагодженні технологічних процесів, доцільно використовувати відповідні математичні моделі. Технології побудови таких моделей засновані на інженерії знань, яка вивчає методи і засоби збору, подання, структурування і використання знань. Інженерія знань пов'язана з математичною логікою, а також з обчислювальними експериментами. В деяких випадках доцільно користуватися композиційним плануванням експериментів, якщо кожний з них можна розглядати або як підсистему більш глобального експерименту, або як складну систему, підсистеми якої також мають конкретне значення. Тоді доцільно використати агрегування або декомпозицію планів експериментів.

З урахуванням автоматизації та комп'ютеризації виробництва актуальна проблема підвищення ефективності обраних математичних моделей. Зокрема, вважається раціональним перехід до більш універсальних моделей, що мають розширену область використання.

Традиційно математичні моделі будують теоретично, експериментально або будь-якої комбінацією цих способів. Однак у випадках багатофакторних моделей реалізація кожного із способів вельми трудомістка. В результаті обчислювального експерименту використання апріорної інформації з накопичених в галузі баз і банків даних дозволяє знизити витрати і трудомісткість дослідження, перейти до узагальнюючих моделей. Для отримання більш універсальних моделей пропонується використовувати агрегування за наступною схемою (рис. 2.6).

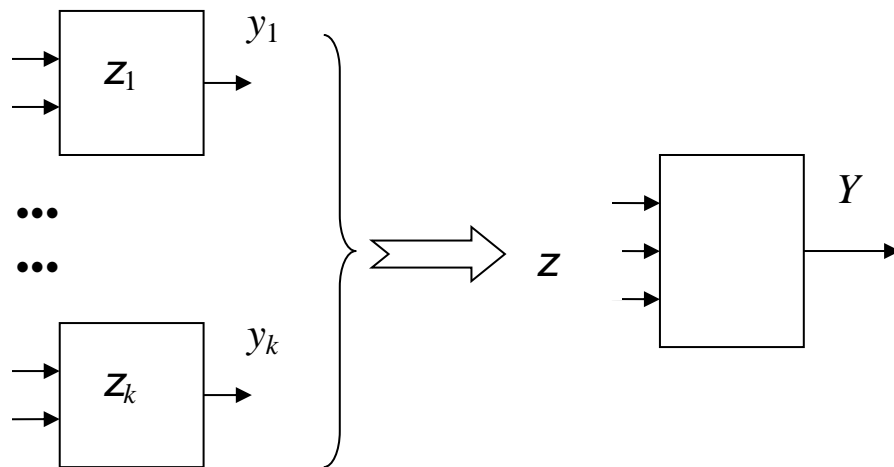


Рис. 2.6. Схема агрегування в багатофакторному експерименті

Нехай інформаційна база або банк включає дані по однопним моделям (набір моделей)

$$y_{(i)} = f_{(i)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.24)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — вхідні (контрольовані) фактори;  $y_{(i)}$  — функція відгуку для  $i$ -ої моделі;  $i=1, 2, \dots, k$  — індекс моделі, які розрізняються значенням контрольованого параметру  $z_i$ .

Сенс агрегування, яке пропонується, складається у використанні параметру  $z$  як додаткового фактору, з врахуванням якого по теорії планування експериментів організується обчислювальний експеримент для моделі

$$Y = F(z, x_1, \dots, x_n), \quad (2.25)$$

де  $z, x_1, \dots, x_n$  — нові контрольовані фактори,  $Y$  — функція відгуку.

В результаті проведення експерименту визначається модель  $Y$ , яка може використовуватися для будь-яких  $Z \in [\min(Z_i), \max(Z_i)]$ , тобто в розширеній області використання.

Обчислювальний експеримент проводиться після того, як в результаті натурного експерименту було отримано достатньо даних для побудови математичної моделі досліджуваного об'єкта

---

---

або явища. На практиці, як правило, використовується послідовність моделей різної складності, визначаються межі їх застосовності і допустимість тих чи інших спрощень.

Побудована розрахункова реалізація математичної моделі застосовується для вивчення законів поведінки об'єктів, випробувань різних режимів роботи, побудови керуючих впливів, пошуку оптимальних характеристик. У схемі обчислювального експерименту можна виділити кілька етапів: складання математичної моделі, вибір методу і способів розрахунків, виконання розрахунків, аналіз отриманих результатів (рис. 2.7). При необхідності на наступних етапах виконуються коригування.

Сенс планування експериментів — вибір кількості дослідів і умов їх проведення так, щоб отримати найбільшу інформацію про об'єкт дослідження з найменшими витратами праці і представити цю інформацію в зручній формі [12]. Вибір плану експерименту залежить від обраного виду апроксимуючих функцій і проводиться апріорно. Раніше розглядалося планування, проведення та обробка даних повних факторних експериментів (ПФЕ), реалізація композиційних планів. Практика показує, що апріорне вибір планів повних факторних експериментів (ПФЕ) призводить до надмірності за кількістю дослідів, якщо взаємодії високих порядків  $x_i x_j \dots x_k$  факторів  $x_i$  виявляються незначними. В результаті представляється можливим скоротити плани в кілька разів, якщо перейти до використання планів дробових факторних експериментів (ДФЕ).

Розглядається доцільність і адекватність вибору плану експерименту в залежності від практично обґрунтованого вигляду моделі функцій відгуку, так як трудомісткість і матеріальні витрати емпіричного дослідження залежать від кількості дослідів  $N$ .

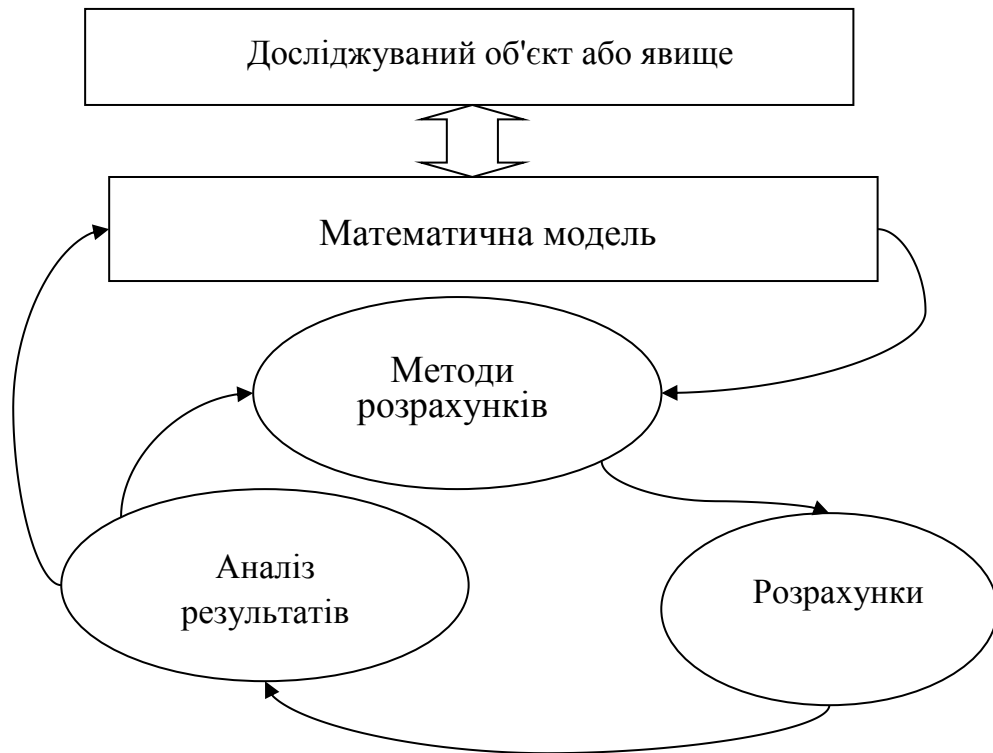


Рис. 2.7. Схема обчислювального (числового) експерименту

Коефіцієнти обраної моделі встановлюються при обробці даних з таблиці експерименту за методом найменших квадратів. Використання різних планів призводить до відмінностей в математичних описах побудованих моделей. Якщо вплив деякої взаємодії факторів дуже малий, то відповідний стовпець план-матриці експерименту можна використовувати для оцінки впливу нового фактору. Здійснюється перехід до плану ДФЕ, для позначення плану застосовується запис  $2^{n-k}$ , де  $n$  — загальна кількість факторів,  $k$  — кількість взаємодій, замінені факторами [12, 13]. Передбачається, що, користуючись накопиченим досвідом прикладних досліджень, можна запропонувати для ідентифікації більш раціональні полілінійні моделі (відкинувши малозначущі взаємодії). В результаті зменшується кількість дослідів і, відповідно, спрощується проведення експериментів. Наприклад, при дослідженнях процесів поздовжнього прокатування широкого поширення набули моделі у вигляді степеневих функцій факторів.

На підставі аналізу результатів експериментів пропонується обмежитися моделями, які враховують вплив факторів та їх парних взаємодій:

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i \neq j} a_{i j} x_i x_j$$

де  $a_0$ ,  $a_i$ ,  $a_{i j}$  — коефіцієнти моделі, які необхідно визначити;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Далі розглядається вплив такої профільної спеціалізації моделей на плани факторних експериментів і результати їх проведення. На початку слід визначитися з кількістю дослідів без урахування їх кратності. При виборі й використанні моделі (2.24) кількість визначених коефіцієнтів  $m = 0,5(n^2 + n + 2)$  має корелювати з кількістю вузлових точок плану експерименту  $N = 2^{n-k}$ . Для того, щоб модель (2.24) була заздалегідь визначена, необхідним є дотримання умови  $m < N$ , що приводить до нерівності:

$$k \leq n + 1 - \log_2(n^2 + n + 2)$$

для дробності  $k$  плану експерименту ( $k = 0$  — ПФЕ;  $k = 1, 2, \dots, n-1$  — ДФЕ).

Якщо при виборі плану розглядати кількість чинників  $n$ , що враховуються в якості змінної, то виходить табл. 2.15 допустимих планів.

Можна відзначити, що при  $n < 4$  для ідентифікації моделі з урахуванням всіх парних взаємодій необхідно планувати повні факторні експерименти. При  $n = 5$  або  $n = 6$  можна використовувати напів-репліки ДФЕ  $2^{n-1}$ , а при  $n > 7$  можна перейти до чверть-реплікам ДФЕ  $2^{n-2}$ .

Таблиця 2.15. Вибір планів для моделей, що враховують дію факторів і їх парних взаємодій

Кількість факторів	Кількість коефіцієнтів	Допустимі плани	Кількість вузлових точок
2	4	ПФЭ $2^2$	4
3	7	ПФЭ $2^3$	8
4	11	ПФЭ $2^4$	16
5	16	ДФЭ $2^{5-1}$	16
		ПФЭ $2^5$	32
6	22	ДФЭ $2^{6-1}$	32
		ПФЭ $2^6$	64
7	29	ДФЭ $2^{7-2}$	32
		ДФЭ $2^{7-1}$	64
		ПФЭ $2^7$	128

Отже, починаючи з  $n = 5$ , при збільшенні кількості чинників стає можливим перехід до дробових планів зі скороченням кількості дослідів  $N$  в два і більше разів в порівнянні з ПФЕ (рис. 2.8).

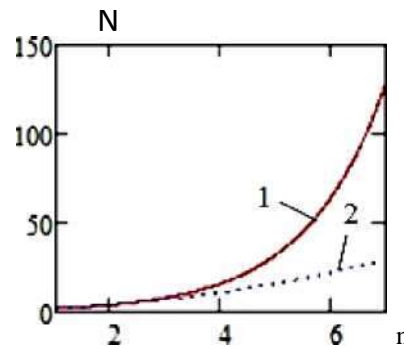


Рис. 2.8. Скорочення кількості дослідів  $N$  (1 — ПФЕ; 2 — ДФЕ)

Якщо ж мають суттєве значення ні всі з можливих парних взаємодій, то застосовувати дрібні плани раціонально, починаючи з  $n = 4$ . Однак слід звернути увагу на те, що при  $n > 8$  модель стає занадто складною (більше 30 доданків) і не зовсім пристосованою для подальшого аналізу дослідником. Тому слід переорієнтуватися на декомпозицію планів, що приводить в кожному

окремому випадку до зменшення кількості чинників, що враховуються і спрощення моделі [14].

Якщо при обробці отриманих при проведенні експерименту даних з'ясовується необхідність доповнення плану, то ДФЕ легко добудовується до плану повного факторного експерименту. Далі при необхідності переходу до квадратичних моделей виду

$$y = a_0 + \sum_i a_i x_i + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i a_{ii} x_i^2$$

можливий перехід до композиційного планування.

З метою отримання оцінок точності запропонований підхід розглядається на прикладі обчислювального експерименту за даними раніше проведеного конкретного дослідження [15, 16]. Для вивчення закономірностей формозміни при прокатці фасонних профілів широко використовуються сплановані для поліноміальних моделей багатofакторні експерименти. З орієнтацією на розрахунки калібровок валків вивчаються закономірності процесів деформації. Зокрема, при дослідженні закономірностей деформування заготовки з круглої сталі діаметром  $d$  в низькотавровому калібрі висотою  $H_1$  для чотирьох факторів:

$$m_1 = \frac{d}{H_1}; \quad m_2 = \frac{h_1}{H_1}; \quad m_3 = \frac{B_1}{H_1}; \quad m_4 = \frac{D_{cp}}{H_1},$$

де  $d, H_1, h_1, B_1, D_{cp}$  — параметри заготовки, смуги, калібру і стану проводиться перехід до безрозмірних кодованих змінних

$$x_i = \frac{m_i - m_{i0}}{0,5 \delta m_i},$$

де  $m_{i0} = 0,5(m_{iB} + m_{iH})$ ,  $\delta m_i = m_{iB} - m_{iH}$ .

Для поліноміальних моделей виду:

$$y_j = a_{0j} + a_{1j} x_1 + a_{2j} x_2 + a_{3j} x_3 + a_{4j} x_4 + \dots,$$

що ідентифікують показник розширення  $y_1 = \frac{\Delta B}{\Delta h}$  і коефіцієнт видовження  $y_2 = \lambda$ , обрані плани дробного  $2^{4-1}$  і повного  $2^4$  факторного експериментів.

За плану-матриці дробового факторного експерименту з визначальним контрастом  $x_1 x_2 x_3 x_4 = 1$  отримані моделі:

$$y_1 = 0,5207 + 0,1106x_1 - 0,0243x_2 - 0,0230x_3 + 0,0316x_4;$$

$$y_2 = 1,470 + 0,195x_1 - 0,0558x_2 - 0,0242x_3 + 0,01503x_4 .$$

Відповідно до плану-матриці повного факторного експерименту  $2^4$  отримані моделі:

$$y_1^* = 0,5224 + 0,1055x_1 - 0,0316x_2 - 0,0209x_3 + 0,0359x_4 - \\ - 0,0476x_1x_2 + 0,0238x_2x_3;$$

$$y_2^* = 1,476 + 0,2026x_1 - 0,0451x_2 - 0,0174x_3 - 0,0166x_4 .$$

Порівняння експериментальних даних, отриманих в контрольних точках області допустимих значень, з відповідними розрахунковими за представленими формулами із залученням статистичного аналізу показало адекватність моделей. Помітних відмінностей в результатах повного і дробового факторних експериментів не встановлено (табл. 2.16). Так, наприклад, середні вибіркові значення:  $\bar{y}_1 = 0,521$  і  $\bar{y}_1^* = 0,522$ ;  $\bar{y}_2 = 1,47$  і  $\bar{y}_2^* = 1,476$ . Середні квадратичні відхилення для отриманих вибірок, відповідно,  $S_{y_1} = 0,084$  і  $S_{y_1^*} = 0,083$ ;  $S_{y_2} = 0,1449$  і  $S_{y_2^*} = 0,1477$ . Аналогічні результати виходять і для інших випадків. Отже, експериментальні дослідження формозміни доцільно починати з дробових планів для зменшення витрат і трудомісткості.

Відомо, що дослідження формозміни при прокатці на обраному стані великої кількості фасонних профілів раціональніше проводити по групах з виділенням базового профілю (калібру). Це дозволяє здійснити декомпозицію планів експериментів зі значним зменшенням їх кількості [14]. Для обґрунтування адек-



ватності отриманих моделей також необхідно залучати методи статистичного аналізу.

Таблиця 2.16. Порівняння даних для моделей  $y_i$  та  $y_i^*$

№	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_1^*$	$y_2^*$
1	-1,414	0	0	0	0,364	1,194	0,373	1,189
2	1,414	0	0	0	0,677	1,746	0,672	1,762
3	0	-1,414	0	0	0,555	1,549	0,567	1,540
4	0	1,414	0	0	0,486	1,391	0,478	1,412
5	0	0	-1,414	0	0,553	1,504	0,552	1,501
6	0	0	1,414	0	0,488	1,436	0,493	1,452
7	0	0	0	-1,414	0,476	1,491	0,472	1,499
8	0	0	0	1,414	0,565	1,449	0,573	1,453
9	0	0	0	0	0,521	1,470	0,522	1,476

Обраний план експерименту з урахуванням формул кодування змінних визначає умови проведення дослідів і, в основному, вид залежностей для ідентифікованої моделі. Використання накопиченого досвіду досліджень в області теорії і моделювання прокатки призводить до спеціалізації дрібного планування експериментів. З урахуванням обмеження значимості взаємодій чинників парними  $x_i x_j$  виконується вибір планів дрібних експериментів формули  $2^{n-k}$ . При кількості факторів чотири і більш раціонально використовувати напів- або чверть репліки. Кількість дослідів в плані експерименту знижується в два або чотири рази, оцінки точності моделі не змінюються [16].

## **2.9. Завдання № 2. Аналіз розмірностей для цільової функції**

Використовуючи методика, наведену в розділі 2.2, виконати аналіз розмірностей для цільової функції, яка розглядалась в завданні № 1. В якості факторів для аналізу розмірностей використати найбільш значимі фізичні величини з рангового ряду, отриманого в завданні № 1. При цьому слід прагнути включати до переліку цих факторів величини з відмінними (різними) розмірностями. Рекомендується обирати для аналізу не менше п'яти фізичних величин.

Результатом такого аналізу повинно бути критеріальне рівняння, тобто залежність цільової функції від безрозмірних критеріїв, отриманих з аналізу розмірностей.

Завдання оформити аналогічно завданню № 1.

## **2.10. Завдання № 3. Розробка плану експерименту**

За погодженням з керівником кваліфікаційної роботи скласти план експерименту для дослідження залежності цільової функції від найбільш значимих факторів, визначених у завданні №1. З керівником роботи узгоджуються такі питання: вид моделі (лінійна, квадратична, степенева, ...), кількість факторів та рівнів їх зміни, вид плану (повний чи дробний).

В завданні слід навести обґрунтування рівнів зміни факторів з врахуванням можливостей забезпечення цих рівнів зміни на наявному лабораторному обладнанні. Розроблений план представити у вигляді таблиці кодування факторів (таблиця 2.1) та план-матриці експерименту (таблиця 2.2).

Завдання оформити аналогічно завданню №1.

## 2.11. Питання для контролю знань

1. Що називається повнофакторним експериментом?
2. Способи перевірки даних, що отримуються в експериментах?
3. Для чого необхідні паралельні досліди?
4. Що собою представляє рандомізація дослідів?
5. У чому відмінність планованого експерименту від класичного?
6. Як скласти таблицю рівнів факторів і інтервалів їх варіювання?
7. Що таке повний факторний експеримент, чому від нього відрізняється дробовий факторний експеримент?
8. За рахунок чого можливе скорочення числа дослідів при плануванні експерименту?
9. Що називається планом експерименту у вигляді греко-латинського квадрата?
10. Як перевірити адекватність пластичної моделі?
11. На основі яких критеріїв вибираються інтервали між експериментальними крапками?
12. У яких випадках доцільно застосовувати послідовний план експерименту?
13. Роль експерименту в наукових дослідженнях.
14. Дати визначення повного факторного експерименту типу  $2^2$ .
15. Визначення методу планування експериментів у вигляді греко-латинських квадратів.
16. Що собою представляє центральний композиційний ортогональний план другого порядку.
17. Визначення методу крутого сходження при плануванні експерименту.
18. Що називається оцінкою значимості дослідів?
19. Дати визначення інтервалу вірогідності?

20. Що таке груба помилка?
21. Що таке довірлива вірогідність?

## 2.12. Перелік літератури до розділу 2

1. Зайдель, А.Н. Ошибки измерения физических величин. М. : Наука, 1974. 106 с.
2. Румшинский М. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М. : Наука, 1971. 192 с.
3. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. М. : Мир, 1972. 161 с.
4. Винарский М. С., Лурье М. В. Планирование эксперимента в технологических исследованиях. Київ : Техніка, 1975. 186 с.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике / Л. И. Седов. — М.:Наука, 1977. — 440 с.
6. Чижиков Ю. М. Теория подобия и моделирование процессов обработки металлов давлением. — М. : Metallургия, 1970. — 296 с.
7. Целиков А. И. Теория продольной прокатки / А. И. Целиков, Г. С. Никитин, С. Е. Рокотян. — [Учебник для студентов машиностроительных и металлургических вузов]. — М. : Metallургия, 1980. — 320 с.
8. Энергосиловые параметры прокатки цветных металлов и сплавов / Тарновский И. Я., Бровман М. Я., Серебренников В. Н. и др. — М. : Metallургия, 1975. — 136 с.
9. Кистак М., Войта Р. Анализ металлургических процессов методами математической статистики. М. : Metallургия, 1968. 211 с.
10. Грудев А. П. Захватывающая способность прокатки валков. М. : СП Интернет Инжиниринг, 1998. 283 с.
11. Дэниел К. Применение статистики в промышленном эксперименте [Перевод с англ. под ред. Э. К. Лецкого]. — М. : Мир,

- 
1979. — 300 с.
12. Гурский Е. И. Теория вероятности с элементами математической статистики. М. : Высшая школа, 1971. 326 с.
  13. Советов Б. Я. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Высш. шк., 2001. — 343 с.
  14. Ермаков С. М. Математическая теория оптимального эксперимента / С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский. — М.: Наука, 1987. — 320 с.
  15. Галицкий Е. В. Геометрический анализ вытяжной способности калибров / Е. В. Галицкий, А. В. Никулин // Збірник наукових праць Дніпродзержинського державного технічного університету: (технічні науки) / Дніпродзержинськ : ДДТУ. — 2008. — С. 68—72.
  16. Никулин А.В. Специализация при планировании дробных факторных экспериментов / А.В. Никулин, Е.В. Галицкий // Обработка материалов давлением. — 2010, № 4 (10). — С. 84 — 87.

### **3. ВИМІРЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ**

#### **3.1. Методи експериментальних досліджень поздовжнього прокатування**

Компетентність інженера багато в чому визначається його професійною підготовкою в області експериментальних методів дослідження. Іноді єдине доступне джерело отримання вірогідної інформації про процеси ОМТ – експеримент. Деякі з вихідних величин (характеристики контактного тертя, опір деформації тощо) при математичному моделюванні процесів ОМТ визначаються на підставі експериментальних досліджень або згідно табличних даних, які отримані емпірично з обмеженою точністю або при обмеженій відповідності моделі відносно реального об'єкта. Тому прикладні результати теоретичних досліджень необхідно оцінювати критично, при можливості проводити підтверджуючі експерименти.

Далі відзначимо: результати експериментів приймаються безпосередньо або, у більшості випадків, піддаються обробці. При цьому застосовують комплексні або суміщені методи: експериментально-розрахункові, експериментально-розрахунково-аналітичні. Навіть для складних процесів обробки об'єднання експериментальних і теоретичних методів дозволяє отримати адекватні та надійні результати досліджень.

За умовами організації та реалізації експериментальні методи можна розділити на методи визначення напружено-деформованого стану зразка, який має фізичні властивості пластичного тіла, і на методи, засновані на аналогах. Аналоги – це моделі, які мають інші фізичні властивості тіла, спільність складається тільки в тім, що процеси, що відбуваються в аналогах

й у пластично оброблюваних тілах, описуються тими самими рівняннями.

Методи механіки деформівного тіла дозволяють задовільно описати закономірності процесів ОМТ, визначити кінематичні та енергосилові параметри обробки, оцінити ефективність технології, працездатність і міцність елементів обладнання. В прикладних дослідженнях [1] найбільш поширеними є електротензометрія, геометричні, поляризаційно-оптичні методи.

### 3.1.1. Тензометрія

Сила деформації, момент прокатки, навантаження на інструмент і деталі машин для обробки та транспортування розкату відносяться до параметрів технологічного процесу. В дослідженнях їх зміну в реальному часі можна визначити за допомогою різних силовимірювачів. Якщо в силовимірювачі пружна деформація вимірювальних елементів, яка обумовлена діючим навантаженням, перетворюється в фіксуємі зміни електричних параметрів, то говорять про застосування електротензометрії.

Принцип вимірювання заснований на тому, що закріплений на поверхні деталі тензорезистор сприймає пружні деформації цієї деталі, при цьому змінюючи свій електричний опір. Зміна опору є мірою деформації. Для вимірювання зміни опору тензорезисторів використовують відповідні прилади. Тензорезистор – пасивний перетворювач, тому на нього необхідно подавати живлення (застосовують постійну або змінну напругу). Омичний опір  $R$  дротового провідника довжиною  $l$  і площею поперечного перерізу  $F$  з питомим опором  $\rho$  змінюється за законом

$$R = \rho \frac{l}{F}.$$

Після логарифмічного диференціювання з врахуванням зміни поперечного перерізу провідника в результаті деформації можна знайти відносну зміну опору провідника [2]:

$$\frac{dR}{R} = \left[ (1 + 2\mu) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{d\rho}{\rho} \right] \cdot \varepsilon = k \varepsilon,$$

де  $\frac{dR}{R}$  – відносна зміна омичного опору дроту;

$k$  – коефіцієнт тензочутливості матеріалу провідника;

$\varepsilon = \frac{dl}{l}$  – відносна деформація;

$\frac{d\rho}{\rho}$  – відносна зміна питомого опору дроту;

$\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

Щоб зафіксувати електричний сигнал, який виник у результаті деформації тіла, необхідно мати датчик, пристрій для посилення одержуваного від датчика сигналу та пристрій для реєстрації електричних сигналів. Чутливий елемент являє собою ґрати з тонкого електричного провідника.

У найбільш поширених тензодатчиках з паралельними ґратами фольга або дріт утворює решітку з паралельних ліній, пов'язаних з більш міцними виходами для зручності підключення. Решітка укладена в тонкоплівкову полімерну основу, ізолюючи її від об'єкта і передаючи деформацію (рис. 3.1).

Тензорезистори прикріплюють до спеціальних пружно деформуємих елементів, які більш інтенсивно деформуються під дією навантаження, ніж штатні деталі. Спеціальний пристрій, який дозволяє визначити силу через величину деформацій його пружних елементів, називається месдоза [2]. Пружні елементи можуть бути виконані або у вигляді статично визначеної балочки, або у вигляді мембрани. Останні є більш зручними у виготовленні і монтажі, установці на стані і забезпеченні герметичності в роботі.



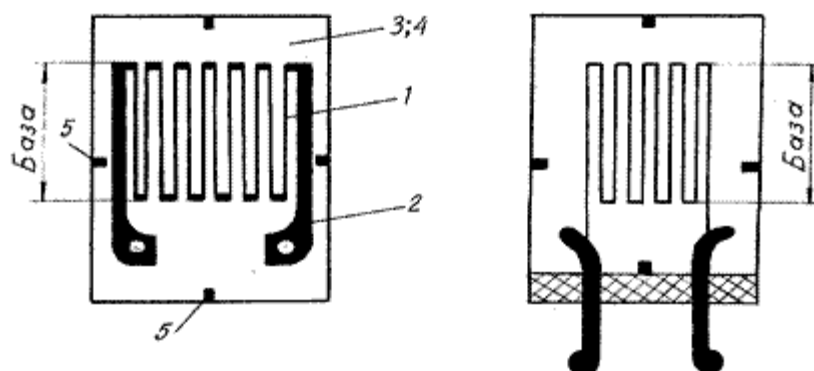


Рис. 3.1. Схеми конструкцій тензорезисторів  
(ліворуч – фольговий, праворуч – дротовий)

1 – решітка; 2 – виходи; 3, 4 – основа решітки та покриття;  
5 – розмітка осей

Месдоза мембранного типу зазвичай представляє собою циліндр відносно невеликої висоти з внутрішнім циліндричним заглибленням. Їх робочий елемент має бути виконаний так, щоб утримати велике напруження в стінці. На утворену "денце-мембрану" наклеюють датчики (рис. 3.2).

Датчики включають в мостову схему. У початковому стані, коли на месдозу не діють робочі навантаження, опори плечей моста збалансовані допоміжними опорами (резисторами) і струм по діагоналі моста не тече. Під дією робочої сили на месдозу відбувається зменшення опору стисненого датчика і збільшення опору розтягнутого датчика. В результаті балансування моста порушується і через діагональ моста проходить струм. Властивості датчиків і жорсткість пружного елемента месدوزи підбирають так, щоб сила струму була пропорційна навантаженню. Коефіцієнт пропорційності визначають попереднім таруванням (для точно визначеної і фіксованою сили заміряють силу струму через діагональ мосту).

Для вимірювання питомих напружень і сил тертя застосовують точкові (штифтові) месدوزи, які перетворюють силу, що

діє в малій області (поблизу точки контакту) у пружні деформації елементів такої месдози.

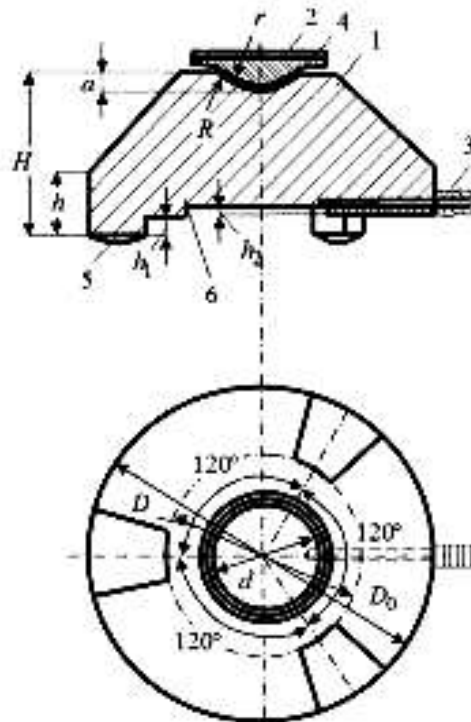


Рис. 3.2. Месдоза мембранного типу на трьох опорах:

1 – корпус месдози; 2 – підп'ятник; 3 – штуцер для приєднання провідів; 4 – сферична увігнутість месдози; 5 – опорна п'ята; 6 – місце наклейки датчиків

При визначенні моменту прокатки  $M$  поширений спосіб, заснований на вимірюванні деформацій валу, за допомогою якого передається момент. З курсу опору матеріалів відоме, що поверхня валу круглого поперечного перерізу має під дією крутного моменту деформації чистого зсуву. Тоді у напрямках під кутом  $45^\circ$  до твірної валу мають місце найбільші за модулем деформації стиску та подовження. Якщо датчики наклеєні на поверхню валу у спосіб, як зображено на рис. 3.3, та включені у мостову схему, тоді можна реєструвати момент, якій передається валом.

Для передачі електричного сигналу від тензодатчиків, наклеєних на валу, що обертається, використовують кільцеві стру-

моз'ємні пристрої з ковзаючими контактами. Струмоз'ємні пристосування можуть вносити в результати вимірювань додаткові похибки, які викликані нестабільністю з'єднання в точках контакту. Тому останнім часом з'явилися схеми та конструкції, які основані на безконтактній передачі сигналу за допомогою електромагнітних хвиль.

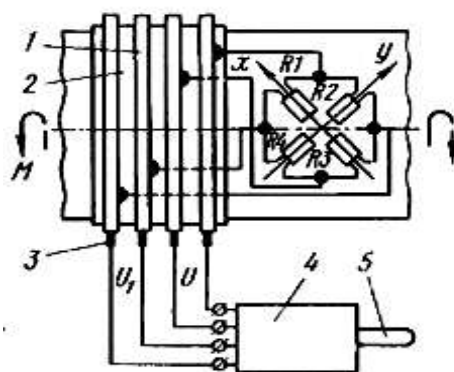


Рис. 3.3. Схема вимірювання крутного моменту  $M$ :  
 1 – струмоз'ємні кільця; 2 – вал; 3 – ковзаючі контакти;  
 4 – підсилювач; 5 – реєструючий пристрій.

Щоб отримати надійні результати, тарування датчиків виконують безпосередньо на робочому валу, для чого проводять ступінчасте навантаження валу моментами відомої величини.

Слід зазначити, що відомі тензOMETричні методи мають обмежені можливості для дослідження напруженого стану (тільки на контактних поверхнях, де кріпляться датчики).

### 3.1.2. Метод координатних (ділительних) сіток

Експериментальне вивчення деформованого стану всередині тіла при ОМТ можна проводити за допомогою координатних (ділительних) сіток. Методи визначення деформованого стану за допомогою координатних сіток добре розроблені для плоского деформованого й напруженого станів, осесиметричного плинину, для

визначення деформацій поверхні оброблюваного тіла, яка вільна від впливу інструмента, і деформацій по площинах симетрії об'ємного плинну. Розглянемо детальніше реалізацію методу.

Попередньо координатну або ділильну сітку наносять на поверхню зразків типографським способом, фотоспособом або за допомогою тонко заточених різців. Найпоширеніша є квадратна сітка. При дослідженні плоского деформованого, осесиметричного плинну й у випадку вивчення деформованого стану в площині симетрії тривимірного плинну сітку розміщують відповідно в площині плинну, у площині, що проходить через вісь симетрії, і площині симетрії зразка. Для цього зразок роблять складовим. Сітку наносять на площину рознімання частин зразка. Якщо дослідження проводять на свинцевих моделях, то частини зразка спаюють легкоплавким сплавом Вуда. Якщо ж заздалегідь відомо, що при деформації складеного зразка не виникнуть розтягуючі нормальні напруження і значні дотичні напруження по поверхні рознімання, то скріплення частин зразка може бути більш простим.

Вивчимо деформований стан при стаціонарному або сталому плинні. На рис. 3.4 показана координатна сітка на площині рознімання зразка, який зупинено в деякий момент обробки та витягнуто для вимірювань.

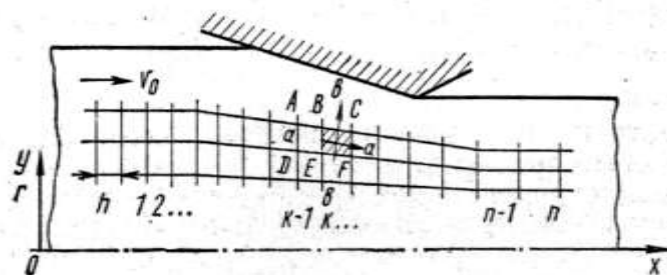


Рис. 3.4. Схема методу координатних сіток

Сітка до деформації була декартовою; оскільки вона скріплена зі зразком, то є супутньою. На рис. 3.4 зображені тільки два ряди чотирикутників, розміщених між трьома траєкторіями або, оскільки процес сталий, лініями плинучості. Порівняння двох будь-яких сусідніх чотирикутників у поздовжньому напрямку показує її деформацію за деякий інтервал часу. Схема вимірювань буде однаковою як для осесиметричного, так і для плоского плинучості.

Розглянемо деформацію окремого чотирикутника сітки. Зробимо припущення, що в межах осередку вона однорідна й дорівнює середньому значенню по об'єму, який обмежено чотирикутником. Точність визначення такої локальної характеристики залежить від ступеня неоднорідності деформації й повинна збільшитися зі зменшенням розміру чотирикутника координатної сітки. Точність одержуваних результатів залежить також і від відносної точності виміру розмірів осередку, а вона падає зі зменшенням її розмірів. Жорстких правил для призначення розмірів сітки, на жаль, не існує.

На деякій стадії, коли сітка ввійшла в зону інтенсивної пластичної деформації (осередку деформації), процес припиняють. Зразок витягають із деформуєчої машини й розкривають поверхню рознімання, відокремивши друг від друга частини зразка. На поверхні рознімання видна деформована координатна сітка. Існують добре розроблені методики перерахування параметрів деформованої сітки в деформації, швидкості деформацій і напруги.

### **3.1.3. Оптичні методи дослідження фізичного тіла**

Для дослідження напруженого й деформованого станів усередині моделі тіла, яке деформується, застосовують метод, в основі якого лежать оптичні явища: поляризація світла й ефект подвійної променезаломлюваності. Тому цей метод називають поляризаційно-оптичним.

Відповідно до електромагнітної теорії розповсюдження світлових хвиль описується переміщенням взаємно перпендикулярних векторів напруженості електричного й магнітного полів, які періодично міняють свою довжину. Обидва ці вектори спрямовані перпендикулярно променю, тобто поширення світла до певної міри – поширення поперечних хвиль. Якщо вектор напруженості, з яким звичайно зв'язують поширення світла, робить хаотичні коливання в площині, яка перпендикулярна лучу, то має місце природне або неполяризоване світло. Якщо коливання вектору напруженості відбуваються в певній закономірності, то світло називають поляризованим. Плоскополяризоване світло відрізняється тим, що коливання вектору напруженості відбуваються в одному напрямку (по лінії) у площині, яка перпендикулярна лінії поширення променів світла.

В поляризаційно-оптичних приладах плоскополяризоване світло одержують використанням поляроїдів, які пропускають світлові коливання тільки в одній площині. У якості поляроїдів традиційно використовують спеціальні призми, виготовлені з ісландського шпату або кальциту (призми Ніколя й ін.). Джерелами поляризованого світла можуть служити генератори когерентного оптичного випромінювання (лазери). Якщо на шляху променів, що пройшли через поляроїд, поставити другий так, щоб їх площини поляризації були взаємно перпендикулярні, то одержимо повне гасіння світла (схрещені поляроїди).

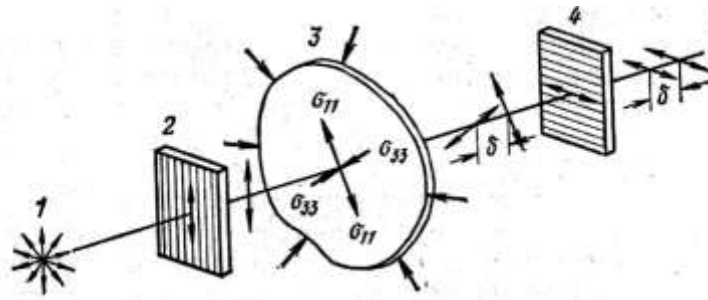
Друге фізичне явище (штучна подвійна променезаломлюваність) відоме з курсу фізики й покладено в основу поляризаційно-оптичного методу дослідження напруг і деформацій. Цю властивість мають тією чи іншою мірою всі природні й штучні прозорі матеріали, піддані дії зовнішніх навантажень. При дії поля напруг ізотропні аморфні матеріали стають оптично анізотропними й поводяться як двояко переломлююча кристалічна пластинка. При пропущенні світла через прозору кристалічну пластинку світлова хвиля розкладається на дві взаємно перпендикулярні хвилі із

взаємно перпендикулярними площинами коливань, що поширюються усередині кристала з різними швидкостями. Те ж відбувається з навантаженою прозорою моделлю з аморфного матеріалу.

Установлено, що головні осі оптичної анізотропії плоскої прозорої моделі, навантаженої по периметру, збігаються з осями головних нормальних напруг та складові швидкостей поширення світла по цих осях відрізняються друг від друга і є лінійними функціями від головних нормальних напруг. Промінь світла, падаючи на прозору навантажenu модель, як би розщеплюється на два промені, коливання в кожному з яких відбуваються по напрямках дії головних нормальних напруг. По виходу променів із прозорої моделі вони одержують деяку різницю ходу  $\delta$ , що пропорційна товщині моделі  $t$  і різниці головних нормальних напруг  $\sigma_{11} - \sigma_{33}$ , що діють у тілі моделі.

Таким чином, встановлюється деякий зв'язок напруженого стану прозорої моделі (точніше різниці головних нормальних напруг) з оптичним ефектом у вигляді різниці ходу променів  $\delta$ . Проявляється й фіксується ця різниця ходу променів за допомогою приладів, які називають полярископами. Різницю головних нормальних напруг можна було б одержати з формули при відомих коефіцієнтах пропорційності і якби вдалося визначити різницю ходу  $\delta$ . Для виміру цієї величини необхідно одержати інтерференцію променів. За законами інтерференції поляризованого світла два промені, поляризованих у взаємно перпендикулярних площинах, не інтерферують. Якщо два промені поляризовані в одній площині, то вони інтерферують. Тому на шляху двох променів, що вийшли з напруженої моделі, ставлять другий поляроїд, який називається аналізатором і, пропускаючи коливання світла тільки в одному напрямку, дає можливість на виході з нього одержати два поляризованих в одній площині променя зі зміщенням ходу  $\delta$ , які тепер вже інтерферують.

На рис. 3.5 наведена принципова схема полярископа.



*Рис. 3.5.* Принципова схема полярископа:  
1 – джерело світла; 2 – поляроїд; 3 – модель у вигляді пластини із прозорого матеріалу; 4 – другий поляроїд або аналізатор.

Зображення просвічуваної моделі проектується на екран. Звичайно площини поляризації поляроїдів 2 й 4 схрещені, тому що розташовуються під кутом  $90^\circ$ . Штрихування на них, зображене на рис. 3.5, показує напрямок поляризації світла.

Промінь білого світла можна вважати таким, що складається з декількох променів різних кольорів з різною довжиною хвилі. Тому при вивченні моделі в полярископі із джерелом білого світла кожна його складова інтерферує після проходження через аналізатор, даючи на екрані зображення моделі покриті різнобарвними смугами.

Одноколірні смуги на екрані полярископа, що проходять через зображення моделі, називають ізохромами, що є геометричним місцем точок з однаковою різницею головних нормальних напруг.

Може виявитися, що в деяких точках напруженої моделі, коли вона перебуває в умовах неоднорідного напруженого стану, напрямок одної з головних нормальних напруг збігається із площиною поляризації поляроїда 2. Тоді промінь світла, проходячи через модель, не буде розкладатися на два промені, а збереже свою площину поляризації. Оскільки в нього на шляху до екрана стоїть схрещений поляроїд, та цей промінь гаситься. На екрані будуть видні темні смуги. Темні смуги на екрані полярископа,



що проходять через зображення моделі, називають ізоклінами, що є геометричним місцем точок з однаковим напрямком головних нормальних напруг.

Порядок експериментування на полярископі наступний. З оптично активного матеріалу готують модель деформуємого тіла. Попередньо матеріал тарують, тобто встановлюють зв'язок кольорів ізохром з величиною максимального зсувного напруження  $\tau_{\max}$  або різниці головних нормальних напруг  $\tau_{\max} = (\sigma_{11} - \sigma_{33})/2$ . Для цього готують найпростіший зразок, наприклад, на одноосьове розтягання. Розтягуючи його силами різної інтенсивності й просвічуючи зразок на полярископі, встановлюють зв'язок  $\tau_{\max} = \sigma_{11}/2$ , де ( $\sigma_{11}$  — напруга при розтяганні зразка, з кольорами фарбування зображення зразка на екрані. Після цього зображення моделі, навантаженою системою сил, покриті на екрані кольоровими смугами, розшифровують: той або інший кольори ізохром відповідає відомому вже з тарувальних дослідів значенню  $\tau_{\max}$ .

Як вже відзначалося, на зображенні моделі поряд з ізохромами видно темні лінії (ізокліни). Головні нормальні напруги в точках на цих лініях спрямовані паралельно площини поляризації в поляроїді 2 (рис. 3.5). Якщо, залишивши модель нерухомою, синхронно обернути поляроїди 2 й 4, то на зображенні моделі можна одержати сімейство ізоклін, кожна з яких буде відповідати своєму куту нахилу площини поляризації до значення  $\theta$ . Цей кут називають параметром ізокліни.

Отримані оптичним методом картини ізохром й ізоклін різних параметрів при відомих граничних умовах дозволяють визначити для ізотропного середовища компоненти напруг у кожній точці моделі.

Визначивши в оптичному методі компоненти тензору напруг, за допомогою фізичних рівнянь зв'язку можна підрахувати компоненти тензора деформації.

У задачах плоского деформованого стану використовують метод «заморожування напруг». Матеріали, які застосовують в оптичному методі дослідження напруг, мають властивість фіксувати свій деформований стан у результаті повільного охолодження. Якщо модель піддати впливу зовнішніх навантажень, потім, не знімаючи їх, остудити її, а потім забрати навантаження й вирізати (уникаючи нагрівання) поперечний темплет, що відповідає площині плину, то просвічування його в полярископі покаже ту ж картину напруженого стану, що була в тілі при навантаженні (до охолодження й вирізки зразка).

Описаний вище в даному пункті метод дослідження напруженого й деформованого станів називають ще фотопружністю. Він був винайдений для вивчення працездатності деталей машин, матеріал яких не переходить у пластичний стан. Виявилось, що оптичні ефекти виникають у прозорих тілах і при більших деформаціях (у кілька одиниць і навіть десятків відсотків), у тому числі пластичних. Оптичний метод у цьому випадку називають фотопластичністю.

У цей час створені різноманітні оптично чутливі матеріали, найбільш вдалим з яких варто визнати матеріали на основі епоксидних смол. Для виготовлення фотопластичних моделей використовують целулоїд, полістирол, нітрат целюлози й інші високомолекулярні аморфні з'єднання.

#### **3.1.4. Метод оптично чутливих покриттів**

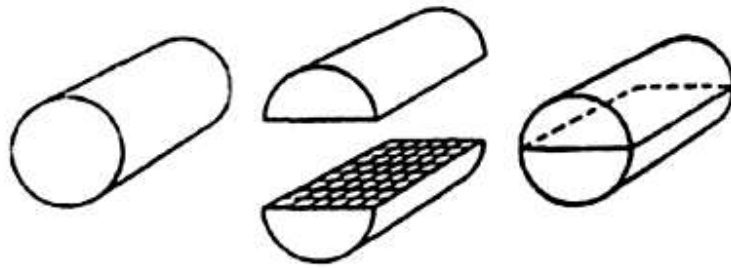
Метод, заснований на використанні методу прозорих оптично чутливих шарів або плівок, що наклеюють на реальний або модельний об'єкт, який пластично деформується. У цьому випадку пластична деформація металу копіюється шаром оптично чутливого покриття, що і досліджують у поляризованому світлі. Застосування оптично чутливих покриттів припускає, що деформації по товщині покриття розподілені однорідне й дорівнюють де-

формаціям на поверхні досліджуваного об'єкта. Однак дійсний розподіл деформацій по товщині покриття в загальному випадку неоднорідний, що вносить деяку погрішність у результати експериментів. Отриманні з оптично чутливого покриття картини ізохром й ізоклін при досить малій товщині плівок дають можливість із високою точністю визначити різницю головних деформацій і кут нахилу однієї з головних деформацій до заданої системи координат. За цих даних роблять розрахунок поля напруг і деформацій методами теорії пластичності.

Однак і метод оптично чутливих покриттів має недоліки: неможливо досліджувати напруги й деформації всередині деталі або тіла, тобто можливості обмежені поверхнею тіла; неможливо точно визначити компоненти напруженого стану в пластичній області, тому що покриття залишається пружним і не фіксує накопичену пластичну деформацію металевого зразка, який немотонно деформується.

### 3.1.5. Візіопластичність

Э. Томсеном, К. Янгом, Ш. Кобаяши був запропонований метод експериментального визначення деформованого й напруженого станів у стаціонарних процесах плоского або осесиметричного плину, що одержав назву візіопластичність. Він полягає в тому, що дослідним шляхом встановлюють векторне поле швидкості переміщення часток в осередку деформації. Для цього, наприклад, на площину рознімання зразка, який деформується не до кінця, наносять координатну сітку. Частини зразка знову скріплюють і після цього піддають його подальшій, але малій деформації. Зразок витягають із деформуючого інструменту, роз'єднують і заміряють переміщення вузлових точок сітки (рис. 3.6).



*Рис. 3.6.* Схема зразка для візіопластичності:  
а – ціла заготовка; б – дві половини, одна з них з нанесеною  
ґраткою; в – суміщені половини заготовки

Оскільки деформація мала, то розділивши переміщення на час деформування одержимо швидкість плину металу в розглянутій точці.

Отримані у вузлових точках сітки зразка значення компонент швидкості  $v_x$  й  $v_y$  математично обробляють. Данні апроксимують функціональними залежностями. Далі, звичайним способом, відомим у теорії пластичності, обчислюють компоненти тензора швидкості деформації. Отримана інформація є основою для обчислення напруженого стану при відомих граничних умовах.

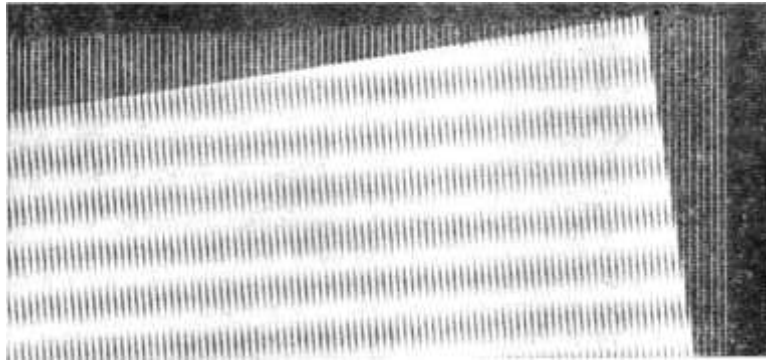
Визначення напруженого стану може супроводжуватися істотними погрішностями. Дійсно, для того, щоб напруги були підраховані досить точно, необхідно забезпечити апроксимацію опитних даних про швидкості плину формулами з високою точністю, тому що отримані рівняння швидкостей далі двічі піддають диференціюванню.

Визначення напруженого стану по методу візіопластичності й оптичним методом можна вважати експериментально-теоретичними.

### 3.1.6. Метод муар

Проміжне місце в експериментальних методах дослідження напружено-деформованого стану між оптичним методом і методом координатних сіток займає метод муар. В основу методу покладена механічна інтерференція, що виникає при накладенні деформованої разом зі зразком дрібної сітки на вихідну недеформовану еталонну сітку. Французьке слово муар (*moire*) звичайно використовують для назви шовкової тканини, що має мінливий, хвилеподібний візерунок, якщо дивитися на світло крізь два шматочки тканого матеріалу. Роль таких шматочків у методі муар грають фотографічні зображення на фотоплівці еталонної сітки із дрібними осередками й тією же сіткою, що перетерпіла разом з виробом пластичну деформацію. Еталонна сітка (растр або решітка) на фотоплівці, яка застосовується в методі муар – це густа система прямих чорних (непрозорих) ліній від 4 до 40 на міліметр зі світлими (прозорими) проміжками. Ширина ліній і величина проміжку між ними є одного порядку. Еталонну сітку фотографічним методом переносять на поверхню досліджуваного зразка, який потім піддають пластичній деформації. Деформований зразок (поверхня із сіткою) фотографують. Накладення плівок з еталонною й деформованою сіткою дає муаровий ефект – муарові смуги. На рис. 3.7 показані муарові смуги, утворені внаслідок чистого зрушення в площині сітки.

Лінії растра на фотографії ледь помітні. За ефективну ширину темної муарової смуги на фотографії приймають відстань між точками, в яких інтенсивність світла досягає половини максимального значення.



*Рис. 3.7. Схема методу муар*

Для з'ясування природи муарового ефекту досить розглянути випадок накладення під деяким кутом двох однакових растрів у збільшеному масштабі (рис. 3.8). Чорні непрозорі лінії растра умовно показані на рисунку паралельними, близько розташованими друг до друга шістьма лініями. У результаті накладення утвориться система прозорих і непрозорих ромбів, причому непрозорі ромби виходять двошаровими (перехресне штрихування) і одношаровими. Можна вказати напрямки 1 і 2, що проходять через малі діагоналі ромбів. Уздовж напрямку 1 чергуються ділянки прозорі і непрозорі, а напрямком 2 проходить тільки через непрозорі ділянки. Напрямки 1 сприймаються неозброєним оком як світлі муарові смуги, а 2-як темні муарові смуги. Можна було б провести подібні напрямки через більші діагоналі ромбів і говорити про світлі й темні смуги другого муару. Однак людське око сприймає лише муарові смуги, що проходять через малі діагоналі ромбів. Цей видимий муар називають ефективним.

У загальному випадку, коли лінії однієї із решіток не є внаслідок деформації прямими, механізм утворення муарових смуг залишається тим же, ромби стають криволінійними чотирикутниками, короткі діагоналі яких відповідають муаровим смугам.

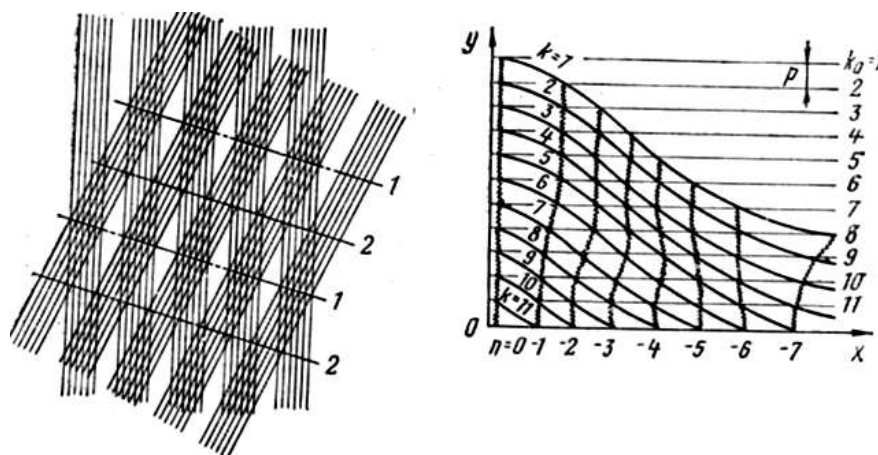


Рис. 3.8. Схема утворення та використання муарової картини

Муарові смуги дозволяють визначити переміщення матеріальних точок тіла, яке деформується.

Застосування методу муар замість звичайних ділительних сіток подає кращу інформацію про поле збільшень переміщень або швидкостей плинучасток у осередку деформації. Дійсно, замість дискретного значення переміщень у вузлах сітки в методі муар маємо безперервне значення на відповідних смугах муару. Правда, від смуги до смуги переміщення міняється дискретно. Отримане поле збільшень переміщень по методу муар може оброблятися так само, як у методі візіопластичності.

Проілюструємо техніку визначення поля збільшень переміщень або швидкостей переміщення часток в осередку деформації, наприклад при сталому прокатуванні широкої смуги (плоский деформований стан). Смуга з модельного матеріалу сплаву свинцю із сурмою, телуром й іншими елементами зупиняється в прокатному стані (недокат). Після видалення з валків її розділяють на дві частини уздовж напрямку прокатки. Поверхню різують, після цього на поверхню різної частини зразка наносять горизонтальну густу сітку ліній шляхом стругання різцем на стругальному верстаті або спеціальній ділительній машинці для визначення поля збільшень переміщень в одному напрямку. На

площину різу другої половини зразка в такий же спосіб наносять сітку вертикальних ліній для визначення іншої складової. Сітки горизонтальних і вертикальних ліній фотографують. Половинки зразків складають у один зразок, причому між площинами різу вставляють прокладку з фольги того ж модельного матеріалу, щоб риси однієї частини зразка не віддрукувалися на поверхні різу другої частини. З'єднують половинки зразка з фольгою й між собою легкоплавким сплавом Вуда.

Складений зразок вставляють у валки лабораторного прокатного стану, що має ту ж відстань між валками, що була при виготовленні недокату. Валкам передають такий поворот, щоб метал у осередку деформації одержав малі деформації. Зразок, що отримав малу деформацію, роз'єднують на частини в гарячій воді, тому що температура плавлення сплаву Вуда  $73^{\circ}\text{C}$ . Поверхні рознімання зразка зачищають від залишків сплаву тампоном і піддають фотографуванню. Накладення отриманих зображень на фотоплівці з відповідним зображенням вихідних сіток дає муаровий ефект.

Дискретна від однієї муарової смуги до іншої інформація про поле збільшень переміщень, будучи апроксимоване безперервними функціями, дозволяє визначити після відповідного диференціювання компоненти тензора збільшень деформацій. Метод муар дозволяє уникнути цю процедуру й визначити часткові похідні в зазначеній формулі безпосередньо експериментально, але у відмінності від попереднього методу, у методі муар апроксимуються функції не швидкості переміщення часток, а компоненти тензора швидкості деформації. При цьому одна операція диференціювання дискретної експериментальної інформації виключається – це істотно для підвищення точності визначення напруженого стану.



### 3.1.7. Аналогії та моделювання

Задачі теорії прокатки, як і інші задачі ОМТ, призводять до розв'язання крайових задач для систем диференціальних рівнянь або відповідних варіаційних задач. При знаходженні наближених розв'язків таких задач іноді доцільно скористатися тим, що одними й тими ж диференціальними рівняннями описуються різні явища, що відрізняються між собою фізичною природою. Наприклад, однаковими за формою диференціальними рівняннями описуються механічні та електромагнітні коливання. Змінні ж в цих рівняннях мають різний фізичний зміст. Вивчаючи доступніші електромагнітні коливання як аналог, можна за допомогою осцилографа зробити певні висновки і про механічні коливання.

Для задач теорії ОМД можна привести три приклади аналогів [1]:

- гідравлічний інтегратор для розв'язання теплових задач про розподіл температур в тілі;
- піщаний насип для вивчення розподілу контактних напружень при штампуванні (об'єм насипу визначає силу штампування, а центр мас – положення точки прикладання цієї сили);
- електро-гідродинамічну аналогію для визначення деформованого стану під час волочіння або пресування фасонних профілів (при переході від електричних величин на моделі до механічних на натурі різниця потенціалів на шинах відповідає витраті матеріалу).

Операції збору, накопичення та обробки експериментальної інформації були вужьким місцем дослідницької роботи, що визначає її тривалість і якість. Рішення проблеми пов'язано зі створенням автоматизованих систем збору і обробки результатів вимірювань. В їх функції входять автоматизація збору та накопичення експериментальних даних, їх комп'ютерна обробка; видача результатів в зручному для дослідників виді; контроль і управління всією експериментальною системою або окремих пристроїв. Сис-

тема містить датчики, вимірювальні пристрої, перетворювачі аналогових даних в цифрові, програмно-технічні засоби і системи, що забезпечують запам'ятовування і відображення інформації, інтерфейс системи і експериментаторів.

## **3.2. Вимірювальна інформація та похибки**

### **3.2.1. Основні визначення**

Згідно з сучасними уявленнями наука, як процес пізнання оточуючого світу і рушійна сила розвитку, ґрунтується на поєднанні емпіричних і теоретичних знань. Таке розділення є досить умовним, зважаючи на діалектику процесу пізнання. Емпірична складова процесу пізнання, тобто накопичення знань через спостереження і експерименти, є основою для теоретичних узагальнень. Розвиток теорії дозволяє прогнозувати явища та створювати нові об'єкти техніки і технології, які в процесі використання дають нові емпіричні знання, дозволяють виявити нові напрямки досліджень та удосконалень.

Отже, емпіричні дослідження включають спостереження та експерименти.

*«Експеримент (від англ. experiment) — сукупність дослідів, об'єднаних однією системою їх постановки, взаємозв'язком результатів і способом їх обробки. Унаслідок експерименту отримують сукупність результатів, які допускають їхню сумісну обробку і зіставлення» [3].*

«Експеримент відрізняється від спостереження активною взаємодією з досліджуваним об'єктом, ... і слугує для перевірки гіпотези, встановлення причинно-наслідкових зав'язків між явищами» [3]. Тому експеримент передбачає створення «доцільно вибраних або штучно створених умов, що забезпечують появу тих процесів, спостереження яких необхідне для встановлення закономірних зв'язків між явищами» [3].

---

---

Згідно критерію Поппера, «можливість постановки експерименту» для підтвердження або спростування теорії дозволяє підтвердити її істинність, тому що «... лише знання, що включають можливість спростування, але залишаються неспростованими», вважаються науковими [4].

Крім цього, критерієм істинності експерименту, тобто підтвердженням можливості використання отриманих результатів, є його відтворюваність.

***Відтворюваність експерименту означає отримання, за однакових умов, ідентичних результатів необмежену кількість раз.***

В залежності від можливостей впливу на фактори, відрізняють пасивний та активний експерименти.

Пасивний експеримент передбачає збір інформації про об'єкт та наступний її аналіз. У більшості випадків такі експерименти реалізують в умовах діючих об'єктів (технологічних агрегатів, цехів), коли фіксуються контрольовані параметри (фактори) технологічного процесу.

Активний експеримент передбачає визначення цільової функції, вибір факторів та рівнів їх зміни.

Експеримент, як активний метод дослідження, передбачає створення певних умов, проведення власне самого експерименту з отриманням числових значень досліджуваних величин та обробку (аналіз і пояснення) отриманих результатів. Перші два етапи експерименту передбачають виконання вимірювань фізичних величин, які умовно розділяють на вхідні, які визначають умови проведення, та вихідні, як результат експерименту.

***«Вимірювання (англ. measurement) — пізнавальний процес визначення числового значення вимірюваної величини, дія, спрямована на знаходження значення фізичної величини дослідним шляхом, порівнюючи її з одиницею вимірювання за допомогою засобів вимірювальної техніки» [5].***

Отже, будь-яке вимірювання зводиться до порівняння вимірюваної величини з прийнятою для даної фізичної величини одиницею вимірювання. Таке порівняння виконується відповідними засобами вимірювань. Результатом вимірювання є числове значення вимірюваної величини, яке відображає кратність або долю відносно одиниці вимірювання. Тому результат вимірювання фізичної величини представляють числом та розмірністю. Зміна розмірності призводить до відповідної зміни числового значення.

*Розмірність (англ. dimension) фізичної величини є формальним відображенням її відмінності відносно інших фізичних величин.*

Назви фізичних величин та одиниці їх розмірностей встановлюють за домовленістю. Формально вони можуть бути будь-якими. Але, розмірність, як якісна характеристика фізичної величини, відображає її відмінність та зв'язок з іншими величинами. Характер такого зв'язку визначається законами природи. Тому разом фізичні величини утворюють **систему фізичних величин та систему одиниць вимірювань** [6].

Систему одиниць вимірювань встановлюють на законодавчому рівні. Для підтримання системи одиниць вимірювань та забезпечення їх точності і єдності створюються відповідні метрологічні служби.

Згідно статті 1 Закону України «Про метрологію та метрологічну діяльність» [7] :

*«Єдність вимірювань – стан вимірювань, за якого їх результати виражаються в одиницях вимірювання, визначених цим Законом, а характеристики похибок або невизначеності вимірювань відомі з певною ймовірністю і не виходять за встановлені границі».*

При здійсненні вимірювань застосовують поняття «спостережуване значення» та «результат вимірювання».

*Спостережуване значення (англ. observed value) - значення характеристики, отримане в результаті одиничного спосте-*

*реження* [8]. В спрощеному розумінні це одиничний відлік з відлікового пристрою (шкали) засобу вимірювань.

***Результат вимірювань*** (англ. *test result*) - *значення характеристики, отримане у підсумку виконання регламентованого (стандартного) методу вимірювань* [8].

Якщо значення фізичної величини представляється без виконання вимірювань з застосуванням відповідної методики та засобів, його вважають суб'єктивною оцінкою величини. Використання таких оцінок за певних умов можливе, але це не є результатом вимірювань.

Метод вимірювання встановлюється відповідними нормативними документами в залежності від потреб. В таких документах регламентуються умови проведення вимірювань, кількість одиничних спостережень (вимірів), способи їх усереднення (середньоарифметичне або медіана), способи представлення результату вимірювань та інше.

***«Точність*** (англ. *accuracy*) – *ступінь наближення результату вимірювання до прийнятого опорного значення*» [8].

За сучасними нормативними документами поняття точність вимірювань значно більш деталізоване.

Якщо раніше точність характеризували як міру відхилення від істинного значення, то в сучасних умовах використовується поняття **«опорне значення»**. Таким значенням може бути:

а) теоретичне або встановлене на основні наукових принципів значення (еталон); б) приписане або атестоване значення, що базується на експериментальних роботах уповноваженої організації (або узгоджене значення різних організацій); в) математичне сподівання (очікування) вимірюваної величини, як середнє значення заданої сукупності результатів вимірювань (вибірки).

Для кількісної характеристики точності вимірювань використовують термін **«похибка вимірювань»**, *тобто величина відхилення від опорного значення* [8].

Всі фактори, які визначають величину похибки, за причинами виникнення та способом врахування як і раніше розділяють на систематичні та випадкові. Але для відображення різного характеру прояву цих факторів для оцінювання точності вводиться поняття «**правильність**» та «**прецизійність**».

Це означає, що для характеристики точності потрібно визначити і навести відхилення середньоарифметичного (правильність) та середньоквадратичного (прецизійність).

**Правильність** (англ. *trueness*) – ступінь наближення середньоарифметичного значення, одержаного за результатами великої серії вимірювань, до прийнятого опорного значення фізичної величини [8].

Правильність умовно визначається наявністю систематичних похибок, тобто похибок, які виникають через постійно діючі фактори.

**Систематична похибка** (англ. *bias*) – різниця між математичним сподіванням результату вимірювань та істинним (опорним) значенням [8].

Серед основних причин, що обумовлюють виникнення систематичних похибок, виділяють такі: особливості методу вимірювання (*bias of the measurement method*); умови проведення вимірювань в певній лабораторії (*laboratory bias*); конструктивні особливості обладнання; кваліфікація оператора.

**Прецизійність** (англ. *precision*) – ступінь наближення незалежних результатів вимірювань, отриманих в конкретних регламентованих умовах [8].

Прецизійність відображає вплив випадкових факторів, характеризує експериментальну складову точності і не має відношення до опорного значення.

**Міру прецизійності** визначають як стандартне (середньоквадратичне) відхилення результатів вимірювань, отриманих за однакових умов.

Чим більше стандартне відхилення тим менша прецизійність.

**«Незалежні результати вимірювань (випробувань)»** — результати, отримані у спосіб, на який не впливає ніякий попередній результат, і які отримано при вимірюваннях того самого або подібного об'єкту [8].

В залежності від регламентованих умов визначення прецизійності розрізняють «умови повторюваності» та «умови відтворюваності» [8].

**Повторюваність** (англ. *repeatability*) – умови, коли незалежні результати вимірювань (або випробувань) отриманні одним і тим же методом на ідентичних об'єктах випробувань, в одній і тій же лабораторії, одним і тим же оператором, з використанням одного й того ж обладнання, в межах нетривалого проміжку часу.

Відповідно для цих умов отримують оцінку точності – **стандартне відхилення повторюваності** (*repeatability standard deviation*). Таку характеристику точності позначають як  $S_r$  (для вибірки) і  $\sigma_r$  (для генеральної сукупності).

**Відтворюваність** (англ. *reproducibility*) – умови, коли результати вимірювань (або випробувань) отримують одним і тим же методом, на ідентичних об'єктах випробувань, в різних лабораторіях, різними операторами, з використанням різного обладнання.

Для оцінки відтворюваності використовують показник – **стандартне (середньоквадратичне) відхилення відтворюваності** (*reproducibility standard deviation*), яку позначають як  $S_R$  ( $\sigma_R$ ).

Для наведених показників прецизійності вводять, відповідно, **межу повторюваності** (*repeatability limit*)  $r$  або  $CR_{0,95(n)}$  та **межу відтворюваності** (*reproducibility limit*)  $R$  або  $CD_{0,95}$ , як максимального допустимі значення.

Таким чином, діючи нормативні документи впроваджують статистичну модель представлення результатів вимірювань у вигляді [8, стор. 8]

$$y = m + B + e,$$

де  $m$  – загальне середнє значення (математичне сподівання);

$B$  – лабораторна складова систематичної похибки в умовах повторюваності;

$e$  – випадкова складова похибки кожного результату вимірювань в умовах повторюваності.

Систематичну складову похибки вимірювань  $B$  визначають як **міжлабораторну дисперсію**, тобто оцінка мінливості результатів вимірювань, отриманих різними операторами на різному обладнанні

$$\text{var}(B) = \sigma_L^2.$$

Випадкову складову  $e$  результатів вимірювань, які виконуються в певній лабораторії, розглядають як **внутрішню лабораторну дисперсію** і представляють як

$$\text{var}(e) = \sigma_W^2.$$

Середньоарифметичне внутрішню лабораторних дисперсій для певної кількості лабораторій називають дисперсією повторюваності і позначають як

$$\sigma_r^2 = \overline{\text{var}(e)} = \overline{\sigma_W^2}.$$

Відповідно, для вичерпної характеристики прецизійності використовують дві величини:

стандартне відхилення повторюваності  $\sigma_r = \sqrt{\overline{\text{var}(e)}}$ ;

стандартне відхилення відтворюваності  $\sigma_R = \sqrt{\sigma_L^2 + \sigma_r^2}$ .

Середнє значення  $m$ , як характеристика правильності, може бути представлене як

$$m = \mu + \delta,$$

де  $\mu$  – опорне значення (істинне значення, математичне сподівання істинного значення);

$\delta$  – систематична похибка методу вимірювань.

У загальному вигляді статистична модель результату вимірювання представляється залежністю



$$y = \mu + (\delta + B) + e.$$

Такий вираз означає, що результат вимірювання є випадковим числом, яке відрізняється від опорного значення наявністю систематичних та випадкової похибок. Для забезпечення точності вимірювань необхідно визначити та врахувати систематичні похибки і мінімізувати випадкові. Адже складові систематичної похибки можуть бути обчислені за статистичними характеристиками, визначеними для вибірки або генеральної сукупності, а для випадкової похибки можливі лише оцінки статистичних характеристик, які отримують для тієї самої сукупності вихідних даних.

Отже, оцінка точності вимірювань можлива лише на основі статистичних характеристик, для визначення яких необхідно проведення **багатократних вимірювань**.

При цьому, визначення статистичних характеристик за стандартними методиками передбачає використання однорідних вихідних даних, тобто таких, що належать до однієї сукупності, без «викидів».

**Викид** (англ. *outlier*), **промах** — у статистиці **результат вимірювання, який виділяється із загальної вибірки**.

Тобто викиди – це такі результати вихідних вимірювань, які наскільки відрізняються від інших результатів, включених до сукупності, що визнаються несумісними з ними. Для виявлення викидів стандартні методики багатократних вимірювань встановлюють відповідні критерії, основані також на визначених статистичних характеристиках.

Багатократні вимірювання вимагають відповідних ресурсів тому вони виправдані лише у випадках підвищених вимог до точності. Наприклад, в наукових дослідженнях або при виконанні метрологічних робіт, таких як визначення метрологічних характеристик засобів вимірювань, перевірка засобів вимірювальної техніки, визначення систематичних похибок методу та інше.

Зауважимо, що в умовах виробництва для сучасних технологічних процесів широко використовують системи вимірювань, які

дозволяють здійснювати вимірювання параметрів з заданою частотою. Відповідно, накопичуючи такі дані, отримуємо можливість визначати статистичні характеристики вимірюваних величин і використовувати таку вимірювальну інформацію для управління технологічними процесами з метою забезпечення якості продукції. Наприклад, системи автоматичного регулювання, карти Шухарта, концепція «шести сигм». Але застосування таких систем ґрунтується на відомих моделях процесів з відомими функціями перетворень. Відповідно, в наукових дослідженнях, при проведенні експериментів, коли вивчається взаємозв'язок між параметрами, використання вимірювальних систем проблематичне.

Яким же чином забезпечити точність вимірювань при проведенні експериментальних досліджень?

### **3.2.2. Забезпечення точності вимірювань в експериментальних дослідженнях**

При проведенні експериментальних досліджень в умовах лабораторії або, за сучасною термінологією, в умовах повторюваності, коли метою досліджень є не визначення характеристик точності, а вивчення залежностей між параметрами процесу, доцільно обмежитись мінімально необхідною і достатньою кількістю вимірів.

Тому відрізняють **одиничний результат вимірювань** і звичайний **результат вимірювань**. Рівень точності в обох випадках визначається метою досліджень.

Звичайний результат вимірювання передбачає оцінку точності з використанням наперед відомих статистичних характеристик засобу та методу вимірювань.

Для одиничного результату вимірювань неможливо виконати пряме визначення статистичних характеристик. Тому точність таких однократних вимірів визначають через **клас точності** засобів вимірювань.

***Клас точності – узагальнена характеристика засобів вимірювань певного типу, яка встановлює нижню оцінку точності їх показань [6].***

Нижня оцінка точності характеризує найбільшу похибку, яку допускає даний тип засобів вимірювань, тобто похибка приладу не перевищує цього значення.

Клас точності є обов'язковою метрологічною характеристикою всіх засобів вимірювань. Наприклад, для лінійки, як міри фізичної величини, клас точності визначається за «ціною» позначки, тобто якщо наведено позначки через 1 мм, то точність вимірювань становить 1 мм, а результат вимірювання слід представляти у вигляді інтервалу  $R \pm 1$  мм. Для звичайних штангенциркулів, як засобів вимірювання, клас точності може становити 0,1 або 0,05 мм. Для мікрометра клас точності встановлено 0,01 мм.

***Результати вимірювань отримують і представляють відповідно до використаного засобу вимірювань.***

Наприклад, дійсне (опорне) значення розміру деталі становить 12,725 мм. Якщо виміри здійснити лінійкою, результат вимірювання можемо отримати лише у вигляді 13 мм (можливі лише цілі значення). З врахування класу точності лінійки можемо стверджувати, що дійсне значення знаходиться в інтервалі від 12 до 14 мм.

Якщо для вимірів використати штангенциркуль класу точності 0,1, то результати вимірювань можемо представляти лише з точністю до однієї десятої. В залежності від кваліфікації оператора, результатом вимірювання може бути 12,7 або 12,8 мм.

При здійсненні вимірів штангенциркулем класу точності 0,05 мм результат вимірювання, тобто відлік з шкали цього приладу, можемо отримати як 12,70 мм або 12,75 мм. Якщо за результат прийняти 12,75 мм, то дійсне значення вимірюваної величини знаходиться в інтервалі (інтервальна оцінка) від 12,70 до 12,80 мм.

Якщо для вимірів використовувати мікрометр, то результат вимірювання можемо представити з точністю до другого знаку після коми. Наприклад, результат відліку з шкали мікрометра є 12,73 мм. Інтервальна оцінка результату вимірювань мікрометром: від 12,72 до 12,74 мм.

Клас точності для приладів позначають арабськими цифрами з ряду 1; 1,5; 2; 2,5; 4; 5. Наведені цифри є значимими, тобто для позначення використовують саме ці цифри з множником  $10^n$ , де  $n$  – приймає значення 0, -1, -2. Відповідно для значимої цифри 1 отримуємо класи точності 1,0; 0,1; 0,01.

**Позначення класу точності** на відліковому пристрої приладу вказує, що дійсне (опорне) значення вимірюваної величини не відрізняється від значення відліку з шкали приладу більше ніж на вказане число відсотків.

Якщо клас точності вказано у колі – відхилення (максимальну можливу похибку) обчислюють відносно відліку (показання приладу). Якщо клас точності позначено лише числами без кола – відхилення обчислюють відносно верхньої межі вимірювань (максимальне значення на шкалі приладу).

Але сучасна практика, що впроваджується діючими нормативними документами, з метою попередження отримання некоректних даних, рекомендує проводити два виміри в умовах повторюваності.

Стандартна методика, регламентована [9], передбачає, що виміри виконують в точній відповідності з стандартним методом вимірювань, стандартні відхилення якого  $\sigma_r$  та  $\sigma_R$  відомі. Довірчий рівень ймовірності приймають на рівні 95%. Результати двох вимірів порівнюють між собою, перевіряючи їх однорідність за критерієм «межа повторюваності», який визначають з співвідношення

$$r = \sigma_r \cdot \sqrt{2},$$

Для забезпечення 95 % довірчого інтервалу вводиться множник  $f$ , який у відповідності з нормальним законом розподілення (приймається за замовчуванням) становить 1,96.

Відповідно отримуємо

$$r = f \cdot \sigma_r \cdot \sqrt{2} = f(n) \cdot \sigma_r \approx 2,8 \cdot \sigma_r,$$

де  $f(n)$  – коефіцієнт критичного діапазону.

Значення коефіцієнтів критичного діапазону наведено в таблиці 3.1.

Якщо виконується умова  $|x_1 - x_2| \leq r$ , обидва результати вимірювань вважаються прийнятними і остаточний результат вимірювань визначають як середнє

$$y = \frac{(x_1 + x_2)}{2}.$$

Якщо зазначена умова не виконується, проводять ще два виміри (за високої вартості вимірювань допускається одне додаткове вимірювання), і визначають критичний діапазон (границю повторюваності) для чотирьох вимірів

$$CR_{0,95(4)} = 3,6 \cdot \sigma_r.$$

Якщо виконується умова

$$x_{max} - x_{min} \leq CR_{0,95(4)},$$

остаточний результат вимірювань визначають як середнє

$$y = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}.$$

Якщо умова не виконується то остаточний результат вимірювань визначають як медіану чотирьох значень, тобто середнє двох середніх значень впорядкованої у напрямку зростання послідовності з чотирьох значень

$$y = \frac{x_{(2)} + x_{(3)}}{2}.$$

Наведену методику потрібно використовувати для вимірювань при проведенні експериментальних досліджень.

Таблиця 3.1. Коефіцієнти критичного діапазону  $f(n)$  в залежності від кількості вимірів [9]

$n$	$f(n)$	$n$	$f(n)$
2	2,8	13, 14	4,7
3	3,3	15, 16	4,8
4	3,6	17, 18	4,9
5	3,9	19, 20	5,0
6	4,0	25	5,2
7	4,2	30	5,3
8	4,3	35	5,4
9	4,4	40	5,5
10	4,5	50	5,6
11, 12	4,6	100	6,1

Якщо для методу, який використовується для вимірювань, статистичні характеристики прецизійності (повторюваності та відтворюваності) невідомі, їх потрібно визначити. Таке визначення являє собою окреме метрологічне дослідження, методика якого регламентована в стандартах [8, 9, 10], і яке передбачає залучення певної кількості лабораторій.

При проведенні експерименту з визначення прецизійності складається «програма збалансованого експерименту з однорідними рівнями». Це означає, що в кожній з залучених  $p$  лабораторій здійснюються  $n$  вимірювань досліджуваної фізичної величини на кожному з  $q$  рівнів. Кількість рівнів та кількість вимірів в базових елементах, так само як і вимоги до обладнання, методики, персоналу та інше, узгоджуються при складанні програми експерименту.

Якщо можливість залучення інших лабораторій відсутня, вимушено обмежуються експериментальним визначенням характеристик повторюваності в умовах однієї лабораторії, але за певним планом, який буде можливо реалізувати в інших лабораторіях.

### 3.2.3. Визначення показників прецизійності в умовах однієї лабораторії

В статистичній практиці, коли значення стандартних відхилень повторюваності і відтворюваності невідомі, обмежуються їх оцінками, які визначають за порівняно невеликими вибірками. При цьому загальноприйняте позначення стандартного відхилення для генеральної сукупності  $\sigma$  замінюють на оцінку стандартного відхилення  $S$ .

Для дотримання умов повторюваності потрібно забезпечити дотримання вимог: кожна група з  $n$  вимірів, які відносяться до одного рівня, повинна здійснюватися за короткий інтервал часу, одним і тим же оператором, без перекалібрування (налаштування) апаратури.

В умовах однієї лабораторії для кожного з базових елементів, тобто відповідного рівня досліджуваної фізичної величини, за результатами  $n$  вимірів визначають статистичні характеристики:

- середні значення базових елементів

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n y_{jk},$$

- показник відхилень в базовому елементі (оцінка стандартного відхилення)

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y}_j)^2}.$$

Якщо в базовому елементі кількість вимірів становить 2, то внутрішньоелементне відхилення визначають з співвідношення

$$S_j = \frac{|y_{j1} - y_{j2}|}{\sqrt{2}}.$$

Стандартне відхилення представляють числом, що містить на одну значиму цифру більше за вихідні дані.

Далі, використовуючи значення  $S_j$ , після перевірки їх однорідності, визначають оцінку внутрішньолабораторної дисперсії, використовуючи вираз

$$S_w^2 = \frac{1}{q} \sum S_j^2,$$

де  $q$  – кількість рівнів стандартного зразка (базових елементів).

В умовах однієї лабораторії таку статистичну характеристику допускається використовувати в якості характеристики повторюваності [10, стор. 22], тобто приймають

$$S_r = S_w.$$

Розглянемо приклад визначення характеристики точності – стандартного відхилення повторюваності в умовах однієї лабораторії.

Наприклад, ставиться задача визначення точності «стандартного» методу вимірювань з використанням штангенциркулів класу точності 0,05 мм. Програма експерименту з визначення прецизійності в умовах повторюваності включає: визначення кількості рівнів зміни досліджуваного об'єкту; виготовлення (або відбір) зразків з параметрами, що відповідають обраним рівням; проведення вимірювань; аналіз отриманих даних; визначення показників прецизійності в умовах повторюваності.

Для охоплення всього діапазону можливих діаметрів катанки призначаємо шість рівнів: 5,5 мм; 6,5 мм; 8 мм; 9 мм; 10 мм; 12 мм.

Відбираємо по два зразки для кожного з рівнів. При цьому параметр, для якого визначаються показники точності стандартним методом вимірювань, контролюємо використовуючи засіб вимірювань більш високої точності, наприклад мікрометр.

При проведенні вимірювань, які здійснює один оператор, використовуючи один засіб вимірювань, результати заносимо до таблиці форми А (таблиця 3.2).



Далі виконуємо обробку і аналіз отриманих результатів. Згідно п. 6.2 [10] аналіз повинен проводити один з учасників експерименту з визначення точності (експерт), який має «досвід статистичного планування та аналізу».

На основі даних форми А, експерт обчислює значення середніх (форма В) та відхилення (форма С) по базовим елементам. Отримані розрахункові дані аналізуються на сумісність (однорідність) та наявність викидів.

При проведенні повномасштабного експерименту з визначення точності, з залученням визначеної кількості лабораторій, для аналізу сумісності використовують графічний аналіз за статистиками Манделя, а для виявлення викидів використовують критерії Кохрена або Грабса. В умовах однієї лабораторії така можливість відсутня, тому, приймаючи значення відхилень за випадкову величину, виконують аналіз наявності аномальних значень за правилом «трьох сигм».

Розглянемо приклад аналізу сумісності даних, отриманих в лабораторії «а» (таблиця 3.2), з використанням правила «трьох сигм».

*Таблиця 3.2. Форми статистичного аналізу даних експерименту з визначення прецизійності в умовах повторюваності*

Форма А – Вихідні дані						
Лабораторія	Рівні					
	1	2	3	4	5	6
а	5,65	6,40	8,05	8,85	9,95	11,95
	5,55	6,55	8,15	9,10	10,10	12,05
б						

Форма В – Середні значення базових елементів						
Лабораторія	Рівні					
	1	2	3	4	5	6
а	5,600	6,475	8,100	8,975	10,025	12,000
б						

Продовження табл. 3.2

Форма С – Відхилення в базових елементах						
Лабораторія	Рівні					
	1	2	3	4	5	6
а	0,071	0,106	0,071	0,177	0,106	0,071
б						

Розраховані значення стандартних відхилень по базовим елементам отримали від 0,071 до 0,177 мм. Максимальне стандартне відхилення, отримане для четвертого рівня, яке становить 0,177 мм, відрізняється від інших, тому перевіримо його на аномальність.

Приймаючи отримані значення стандартних відхилень як випадкову величину, розраховуємо для цієї вибірки статистичні характеристики: середнє значення відхилень  $\bar{S}_s = 0,100$  мм, стандартне відхилення (середньоквадратичне) цього середнього  $S_{\bar{s}} = 0,041$  мм.

Згідно правила «трьох сигм», екстремальне значення визнається аномальним, якщо різниця між ним і середнім значенням вибірки перевищує три стандартних відхилення

$$(y_{max} - \bar{y}) > 3 \cdot S_y.$$

Для прикладу, що розглядається, маємо

$$(y_{max} - \bar{y}) = (0,177 - 0,100) = 0,077 \text{ мм},$$

$$3 \cdot S_{\bar{s}} = 3 \cdot 0,041 = 0,124 \text{ мм}.$$

Різниця між максимальним відхиленням і середнім значенням не перевищує трьох сигм. Отже, значення 0,177, яке значно відрізняється від інших значень вибірки, не є аномальним, а вся вибірка вважається однорідною.

Таким чином, за результатами експерименту з визначення точності вимірювань штангенциркулем встановлено, що показ-

ник прецизійності – стандартне відхилення повторюваності в умовах однієї лабораторії, становить

$$S_r = S_w = \bar{S}_s = 0,100 \text{ мм.}$$

Отримане значення, як характеристика прецизійності в умовах повторюваності, використовується для перевірки однорідності і визначення результатів вимірювань виконаних тим самим методом, тобто з використанням штангенциркуля класу точності 0,05 мм.

Наведений приклад є лише ілюстративним, без огляду на відповідність отриманих показників прецизійності практичним потребам.

Визначений за наведеною методикою показник прецизійності в умовах повторюваності може використовуватись при здійсненні вимірювань в межах лабораторії. Наприклад, здійснивши два виміри виробу з номінальним діаметром 7 мм, отримали значення 6,90 мм та 7,15 мм. Різниця між вимірами становить 0,25 мм. Межу прецизійності за показником повторюваності для двох вимірів (таблиця 3.1) визначаємо з співвідношення

$$r = 2,8 \cdot S_r, \text{ тобто } r = 2,8 \cdot 0,100 = 0,28 \text{ мм.}$$

Так як різниця між вимірами не перевищує межу повторюваності, робимо висновок, що отримані результати є однорідними, тобто належать одній сукупності, або іншими словами, різниця між вимірами не перевищує рівень точності методу вимірювань.

Отже, умови однорідності виконуються і результатом виміру є середнє значення

$$y = \frac{6,90+7,15}{2} = 7,025 \approx 7,03 \text{ мм.}$$

Результат представляємо двома значимими цифрами після коми.

### 3.2.4. Визначення показників прецизійності з залученням кількох лабораторій

При проведенні збалансованого експерименту з однорідними рівнями, значення статистичних характеристик по всім лабораторіям обробляють спочатку у аналогічній послідовності.

За даними таблиці форми А визначають середні значення по кожному базовому елементу і зводять їх до таблиці форми В.

Обчислюються стандартні відхилення по кожному базовому елементу – таблиця форми С.

Отримані дані аналізують на сумісність та наявність викидів. Для оцінки сумісності даних використовують графічний метод, а для виявлення викидів застосовують статистичне тестування.

**Графічний аналіз сумісності** передбачає використання статистик Дж. Манделя  $h$  та  $k$  [10].

Статистику міжлабораторної сумісності  $h$  розраховують як частку від ділення середніх відмінностей по базовим елементам на стандартне відхилення середніх значень по базовим елементам відповідних рівнів

$$h_{ij} = \frac{y_{ij} - \bar{y}_j}{\sqrt{\frac{1}{(p_j-1)} \sum_{j=1}^p (y_{ij} - \bar{y}_j)^2}},$$

де  $\bar{y}_{ij}$  – середнє по базовим елементам для  $j$ -го рівня  $i$ -ої лабораторії;

$\bar{\bar{y}}_j$  – загальне середнє для  $j$ -го рівня.

Для визначення  $\bar{\bar{y}}_j$  використовують залежність

$$\hat{m}_j = \bar{\bar{y}}_j = \frac{\sum_{j=1}^p n_{ij} \cdot \bar{y}_{ij}}{\sum_{j=1}^p n_{ij}}.$$

Значення  $h_{ij}$  для кожного базового елемента наводять на діаграмі, де номер лабораторії вказують у напрямку його збільшення.

Статистику внутрішнь лабораторної сумісності  $k$  розраховують з співвідношення

$$k_{ij} = \frac{s_{ij} \cdot \sqrt{p_j}}{\sqrt{\sum s_{ij}^2}} = S_{ij} \sqrt{\frac{p_j}{\sum s_{ij}^2}}$$

Значення  $k_{ij}$  для кожного базового елемента наносять на діаграму в послідовності збільшення індексу  $i$ , так щоб кожному номеру лабораторії відповідала група значень  $k_{ij}$ .

Критичні значення  $h$  та  $k$  визначають з таблиць.

**Статистичне тестування викидів** виконують за критеріями Кохрена або Грабса. Критерій Кохрена визначають використовуючи дані таблиці форми С, за умови, що в кожному базовому елементі стандартні відхилення  $S_i$  розраховано виходячи з однакової кількості результатів вимірювань. Для кожного рівня тестову статистику Кохрена розраховують з залежності

$$C = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^p S_i^2},$$

де  $S_{max}^2$  – максимальне значення оцінки дисперсії в сукупності по  $p$  лабораторіям.

Якщо значення тестової статистики (розраховане значення) менше або дорівнює 5 %-ному критичному значенню, таке відхилення визнають коректним, тобто допустимим. Якщо розраховане значення критерію більше 5 %-ного критичного значення, але менше 1 %-ного, така позиція тестування визнається квазі викидом. Якщо тестове значення більше 1 %-ного критичного значення, позиція, що тестується визнається викидом і виключається з статистичного аналізу. Після цього аналіз повторюють з даними, що залишилися.

Зважаючи на певні обмеження, притаманні для критерію Кохрена, рекомендується надавати перевагу критерію Грабса, як більш інформативного.

Для цього критерію відрізняють перевірки на один викид або на два викиди.

Перевірка на один викид зводиться до визначення чи не є викидом максимальне (або мінімальне) значення у впорядкова-

ній у напрямку збільшення сукупності даних  $x_i$  (де  $i = 1, 2, \dots, p$ ). Для перевірки максимального значення розрахунок статистики (критерія) Грабса виконують за формулою

$$G_p = \frac{x_p - \bar{x}}{S},$$

де  $x_p$  – максимальне значення впорядкованої сукупності;  
 $\bar{x}$  – середнє значення певного рівня по всіх лабораторіям;  
 $S$  – стандартне відхилення для тієї самої сукупності даних (певний рівень по всіх лабораторіям).

$$\bar{x} = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p x_i, \quad S = \sqrt{\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2},$$

де  $p$  – кількість лабораторій, тобто обсяг вибірки  $x_i$ .

Для перевірки мінімального значення використовують формулу

$$G_l = \frac{\bar{x} - x_l}{S},$$

де  $x_l$  – мінімальне значення впорядкованої сукупності.

Якщо розраховане значення критерію (тестова статистика) менше або дорівнює 5 %-ному критичному значенню, величина, що перевіряється вважається коректною, тобто не є викидом.

Якщо тестова статистика більше 5 %-ного, але менше 1 %-ного критичного значення, величина, що перевіряється вважається квазівикидом.

Якщо тестова статистика більше 1 %-ного критичного значення, величина, що перевіряється визнається викидом і повинна бути виключена з статистичного аналізу.

Перевірка на два викиди, тобто перевірка гіпотези, що два найбільші значення впорядкованої послідовності є викидами, зводиться до розрахунку статистики Грабса за формулою

$$G = \frac{S_{p-1,\rho}^2}{S_0^2},$$

$$\begin{aligned} \text{де } S_0^2 &= \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2; \\ S_{p-1,\rho}^2 &= \sum_{i=1}^{p-2} (x_i - \bar{x}_{p-1,\rho})^2; \\ \bar{x}_{p-1,\rho} &= \frac{1}{p-2} \sum_{i=1}^{p-2} x_i. \end{aligned}$$

Аналогічно для перевірки аномальності двох найменших значень впорядкованої сукупності використовують залежності

$$G = \frac{S_{l,2}^2}{S_0^2},$$

$$\begin{aligned} \text{де } S_{l,2}^2 &= \sum_{i=3}^p (x_i - \bar{x}_{l,2})^2; \\ \bar{x}_{l,2} &= \frac{1}{p-2} \sum_{i=3}^p x_i. \end{aligned}$$

Критичні значення критерію Грабса, визначають з відповідних таблиць.

Далі для однорідної сукупності вихідних даних, які не містять аномальних значень, визначають загальне середнє та дисперсії для кожного з рівнів.

Загальне середнє визначають за формулою

$$\widehat{m}_j = \bar{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^p n_{ij} \cdot y_{ij}}{\sum_{i=1}^p n_{ij}};$$

Дисперсія повторюваності

$$S_{rj}^2 = \frac{\sum_{i=1}^p (n_{ij}-1) \cdot S_{ij}^2}{\sum_{i=1}^p (n_{ij}-1)},$$

Міжлабораторна дисперсія

$$S_{Lj}^2 = \frac{S_{dj}^2 - S_{rj}^2}{\bar{n}_j},$$

$$\text{де } S_{dj}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p n_{ij} \cdot (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_j)^2,$$

$$\bar{n}_j = \frac{1}{p-1} \left[ \sum_{i=1}^p n_{ij} - \frac{\sum_{i=1}^p n_{ij}^2}{\sum_{i=1}^p n_{ij}} \right].$$

Для випадків, коли всі базові елементи мають по два результати вимірювань, залежності для визначення дисперсій повторюваності та міжлабораторної спрощують і мають вид

$$S_{rj}^2 = \frac{1}{2p} \sum_{i=1}^p (y_{ij1} - y_{ij2})^2,$$

$$S_{Lj}^2 = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_j)^2 - \frac{S_{rj}^2}{2}.$$

Дисперсія відтворюваності для кожного з рівнів становитиме

$$S_{Rj}^2 = S_{rj}^2 + S_{Lj}^2.$$

Завершальний етап аналізу даних експерименту з визначення показників прецизійності – визначення функціональної залежності між значеннями прецизійності та середнім значенням  $\hat{m}_j$  для рівня. Якщо такі залежності існують, то за результатами експерименту приймається рішення про використання їх для підвищення точності результатів вимірювань шляхом внесення поправок.

### 3.2.5. Вимірювальна інформація за результатами багатократних вимірювань

З точки зору метрології результат будь-якого виміру є випадковим числом через наявність похибок. Систематичні похибки, обумовлені особливостями методу вимірювань та особливостями вимірювального обладнання певної лабораторії, тобто постійно діючими чинниками, можуть бути визначені і враховані. Випадкові похибки можна лише прогнозувати використовуючи теорію ймовірностей.

Центральна гранична теорема теорії ймовірностей, сформульована Лапласом, стверджує, що випадкова величина являє собою суму великого числа незалежних випадкових величин, кожна з яких незначною мірою впливає на загальну суму, що обумовлює її нормальне розподілення. Тобто, відхилення значень певної величини, які класифікують як випадкові, виникають через дію випадкового поєднання багатьох чинників. В кожен момент часу можуть діяти різні чинники і по різному, саме тому таку величину називають випадковою.



Термін «нормальне розподілення» обрано щоб підкреслити незначний вплив багатьох чинників. Якщо вплив якогось з чинників буде суттєво переважати вплив інших, такий стан не буде «нормальним», тобто його не можна вважати випадковим. За умови нормального розподілення випадкової величини багатократні виміри дозволяють розрахувати оцінки статистичних характеристик похибок і забезпечити потрібний рівень надійності визначення вимірюваної випадкової величини.

Відомі і інші закони розподілення, в залежності від особливостей величин, що розглядаються (рівномірний, логарифмічний, степеневий, біноміальний, Вейбула, Пірсона, Стьюдента, Фішера та інші). Але в метрології для випадкових величин нормативними документами передбачено використання саме нормального закону розподілення.

Нормальний розподіл описують функцією Гауса (URL:[https://uk.wikipedia.org/wiki/Функція\\_Гауса](https://uk.wikipedia.org/wiki/Функція_Гауса)), яка має вид

$$f(x) = a \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x-b)^2}{c^2}},$$

де  $x$  – значення неперервної випадкової величини;

$a, b, c$  – параметри функції.

Графік цієї функції являє собою симетричну куполоподібну криву. Параметр  $a$  відображає висоту кривої,  $b$  – визначає положення центру кривої,  $c$  – визначає ширину куполоподібної кривої.

В статистиці і метрології функція Гауса використовується у вигляді

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

де  $\mu$  – математичне сподівання випадкової величини (середнє арифметичне для сукупності);

$\sigma^2$  – дисперсія випадкової величини (відповідно  $\sigma$  – стандартне відхилення).

Тобто, параметри функції Гауса визначають наступним чином:  $a = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ ;  $\mu = b$ ;  $\sigma = c$ .

В залежності від значень параметрів, вид графіку функції видозмінюється, як це показано на рисунку 3.9.

При  $\mu = 0$  та  $\sigma^2 = 1$  криву щільності ймовірності називають нормованою (стандартною, стандартизованою). Для наведених параметрів функція набуває виду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Крім цього відрізняють кумулятивну (інтегральну) функцію розподілу ймовірностей (рисунок 3.10), яка визначає ймовірність того, що випадкова величина прийме значення менше за  $x$ ,

$$F(x) = P(X < x); \quad F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1.$$

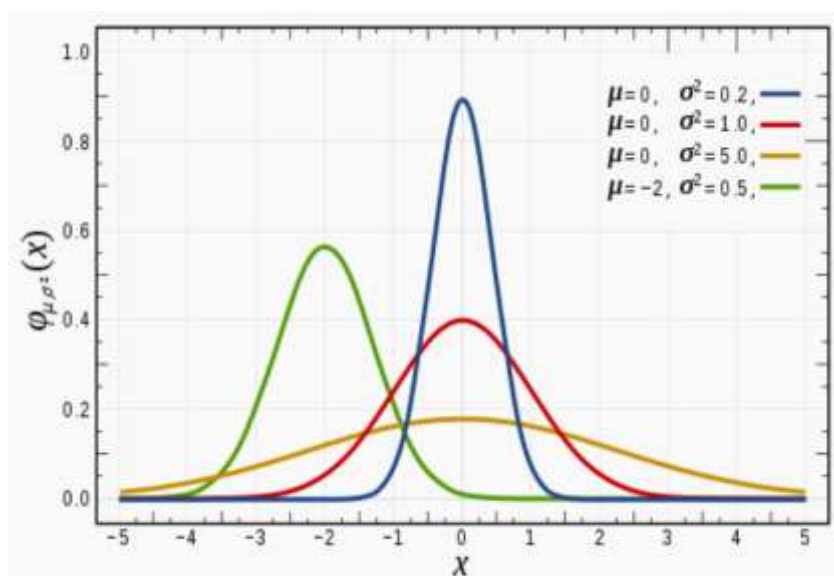


Рис. 3.9. Функція щільності ймовірностей - Гаусова крива з математичним сподіванням  $\mu$  і дисперсією  $\sigma^2$   
(URL:[https://uk.wikipedia.org/wiki/Нормальний\\_розподіл](https://uk.wikipedia.org/wiki/Нормальний_розподіл))

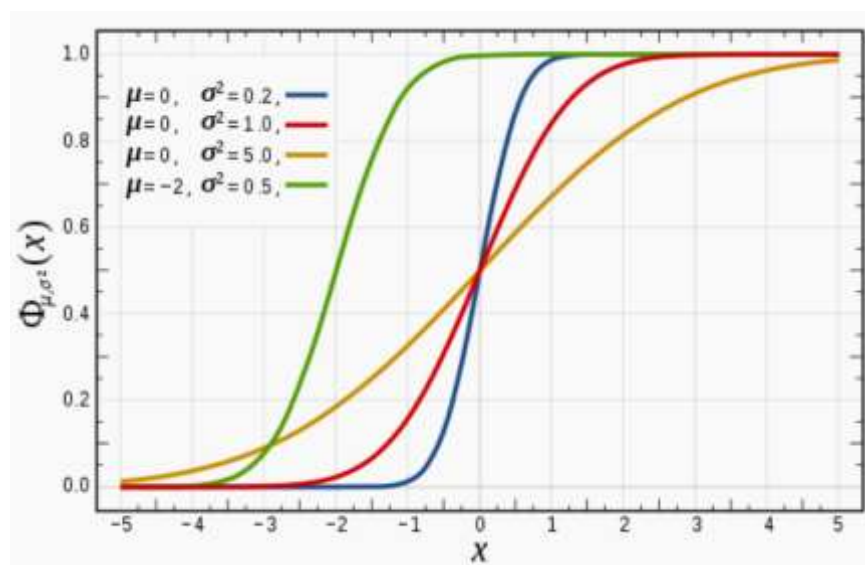


Рис. 3.10. Функція розподілу ймовірностей  
(URL:[https://uk.wikipedia.org/wiki/Нормальний\\_розподіл](https://uk.wikipedia.org/wiki/Нормальний_розподіл))

Геометрична інтерпретація функції  $F(x)$  – це площа фігури між кривою  $f(x)$  та віссю абсцис (рисунок 3.11).

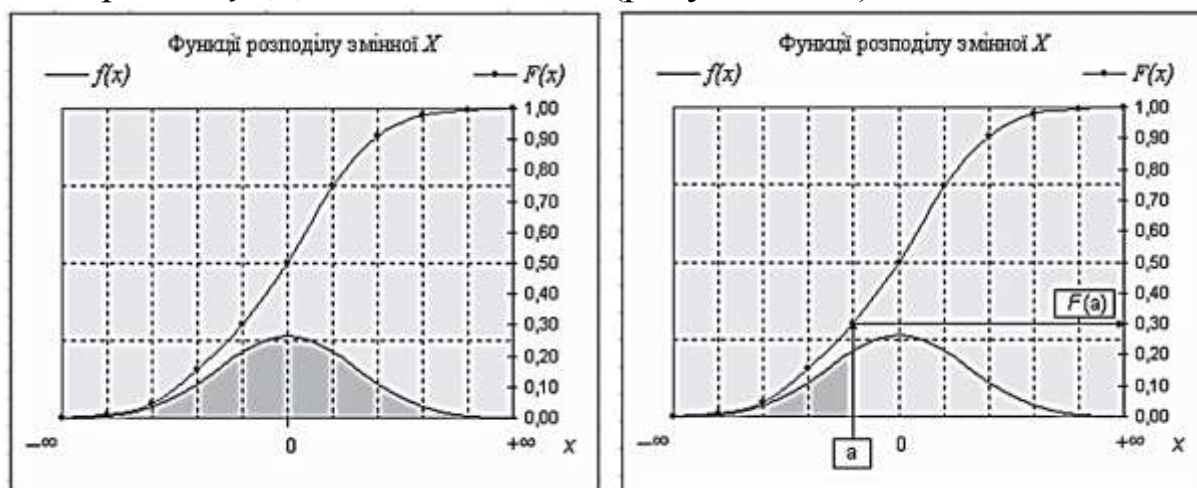


Рис. 3.11. Геометрична інтерпретація функції розподілу ймовірностей [11, стор. 99]

Значення функції  $F(x)$  для певного значення, наприклад,  $x=a$ , обчислюють інтегруванням функції  $f(x)$  в інтервалі від  $-\infty$  до  $a$

$$F(a) = \int_{-\infty}^a f(x) \cdot dx.$$

Нормальний розподіл спостерігається для багатьох явищ у природі, саме тому він набув широкого розповсюдження в задачах статистичного аналізу та в метрології.

До особливостей нормального розподілу відносять:

- збіг трьох мір центральної тенденції (МЦТ), тобто середньоарифметичного, медіани та моди;
- можливість визначення статистичних характеристик випадкових величин за вибірками порівняно невеликого обсягу, так як по мірі збільшення значень у вибірці розподіл випадкової величини наближається до нормального, що має місце для генеральної сукупності;
- можливість виявлення аномальних явищ за порівняно простими критеріями, отриманими з статистичних характеристик вибірки.

Друга з наведених особливостей використовується при багатократних вимірюваннях в метрології. Збільшуючи кількість вимірювань досягають наближення середньоарифметичного до істинного (опорного) значення вимірюваної величини, за рахунок наближення до нуля впливу випадкових похибок.

Остання з особливостей обумовлена властивостями функції Гауса. Так як стандартне відхилення є аргументом функції, то для нормованого нормального розподілення в інтервал від  $-\sigma$  до  $+\sigma$  потрапляє 68,27 % значень генеральної сукупності. Відповідно, для вибірки з генеральної сукупності ймовірність потрапляння будь-якого значення в цей інтервал становить 68,27 % (рис. 3.12).

Ймовірність потрапляння будь-якого значення в інтервал від  $-2\sigma$  до  $+2\sigma$  становить 95,47 %, а в інтервал від  $-3\sigma$  до  $+3\sigma$  - 99,73 %.

Враховуючи, що ймовірність потрапляння значення випадкової величини за межі інтервалу  $\pm 3\sigma$ , становить лише 0,27 %, такий критерій використовують для виявлення аномальних значень вибірки. Якщо для екстремального значення вибірки виконується умова

$$|x_{extr} - \bar{x}| > 3\sigma,$$

це значення визначається як аномальне (промах), тобто таке, що не відповідає нормальному закону розподілення, і повинне бути виключене з подальшого аналізу.

Крім виділення характерних точок за стандартним відхиленням використовують і інші способи розділення (квантування) розподілу випадкової величини. Наприклад, квантілі (на чотири частини), децилі (на десять частин) та перцентилі (на 100 частин). Зокрема поділ на квантілі передбачає поділ на чотири частини з границями 0,25; 0,50 та 0,75. Перший квантіль  $Q_1 = 0,25$  визначає нижню границю, тобто таке значення випадкової величини, що 25 % загальної сукупності будуть менше або дорівнювати цьому значенню. Другий квантіль  $Q_2 = 0,50$  відповідає медіані, тобто ділить загальну сукупність на дві рівні частини. Відповідно інтерквантільний розмах – різниця між третім і першим квантілями, буде містити 50% всієї сукупності значень випадкової величини. Інтерквантільний розмах відповідає інтервалу  $\pm 0,6745\sigma$  (рис. 3.12).

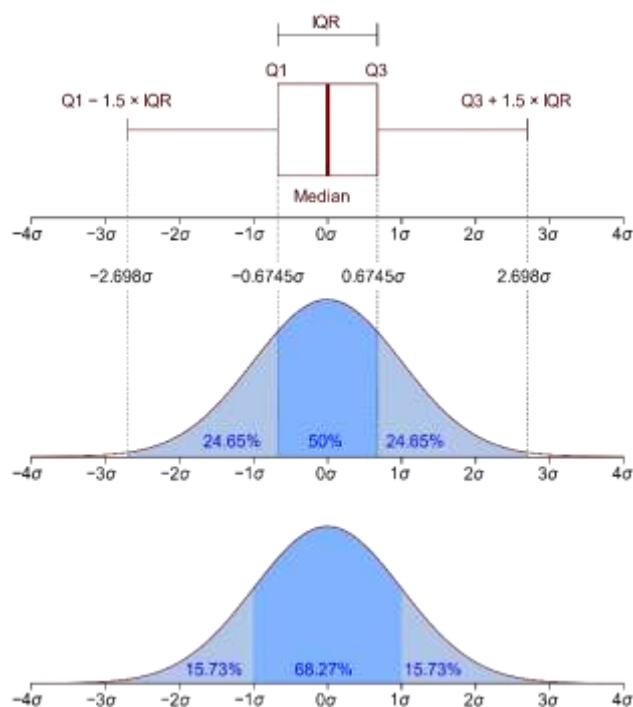


Рис. 3.12. Квантілі нормального розподілу

[URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Квантіль>]

Отже, для нормально розподіленої величини за її статистичними характеристиками можна обчислити довірчий інтервал, тобто інтервал у якому буде знаходитись, з відповідною ймовірністю (надійністю), істинне значення цієї величини. Наприклад, для забезпечення 95 %-ної надійності попадання середнього значення випадкової величини у довірчий інтервал, його границі визначають з співвідношення  $\pm 2\sigma$ . Іншими словами – з 95 %-ною ймовірністю істинне значення буде знаходитись в інтервалі

$$\bar{x} - 2\sigma < X < \bar{x} + 2\sigma.$$

Такий спосіб визначення інтервальної оцінки випадкової величини можливий коли відомі статистичні характеристики, зокрема стандартне відхилення  $\sigma$  для генеральної сукупності. Але у більшості випадків багатократні виміри передбачають здійснення конкретної кількості вимірів, на відміну від генеральної сукупності, для якої кількість вимірів наближається до нескінченності.

Яким же чином точність багатократних вимірів залежить від їх кількості?

Відповідь на це питання запропонував В. С. Госсет (W. S. Gosset), опублікувавши у 1908 році свою працю «Ймовірна помилка середнього». Розроблений ним  $t$  – розподіл Стьюдента, є різновидом нормального розподілу ймовірностей для вибірок невеликого об'єму. Цей розподіл широко використовується для оцінки статистичної значущості різниці математичних очікувань (середніх) двох вибірок та для визначення довірчого інтервалу різниці очікуваних значень двох вибірок.

Якщо з генеральної сукупності значень нормально розподіленої величини з середнім  $\mu$  і стандартним відхиленням  $\sigma$  отримати вибірку з  $n$  значень, то статистичні характеристики вибірки, визначені за виразами

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

будуть так само випадковими величинами.

При цьому величина  $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  також буде випадковою і матиме стандартний нормальний розподіл ймовірності (з середнім 0 і дисперсією 1), а випадкова величина  $\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}$  матиме t-розподіл Стьюдента з  $(n - 1)$  ступенями вільності (свободи).

Графік щільності t-розподілу Стьюдента подібний до графіку щільності ймовірності нормованого нормального розподілу – така сама куполоподібна крива, але дещо нижча і ширша (рис. 3.13). По мірі збільшення числа ступенів вільності для t-розподілу крива наближається до кривої нормального розподілу. Для  $(n - 1) \geq 30$  криві майже збігаються.

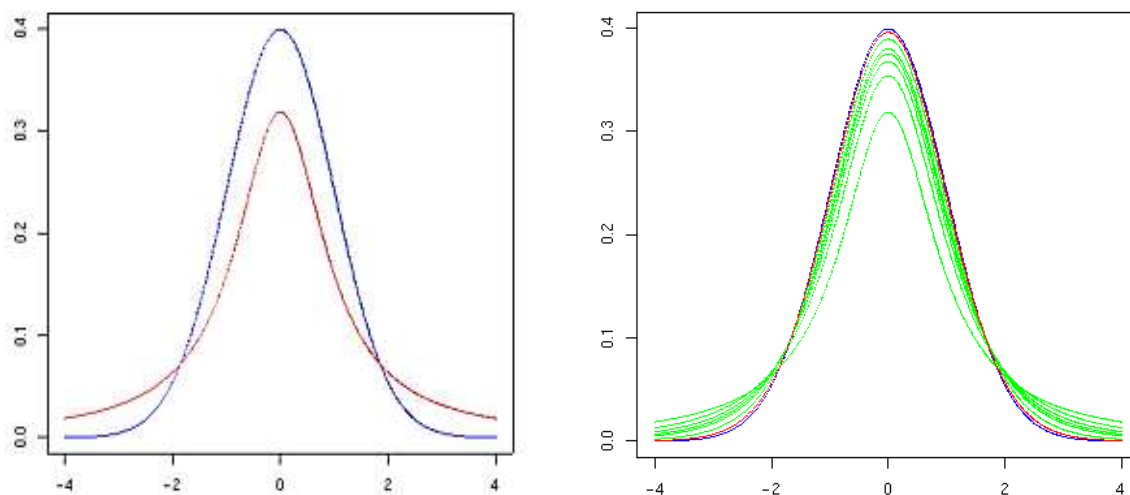


Рис. 3.13. Криві щільності ймовірності для нормованого нормального розподілення та t-розподілення Стьюдента з 1-ю та 30-ма ступенями свободи

[URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/T-розподіл\\_Стьюдента](https://uk.wikipedia.org/wiki/T-розподіл_Стьюдента)]

Розглянемо приклад отримання вимірювальної інформації за результатами багатократних вимірювань. Наприклад, на прокатному стані здійснюється виготовлення катанки з номінальним ді-

аметром 5,5 мм з допусками  $\pm 0,3$  мм. Ставиться задача – визначити яке значення діаметру має катанка у вертикальній площині (розмір формується за рахунок обтиснення врізами валків). Приймаємо цей розмір за випадкову величину, на яку впливають різноманітні технологічні фактори (чинники).

Попередньо здійснимо однократне вимірювання, дотримуючись методики, наведеної у розділі 3.2.2. Для цього виконаємо два вимірювання діаметру в різних місцях по довжині. Припустимо, що в результаті отримали значення 5,29 мм та 5,42 мм. Якщо отримані результати відповідають умовам однорідності за показником «межа прецизійності в умовах повторюваності», отримаємо значення діаметру 5,35 мм. Отриманий розмір знаходиться в допустимому полі допусків, але це випадкове значення з невідомими випадковими похибками.

Для визначення оцінок статистичних характеристик випадкових похибок здійснюємо багатократні виміри діаметру. Наприклад, виконаємо 40 вимірів через кожні 10 м. Такий обсяг вибірки обумовлено тим, що статистичні характеристики вибірки у 40 або більше значень з достатньою точністю наближаються до характеристик генеральної сукупності.

В результаті отримуємо вибірку з 40 значень випадкової величини, наприклад:

*Таблиця 3.3. Результати багатократного вимірювання*

5,39	5,36	5,47	5,41	5,40	5,40	5,46	5,43
<b>5,52</b>	5,39	5,42	5,4	5,40	5,37	<b>5,29</b>	5,46
5,47	5,39	5,39	5,32	5,45	5,32	5,36	5,48
5,40	5,37	5,37	5,50	5,34	5,33	5,41	5,37
5,38	5,42	5,36	5,43	5,44	5,40	5,40	5,41

Для отриманої вибірки визначаємо статистичні характеристики (розмах, міри центральної тенденції – МЦТ, стандартне відхилення), результат вимірювання та розподіл.

Статистичні характеристики:



- мінімальне значення 5,29 мм; максимальне 5,52 мм;
- розмах 0,23;
- мода (найчастіше повторюване значення) 5,40 мм;
- медіана (середнє значення впорядкованого ряду) 5,40 мм;
- середньоарифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{x} = 5,402 \approx 5,40 \text{ мм};$$

- стандартне відхилення

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad S = 0,050 \text{ мм}.$$

З отриманих характеристик вибірки середньоарифметичне приймають за результат вимірювання, точніше як математичне очікування вимірюваної величини. Стандартне відхилення характеризує міру розсіяння відносно математичного очікування і використовується для визначення довірчого інтервалу. Межі інтервалу визначають з співвідношення

$$\bar{x} - t \cdot S < X < \bar{x} + t \cdot S.$$

де  $t$  – множник, або коефіцієнт Стьюдента, який визначають з таблиці 3.4.

В таблиці наведено значення коефіцієнту для однобічного і двобічного розподілу. Використовуючи значення для двобічного розподілу з 95 % надійністю знаходження математичного очікування вимірюваної величини в інтервалі, визначаємо коефіцієнт Стьюдента:  $t_{40;0,95} = 2,021$ . Відповідно, ймовірне відхилення від середнього становитиме

$$t \cdot S = 2,021 \cdot 0,05 = 0,101 \text{ мм}.$$

Отже, результат багатократного вимірювання з 95 % надійністю становить  $5,402 \pm 0,101$  мм або

$$5,301 \text{ мм} \leq 5,402 \text{ мм} \leq 5,503 \text{ мм}.$$

Результат багатократного вимірювання представляємо з наведенням третього знаку тому, що статистичні характеристики повинні містити на один знак (значимий символ) більше ніж результати вимірювань, за якими вони визначаються.

Таблиця 3.4. t-розподіл Стьюдента

[URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/T-розподіл\\_Стьюдента](https://uk.wikipedia.org/wiki/T-розподіл_Стьюдента) ]

Ступені свободи n-1	Однобічний інтервал певності (надійності)						
	75 %	80 %	90 %	95 %	97,5%	99 %	99,5%
	Двобічний інтервал певності						
	50%	60%	80%	90%	95%	98%	99%
<b>1</b>	1.000	1,376	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
<b>2</b>	0.816	1,061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
<b>3</b>	0.765	0,978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
<b>4</b>	0.741	0,941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
<b>5</b>	0.727	0,920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
<b>6</b>	0.718	0,906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
<b>7</b>	0.711	0,896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
<b>8</b>	0.706	0,889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
<b>9</b>	0.703	0,883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
<b>10</b>	0.700	0,879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
<b>11</b>	0.697	0,876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
<b>12</b>	0.695	0,873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
<b>13</b>	0.694	0,870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
<b>14</b>	0.692	0,868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
<b>15</b>	0.691	0,866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
<b>16</b>	0.690	0,865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
<b>17</b>	0.689	0,863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
<b>18</b>	0.688	0,862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
<b>19</b>	0.688	0,861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
<b>20</b>	0.687	0,860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
<b>25</b>	0.684	0,856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
<b>30</b>	0.683	0,854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
<b>40</b>	0.681	0,851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
<b>100</b>	0.677	0,845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
$\infty$	0.674	0,842	1.282	1.645	1,96	2.326	2.576

Для порівняння визначимо результати багатократного вимірювання для вибірки меншого об'єму. Наприклад, обмежимося першими 10-ма значеннями з вищенаведеної таблиці вихідних даних.

Для вибірки з 10-ти значень отримуємо статистичні характеристики:

$$\bar{x} = 5,409 \text{ мм}; \quad S = 0,050 \text{ мм};$$

і результат вимірювання:

$$t_{9;0,95} = 2,262, \quad t \cdot S = 2,262 \cdot 0,05 = 0,113 \text{ мм};$$

$$5,296 \text{ мм} \leq 5,409 \text{ мм} \leq 5,522 \text{ мм}.$$

Як видно з отриманих результатів, зі зміною кількості вимірювань змінюється і інтервальна оцінка вимірюваної величини.

Для вибірки меншого об'єму інтервальна оцінка багатократного вимірювання, тобто інтервал, ймовірність потрапляння в який становить 95 %, виявилась більшою. Це означає, що вибірка меншого об'єму забезпечує меншу точність. Відповідно, збільшення числа вимірів у вибірці забезпечує збільшення точності багатократного вимірювання.

Отже, за результатами багатократних вимірювань визначено інтервальну оцінку вимірюваної величини, що й було основною метою.

В наукових дослідженнях для отримання додаткової вимірювальної інформації виконують аналіз розподілу значень вимірюваної величини у вибірці. Розподіл характеризує ймовірність настання події в можливому діапазоні значень. Для неперервних випадкових (вимірюваних) величин терміном «розподіл» позначають функціональну залежність між значеннями випадкових величин та ймовірностями з якими вони приймають ці значення.

Для прикладу, що розглядається, визначимо частотний розподіл наявних 40 значень в діапазоні від 5,28 до 5,52 мм. Для цього розділимо цей діапазон на окремі інтервали, наприклад через 0,02 мм, і обчислимо скільки значень потрапляє в кожен з них.

В результаті отримаємо частотний розподіл наведений на рис. 3.14.

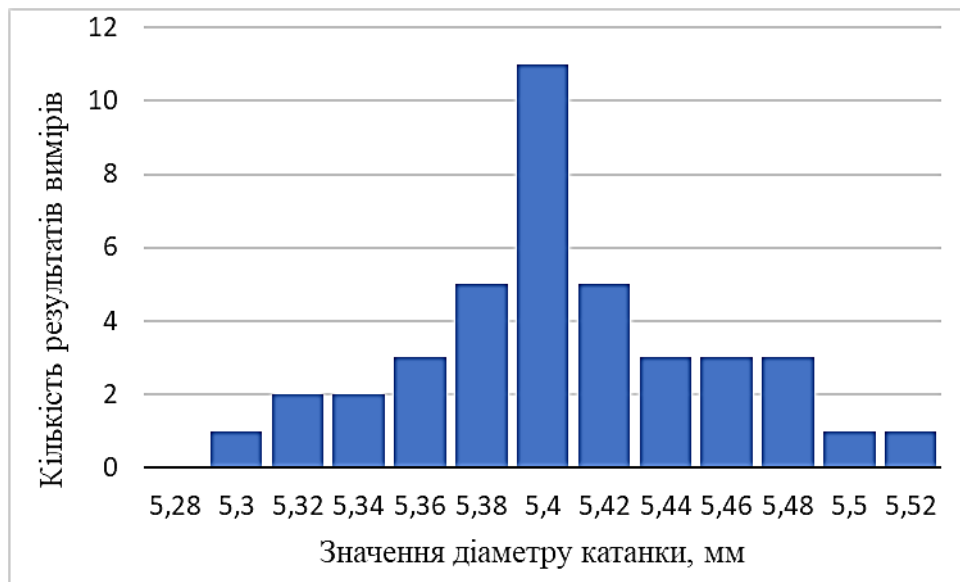


Рис. 3.14. Частотний розподіл вибірки вимірюваних величин

Найбільша кількість вимірів потрапила в інтервал від 5,38 до 5,40 мм. Іншими словами, частота попадання результатів вимірювань в цей інтервал є найбільшою, або ймовірність отримання значення в цьому інтервалі найбільша. Для інших інтервалів кількість вимірів значно менше, причому чим далі інтервал від середнього значення, тим менше кількість вимірів у ньому.

Отриманий частотний розподіл, згідно графіку порівняння наведеному на рис. 3.15, лише приблизно відповідає нормальному закону розподілення.

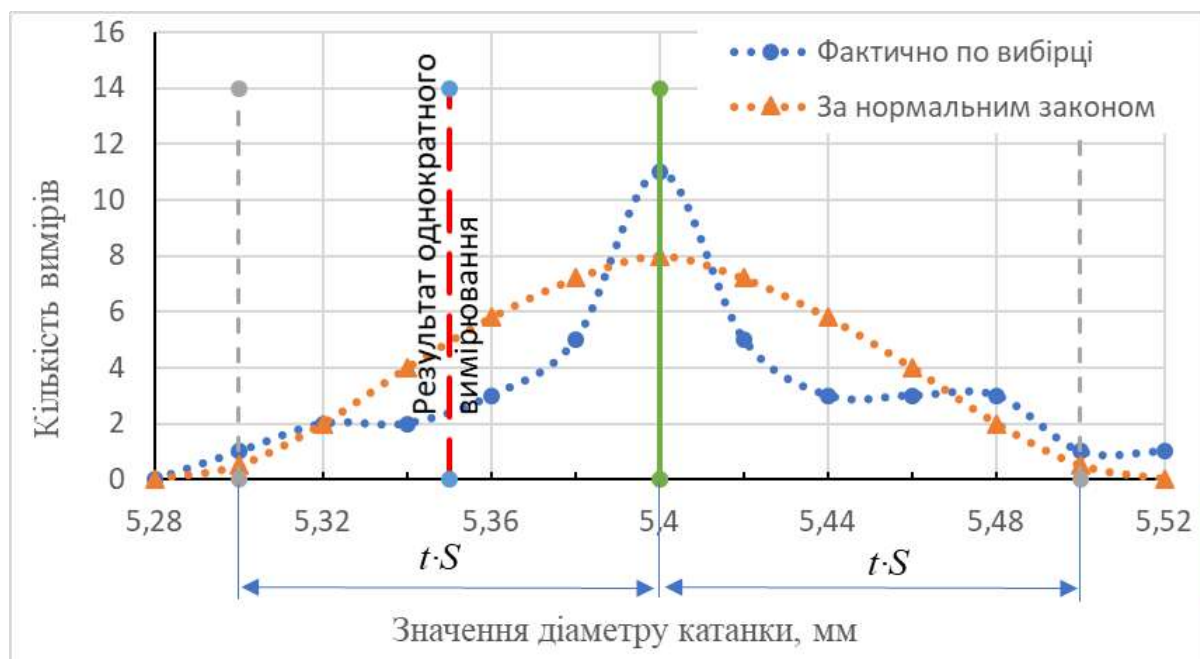


Рис. 3.15. Частотний розподіл для емпіричної вибірки та за нормальним законом

Так, для отриманих статистичних характеристик вибірки, розрахована за нормальним законом ймовірна кількість вимірів для середнього значення становить лише 8. Для сусідніх інтервалів навпаки, розрахована ймовірна кількість вимірів більша ніж отримано у вибірці. Така невідповідність свідчить про можливу наявність систематичних або випадкових похибок, обумовлених певними технологічними чинниками, і потребує додаткового аналізу.

На графіку показані також границі 95 %-ного довірчого інтервалу та результат однократного вимірювання.

### 3.3. Статистичний аналіз результатів експериментів

При виконанні статистичних перевірок, як вказувалось вище, є можливість виникнення двох типів помилок. Помилка першого роду має місце, коли подіям, що спостерігаються, приписуються відмінності, яких насправді немає. Для зменшення вірогідності здійснення помилки першого роду необхідно, щоб результати ви-

пробувань мали високу (достатню) значимість. Але при цьому виникає ризик зробити помилку другого роду, яка має місце, коли ігнорується реальний ефект або відмінність, яка в дійсності існує. При обробці і аналізі результатів експерименту розглядаються можливості виникнення цих двох типів помилок статистичного виводу, оцінка яких здійснюється за допомогою певних критеріїв.

### 3.3.1. Аналіз експериментальних даних за допомогою $\chi^2$ - критерія

Критерій хі-квадрат, або як його ще називають критерій узгодженості Пірсона, використовують для перевірки гіпотези про закон розподілу.

Розглянемо деякі особливості застосування цього критерію [12, 13].

В багатьох випадках дані, що отримуються в експерименті, представляють собою певне *число об'єктів*. Наприклад, певна кількість деталей може бути прийнята або забракована при прийманні, пройти випробування на довговічність або вийти з ладу до їх завершення, продано або повернуто назад. При прийманні продукції (вихідний технічний контроль) може бути пропущена деяка кількість бракованих деталей і виявлені дефекти у деяких інших або може бути забракована деяка кількість справних деталей і прийнята деяка інша кількість справних деталей.

Дані такого роду можна перевіряти на значимість за допомогою  $\chi^2$  – критерія. Визначимо значення  $\chi^2$  – критерія:

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}, \quad (3.1)$$

де  $O$  – спостережувана кількість подій (наприклад, відмов, реалізованих товарів, забракованих виробів, виготовлених предметів, зареєстрованих часток, правильних відповідей і т. ін.;

$E$  – математичне сподівання кількості цих подій.

Коли ми говоримо про математичне сподівання, то вводимо гіпотезу, яка може бути істинною або несправжньою. Припустимо, наприклад, що необхідно дізнатися, на якому токарному верстаті – новому або старому – ми отримуємо більше якісних деталей. Для цього на кожному верстаті виготовляється однакова кількість деталей і гіпотеза, що перевіряється говорить: «Обидва верстата випускають однакову кількість якісних деталей». Або ж на основі попереднього дослідження можна сказати: «На новому верстаті отримуємо якісних деталей на одну третину більше, ніж на старому». Кожну з цих гіпотез можна перевірити, розрахувавши відповідне значення  $\chi^2$ . Проте, перш ніж показати, як це робиться, необхідно розглянути ще один новий термін. При будь-якому – табличному чи графічному – представленні розподілу  $\chi^2$  необхідно знати число *ступенів свободи*, пов'язаних з експериментом. Число ступенів свободи – це число *незалежних* груп спостережень, що охоплюються гіпотезою. Розглянемо наступний приклад:

Нехай прокатний цех отримав двигуни роликів рольгангу від двох фірм в однаковій кількості. Після деякого часу після їх встановлення і роботи  $n_1$  двигунів першої фірми вийшли з ладу. За цей же час вийшли з ладу  $n_2$  двигунів другої фірми.

Перевіримо гіпотезу про те, що кількість двигунів, що вийшли з ладу в обох фірмах однакова. Тоді математичне очікування числа двигунів, що вийшли з ладу для першої фірми становить  $\frac{n_1 + n_2}{2}$ , для другої фірми це число буде таким самим. Оскільки можливо обрати лише одне очікуване число двигунів, що вийшли з ладу, то маємо одну ступінь свободи і вираз (3.1) для визначення  $\chi^2$  критерія приймає вид:

$$\chi^2 = \frac{\left(n_1 - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)^2}{\frac{n_1 + n_2}{2}} + \frac{\left(n_2 - \frac{n_1 + n_2}{2}\right)^2}{\frac{n_1 + n_2}{2}} \quad (3.2)$$

Після того, як отримані дві важливі величини (число ступенів свободи і значення  $\chi^2$ ) необхідно за допомогою графіка, зображеного на рис. 3.16 знайти вірогідність того, що значення  $\chi^2$  не менше знайденого по формулі 3.1. Якщо ця вірогідність дорівнює 10, 20 або 30 %, то це значить, що дана гіпотеза прийнятна.

Зазначимо, що критерій  $\chi^2$  вельми чутливий до об'єму вибірки, і часто для отримання дійсно значимого результату необхідно мати великий об'єм даних.

### Приклад 1

Нехай підприємство придбало двигуни половину у фірми  $A$  і половину у фірми  $B$ . Всього придбано двигунів у кількості 100 штук. Через деякий час вийшли з ладу двигуни фірми  $A$  у кількості  $F_a = 8$  штук, а фірми  $B$  –  $F_b = 12$  штук. Загальна кількість несправних двигунів дорівнює  $F_a + F_b = 20$  штук. Припустимо, що необхідно перевірити гіпотезу, згідно якої кількість двигунів, що зламалися обох фірм однакова. Тоді математичне очікування число  $F_a$  можна прийняти рівним  $(F_a + F_b)/2 = 10$  і  $F_b$  теж дорівнює  $(F_a + F_b)/2 = 10$ . Оскільки можна вибрати лише одне число, то ступінь свободи дорівнює одиниці.

У відповідності з (3.2) для  $\chi^2$  отримаємо:

$$\chi^2 = \frac{(12-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} = 0,8.$$



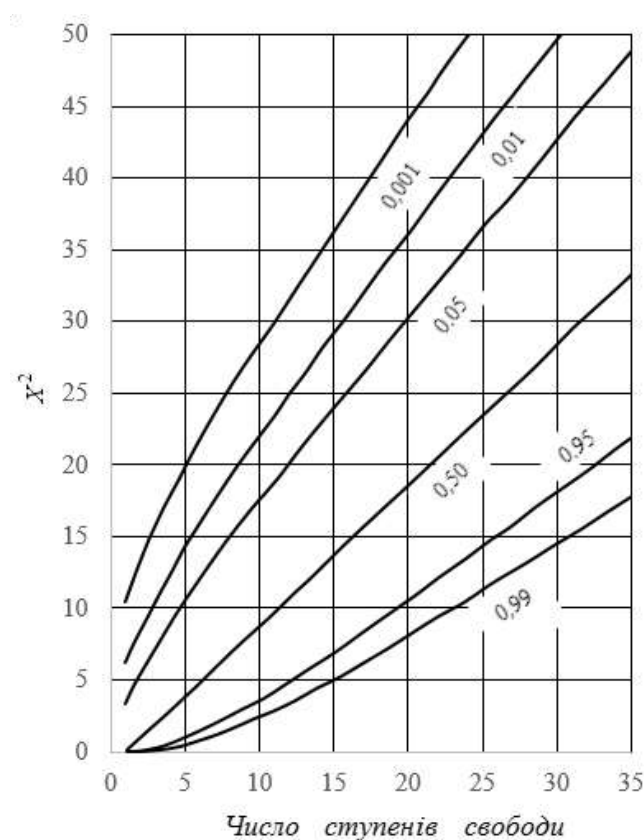


Рис. 3.16. Графік значень  $\chi^2$  як функції числа ступенів свободи для різних значень вірогідності появи даного значення  $\chi^2$ .

Згідно графіка 3.16 з вірогідністю приблизно в 95 % можна вважати, що число двигунів, що відмовило у роботі з обох фірм однакове.

### Приклад 2

Розглянемо приклад застосування критерію Пірсона для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілення вибірки експериментальних значень.

Для вибірки з сорока значень, наведених у таблиці 3.3 (розділ 3.2.5), виконано розділення по інтервалам і визначено кількість вимірів, які попадають в ці інтервали (частотний розподіл). Також розрахована кількість вимірів для цих інтервалів за норма-

льним законом розподілення. Ставиться задача – перевірити відповідність експериментального розподілення величини, що досліджується, нормальному закону. Для цього висувається так звана «нульова гіпотеза»  $H_0$ , яка стверджує, що зв'язок між явищами, в даному випадку групами значень, відсутній. Відповідно, якщо частотні розподіли близькі - гіпотеза відхиляється, якщо ж частотні розподіли суттєво відрізняються – гіпотеза підтверджується.

Послідовність розрахунків  $\chi^2$ - критерію наведено у вигляді таблиці 3.5. В результаті отримали значення критерію 7,018.

Таблиця 3.5. Послідовність розрахунку  $\chi^2$ - критерію

№ Інтер- валу	Експерим. частотний розподіл (по вибірці)	Частотний розподіл за нормальним законом	Міра відхилення Пірсона
	$n_{i-e}$	$n_{i-n}$	$(n_{i-e} - n_{i-n})^2 / n_{i-n}$
1	1	0	0
2	2	2	0
3	2	4	1
4	3	6	1,5
5	5	7	0,571428571
6	11	8	1,125
7	5	7	0,571428571
8	3	6	1,5
9	3	4	0,25
10	3	2	0,5
11	1	0	0
12	1	0	0
			$\Sigma = \chi^2 = 7,018$

Для підтвердження або спростування гіпотези отримане значення порівнюють з критичним значенням. Цей показник має  $\chi^2$ -розподілення, параметрами якого є кількість ступенів вільності (свободи) та рівень значимості.

Кількість ступенів вільності визначають як різницю

$$k = m - r - 1,$$

де  $m$  – кількість груп в статистичному розподілі вибірки;

$r$  – кількість параметрів гіпотетичного розподілу (для нормального розподілу  $r=2$ ; для розподілу Пуасона  $r=1$ ; для рівномірного розподілу  $r=0$ ).

Для прикладу, що розглядається, отримаємо  $k=12-2-1=9$ .

Рівень значимості – допустима ймовірність помилки у відхиленні нульової гіпотези, коли вона в дійсності виконується. Для найпоширенішого рівня значимості  $\alpha = 0,05$  і числа ступенів вільності  $k=9$  критичне значення  $\chi^2$ -критерію, згідно даним таблиці 3.6, становить 16,9.

Для визначення критичного значення критерію  $\chi^2$  можна скористатись вбудованою функцією Excel під назвою CHISQ.INV.

Так як розраховане значення  $\chi^2$ -критерію менше за критичне  $7,018 < 16,9$ , нульова гіпотеза відхиляється, що означає відповідність експериментального розподілення досліджуваної величини нормальному закону.

Таблиця 3.6. Критерій Пірсона  $\chi^2$ [URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій\\_узгодженості\\_Пірсона](https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій_узгодженості_Пірсона)]

Число ступенів вільності f	Рівень значимості $\alpha$					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001	0,00016
2	9,2	7,4	6	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,7	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21	5,23	4,4	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25	7,26	6,26	5,23
16	32	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

### 3.3.2. Використання критерію Стюдента для перевірки гіпотези про рівність середніх двох сукупностей

Для перевірки гіпотези про рівність середніх значень двох вибірок можливо використання критерію Пірсона, Стюдента та інших критеріїв. Використання критерію Стюдента досить поширене завдяки простоті методики. За допомогою цього критерія можна перевірити гіпотезу про рівність середніх значень у двох вибірках. Критерій Стюдента при аналізі дозволяє використовувати відсотки, дробові числа [12, 14].

У випадку, коли перевіряються гіпотеза про рівність між двома середніми значеннями, формула для  $t$  – критерія має вигляд:

$$t = \frac{\bar{X}_a - \bar{X}_b}{S_{\text{сум}} \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}}, \quad (3.3)$$

де  $\bar{X}_a$  – середнє вибірки  $A$ ;

$$\bar{X}_a = \frac{X_{a_1} + X_{a_1} + \dots + X_{a_n}}{n_a};$$

$\bar{X}_b$  – середнє вибірки  $B$ ;

$$\bar{X}_b = \frac{X_{b_1} + X_{b_1} + \dots + X_{b_n}}{n_b};$$

$n_a$  і  $n_b$  – об'єм вибірок  $A$  і  $B$ ;

$S_{\text{сум}}$  – відоме середнє квадратичне відхилення для обох вибірок:

$$S_{\text{сум}} = \left[ \frac{\sum x_a^2 + \sum x_b^2}{n_a + n_b - 2} \right]^{1/2}, \quad (3.4)$$

$$\sum x_a^2 = (X_{a_1} - \bar{X}_a)^2 + (X_{a_2} - \bar{X}_a)^2 + \dots + (X_{a_n} - \bar{X}_a)^2,$$

$$\sum x_b^2 = (X_{b_1} - \bar{X}_b)^2 + (X_{b_2} - \bar{X}_b)^2 + \dots + (X_{b_n} - \bar{X}_b)^2.$$

Для даної гіпотези число ступенів свободи дорівнює:  $(n_a + n_b - 2)$ . Знаючи число ступенів свободи і значення критерію  $t_p$ , за допомогою графіка (рис. 3.17), знаходимо вірогідність появи даного (або більшого) значення  $t_p$ , якщо обидва середні відносяться до однієї і тієї ж сукупності. Вірогідність 0,05 дає підставу сумніватися у справедливості гіпотези, а вірогідність 0,01 і менше дає майже повну гарантію того, що сформульована гіпотеза не справедлива.

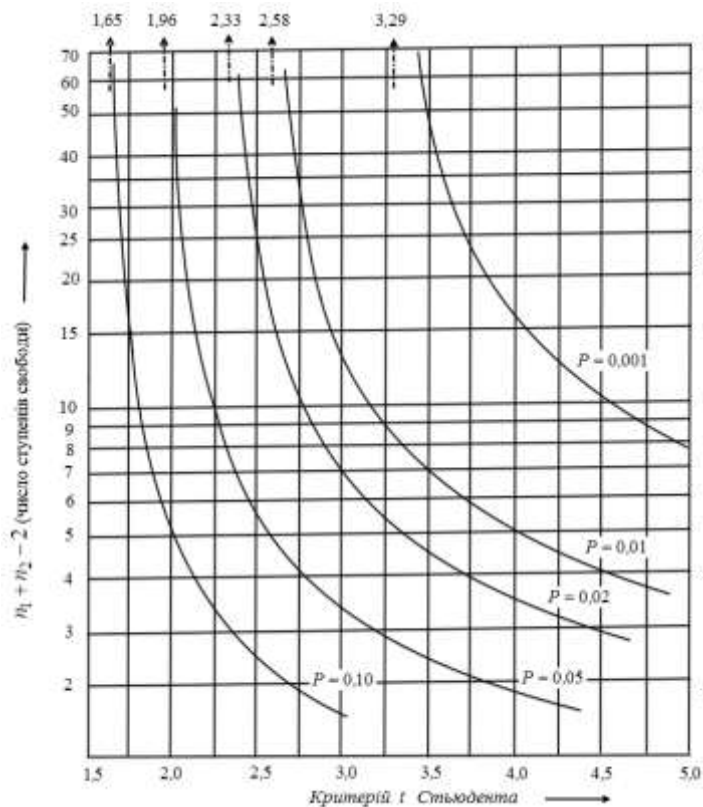


Рис. 3.17. Залежність вірогідності від критерію Стьюдента та числа ступенів свободи

Графік, показує співвідношення між значенням критерію і числом ступенів свободи ( $n_1 + n_2 - 2$ ) для різних значень ймовірності  $P$  отримання даного (або більшого) значення  $t_p$ , якщо обидві групи даних відносяться до однієї і тієї ж сукупності.

Числа біля стрілок, зображених пунктиром, позначають асимптотичні значення (при нескінченному числі ступенів свободи).

### *Приклад*

За допомогою критерія Стюдента порівняємо точність виміру зносу валків за допомогою годинного індикатору та оптико-світлового методу. Зазначимо, що точність вимірювання індикатором складає  $\pm 0,01$  мм.

Попередньо зазначимо, що вимірювання зносу валків проводили в дратовому блоці середньо-сортового стану 400/200.

Особливістю калібрів дратяного блоку є їх відносно невеликі розміри. Тому за допомогою годинникового індикатора вдається виміряти величину зносу тільки в середній частині калібру. Досліди показують, що в ряді випадків, максимальний знос виникає в стороні від центральної частини калібрів. У цих умовах виникає завдання визначення зносу (вироблення) калібрів по всьому контуру його поперечного перерізу. Вирішення цього завдання було досягнуто шляхом розробки оптико-світлового методу вивчення вироблення калібрів валків і створення спеціального вимірювального пристрою.

В якості вимірювального пристрою використовували оптико-світловий стенд, показаний на рис. 3.18. Установка включає джерело світла, збільшувальні лінзи, екран і фотоапарат для фіксації зображення. При вивченні зносу врізів валка його розташовують між джерелом світла і лінзою на відстані фокусу від останньої. У вріз валка встановлюють шаблон і за допомогою спеціального пристосування фіксують його положення. При включенні світла на екрані стенду виникає збільшене зображення зазору між врізом і шаблоном (рис. 3.18).

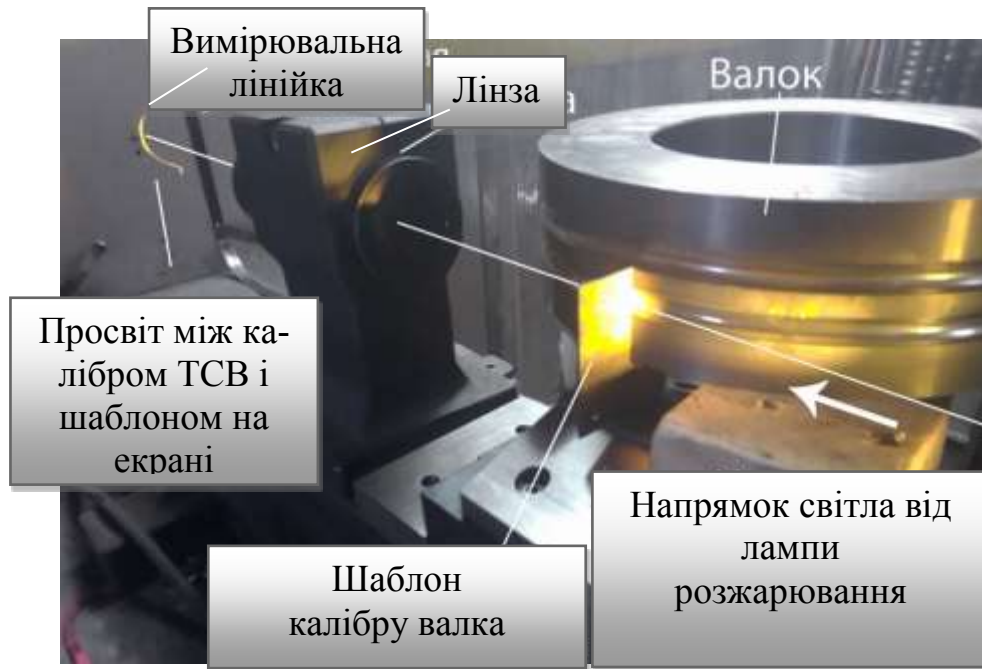


Рис. 3.18. Стенд з валком, шаблоном і зображенням зазору

Процес вимірювання зносу відповідного врізу валка включає дві стадії. На першому етапі на екрані отримують перевернуте зображення зазору між врізом нового валка (до встановлення в кліть) і шаблону. Зауважимо, що цей просвіт, в результаті дії лінзи, в шість разів перевищує реальний. Потім отримане на екрані зображення фотографували разом з еталоном довжини (спеціальна вимірювальна лінійка для масштабування) і за допомогою комп'ютера визначали розміри реального просвіту між врізом нового валка і шаблоном. На другому етапі виконували ті ж дії, але для валка, що відпрацював кампанію. Різниця розмірів кінцевого і початкового просвіту між врізом валка відповідного калібру і шаблоном представляє картину зносу калібру в поперечному перерізі валка. На рис. 3.19 і 3.20 наведені фотографії зазорів між врізами зношених валків і шаблонами для десяти клітей дрогового блоку, а також мікрорельєф поверхні зношених врізів валків.



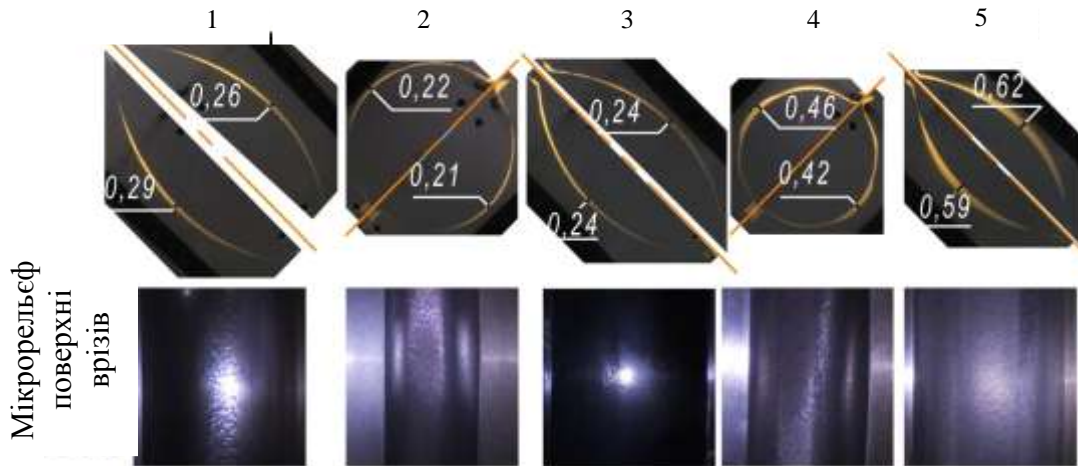


Рис. 3.19. Фотографії зазорів між струмками верхнього та нижнього валка і шаблоном перших 5-ти клітей дротового блоку після компанії робіт

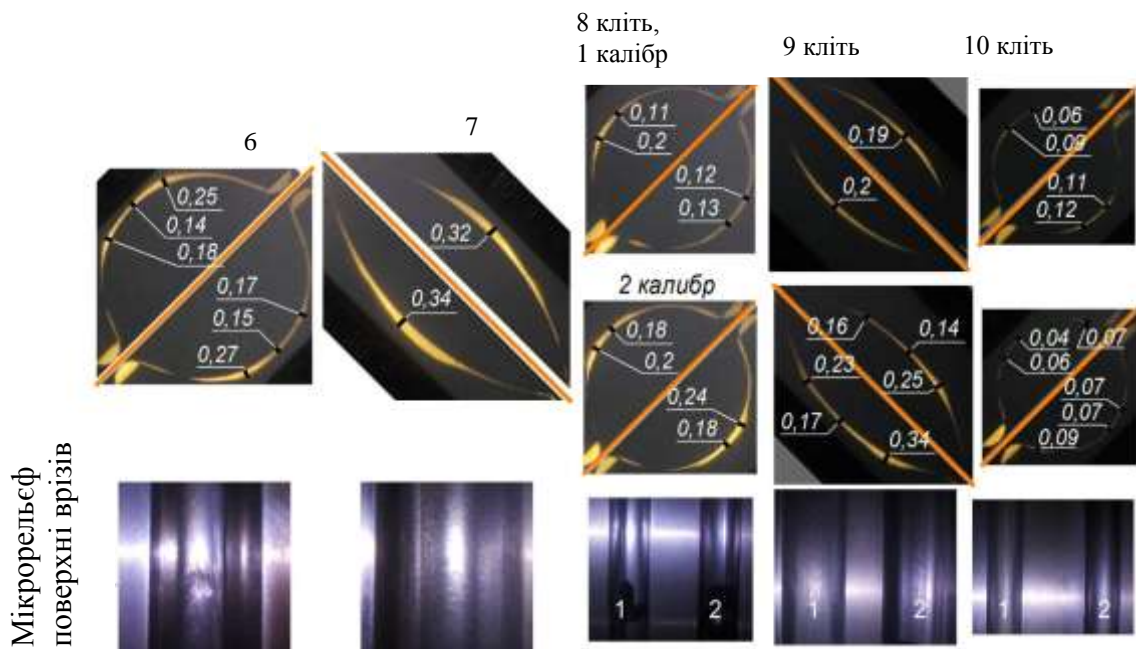


Рис. 3.20. Фотографії зазорів між врізами верхнього та нижнього валків і шаблонами 6-ї – 10-ї клітей дротового блоку після компанії роботи та мікрорельєф поверхні відповідних калібрів

Цифрами на фото зазначено величини зазорів на зазначених ділянках поперечного перерізу калібру. Зауважимо, що в перших семи клітях дротового блоку валки мають по два однакових калібри. В інших трьох клітях кожен з валків має по чотири калібри. При проведенні дослідів в першій групі клітей використовували

тільки один калібр, на валках яких було прокатано 2756 т металу, в 8 – 10 клітках прокату здійснювали в двох калібрах з тоннажем в 1350 т і 1406 т.

Перш ніж аналізувати результати дослідження, що наведені на рис. 3.19 і 3.20, оцінимо точність вимірювання вироблення валків за допомогою оптико-світлового стану в порівнянні з показаннями годинного індикатора. В обох випадках виміри виконували по центру калібру після кампанії роботи валків.

Результати вимірювання зносу в усіх клітках дрогового блоку наведені в таблицях 3.7 і 3.8.

Проведемо статистичний аналіз отриманих даних. Для цього за допомогою критерію Стюдента перевіримо приналежність наведених в таблицях 3.7 і 3.8 вибірок однієї сукупності, тобто встановимо чи суттєве середнє значення результатів вимірювань, отримані за допомогою оптико-світлового стану  $\overline{X}_c$  і годинного індикатора  $\overline{X}_u$ , розрізняються між собою або ж ця різниця незначима.

**Таблиця 3.7. Результати вимірювання зносу калібрів валків оптично-світловим методом**

Врізи калібру	№ калібру	Номер клітки дрогового блоку									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
верхній	1	0,32	0,23	0,59	0,1	0,24	0,05	0,24	0,09	0,11	0,11
	2	0,32	0,28	0,39	0,07	0,27	0,14	0,28	0,10	0,13	0,13
	3								0,12	0,12	0,10
	4								0,05	0,11	0,11
нижній	1	0,36	0,30	0,44	0,14	0,22	0,13	0,31	0,12	0,12	0,10
	2	0,32	0,29	0,40	0,07	0,32	0,13	0,34	0,12	0,13	0,10
	3								0,11	0,11	0,10
	4								0,08	0,13	0,10

Таблиця 3.8. Результати вимірювання зносу калібрів валків годинним індикатором

Врізи калі-бру	№ калі-бру	Номер кліті дровового блоку									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
верх-ній	1	0,34	0,33	0,36	0,11	0,28	0,07	0,21	0,06	0,09	0,05
	2	0,32	0,28	0,54	0,22	0,18	0,08	0,29	0,07	0,12	0,06
	3								0,09	0,10	0,02
	4								0,06	0,10	0,03
нижній	1	0,32	0,34	0,35	0,11	0,33	0,14	0,31	0,06	0,08	0,01
	2	0,38	0,33	0,44	0,19	0,28	0,10	0,44	0,10	0,11	0,0
	3								0,08	0,05	0,01
	4								0,03	0,09	0,02

Обсяги вибірок, згідно з даними таблиць 3.7 і 3.8, складають  $n_c = n_u = 52$ .

Середньоарифметичні значення вибірок:

$$\overline{X}_c = \frac{\sum X_{ic}}{n_c} = 0,188; \quad \overline{X}_u = \frac{\sum X_{iu}}{n_u} = 0,175.$$

Сума квадратів різниць

$$\sum x_{ic}^2 = \sum (X_{ic} - \overline{X}_c)^2 = 0,662; \quad \sum x_{iu}^2 = \sum (X_{iu} - \overline{X}_u)^2 = 0,944.$$

Тоді

$$t = \frac{0,188 - 0,175}{\left( \frac{0,662 + 0,944}{102} \right)^{0,5} \sqrt{\frac{1}{52} + \frac{1}{52}}} = 0,523.$$

Табличне (критичне) значення критерію Стьюдента (таблиця 3.4) з надійністю  $P = 0,99$  і ступенем свободи  $k = n_c + n_u - 2 = 102$  становить  $t_{кр} = 2,62$ . Порівнюючи розрахункове і критичне значення  $t$  приходимо до висновку, що з великим ступенем надійності результати вимірювань, виконані за допомогою оптико-світлового стенду, істотно не відрізняються від пока-

зань годинного індикатору, тобто точність вимірювання зносу валків обома приладами є досить близькою. Слід також зауважити, що показання оптико-світлового стенду були перевірені на відповідність нормальному закону розподілення і встановлено їх відповідність кривій Гаусса.

Виконаний статистичний аналіз показує, що оптико-світловий метод можна впевнено застосовувати для вимірювання зносу калібрів валків і отримувати дані не тільки по центру струмка, але і по всьому периметру врізів.

### 3.3.3. Дисперсійний аналіз

Основною задачею дисперсійного аналізу є дослідження впливу певних факторів на мінливість середніх. Якщо фактори незалежні, проявляється адитивність дисперсій. Відповідно, дисперсійний аналіз найбільш ефективний при дослідженнях впливу кількох факторів.

«Дисперсійний аналіз полягає у виділенні й оцінюванні окремих факторів, що викликають зміну досліджуваної випадкової величини. При цьому проводиться розклад сумарної вибіркової дисперсії на складові, обумовлені незалежними факторами. Кожна з цих складових є оцінкою дисперсії генеральної сукупності. Щоб дати оцінку дієвості впливу даного фактору, необхідно оцінити значимість відповідної вибіркової дисперсії у порівнянні з дисперсією відтворення, обумовленою випадковими факторами. Перевірку значимості оцінок дисперсій проводять за критерієм Фішера»

[URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Дисперсійний\\_аналіз](https://uk.wikipedia.org/wiki/Дисперсійний_аналіз)].

Критерій  $F$  – це відношення двох дисперсій, розрахованих або отриманих різними способами.

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \quad (3.5)$$

Вірогідність отримання будь-якого даного значення  $F$ , якщо в дійсності дві дисперсії не є різними, представлені у вигляді таблиць, як функції числа ступенів свободи для двох вибірок, на основі яких розраховується це відношення. В табл. 2.5 наведені очікувані значення критерію  $F$  в умовах вірогідності, рівній 95 %.

Дисперсійний аналіз знаходить застосування при плануванні експериментів, аналізі статистичних даних при контролі якості та в інших задачах.

### Приклад 1 [12]

З партії бетону, що замішана завчасно, взяли вісім проб які підверглися випробуванню на стиск. Отримані наступні значення з міцності бетону 30,58; 27,08; 29,8; 21,86; 27,38; 27,08; 22,94 і 26,58 МПа. З партії бетону, що була замішана пізніше, взято 17 проб і після випробувань отримані наступні результати: 29,8; 26,34; 28,82; 30,07; 32,79; 30,31; 27,82; 29,6; 31,63; 29,07; 31,08; 27,08; 30,56; 32,05; 29,32; 28,55; 31,63 МПа. Визначити, використовуючи критерій Фішера, чи належать обидві партії до однієї сукупності.

Для першої вибірки  $\bar{X}_a = 26,67$  МПа, для другої  $\bar{X}_b = 29,84$  МПа. Дисперсії для цих вибірок становлять:

$$S_a^2 = \frac{62,75}{8-1} = 8,96 \text{ МПа}; \quad S_b^2 = \frac{52,18}{17-1} = 3,26 \text{ МПа};$$

Знаходимо критерій Фішера

$$F = \frac{8,96}{3,26} = 2,75 .$$

Табличне значення  $F_{кр}$  критерія, при 5 % рівні значимості ( $\alpha=0,05$ ) та ступенях свободи 7 та 16, дорівнює 2,66 (табл. 2.5). Так як розраховане значення критерію Фішера перевищує критичне (табличне) то нульова гіпотеза про однакові дисперсії вибі-

рок не підтверджується. Партії бетону відрізняються за показником міцності.

### Приклад 2

В попередньому розділі наведені результати дослідження зносу валків дрогового блоку за допомогою двох методів. Використовуючи ті ж данні, за допомогою  $F$ -критерія визначимо, чи належать отримані вибірки одній сукупності.

Дисперсії вибірок з середньоарифметичними

$\bar{X}_c = 0,188$ ;  $\bar{X}_u = 0,175$ , становлять

$$S_c^2 = \frac{0,662}{52-1} = 0,013; \quad S_u^2 = \frac{0,944}{52-1} = 0,0185.$$

Розрахункове значення критерія Фішера дорівнює

$$F_p = \frac{0,0185}{0,013} = 1,42.$$

Табличне значення критерію Фішера, для дисперсій з 51 ступенями свободи та рівня значимості  $\alpha=0,05$  (використовуємо вбудованою функцією Excel з позначенням F.INV), становить  $F_{кр} = 1,592$ .

Отже, розраховане значення критерію Фішера не перевищує критичного, тому з вірогідністю у 95 %, можемо стверджувати, що вибірки результатів вимірювання зносу валків різними методами, належать одній сукупності.

### 3.3.4. Кореляція та регресія

Результатом будь-якого експерименту є сукупність даних, які піддають аналізу та обробці. При проведенні пасивного експерименту за результатами вимірювань отримують інформацію про параметри функціонування об'єкту спостереження. Розглядаючи кожен з таких параметрів як незалежну змінну, можемо

визначити їх статистичні характеристики (МЦТ, варіацію) та розподіл. Але між параметрами (змінними), що характеризують об'єкт спостережень, може бути певний зв'язок, що проявляється як відповідна (узгоджена) зміна значень.

Такий зв'язок між параметрами може бути відсутнім, може бути випадковим (інший термін – стохастичним) або бути функціональним. Відповідно, величини можуть бути незалежними, мати стохастичний зв'язок або функціональну залежність. При цьому, функціональна залежність відображає чіткий причинно-наслідковий зв'язок між величинами, а стохастичний зв'язок є лише ймовірнісним.

Для оцінки міри зв'язку між величинами (параметрами певної системи) виконують кореляційний аналіз, який передбачає визначення статистичних характеристик взаємної зміни величин.

Кореляційний аналіз (від англ. correlation – взаємозв'язок) проводять за діаграмами розсіяння емпіричних значень (вибірок) та/або за коефіцієнтом кореляції.

Коефіцієнт кореляції змінюється в межах від 0 до 1. Значення «0» свідчить про відсутність зв'язку між параметрами, тобто це незалежні величини. Значення «1» свідчить про наявність функціональної залежності, тобто зміна одного з параметрів призводить до однозначної зміни іншого параметру (для двох параметрів). Для більшості фізичних величин наведені граничні значення коефіцієнту кореляції є мало ймовірними через наявність похибок вимірювань і вплив інших параметрів процесу. Для проміжних значень коефіцієнту кореляції, в залежності від галузі або об'єкту досліджень, встановлюють певні опорні точки. Наприклад, в технологічних дослідженнях для значень коефіцієнту кореляції менше 0,3 вважають, що зв'язок між параметрами відсутній; від 0,3 до 0,5 – зв'язок слабкий; від 0,5 до 0,7 – помірний; від 0,7 до 0,9 – сильний, а понад 0,9 – майже функціональний. В метрології можливі інші контрольні точки: для значень коефіцієнту

до 0,2 величини вважають незалежними, а понад 0,2 – тіснота зв'язку вважається неприпустимою.

Коефіцієнт кореляції характеризує статистичний зв'язок між величинами, як незалежними, тобто без врахування їх фізичної природи і причинно-наслідкового зв'язку. При цьому у більшості випадків розглядають парну лінійну кореляцію. Але можлива і нелінійна кореляція з використанням відомих функцій (степенева, експонентна, поліноми та ін.). Можливий також кореляційний аналіз для багатовимірних комплексів – множинна кореляція.

Для оцінки міри зв'язку між величинами використовують коефіцієнт кореляції, який запропонував Карл Пірсон. Цей коефіцієнт розраховують як відношення коваріації (спільної зміни) величин, які мають нормальне розподілення, на добуток їх стандартних відхилень. Для генеральної сукупності значень величин коефіцієнт кореляції визначають з залежності [URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція\\_і\\_залежність](https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція_і_залежність)]

$$\rho(X, Y) = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{E((X - \mu_x) \cdot (Y - \mu_y))}{\sigma_x \cdot \sigma_y},$$

де  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  – математичні сподівання (середні) величин  $X$  та  $Y$ ;

$\sigma_x \cdot \sigma_y$  – стандартні відхилення величин  $X$  та  $Y$ ;

$E$  – оператор математичного сподівання.

Для вибірок з  $n$  значень величин  $X$  та  $Y$  формула визначення коефіцієнту кореляції набуває виду

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{(n-1) \cdot S_x \cdot S_y}.$$

де  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  – середні для вибірок відповідних величин;

$S_x$ ,  $S_y$  – стандартні відхилення по вибіркам.

Використовують також некореговану формулу розрахунку

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot S_x \cdot S_y} = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{\sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}}.$$



де  $S_x$ ,  $S_y$  – некореговані (зміщені) стандартні відхилення по вибіркам.

Кореляційний аналіз за діаграмами розсіяння передбачає отримання інформації про взаємну зміну величин з точкової діаграми.

За відсутності кореляції ( $r_{xy} = 0$ ) така діаграма для двох величин (змінних) в декартовій системі координат виглядає як хмара відносно рівномірно розподілених точок. За умови нормального розподілення величин щільність точок в центрі діаграми буде максимальною, як це показано на рис. 3.21. По мірі віддалення від центру щільність розміщення точок зменшується, але таке зменшення однакове у будь-якому напрямку.

По мірі збільшення коефіцієнту кореляції на діаграмах розсіяння проявляється тенденція до певної впорядкованості у розміщенні точок.

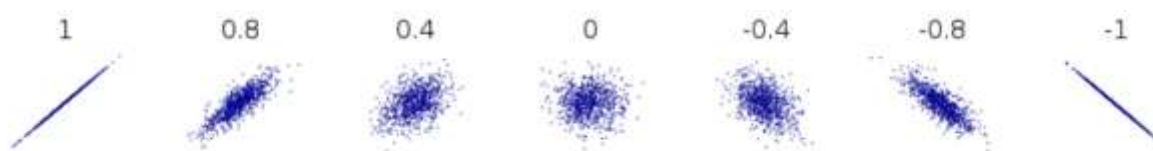


Рис. 3.21. Вид діаграм розсіяння для різних значень коефіцієнтів кореляції.

[URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція\\_і\\_залежність](https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція_і_залежність)]

Якщо на діаграмі розсіяння всі точки розташовуються на одній лінії, що можливо при  $r_{xy} = 1$ , це свідчить про наявність функціональної залежності між величинами.

Отже, за результатами аналізу статистичних характеристик вибірок, можлива оцінка взаємозв'язку між величинами. Якщо такий зв'язок доведено, то можлива і зворотна дія – визначення виду залежності між величинами. Таку дію називають регресією.

Регресійна залежність відображає закон зміни математичного сподівання однієї величини в залежності від іншої величини.

Слід пам'ятати, що регресійна залежність не є функціональною. Регресійна залежність ґрунтується на емпіричних даних, тобто отримана для певного набору (вибірок) двох або більшої кількості величин, і є лише математичною моделлю реального зв'язку між цими величинами, без визначення або дослідження природи такого зв'язку.

Тому при побудові регресійних залежностей слід мати апріорну інформацію про величини. Наприклад, простими вимірами легко довести залежність між такими параметрами процесу прокатування як температура металу та сила, яка сприймається валками. Але сила прокатування є залежною величиною, а температура є визначальною. Тобто температура є фактором, а сила прокатування – цільовою функцією, відгуком.

Найбільш поширеним є використання лінійної регресійної залежності. При потребі застосовують і інші види залежностей (нелінійні), а також множинні залежності.

Множинна лінійна регресійна залежність в загальному вигляді представляється виразом

$$y = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_1 + \beta_2 \cdot x_2 + \dots + \beta_n \cdot x_n + u,$$

де  $y$  – залежна величина (відгук, цільова функція);

$x_i$  – незалежні величини (змінні);

$\beta_i$  – параметри залежності;

$u$  – випадкова похибка, математичне очікування якої дорівнює нулю.

Для парної регресії на основі вибірок обсягом  $n$  параметри  $\beta_i$  залежності

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i,$$

визначають методом найменших квадратів з розв'язання системи рівнянь де  $i$  змінюється від 1 до  $n$ .

### Приклад

Розглянемо приклад кореляційного аналізу та визначення регресійної залежності за результатами пасивного експерименту. Припустимо, що на чистовому блоці прокатного стану в ході експерименту фіксували основні параметри прокатування катанки діаметром 5,5 мм в модулі № 10. Отримано по 11 значень для п'яти параметрів, які наведено в таблиці 3.9.

Для кожної з наведених величин, які розглядаємо як окремі вибірки, використовуємо вбудовані функції Excel, визначимо статистичні характеристики: мінімальне та максимальне значення; розмах; середнє; стандартне відхилення.

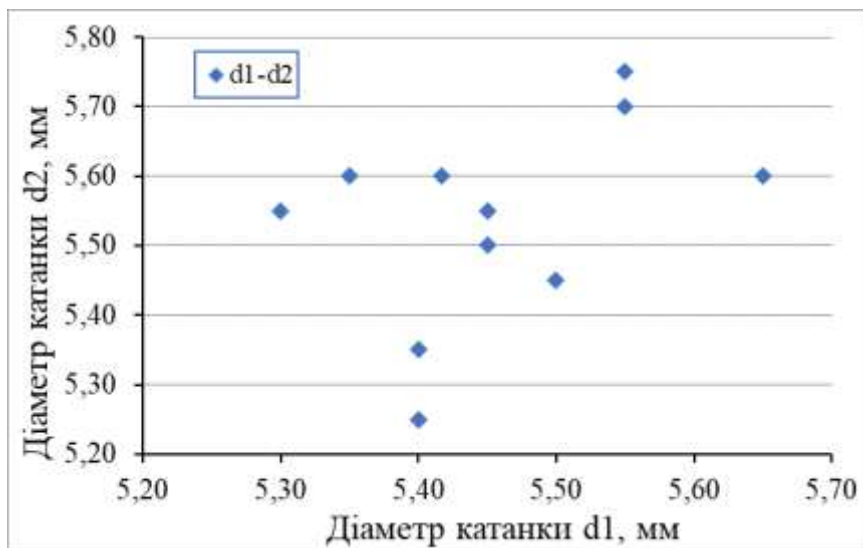
Аналізуючи отримані дані для діаметрів у двох взаємно перпендикулярних напрямках, відзначимо, що всі розміри знаходяться в полі допусків – при допустимих відхиленнях  $\pm 0,3$  мм, розмах становить для  $d_1$  0,35 мм, для  $d_2$  – 0,50 мм. Середні значення майже однакові. Стандартне відхилення для розміру  $d_2$  суттєво перевищує цей параметр для  $d_1$ .

Для аналізу взаємної зміни значень діаметрів побудуємо діаграму розсіяння. Як видно з рис. 3.22, взаємна зміна параметрів не простежується, на підставі чого можемо стверджувати, що кореляція між параметрами  $d_1$  та  $d_2$  або занадто слабка, або відсутня.

Більш обґрунтовану оцінку взаємозв'язку параметрів дає коефіцієнт кореляції. Визначимо цю характеристику використовуючи вбудовану функцію Excel - CORREL. За результатами розрахунку коефіцієнт кореляції між параметрами  $d_1$  та  $d_2$  дорівнює 0,407. Отримане значення підтверджує досить слабкий взаємозв'язок між цими параметрами.

**Таблиця 3.9. Параметри прокатування катанки в модулі №10 чистового блоку стану 400/200**

№ виміру	Діаметр верт.	Діаметр гориз.	Температура розкату	Швидкість прокатування	Середній тиск
	d1, мм	d2, мм	t, °C	V, м/с	P <sub>ср</sub> , Н/мм <sup>2</sup>
1	5,4	5,25	1085	110	295
2	5,65	5,6	1050	109,5	310
3	5,55	5,7	1060	108,5	305
4	5,42	5,6	1085	107,5	290
5	5,45	5,55	1080	110,5	290
6	5,55	5,75	1070	108	285
7	5,4	5,35	1080	110	290
8	5,5	5,45	1075	109	285
9	5,35	5,6	1090	101	275
10	5,3	5,55	1100	108	250
11	5,45	5,5	1090	111	270
MIN	5,3	5,25	1050	101	250
MAX	5,65	5,75	1100	111	310
Розмах	0,35	0,5	50	10	60
AVERAGE	5,46	5,54	1078,6	108,45	285,91
STDEV	0,1004	0,1451	14,33	2,72	16,56



*Рис. 3.22. Діаграма розсіяння для параметрів d1 та d2*

Аналогічні дії виконаємо для параметрів  $d_1$  та температури розкату. З діаграми розсіювання для цих параметрів (рис. 3.23) видно, що з зменшенням температури діаметр збільшується, тобто наявна тенденція до синхронної зміни параметрів. Це підтверджує і розрахований коефіцієнт кореляції, який дорівнює  $-0,944$ . Знак мінус свідчить про зворотній зв'язок між параметрами – збільшення одного з них призводить до зменшення іншого.

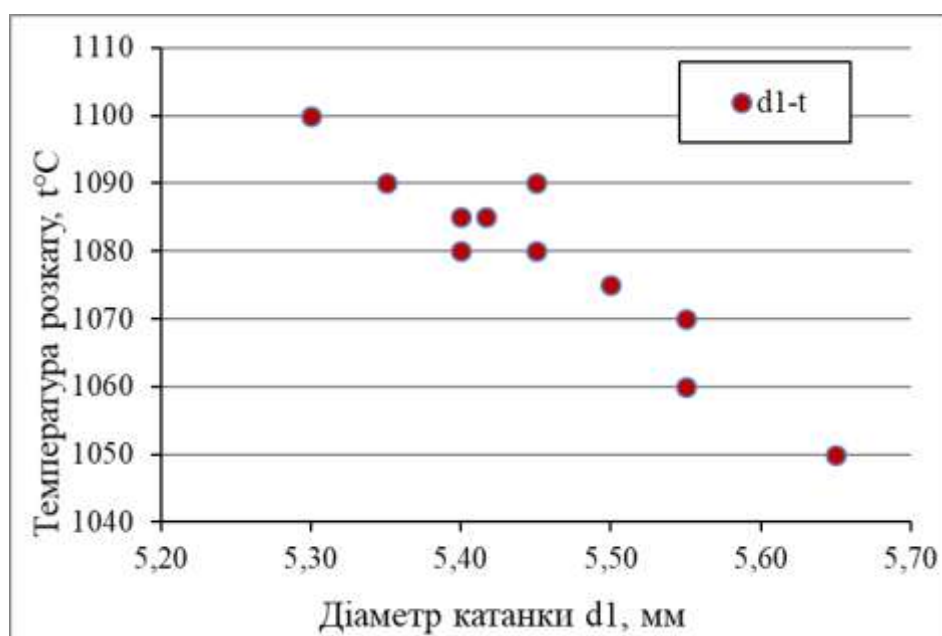


Рис. 3.23. Діаграма розсіювання для параметрів  $d_1$  та  $t$

Для подальшого аналізу експериментальних даних розраховуємо коефіцієнти парної кореляції між всіма іншими параметрами. Результати зводимо до таблиці 3.10. Згідно отриманих значень у більшості випадків парна кореляція досить слабка – значення коефіцієнтів кореляції не перевищують  $0,5$ . Але виділяються три значення коефіцієнтів: для  $d_1 - t$ , який, як вказано вище становить  $-0,944$ ; для  $d_1 - r_{ср}$   $0,739$ ; та для  $t - r_{ср}$   $-0,848$ .

Проаналізуємо залежність  $t - r_{ср}$ , для чого побудуємо діаграму розсіювання та визначимо регресійну залежність. Як видно з рис. 3.24, параметри проявляють тенденцію до синхронної зміни, що підтверджує порівняно високе значення коефіцієнту кореляції.

Таблиця 3.10. Коефіцієнти кореляції між параметрами

	d1	d2	t	V	pcp
d1		0,407	-0,944	0,325	0,739
d2			-0,358	-0,357	0,0369
t				-0,22	-0,848
V					0,2401
pcp					

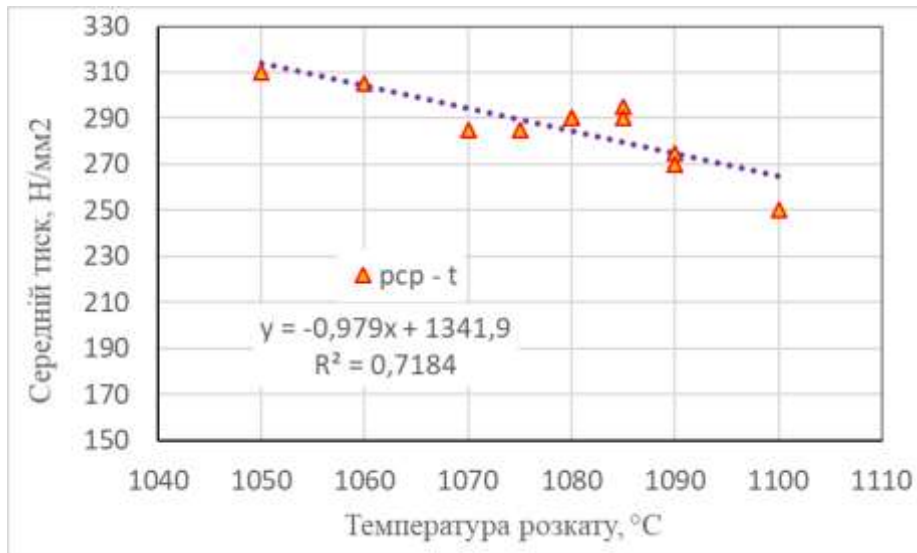


Рис. 3.24. Діаграма розсіяння для параметрів t та pcp

Використання функції LINEST забезпечує отримання більш вичерпної інформації про регресійну залежність. Як видно з рис. 3.25, значення коефіцієнтів рівняння регресії та коефіцієнту кореляції отримані абсолютно ідентичними.

	A	B	C	D	E	F
1	$m_n$	$m_{n-1}$	...	$m_2$	$m_1$	$b$
2	$se_n$	$se_{n-1}$	...	$se_2$	$se_1$	$se_b$
3	$r^2$	$se_y$				
4	F	$df$				
5	ssreg	ssresid				

$m_1$	$b_0$
-0,97898	1341,875
0,204305	220,3884
0,718407	9,260548
22,96107	9
1969,089	771,8197

Рис. 3.25. Результати розрахунків характеристик регресії для параметрів  $r^2$  та  $t$  з використанням функції LINEST

Додатковими даними, що характеризують точність регресійної залежності, є стандартні відхилення коефіцієнтів регресії: для  $b_0$  220,39; для  $b_1 = m_1$  0,204; для функції відгуку 9,26, а також критерій Фішера, який становить 22,96. Критичне значення критерію Фішера (функція F.INV) для ймовірності 95% та числа ступенів свободи вибірок 9, становить 3,179. Так як розраховане значення критерію Фішера перевищує критичне, отримана регресійна залежність адекватно відображає зв'язок між величинами, забезпечує прийнятну точність, і може бути використана в якості розрахункової залежності.

При цьому слід пам'ятати, що температура на вході в осередок деформації визначає величину тиску в ньому, а зворотній вплив неможливий. Використовуючи регресійну залежність ми можемо прогнозувати значення тиску за певної температури, а визначати температуру за тиском буде неправильним.

Отже, встановлення кореляції між двома випадковими величинами не є достатньою умовою, аби говорити про причинний зв'язок в обох напрямках. Тому варто завжди перевіряти фізичну обґрунтованість виявленої кореляції, щоб уникнути так званої «логічної хиби сумнівної причинності», коли наявність кореляції «приймається за доказ причинно-наслідкового зв'язку без додаткової перевірки причинності» [URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція\\_і\\_залежність](https://uk.wikipedia.org/wiki/Кореляція_і_залежність)].

В якості ілюстрації такого роду похибок часто наводять діаграми розсіювання Квартету Анскомбе, зображені на рис. 3.26. На діаграмах показано розподіл для величин  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , в залежності від величин  $x_1, x_2, x_3, x_4$ . При цьому, всі величини  $y_i$  мають однакове середнє 7,5 і однакову оцінку дисперсії 4,12, для всіх залежностей отримано однаковий коефіцієнт кореляції 0,816, а також пряму регресії  $y_i = 3 + 0,5 \cdot x$ .

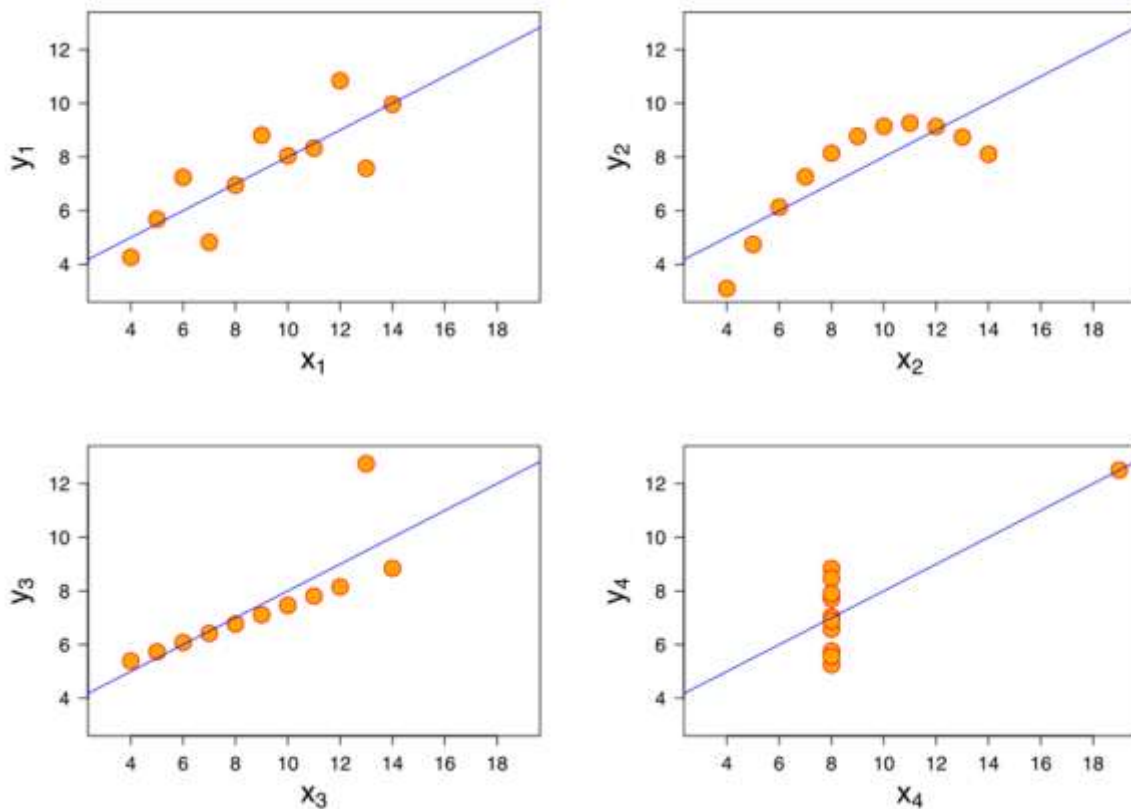


Рис. 3.26. Діаграма розсіяння Квартету Анскомбе

Залежність  $y_1 = \varphi_1(x_1)$  виглядає найбільш обґрунтованою тому, що розподіл обох величин відповідає нормальному закону розподілення.

Для залежності  $y_2 = \varphi_2(x_2)$  спостерігається відсутність нормального закону розподілення і явно нелінійний зв'язок між величинами. Тобто кореляційний аналіз підтверджує зв'язок між величинами, але використання лінійної регресії неправомірне.



Третій приклад ілюструє ситуацію, коли один викид не дозволяє зробити висновок про наявність функціональної залежності між величинами.

Четвертий випадок демонструє можливість прийняття помилкового рішення про наявність зв'язку між величинами, через наявність одного викиду.

Крім парної регресії можливо визначення множинної регресії. Наприклад, з аналізу розрахованих коефіцієнтів кореляції між параметром  $d1$  та іншими параметрами (таблиця 3.10), можемо зробити висновок, що на цей параметр суттєво впливає температура ( $r = -0,944$ ) та тиск в осередку деформації ( $r = 0,739$ ). Інші параметри процесу впливають на  $d1$  незначною мірою. Використовуючи вбудовану функцію Excel LINEST, визначимо коефіцієнти рівняння регресії для залежності виду

$$d1 = b_2 \cdot pcp + b_1 \cdot t + b_0$$

В результаті обчислень отримуємо масив:

-0,00127	-0,00784	14,28205
0,001258	0,001453	1,882459
0,902664	0,03496	#Н/Д
37,09489	8	#Н/Д
0,090677	0,009778	#Н/Д

За отриманими значеннями рівняння регресії має вид

$$d1 = -0,00127 * pcp - 0,00784 \cdot t + 14,28. \quad (3.6)$$

Коефіцієнт кореляції для множинної регресії становить  $\sqrt{0,9027} = 0,95$ . Тобто, має місце досить тісний зв'язок між параметрами, який наближається до функціонального. Розрахований критерій Фішера для отриманої залежності становить 37,095, що значно перевищує критичне 3,44 (для 95 % ймовірності та

ступенів свободи 8). Отже, отримане рівняння регресії адекватно відображає залежність між параметрами і може бути використане для визначення діаметру катанки. Для візуалізації рівня точності отриманої залежності на рис. 3.27 наведено порівняння експериментальних та розрахункових значень параметру  $d_1$ .

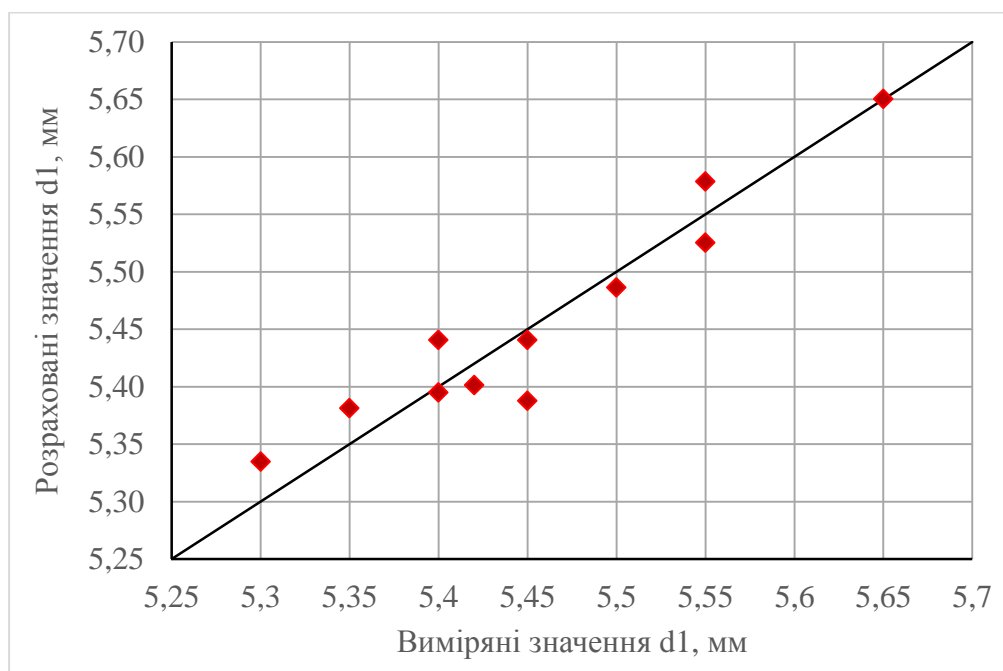


Рис. 3.27. Порівняння експериментальних значень діаметру катанки та розрахункових за залежністю 3.6.

Наведений приклад множинної регресії є лише ілюстративним. Практичного значення таке рівняння регресії не може мати через тісний зв'язок (функціональну залежність) між температурою розкату та середнім тиском в осередку деформації.

### 3.4. Завдання № 4.

#### Оцінка показників повторюваності в умовах лабораторії

Стандартна методика, регламентована [9], передбачає, що виміри виконують в точній відповідності з стандартним методом вимірювань, стандартні відхилення якого  $\sigma_r$  та  $\sigma_R$  відомі. При оформленні результатів досліджень, для характеристики рівня точності виконаних вимірів, обов'язково наводять метрологічні характеристики засобів вимірювань та наведені величини.

Метою даного завдання є визначення показника повторюваності  $\sigma_r$  ( $S_r$ ) в умовах лабораторії для певної фізичної величини, що розглядається в кваліфікаційній роботі. При виконанні цього завдання, здобувач освіти спочатку виконує обов'язки оператора, тобто здійснює вимірювання за нижче наведеною методикою. Потім, після виконання передбачених методикою розрахунків (етап 4), здобувач освіти виконує обов'язки експерта (етапи 5 та 6).

Послідовність виконання завдання включає:

1. визначення фізичної величини, для якої важливо і можливо проведення таких метрологічних досліджень в умовах лабораторії;
2. визначення (виготовлення або використання існуючих) стандартних зразків, які відтворюють різні рівні фізичної величини ( від 3 до 5 зразків);
3. проведення не менше двох вимірів кожного з стандартних зразків і заповнення форми А за зразком таблиці 3.2;
4. розрахунки середніх значень базових елементів

$$\bar{y}_j = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n y_{jk},$$

та оцінок стандартних відхилень

$$S_j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n (y_{jk} - \bar{y}_j)^2}, \text{ або для 2-х вимірів } S_j = \frac{|y_{j1} - y_{j2}|}{\sqrt{2}},$$

результати розрахунків зводяться до форм В та С за зразком таблиці 3.2;

5. аналіз однорідності отриманих значень дисперсій (відхилень);
6. визначення показника повторюваності

$$S_r = S_w = \bar{S}_s = \sqrt{\frac{1}{q} \sum S_j^2} .$$

Оцінку однорідності дисперсій, тобто перевірку на наявність викидів по рівням величини, виконують за критерієм Кохрена, який розраховують за залежністю

$$C = \frac{S_{max}^2}{\sum_{i=1}^p S_j^2}$$

де  $p$  – кількість рівнів зміни фізичної величини (кількість стандартних зразків);

$S_j^2$  – дисперсії зведені до таблиці форми С.

Розраховане значення критерію Кохрена порівнюють з критичними значеннями, наведеними у таблиці додатку А. Якщо розраховане значення менше (або дорівнює) 5%-ного критичного значення, позиція, що тестується визнається коректною. У випадках, коли розраховане значення більше 5%-ного критичного значення і менше 1%-ного, позиція, що тестується, визначається як квазі викид. У випадках, коли розраховане значення перевищує 1%-не критичне значення, позиція, що тестується, визначається як статистичний викид і повинна бути виключена з подальшого розгляду.

У висновках за результатами виконання завдання проаналізувати отримане значення показника повторюваності, як складової прецизійності в умовах лабораторії, відносно класу точності використаних приладів та потрібного рівня точності у дослідженнях кваліфікаційної роботи.

### **3.5. Завдання № 5.**

#### **Аналіз взаємозв'язку параметрів за коефіцієнтом кореляції**

Метою виконання завдання є придбання навичок кореляційного аналізу експериментальних даних, тобто оцінка взаємозв'язків між параметрами процесу (явища), що досліджуються. Такий аналіз може проводитись для власних експериментальних даних, отриманих в ході виконання кваліфікаційної роботи, для даних отриманих і опублікованих іншими дослідниками.

Для робіт теоретичного характеру, за відсутності експериментальних даних, завдання виконується за підготовленими експериментальними даними досліджень інтенсивності зношення валків дротового блоку при прокатуванні катанки діаметром 5,5 мм на стані 400/200. В таблиці 3.11 наведені значення показника інтенсивності зношення валків дротового блоку, усереднені за вимірами шести комплектів валків, які прийнято в якості функції відгуку або досліджуваного параметру. Також в таблиці наведені розрахункові значення основних параметрів прокатування катанки у блоці за затвердженою технологією.

Для виконання завдання достатньо виконати аналіз взаємозв'язку показника інтенсивності зношення та не менше п'яти параметрів прокатування, наведених у таблиці. Вибір параметрів здійснюється спільно з керівником роботи. Для кожного з обраних параметрів потрібно визначити коефіцієнт кореляції. За отриманими значеннями коефіцієнтів кореляції скласти рейтинговий ряд параметрів по мірі зменшення їх впливу на досліджувану величину. Для параметру, який має найбільший коефіцієнт кореляції з досліджуваною величиною побудувати діаграму розсіювання.

**Таблиця 3.11. Параметри прокатування катанки діаметром 5,5 мм в модулях блоку 210 та показник інтенсивності зношування валків**

№ мод	Параметри								Відгук і, мкм/т
	$\lambda$	$\epsilon$	ld/hm	V, м/с	U, с <sup>-1</sup>	Vk, м/с	t, °C	p <sub>ср</sub> , МПа	
1	1,2924	0,226	1,90	14,47	137,4	0,82	964,8	284,96	<b>0,143</b>
2	1,2202	0,180	1,64	18,01	128,3	0,82	970,8	291,08	<b>0,082</b>
3	1,2585	0,205	2,03	22,29	222,4	1,11	978,2	309,57	<b>0,111</b>
4	1,2544	0,203	1,83	28,08	254,6	1,43	985,4	309,47	<b>0,125</b>
5	1,2819	0,220	2,61	35,32	384,6	1,85	993,2	317,99	<b>0,175</b>
6	1,2425	0,195	2,22	44,88	385,2	2,20	1000,7	307,71	<b>0,069</b>
7	1,2687	0,212	2,35	55,68	766,6	2,78	1008,4	304,99	<b>0,133</b>
8	1,2676	0,211	2,20	70,82	922,1	3,50	1014,6	299,21	<b>0,110</b>
9	1,2556	0,204	2,92	88,87	1231,5	4,26	1021,7	300,58	<b>0,172</b>
10	1,2266	0,185	2,60	110,00	1275,0	4,70	1027,8	286,29	<b>0,095</b>

### 3.6. Питання для контролю знань

1. Які фізичні основи роботи дровових датчиків опору при тензومتрії?
2. Яка сутність методу координатних сіток?
3. Які фізичні основи поляризаційно-оптичних методів?
4. В чому сутність методу оптично чутливих покриттів?
5. Що таке візіопластичність?
6. Що представляє собою метод муарових смуг?
7. Як використовують аналогії та моделювання при експериментальних дослідженнях ОМТ?
8. Чим відрізняються спостереження та експеримент?
9. Які дії передбачає проведення вимірювань?
10. Що позначають терміном «результат вимірювання»?
11. Які характеристики використовують для оцінки точності вимірювань?
12. Які основні види похибок виділяють, оцінюють та враховують при вимірюваннях?

13. Представлення результатів вимірювань з відображенням похибок.
14. Що означає та як позначають і враховують клас точності приладу?
15. Сучасна методика забезпечення точності та представлення результатів вимірювань.
16. Наведіть статистичну модель результату вимірювань, та поясніть її складові.
17. Методика визначення показників прецизійності в умовах однієї лабораторії.
18. Методика визначення показників точності з залученням кількох лабораторій.
19. Наведіть статистичні характеристики вибірки значень?
20. За якими критеріями виявляють викиди в результатах багатократних вимірювань?
21. Поясніть фізичний зміст терміну «нормальний закон розподілення» та його відмінності від інших законів розподілення.
22. Методика багатократних вимірювань та представлення їх результатів?
23. Як застосовується t-критерій при визначенні результатів багатократних вимірювань?
24. Від яких параметрів залежить значення t-критерію?
25. Поясніть значення термінів «кореляція» та «регресія».

### **3.7. Перелік літератури до розділу 3**

1. Колмогоров В. Л. Механика обработки металлов давлением: Учебник для вузов / В. Л. Колмогоров. – М.: Металлургия, 1986. – 688 с.

2. Кухар В. В. Основи експериментальних методів дослідження процесів обробки металів тиском: навч. посіб. / В. В. Кухар, О. С. Аніщенко, А. Г. Присяжний. – Маріуполь: ПДТУ, 2019. – 234 с.
3. Експеримент . URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Експеримент>
4. Фальсифікаціонізм.  
URL: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Фальсифікаціонізм>
5. Вимірювання.  
URL : <https://uk.wikipedia.org/wiki/Вимірювання>
6. Шишкин И.Ф. Метрология, стандартизация и управление качеством: Учеб. для вузов / Под ред. акад. Н.С.Соломенко. – М.: Изд-во стандартов, 1990. – 342 с.
7. Про метрологію та метрологічну діяльність : Закон України від 5 червня 2014 року № 1314 – VII. URL : <http://www.rtt.ua/govsupport/index/lawsone/lang/uk?id=94>. (дата звернення 14.01.2020)
8. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-1:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 1. Основні положення та визначення (ГОСТ ИСО 5725-1-2003, IDT). -Надано чинності з 2006-07-01. – Національний стандарт України.
9. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-6:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 6. Використання значень точності на практиці (ГОСТ ИСО 5725-6-2003, IDT). Надано чинності з 2006-07-01. - Національний стандарт України.
10. ДСТУ ГОСТ ИСО 5725-2:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 2. Основний метод визначення повторюваності і відтворюваності стандартного методу вимірювання. (ГОСТ ИСО 5725-2-2003, IDT). Надано чинності з 2006-07-01. - Національний стандарт України.



11. Руденко В. М. Математична статистика : [Навчальний посібник]. – К. : Центр учбової літератури, 2012. – 304 с. – URL:  
[http://shron1.chtyvo.org.ua/Rudenko\\_Volodymyr/Matematychna\\_statystyka.pdf](http://shron1.chtyvo.org.ua/Rudenko_Volodymyr/Matematychna_statystyka.pdf).
12. Зайдель, А.Н. Ошибки измерения физических величин. М. : Наука, 1974. 106 с.
13. Румшинский М. З. Математическая обработка результатов эксперимента. М. : Наука, 1971. 192 с.
14. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. М. : Мир, 1972. 161 с.

## **4. ТЕОРІЯ І ТЕХНОЛОГІЯ ПРОКАТУВАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНЬОЇ СТАЛОСТІ**

### **4.1. Аналіз граничних умов прокатування в сталому режимі**

Поняття поздовжньої стабільності процесу прокатування вперше ввів О. П. Грудєв [1]. Під цим поняттям він мав на увазі такий стан металу в осередку деформації при якому всі сили є врівноваженими.

Важливим технологічним фактором, який визначає стабільність, як простого процесу прокатування, так і більш складного — з натяжінням, є захоплююча здатність валків.

Для створення раціонального технологічного процесу необхідно забезпечення надійного і стабільного захоплення. Збільшення захоплюючої здатності валків при простому процесі дозволяє не тільки підвищити продуктивність прокатних станів, а й поліпшити проробляємість металу, що зменшує кількість внутрішніх дефектів, а при прокатуванні з натяжінням ще і зменшити енерговитрати на виробництво прокату.

Порушення поздовжньої стійкості процесу прокатування веде до буксування штаби в валках, а в ряді випадків є причиною аварій на станах, особливо неперервного прокатування.

#### **4.1.1. Граничні умови захоплення штаби в сталому режимі**

В теорії значна увага приділяється граничним умовам прокатування в сталому режимі. В роботі [1] автор висловив свою точку зору з даного питання. Він пише, що в разі, коли захоплення штаби валками відбулося і процес прокатування стабілізувався, то після цього, якщо почати збільшувати обтиснення, то необ-

хідно з'ясувати ті граничні значення кута захоплення, при якому процес прокатування порушиться і виникне буксування.

При розгляді граничних умов прокатування в кожній точці контакту поверхні штаби з валками діють напруження нормального тиску  $p_x$  і тертя  $t_x$ , алгебраїчна сума яких використовується для визначення втягуючої сили.

Як стверджує теорія прокатки [1, стор. 55], процес не порушиться до тих пір, поки сума втягуючих сил від дії  $t_x$  буде достатня для того, щоб подолати суму виштовхуючих сил від  $p_x$ . Математично ця умова має вигляд:

$$\int_0^{\alpha} p_x \sin \varphi R b d\varphi \leq \int_0^{\alpha} t_x \cos \varphi R b d\varphi, \quad (4.1)$$

де  $R b d\varphi$  — площа елементарної контактної площадки.

У теорію прокатування введено поняття «поздовжня стійкість процесу» [1]. Як вже вказувалось цей термін пов'язують із захоплюючою здатністю валків при сталому режимі і граничним кутом захоплення  $\alpha_y^{\max}$ . На основі виразу (4.1), згідно [1—4], теоретично гранична захоплююча здатність валків в сталому режимі визначається наступним співвідношенням:

$$\alpha_y^{\max} \leq 2f_y, \quad (4.2)$$

де  $f_y$  — коефіцієнт тертя в сталому процесі.

Формула (4.2) називається умовою захоплення металу валками в сталому процесі прокатування. Вона показує, що максимальний кут захоплення не може перевищувати подвоєної величини коефіцієнта (кута) тертя при сталому процесі прокатування.

У загальному вигляді вираз (4.2) можна представити в такий спосіб [1,5]:

$$\frac{\alpha_y^{\max}}{f_y} = n, \quad (4.3)$$

де  $n$  — коефіцієнт, який характеризує кут нахилу рівнодіючої нормального тиску.

У своїх роботах О. П. Грудєв [1, 2] показує, що при рівномірному розподілу тиску в осередку деформації  $n = 2$ . Якщо рівнодіюча нормальних сил відхилена в бік виходу металу з валків, то  $n > 2$ , якщо ж ця сила відхилена в бік входу в осередок деформації, тоді  $n < 2$ . Таким чином, для оцінки можливості застосування формули (4.3) необхідно визначити реальні значення коефіцієнту  $n$  в різних випадках прокатування.

Ряд експериментальних даних [1—9] дають підставу вважати, що значення коефіцієнта  $n$  може істотно відрізнятися від загальноприйнятого 2,0.

У своїх дослідах Й. Я. Тарновський, А. А. Поздєєв і В. В. Ляшков [10], при прокатуванні клиновидних і прямокутних зразків на лабораторному стані зі сталевими грубообробленими валками діаметром 210 мм, отримали  $n \approx 1,4 — 1,45$ .

При прокатуванні свинцевих зразків О. П. Грудєв і Ю. В. Зильберг також досліджували захоплюючу здатність валків в лабораторних умовах [11]. Ці дослідження проводилися на дво-валковому стані 180 зі швидкістю прокатування 0,3 м/с. Максимальний кут захоплення визначався шляхом прокатування свинцевих східчасто-клиновидних зразків з величиною обтиску, при якому виникають перші пробуксовки. Кінцева товщина штаби змінювалася в межах 0,5 до 50 мм, відповідно і підбирали початкову товщину зразків. Результати дослідів показали, що коефіцієнт  $n$  знаходиться в межах 1,5—1,9.

У всіх наведених вище дослідженнях допускали, що зберігається рівність між коефіцієнтом тертя в початковий момент захоплення штаби валками і при стійкому процесі.

Однак, як показано в [1] та іншій технічній літературі [4], коефіцієнт тертя при захопленні штаби валками більший, ніж при сталому процесі прокатування. У даних дослідженнях проводилася кількісна оцінка зміни коефіцієнта зовнішнього тертя в процесі переходу від початкового захоплення штаби валками до сталого режиму.

Уточнення торкнулися, перш за все, рівності (4.2), згідно з якою граничний кут захоплення визначається тільки величиною коефіцієнту зовнішнього тертя.

У роботах Б. П. Бахтінова [12] були спроби подальшого розвитку теорії захоплюючої здатності валків. Він також виходив з рівноваги контактних сил в осередку деформації і теоретично обґрунтував, що граничною умовою процесу прокатування в сталому режимі слід вважати такий вираз:

$$\alpha_y^{\max} = 1,41 f_y. \quad (4.4)$$

Однак, як зазначає О. П. Грудєв [11] та інші, наведений аналіз умов захоплення був невдалим через невірне уявлення схеми діючих сил.

В роботі [3] представлена залежність відношення  $\frac{\psi}{\alpha_y}$  ( $\psi$  — коефіцієнт плеча моменту) і коефіцієнта  $n$  в залежності від параметра  $f_y \sqrt{\frac{R}{h_1}}$ . Аналіз даних робіт показав, що коефіцієнт  $n$  менше двох, причому зі збільшенням  $f_y \sqrt{\frac{R}{h_1}}$  погіршуються умови захоплення металу валками.

У теоретичних дослідженнях О. П. Чекмарьова [4] і В. І. Прокоф'єва [3], при використанні різних теоретичних моделей тертя, навпаки, зроблено висновок про те, що в граничному випадку прокатування  $n > 2$ .

Таким чином, результати теоретичних і експериментальних досліджень по захоплюючій здатності валків в сталому процесі показують, що теоретичне значення граничних кутів захоплення (1.2) не завжди вірно відображає реальну картину поздовжньої стійкості процесу. Дослідами встановлено, що на граничний кут захоплення в сталому режимі прокатування впливає не тільки умови тертя на контакті інструменту з металом, а й геометричні параметри (товщина і ширина штаби), деформований стан розкату в осередку деформації, внутрішній напружений стан металу і довжина зони прилипання.

З вищенаведеного можна зробити висновок, що теорія захоплення штаби валками потребує подальшого розвитку та уточнення деяких положень.

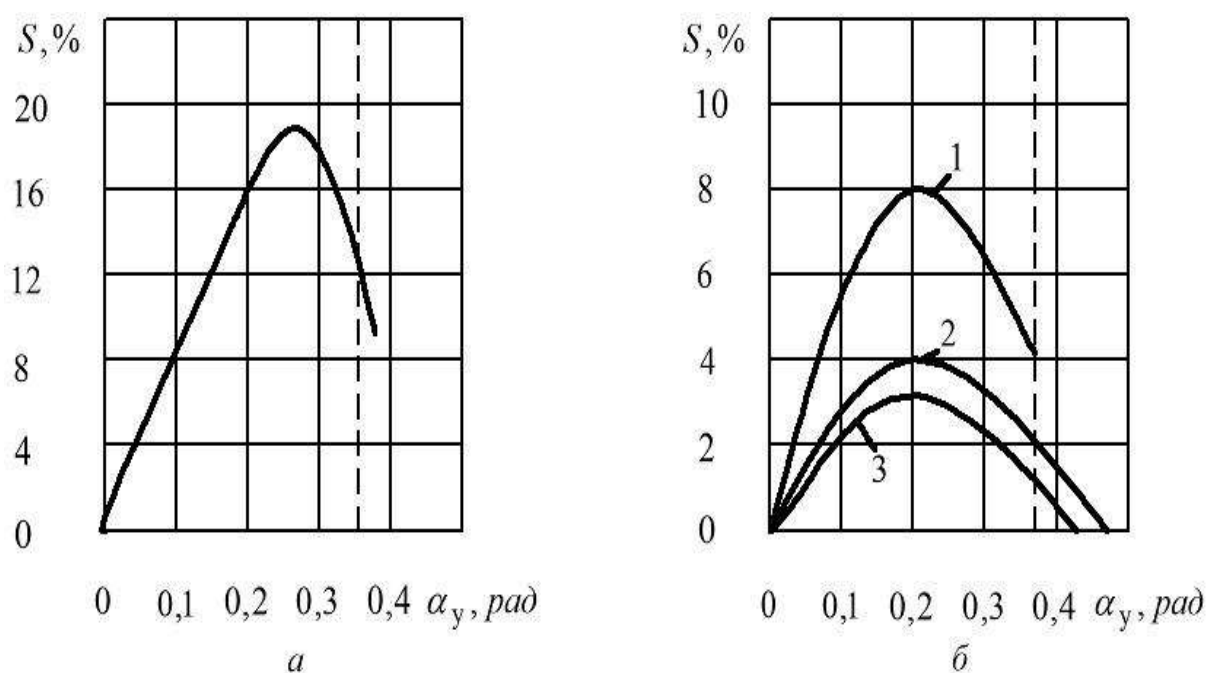
#### **4.1.2. Втрата рівноваги штаби в валках при наявності випередження**

Приклади втрати рівноваги всіх сил, що діють в осередку деформації при значному випередженні штаби з подальшим початком буксування і зупинці її в валках широко представлені в технічній літературі. Здавалося б, наявність зони випередження говорить про те, що в осередку деформації є достатній запас сил тертя для протікання сталого процесу, але невелике збільшення кута захоплення призводить до буксування зразків.

Теорія прокатування не пояснює результати цих дослідів, хоча є деякі припущення. Наприклад, В. І. Прокоф'єв [3] і В. М. Видрін [13] пояснюють втрату рівноваги металу в валках при наявності випередження  $S$  пластичним розтягуванням штаби за рахунок дії поздовжніх нормальних розтягуючих напружень  $\sigma_x$ . Ці напруження досягають межі текучості металу  $\sigma_T$ , внаслідок чого зчеплення його з валками погіршується і виникає буксування штаби, навіть, при наявності випередження.

Однак, в разі, якщо  $\sigma_x = \sigma_T$ , середній тиск металу на валки буде менше вимушеної границі текучості, що є енергетично неможливим при простому процесі прокатування. Тому запропоноване пояснення не є переконливим.

В роботі [14] були проаналізовані існуючі дослідні дані більш детально. На рис. 4.1, а наведені результати експериментальних досліджень О. П. Грудєва [11] при прокатуванні свинцевих зразків товщиною 11,4—12,7 мм і шириною 50 мм на кінцеву товщину 1,0—1,1 мм. Прокатку проводили на сталевих сухих валках діаметром 194,6 мм,  $f_y \approx 0,25$ . Випередження вимірювали методом кернових відбитків.



*a* — дослідні дані О. П. Грудєва;

*б* — дослідні дані О. П. Чекмарьова, В. І. Прокоф'єва та інших

*Рис. 4.1.* Залежність випередження від кута захоплення за експериментальними даними

Як зазначає автор [11], при прокатуванні зразка з обтисненням  $\Delta h = 11,2$  мм ( $\alpha_y = 0,34$  рад), випередження становило

$S = 10,1 \%$ , а при незначному збільшенні обтиснення до  $\Delta h = 11,6$  мм ( $\alpha_y = 0,35$  рад), інший зразок починав буксувати в валках. Таким чином, спостерігалася втрата рівноваги металу в валках при випередженні близько  $10 \%$  і  $\alpha_y^{\max} = 0,34—0,35$  рад.

Аналогічні дослідні дані отримані в роботі О. П. Чекмарьова, В. І. Прокоф'єва та інших [4]. Результати цих дослідів наведені на рис. 4.1, б. Прокатування проводили в сталевих шорстких валках діаметром 210 мм,  $f_y \approx 0,26$ . Деформували свинцеві ступінчасті зразки з трьома перепадами на кінцеву товщину 3,75 мм. Висота останнього рівня відповідала граничному обтисненню при прокатуванні клиновидного зразка. Як видно, втрата рівноваги зразків виникала при випередженні близько  $4 \%$  і куті захоплення  $\alpha_y^{\max} = 0,37—0,38$  рад (рис. 4.1, б, крива 1). При прокатуванні ж середніх і товстих штаб (рис. 4.1, б, криві 2, 3) гальмування відбувалося при нульовому випередженні, що відповідає загальноприйнятим уявленням. У цій роботі також стверджується, що причиною втрати рівноваги штаби при наявності випередження є значні розтяжні поздовжні нормальні напруження, які виникають під час прокатування з кутами захоплення, більшими, ніж коефіцієнт тертя. На можливість пластичного розтягування штаби в осередку деформації зверталася увага і в роботі [13].

В своїх дослідженнях П. Л. Клименко [15] отримав експериментальні епюри розподілу контактних напружень такі, що в одних умовах процес ведеться з випередженням, в інших дослідних при однозонному ковзанні металу в валках. Умови прокатування, при яких вимірювалися контактні напруження наведено в таблиці 4.1. Дослідні епюри, отримані П. Л. Клименко для випадків прокатування № 1—3 з табл. 4.1 представлені на рис. 4.2, а—в.



Таблиця 4.1. Параметри прокатування при дослідженні контактних напружень

Номер досліду	Товщина зразка, мм		Середній коефіцієнт тертя	Діаметр валків, мм	Кут захоплення, рад	Параметр форми $\frac{l_d}{h_{сер}}$	Джерело	Умови прокатування
	$h_0$	$h_1$						
1	6	4,2	0,21	210	0,131	2,7	[31]	Гаряче прокатування сталі
2	2	1,0	0,09	208	0,098	7	[31]	Прокатування свинцю з технологічним мастилом
3	2,2	1,2	0,06	208	0,098	6	[31]	Прокатування свинцю з технологічним мастилом

Примітка: Ширина зразків  $b = 50$  мм

Автор роботи [15] зазначає, що в умовах першого досліду прокатування відбувалося стійко без найменших буксувань. Аналогічно процес проходив і за умовами другого досліду при прокатуванні свинцевих зразків з малоефективним технологічним мастилом. При цьому в обох випадках спостерігалась розвинена зона випередження (рис. 4.2 криві *a*, *б*). Прокатування свинцевих зразків в третьому досліді (рис. 4.2 криві *в*) проводилася з ефективним технологічним мастилом, при цьому процес прокатування відбувався при однозонному ковзанні металу в валках. В цьому випадку епюри контактних напружень отримані при нестійкому прокатуванні з буксуванням металу.

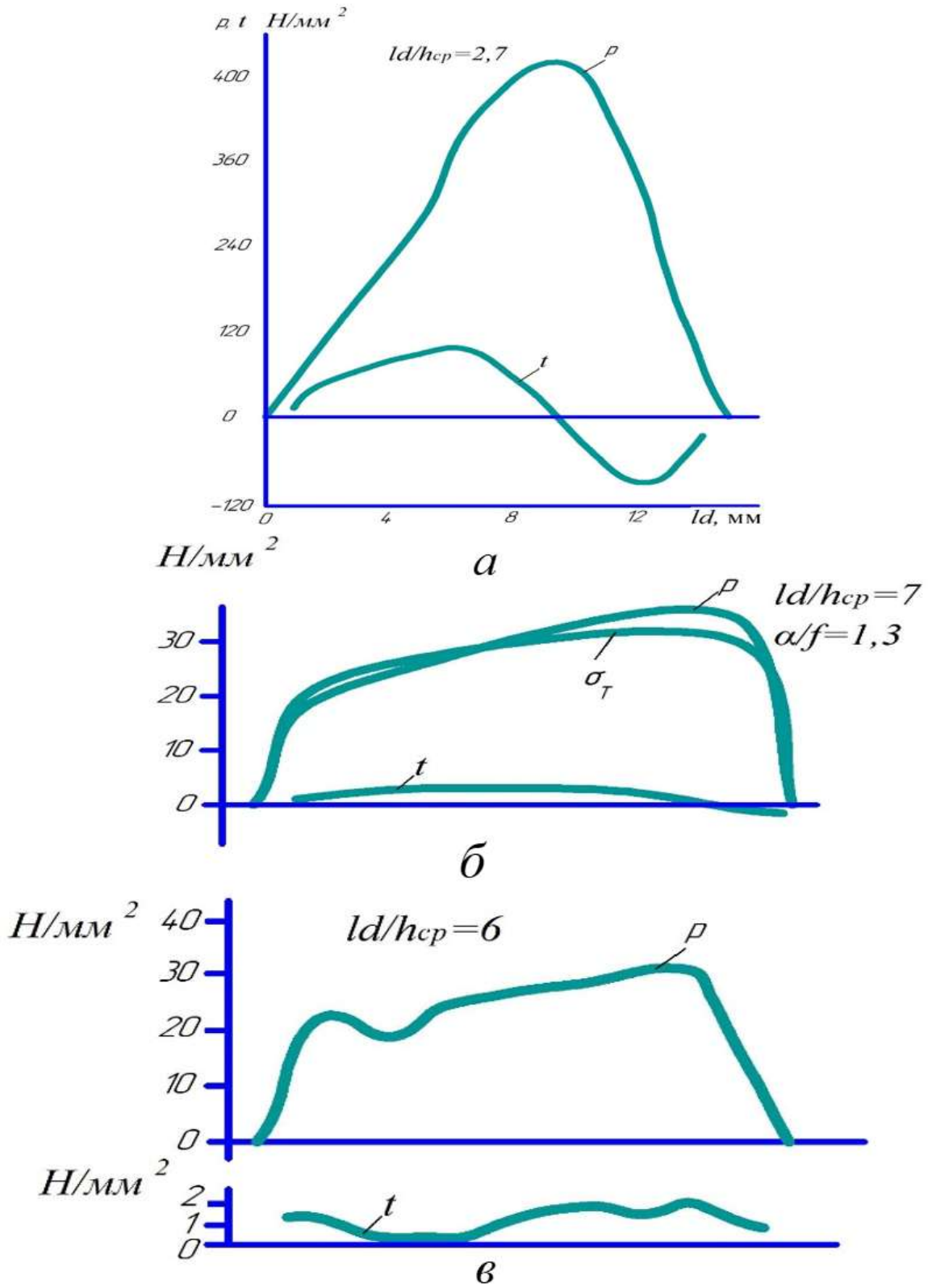


Рис. 4.2. Экспериментальные эпюры распределения внешних напряжений [15]

З огляду на, те що теорія не дає переконливого пояснення вищенаведеним результатам дослідження, автором роботи [14] були проведені додаткові досліди з вивчення граничних умов деформації та визначення випередження по керновим відбитками.

Досліди проводили на лабораторному стані дуо в сталевих валках діаметром 195 мм зі швидкістю прокатування 0,3 м/с, поверхня яких була досить грубою (8 клас чистоти поверхні),  $f_y \approx 0,25$ . За допомогою ділильної головки на поверхню валків були нанесені керни на відстані 10 мм один від іншого для того, щоб під час прокатки на кожній сходинці була можливість визначити випередження. Як зразки застосовувалися свинцеві ступінчасті зразки (марка С1) шириною 60 мм. Ступінчасту поверхню отримували шляхом стругання. Розміри сходинок зразка наведені в таблиці 4.2.

Прокатку здійснювали на кінцеву товщину  $h_1 = 4,2$  мм. Обтиснення і кути захоплення, а також усереднені значення випередження при прокатуванні на кожній сходинці наведені в цій же таблиці. Всього прокатувалося п'ять ступінчастих зразків. Для того щоб приблизно знати на якій сходинці необхідно очікувати буксування металу попередньо були прокатані клиновидні зразки.

Як впливає з таблиці 4.2, загальна залежність випередження від кута захоплення якісно збігається з теоретичною. При куті захоплення  $\alpha = 0,355 \text{ рад}$  та параметрі форми  $l_d / h_{\text{сер}} = 3,35 \text{ рад}$  ( $l_d$  — довжина дуги захоплення,  $h_{\text{сер}}$  — середня висота штаби, що прокатується) випередження становить приблизно 4 %, що говорить про достатні сили тертя на контакті металу з валками для ведення стійкого процесу прокатування. При переході на наступний щабель зразка ( $\alpha = 0,362 \text{ рад}$ ) відбувалося буксування штаби в валках.

**Таблиця 4.2. Розміри східчастих зразків, геометричні параметри прокатування і значення випередження за умовами проведеного експерименту**

Номер ділянки (сходинок) зразка	1	2	3	4	5	6	7	8
Довжина штаби, $l_{cx}$ , мм	15	15	15	20	25	25	30	30
Обтиснення, $\Delta h_{cx}$ , мм	2,8	5,8	7,8	9,8	10,8	11,8	12,3	12,8
Кут захоплення, $\alpha_{cx}$ , рад	0,17	0,244	0,283	0,317	0,333	0,346	0,355	0,362
Випередження, $S_{cx}$ , %	5,42	8,75	8,3	7,5	6,52	5,05	4,0	буксування

Результати вищенаведеного експерименту якісно збігаються з дослідними даними О. П. Грудєва і О. П. Чекмарьова.

Підсумовуючи цю частину аналізу, слід підкреслити, що в трьох групах експериментальних досліджень прокатування проводилося на різну кінцеву товщину 1,1, 3,75 і 4,2 мм. У всіх дослідах спостерігалася втрата рівноваги штаби в осередку деформації при наявності випередження. Тому важко погодитися з твердженням, що у всіх трьох дослідженнях буксування штаби виникало через те, що поздовжні нормальні розтягувальні напруження в зоні деформації досягали значень, які відповідають межі плинності зразків, що прокатуються. Отже, причина зазначених граничних умов прокатування, мабуть, прихована в іншому механізмі впливу.

### 4.1.3. Залежність параметрів процесу прокатування від натягіння

Відповідно до робіт [16—18] для виготовлення холоднокатаного листового прокату в даний час використовуються багатоклітьові неперервні стани, до складу обладнання яких входить від чотирьох до шести робочих клітей, розмотувачі, моталки та ін.

Безпосередньо технологічний режим неперервного або реверсивного стана холодного тонколистового прокатування характеризують наступні основні параметри [16, 17, 19—22]: сумарне відносне обтиснення і схема його розподілу по робочим клітям, міжклітьові натягіння (натягіння між кліттю і моталками) і швидкість прокатування.

Раціональний розподіл сумарного відносного обтиснення металу по клітям листопрокатного стану повинен забезпечувати найменші затрати на виробництво, ефективну роботу технологічного обладнання, а також отримання продукції з необхідною якістю [16, 17, 19—22].

Натягіння деформованого металу в міжклітьових проміжках при прокатуванні на неперервних або між кліттю і моталками при прокатуванні на одноклітьових реверсивних станах повинно забезпечувати зниження енергосилових параметрів і стабільність технологічного режиму процесу деформації, а також центрування штаби по осі прокатування і зменшення вірогідності обривів металу [16, 17, 19—22].

Оскільки холодне і гаряче тонколистове прокатування на неперервних і реверсивних станах ведеться з натягінням штаби, то це вносить свої корективи в баланс поздовжніх сил і захоплюючу здатність валків при сталому процесі прокатування. Міжклітьове натягіння розкату зменшує середній тиск в осередку деформації і силу прокатування, що в певній мірі впливає на поперечну різнотовщинність металу, а також знижує можливість зміщення його до краю бочки валків. Вплив знаку натягіння на тиск ме-

талу і на момент прокатування показано в роботі [23]. Глибокий аналіз процесу прокатування з натяжінням виконано в роботах [9, 24].

Дослідження впливу заднього і переднього натяжіння штаби на характер розподілу нормального тиску і момент прокатування виконав та опублікував [24] А. А. Корольов. У своїй роботі автор провів ряд дослідів при прокатуванні мідних і сталевих зразків в рулонах (сталь 10 відпалена). Прокатування проводили послідовно: без натяжіння, із заднім або переднім натяжінням і з обома натяжіннями разом при незмінному, у кожній серії дослідів, налаштуванні валків стану. з. Устаткування стану, який мав валки діаметром валків 250 мм, включало 2 моталки, що дозволило прокатувати рулонну сталь (відпалену марки 10) з поперечними розмірами  $1,95 \times 30$  мм з різними натяжіннями штаби. При прокатуванні було виконано осцилографування основних параметрів з застосуванням месдоз. На рис. 2.3 наведено приклад осцилограми при прокатуванні з заднім натяжінням штаби зі сталі з початковою товщиною  $h_0 = 1,95$  мм (відносне обтиснення складо  $\varepsilon = 30$  %) з заднім натяжінням  $162 \text{ Н/мм}^2$  при передньому натяжінні, що дорівнює нулю. Вихідні дані і результати дослідів наведені в табл. 4.3 і 4.4.

Звернемо увагу на те, що, згідно з А. А. Корольову, сплющена довжина дуги захоплення  $l_{\text{спл}}$  дорівнює різниці відстаней між нульовими значеннями тисків на межах осередку деформації  $l_0$  і діаметром штифта точкової месدوزи  $d_{\text{шт}}$  (рис. 4.4).

При визначенні середнього опору деформації використовували залежність напруження плинності від відносного обтиснення для сталі 10, наведену в роботі [24].

З проведених в роботі [24] експериментів автор робить наступні висновки, що:

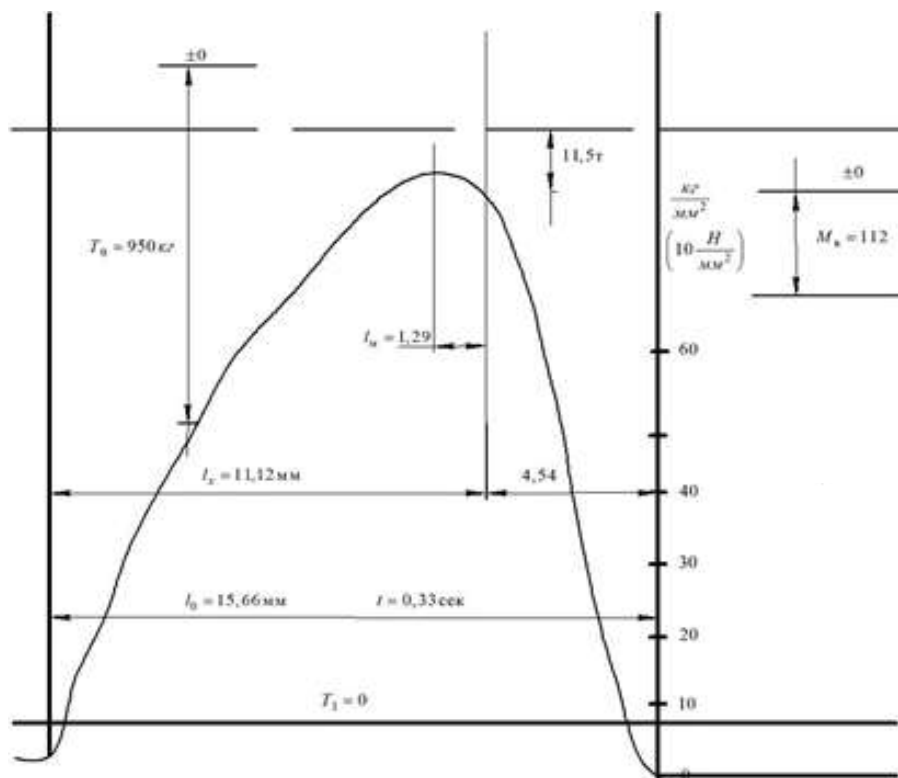


Рис. 4.3. Осцилограма, отримана під час прокатування сталеві штаби зі сталі 10 з заднім натяжінням ( $h_0 = 1,95 \text{ мм}$ ,  $\varepsilon = 30\%$ ,  $\sigma_0 = 162 \text{ Н/мм}^2$ )

Таблиця 4.3. Вплив натяжіння штаби на випередження

№ зразка	$l_{\text{спл}}$ , мм	$h_1$ , мм	$\Delta h$ , мм	$\varepsilon$ , %	$l_0$ , мм	$S$ , %	$V$ , м/с	$T_0$ , кН	$\sigma_0$ , МПа	$T_1$ , кН	$\sigma_1$ , МПа
90	13,76	1,4	0,55	26	15,5	5,75	45	0,5	8,5	0	0
91	13,92	1,32	0,58	30	15,66	4,3	47	9,5	162	0	0
92	13,06	1,3	0,65	33	14,8	3,5	43	16,7	285	0	0
93	10,11	1,63	0,32	16,4	11,85	2,86	62	0,5	8,5	0	0
94	11,26	1,5	0,45	23	13	1,4	50	9	154	0	0
95	13,86	1,36	0,59	30	15,6	5	45	0,38	6,5	0	0
96	12,23	1,35	0,6	30,8	13,97	8,6	50	0,38	6,5	6,48	160
97	14,76	1,32	0,63	32	16,5	5,7	42	0	0	0	0
98	13,13	1,3	0,65	33	14,87	5	37	7,23	125	1,46	37,5
99	13,16	1,2	0,75	38,5	14,9	3,6	33	16,9	289	4,5	125
100	14,26	1	0,95	48,7	16	4,3	36	17,8	306	7,96	265

Примітка: номер зразка в роботі А. А. Корольова [24] відповідає номеру осцилограми

Таблиця 4.4. Вплив натяжіння штаби на середній тиск і силу прокатування

№ зразка	$T_0$ , кН	$\sigma_0$ , МПа	$T_1$ , кН	$\sigma_1$ , МПа	$p_{\text{сеп}}$ , МПа	$P$ , кН
90	0,5	8,5	0	0	720	260
91	9,5	162	0	0	580	230
92	16,7	285	0	0	450	180
93	0,5	8,5	0	0	550	170
94	9	154	0	0	320	90
95	0,38	6,5	0	0	630	230
96	0,38	6,5	6,48	160	600	216
97	0	0	0	0	670	270
98	7,23	125	1,46	37,5	620	230
99	16,9	289	4,5	125	480	180
100	17,8	306	7,96	265	400	170

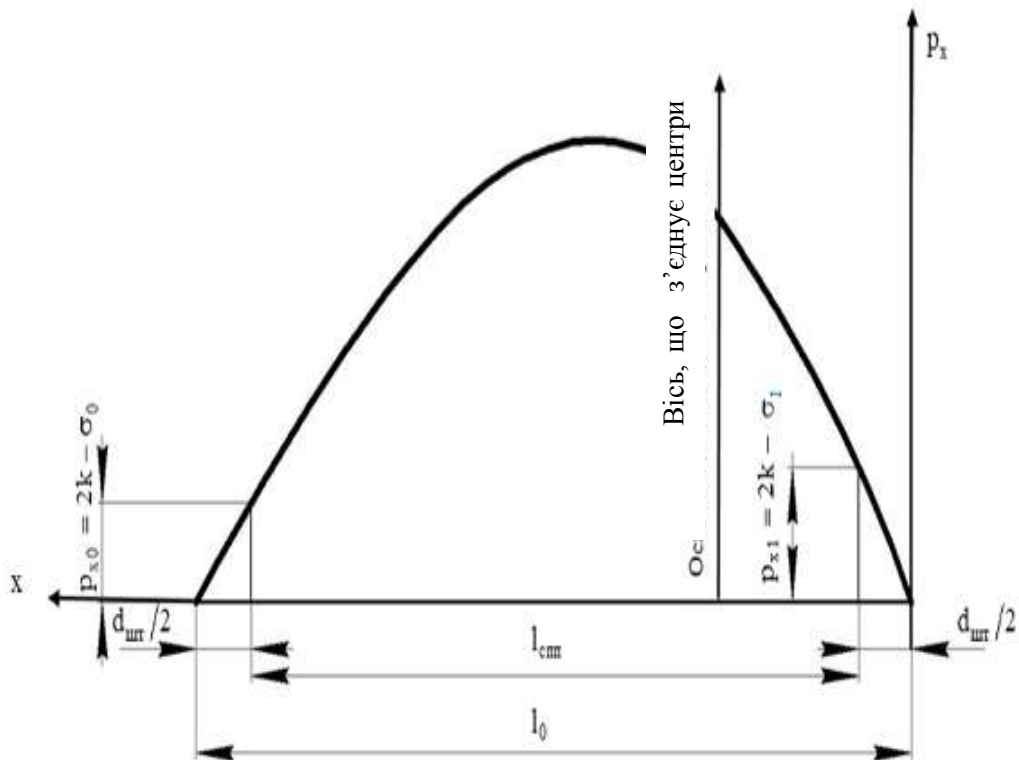


Рис. 4.4. До визначення довжини сплющеної дуги захоплення по епюрі нормального тиску



- зі збільшенням заднього натяжіння при незмінному налаштуванні валків питомі тиски знижуються;
- при прокатуванні без натяжіння (або при невеликому натяжінні), епюри питомого тиску майже симетричні щодо максимуму тиску. Зі збільшенням заднього натяжіння характер епюр змінюється: максимум кривої зміщується до осі валків. Епюра кривої є асиметричною з зміщенням вершини в бік виходу металу з валків;
- зменшується випередження при збільшенні заднього натяжіння;
- зі збільшенням заднього натяжіння тиск металу на валки значно знижується, а момент прокатування збільшується, що збігається з відомими теоретичними висновками;
- зі збільшенням заднього натяжіння і зменшенням нормального тиску на валки збільшується абсолютне обтиснення.

Висновки А. А. Корольова, отримані на основі обробки результатів експерименту, збігаються з теоретичними дослідженнями О. І. Целікова.

Автори робіт [25, 26] також зазначають, що натяжіння знижує величину як максимального, так і середнього питомого тиску і питомих сил тертя, причому заднє натяжіння більш ефективно діє в цьому напрямку, ніж переднє. Загальна дія переднього і заднього натяжіння ще більше знижує як питомий тиск, так і питому силу тертя.

Фізична сутність безперервного прокатування з натяжінням розглянута в книзі В. М. Видріна [13]. В ній проаналізовано основні закономірності цього процесу, серед яких є положення, що сумарна робота або потужність сил натяжіння дорівнює різниці між роботою (потужністю) натяжіння на моталці і розмотувачі.

Якщо виходити з того, що момент прокатування визначається співвідношенням [1]:

$$M_{\text{пр}} = 2P\psi l_d + (Q_0 - Q_1)R, \quad (4.5)$$

то сумарний момент по всім клітям неперервного стану можна виразити наступним чином:

$$\sum_{i=1}^n \sum M_{np} = 2 \sum_{i=1}^n P_i \psi_i l_{di} + M_P - M_M \quad (4.6)$$

де  $P_i$ ,  $\psi_i$  — відповідно сила прокатування, коефіцієнт плеча моменту в кожній кліті безперервного стану;  $M_P$  і  $M_M$  — момент натягіння на розмотувачі і моталці;  $n$  — число клітей безперервного стану.

Однак виникає питання. Як необхідно розподілити натягіння, щоб, з одного боку, забезпечити енергозберігаючу технологію, а з іншого — не спровокувати розрив штаби між клітями або буксування її в валках.

Як зазначено в роботі [25], в даний час немає науково обґрунтованих рекомендацій по призначенню величини натягіння штаби між клітями неперервного стану, втім, як і реверсивного.

Автори цієї роботи оцінювали енергетичну ефективність процесу холодного прокатування з натягінням критерієм  $K_N$ , який визначається відношенням сумарної потужності на бочках валків при прокатувнні з натягінням до значень сумарної потужності при деформації без натягіння. Аналізуючи цей критерій, можна зазначити, що з ростом натягіння величина  $K_N$  постійно зменшується, тобто не має екстремуму. Отже, запропонований критерій не дозволяє визначити раціональний режим натягіння для економії енергії.

При оцінці величини міжклітьового натягіння можна скористатися так званим «середнім коефіцієнтом натягіння»:

$$\xi_{\text{сер}} = \xi_0 \left( 1,05 + 0,1 \frac{\xi_1}{\xi_0} - 0,15 \frac{\xi_0}{\xi_1} \right) \quad (4.7)$$

де  $\xi_0$  і  $\xi_1$  — коефіцієнти, які визначаються за формулами:

$$\xi_0 = 1 - \frac{\sigma_0}{\beta\sigma_{S0}} \quad (4.8)$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{\sigma_1}{\beta\sigma_{S1}} \quad (4.9)$$

де  $\sigma_0$  і  $\sigma_1$  — заднє і переднє питомі натяжіння;  $\beta\sigma_{S0}$  і  $\beta\sigma_{S1}$  — вимушене напруження плинності при вході в осередок деформації і на виході з нього.

Зауважимо, що при збільшенні  $\xi_{\text{сер}}$  функція  $K_N = \varphi(\xi_{\text{сер}})$  буде монотонно зменшуватися, що також не дозволяє визначити раціональний режим натяжіння за допомогою даного критерію.

Захоплюючи здатність валків при сталому процесі прокатування в значній мірі залежить від режиму натяжіння штаби. Особливо це необхідно враховувати в тих випадках, коли заднє питоме натяжіння істотно перевищує переднє. Очевидно, і повздожня стійкість процесу прокатування на безперервних станах може визначатися режимом міжклітьового натяжіння штаби.

З літератури відомо, що при прокатуванні вуглецевих сталей абсолютні значення натяжіннь в міжклітьових проміжках безперервних станів холодного прокатування складає 100...300 Н/мм<sup>2</sup>, а між останньою кліттю і моталкою — 30...45 Н/мм<sup>2</sup>. При цьому у відповідності з даними робіт [19, 20] раціональний рівень напружень визначається перш за все, механічними властивостями деформованого металу і відповідає 18—22 % від межі плинуну матеріалу штаби у відповідному міжклітьовому проміжку (або в проміжку між кліттю та моталками). Виключення складає проміжок між останньою кліттю і моталкою при прокатуванні штаби на неперервних станах і між кліттю та моталкою при прокатуванні штаби в останньому пропуску на одноклітьовому реверсивному стані. У цьому випадку величина натяжіння суттєво знижується (у 5-ть разів), що пов'язано з необхідністю зменшення взаємного стиснення витків в холоднокатаному рулоні, що поступає на

відпал до ковпакових печей [16, 17, 19—22]. В роботі [27] зроблений висновок про те, що значення питомих натяжіннь  $\sigma_0/\sigma_T$ , які задовольняють умові

$$0,17 \leq \sigma_0/\sigma_T \leq 0,49 \quad (4.10)$$

забезпечують високе самовирівнювання витяжок по ширині штаби і запобігають можливості втрати стійкості останньої, тобто появи неплщинності. Застосування натяжіння при прокатуванні також призводить до суттєвого зменшення величини дійсного напруження текучості, контактних нормальних напружень і напружень тертя, а також довжини осередку деформації і контактної поверхні, внаслідок зменшення впливу пружних деформацій валків і штаби [11, 26, 29]. Зменшення величин зазначених параметрів під дією зовнішніх сил, що втягують сприяє зменшенню потужності і витрати енергії при холодному прокатуванні з натяжінням. Зниження тиску і зусилля при прокатуванні у результаті варіювання переднього і заднього натяжіння призводить до зменшення розходу енергії і підвищенню стійкості валків. Автор роботи [29] стверджує, що для зниження тиску на валки необхідно застосовувати несиметричне натяжіння з відношенням  $\sigma_0/\sigma_1 < 0,9$  або  $\sigma_0/\sigma_1 > 1,1$ , а також симетричне натяжіння  $\sigma_0/\sigma_1 < 0,8/0,8$  або  $0,9/0,9$ . В цьому випадку тиск на валки зменшиться і підвищиться їх зносостікість на не менше ніж на 10—15 %. Все вищеперераховане означає, що за рахунок розробки нових режимів натяжіннь на діючих листових станах безперервного прокатування можуть бути істотно зменшені потужність, що споживається і питома витрата електричної енергії при холодному прокатуванні.

Для розгляду механізму впливу натяжіння на потужність доцільно проаналізувати дані про вплив натяжіння на параметри процесу холодного прокатування. Прикладені до штаби сили натяжіння є складовими загального балансу поздовжніх сил і впливають на стан нейтрального перерізу в осередку деформації.

---

---

Переднє натягіння збільшує значення нейтрального кута, тобто протяжність зони випередження при прокатуванні, в той час як зростання заднього натягіння зменшує значення нейтрального кута і відповідно збільшує довжину зони відставання.

Проведений аналіз показав, що в даний час накопичений значний експериментальний матеріал, який не вписується в сучасну теорію прокатування. З позиції цієї теорії важко пояснити втрату рівноваги штаби в осередку деформації з частковою або повною пробуксовкою при наявності зони випередження. У літературі наведено результати дослідів, які показують, що процес може відбуватися стійко при однозонному ковзанні металу в осередку деформації, особливо при прокатуванні з ефективними технологічними мастилами.

Відповідно до теорії такі умови деформації відносяться до граничних. Є також дослідні дані стійкого процесу прокатування металу в валках з повним відставанням, коли швидкість руху штаби на виході з контактної зони істотно нижче лінійної швидкості валків («від'ємне» випередження).

Всі наведені випадки прокатування повинна враховувати сучасна теорія, тим більше що деформація штаби з однозонним ковзанням є енергетично вигідним процесом, тому що при цьому відсутня підпираюча дія сил тертя в осередку деформації.

При прокатуванні на безперервних станах не отримала належного розвитку методика вибору режиму міжклітьового натягіння штаби, немає науково обґрунтованих рекомендацій з цього питання.

## **4.2. Рівновага поздовжніх сил в осередку деформації**

### **4.2.1. Аналіз рівноваги горизонтальних сил в осередку деформації**

В останні роки досягнуто значних успіхів у вирішенні складних технологічних завдань із застосуванням обчислювальної техніки. Розроблено програми математичного моделювання процесів обробки металів тиском. У літературі наведено ряд прикладів математичних моделей поведінки металу в осередку деформації при прокатуванні. Досить актуальними в наш час є чисельні одномірні математичні моделі, що дозволяють у повній мірі враховувати реальний характер розподілу геометричних параметрів, механічних властивостей і умов контактного тертя по довжині осередку деформації процесу прокатування відносно тонких листів і штаб. Структурно математичні моделі даного класу можуть бути поділені на моделі, що засновані на чисельному інтегруванні диференційних рівнянь статичної рівноваги за допомогою, наприклад, методу Рунге-Кутта четвертого порядку [30], а також на моделі, що реалізують чисельні рекурентні рішення кінцево-різнасної форми умови статичної рівноваги або балансу енергетичних витрат, що розглядаються в рамках кожного окремого виділеного елементарного об'єму осередку деформації [31]. Серед основних припущень, що покладені в основу одновимірного математичного моделювання слід відзначити використання гіпотези плоских перерізів та інженерного варіанту умови пластичності [31], а також припущення о постійності розподілу подвоєного опору зсуву і нормальних напружень по висоті кожного окремого поперечного перерізу осередку деформації.

Разом з тим, необхідно відзначити, що фізична сутність прокатування ще не пізнана в тій мірі, яку вимагає практика, на що справедливо зверталася увага в роботах [32, 33].

По ряду найважливіших питань в теорії мають місце невідзначеності або навіть суперечливі судження. Так, при визначенні кута нейтрального перерізу розглядається рівновага тільки контактних сил, що діють в зонах відставання і випередження, а при аналізі нормального тиску і питомих сил тертя (рівняння рівноваги в осередку деформації) в рівновазі виділеного елемента металу беруть участь і поздовжні нормальні напруження. З огляду на, те що ці напруження діють в будь-якому перерізі зони пластичної деформації, за винятком граничних, а осередок деформації являє собою замкнену механічну систему, то очевидно, що рівновагу металу в валках має бути забезпечено з урахуванням дії поздовжніх сил.

Рівень стабільності процесу прокатування аж до переходу його до граничних умов і появи часткових буксувань в теорії визначається довжиною зони випередження і в межі рівністю кута нейтрального перерізу  $\gamma$  нулю. Прийнята гранична умова часто застосовується в теоретичних дослідженнях і в практичній роботі. Як відомо, ця гранична умова тісно пов'язана з максимальним кутом захоплення при сталому процесі  $\alpha_y^{\max} \leq 2f_y$  і з особливим характером розподілу тиску  $p_x$  по довжині осередку деформації, епюра зміни якого має вигляд увігнутої кривої при середньому тиску  $p_{\text{сер}} < 2k_{\text{сер}}$  ( $2k_{\text{сер}}$  — середній опір деформації металу, що прокатується). Крім того, при зазначених умовах поздовжні нормальні напруження  $\sigma_x$  по всій довжині контактної зони є розтягуючими, хоча при звичайному прокатуванні, коли  $\alpha \leq f$ , вони є стискаючими. По енергетичним міркуванням важко пояснити, що при значній пластичній деформації і певних втратах на тертя середній тиск в осередку деформації може бути менше  $2k_{\text{сер}}$ . Вищевикладене ставить під сумнів можливість прокатування в зазначених умовах, тобто процес повинен завершитися при меншому куті захоплення.

Питання про рівновагу сил в осередку деформації вже було розглянуто в роботах [34—41].

В роботі [35] запропонована нова методика оцінки поздовжньої стійкості штаби в осередку деформації, яка заснована на розрахунку середньої результуючої поточних горизонтальних сил пластично деформованого металу. В основу розробленої методики покладено схему рівноваги поточного об'єму металу в осередку деформації (рис. 4.5).

Умова рівності контактних і внутрішніх сил в цьому випадку має вигляд:

$$-2 \int_{\varphi}^{\alpha} p_x \sin \varphi d\varphi Rb + 2 \int_{\varphi}^{\alpha} t_x \cos \varphi d\varphi Rb = \sigma_x h_x b \quad (4.11)$$

де  $p_x$  і  $t_x$  — нормальний тиск і питома сила тертя;  $R$  і  $b$  — радіус валків і ширина розкату;  $\alpha$  і  $\varphi$  — кут захоплення і його поточне значення в осередку деформації;  $h_x$  — поточна товщина розкату.

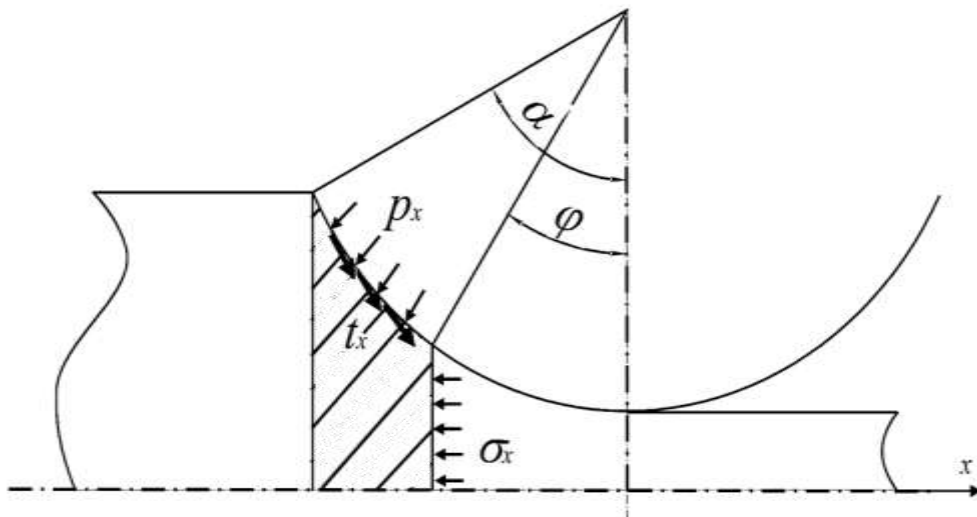


Рис. 4.5. Схема рівноваги поточного об'єму металу в осередку деформації

В свій час у роботах [36—41] було запропоновано ряд розв'язків для диференціального рівняння (4.11). Ці розв'язки ві-



дрізняються головним чином характером сил тертя в зоні контакту.

Права частина виразу (4.11) являє собою поточну поздовжню силу в осередку деформації  $Q_{xп.}$ .

При аналізі стійкості процесу важливо знати не поточне значення сили  $Q_{xп.}$ , а її середнє результуюче значення  $Q_{сер.п.}$ , що дорівнює:

$$Q_{сер.п.} = \frac{1}{ld} \int_0^{\alpha} Q_{xп.} R d\varphi. \quad (4.12)$$

Поточні внутрішні сили  $Q_{xп.}$  в залежності від умов прокатування можуть бути по всій довжині осередку деформації стискаючими і спрямованими протилежно руху штаби або ж на окремій ділянці його бути розтягуючими з відповідним напрямком, що визначається характером зміни напруження  $\sigma_x$ . Середня результуюча цих сил  $Q_{сер.п.}$ , яка є інтегральною силою опору, активну роль в осередку деформації виконувати не може. Вона не повинна сприяти процесу прокатування і тому завжди спрямована протилежно по відношенню до руху прокату. У зв'язку з чим їй приписано від'ємне значення. Разом з тим, в теоретичних розрахунках за певних параметрів прокатування сила  $Q_{сер.п.}$  може приймати додатні значення.

Розглянемо методику оцінки поздовжньої сталості штаби у валках за граничних умов прокатування [42]. Покажемо, що із виразу (4.11) диференціюванням можна отримати відоме рівняння Т. Кармана. Попередньо зауважимо, що розглядається випадок прокатування широкої штаби, коли  $\Delta b \approx 0$ .

$$d \left[ -2 \int_{\varphi}^{\alpha} p_x \sin \varphi d\varphi R \right] + d \left[ 2 \int_{\varphi}^{\alpha} t_x \cos \varphi d\varphi R \right] = d\sigma_x h_x + dh_x \sigma_x \quad (4.13)$$

Якщо  $h_x = h_1 + R\varphi^2$ , то  $dh_x = 2R\varphi d\varphi$ .

Розглянемо перший член лівої частини рівняння (4.13).

Нехай  $\int_{\varphi}^{\alpha} p_x \sin \varphi R d\varphi = \psi(\alpha) - \psi(\varphi)$ . Тоді при диференцію-

ванні перший член правої частини цього виразу дорівнює нулю. В результаті:

$$d \left[ -2 \int_{\varphi}^{\alpha} p_x \sin \varphi R d\varphi \right] = 2 p_x \sin \varphi R d\varphi,$$

$$d \left[ 2 \int_{\varphi}^{\alpha} t_x \cos \varphi R d\varphi \right] = -2 t_x \cos \varphi R d\varphi$$

і вираз (4.13) набуває вигляду:

$$2 p_x \sin \varphi R d\varphi - 2 t_x \cos \varphi R d\varphi = d\sigma_x h_x + \sigma_x \cdot 2 R d\varphi$$

або

$$2 R \varphi d\varphi \left( p_x \frac{\sin \varphi}{\varphi} - t_x \frac{\cos \varphi}{\varphi} - \sigma_x \right) = d\sigma_x h_x.$$

У практичних випадках  $\frac{\sin \varphi}{\varphi} \approx 1$ , а  $\frac{\cos \varphi}{\varphi} \approx \frac{1}{tg \varphi}$ .

Тоді:

$$dh_x \left( p_x - \frac{t_x}{tg \varphi} - \sigma_x \right) = d\sigma_x h_x.$$

Припускаючи, що  $p_x$  і  $\sigma_x$  є головними напруженнями, має:

$$p_x - \sigma_x = 2k_{сер}, \quad (4.14)$$

$$dp_x = d\sigma_x$$

Підставляючи ці значення в попереднє рівняння, отримуємо:

$$dp_x = \left( 2k_{\text{сер}} - \frac{t_x}{\text{tg}\varphi} \right) = \frac{dh_x}{h_x}. \quad (4.15)$$

Таким чином, проведений аналіз показав, що аналогом виразу (4.11) є широко відоме в теорії прокатування диференціальне рівняння рівноваги, що має вигляд (4.15).

Отже при визначенні поздовжніх нормальних напружень  $\sigma_x$  і сил  $Q_{xп.}$  та  $Q_{\text{сер.п.}}$  можна виходити з рішення відомого в літературі диференційного рівняння рівноваги при моделі тертя у вигляді:

$$t_x = 2p_x$$

або будь-якої іншої придатної функції.

Як відомо, аналіз результатів дослідження краще проводити в безрозмірному вигляді:

$$d\left(\frac{p_x}{2k_{\text{сер}}}\right) = \left(1 - \frac{f \frac{p_x}{2k_{\text{сер}}}}{\text{tg}\varphi}\right) \frac{dh_x}{h_x}.$$

Вирішуючи цей вираз з урахуванням умови пластичності

$$\frac{p_x}{2k_{\text{сер}}} = 1 + \frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$$

можна отримати розподіл тиску  $\frac{p_x}{2k_{\text{сер}}}$ ;  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$ ;  $Q_{xп.}^* = \frac{Q_{xп.}}{2k_{\text{сер}}Rb}$

і  $Q_{\text{сер.п.}}^* = \frac{Q_{\text{сер.п.}}}{2k_{\text{сер}}Rb}$  в безрозмірному вигляді.

Проаналізуємо зміну середньої результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  в залежності від умов прокатування за дослідними даними П. Л. Клименка [15]. Умови прокатування, за яких проводилися

дослідження наведено в таблиці 4.1, а дослідні епюри для цих випадків наведені на рис. 4.2.

Зауважимо, що в своїй роботі [15] автор зазначав, що при параметрах прокатування  $\frac{l_d}{h_{\text{сер}}} = 7$  процес здійснювався стійко,

в той час, як при прокатуванні з  $\frac{l_d}{h_{\text{сер}}} = 6$  прокатування здійснювалося на межі пробуксовки.

Вимірювання контактних напружень, в умовах першого експерименту (рис. 4.2) показало, що в осередку деформації має місце розвинена зона випередження. Запас сил, втягуючих метал в валки, значний, процес прокатування відбувався стійко без найменших пробуксовок.

При теоретичному визначенні розподілу контактних і внутрішніх напружень, а також поточних поздовжніх сил (рис. 4.6 криві 1) поздовжні напруження  $\sigma_x$  по всій довжині осередку деформації є стискаючими, поточні сили  $Q_{xп.}$  у всіх перерізах спрямовані протилежно руху штаби, середня результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0111$  що свідчить про поздовжню стійкість металу в валках. Із зазначеного випливає, що теоретичні висновки підтверджуються практикою (виконаними дослідями). Аналогічні висновки можна зробити і щодо другого експерименту (рис. 4.6 криві 2) при прокатуванні свинцевих зразків з технологічним мастилом малої в'язкості. Разом з тим слід зазначити, що при прокатуванні в умовах другого досліду зона випередження була малою і запас втягуючих сил був значно меншим. Теоретичне рішення наведене кривими 2 на рис. 4.6. В цьому випадку результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  також від'ємна, хоча по абсолютній величині значно менше, ніж в першому випадку ( $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0017$ ).

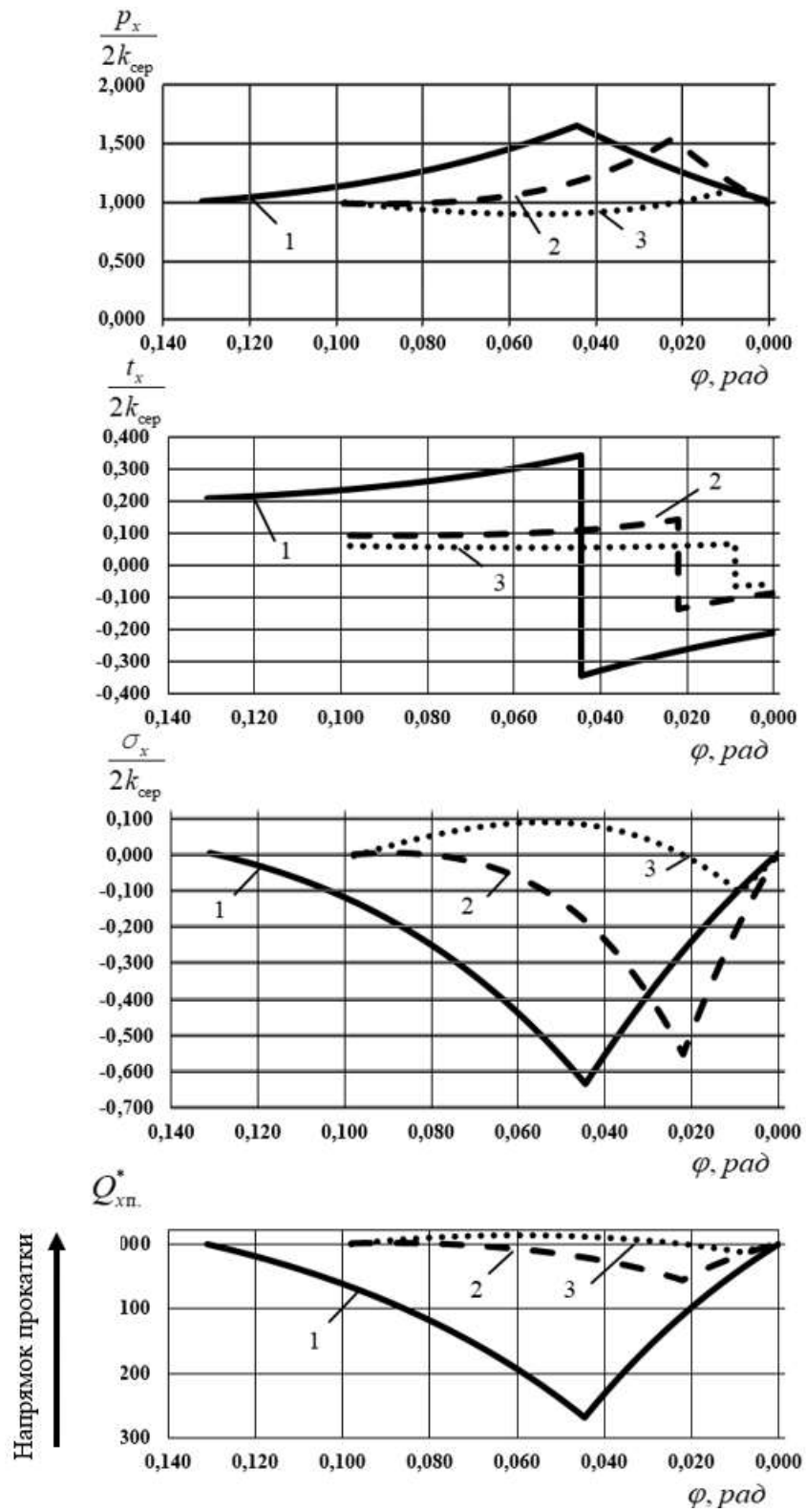


Рис. 4.6. Теоретичні епюри розподілу внутрішніх і зовнішніх поздовжніх напружень

Прокатування свинцевих зразків в третьому досліді (рис. 4.6 криві 3) проводилася з ефективним технологічним мастилом, коефіцієнт тертя дорівнював  $f_{\text{сер}} = 0,06$ . Процес прокатування відбувався при однозонному ковзанні металу в валках. Автор відзначає [15], що в цьому випадку епюри контактних напружень отримані при нестійкому прокатуванні з пробуксовкою металу. Теоретичне рішення в цьому випадку прокатування представлено на рис. 4.6 кривими 3. Поточна сила  $Q_{xп.}^*$  на більшій частині осередку деформації є додатною, середня результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^* = 0,0006$ , що свідчить про неможливість стійкого процесу прокатування.

Таким чином, розрахункові дані повністю підтвердили результати експерименту. Значення середньої результуючої сили пластично деформованого металу може характеризувати поздовжню стійкість штаби в валках.

Наскільки обґрунтованим є введення цієї результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  і чи можна виділити її в осередку деформації?

Згідно з основним законом теоретичної механіки сума внутрішніх сил в рухомому середовищі дорівнює нулю [43], тобто:

$$\sum F_{iy} = 0. \quad (4.16)$$

У процесі руху цього середовища відстань між матеріальними точками постійна, вона не змінюється в часі, що справедливо для абсолютно твердого тіла. З цієї причини внутрішні сили не здійснюють роботу, і потенційна енергія суми матеріальних точок залишається незмінною. Якщо записати рівняння повної потенційної енергії:

$$V = \sum V_i + \sum V_{iy}, \quad (4.17)$$

де  $\sum V_i$  і  $\sum V_{iy}$  — потенційна енергія зовнішніх і внутрішніх сил; то друга складова правої частини цього рівняння, при розглянутих умовах, є постійною величиною.

У разі, якщо матеріальні точки системи рухаються з різними швидкостями, що характерно для суцільного пластично деформованого середовища, то сума внутрішніх сил  $\sum F_{iy}$  може і не дорівнювати нулю і, що дуже важливо, може змінюватися в часі. Отже, при русі матеріальних точок цього середовища відбувається робота внутрішніх сил. При цьому кожна точка системи отримує прискорення в поздовжньому напрямку:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial V_x}{\partial x} V_x \quad (4.18)$$

Перший член правої частини цього виразу показує зміну швидкості даної точки в часі (при стаціонарному процесі ця складова дорівнює нулю). Другий доданок характеризує переносну зміну швидкості точки в результаті пластичної деформації при русі її уздовж зони контакту. Ця складова прискорення, будучи результатом пластичної деформації, практично завжди не дорівнює нулю. З цього слідує, що в осередку деформації при русі матеріальних точок виникають внутрішні динамічні сили і певний напружений стан металу. Саме тому при складанні умови рівноваги виділеного елемента металу довжиною  $dx$  Т. Карман прийняв, що з одного боку його діють напруження  $\sigma_x + d\sigma_x$ , а з іншого —  $\sigma_x$ .

Аргументи, наведені вище, дозволяють стверджувати, що в пластично деформованому середовищі (осередку деформації) можна виділити результуючу поздовжню силу  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ , яка відображає дію сукупності матеріальних точок цього середовища.

Підкреслимо, що при стійкому прокатуванні сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  є силою опору, і вона спрямована протилежно руху штаби (рис. 4.7, а).

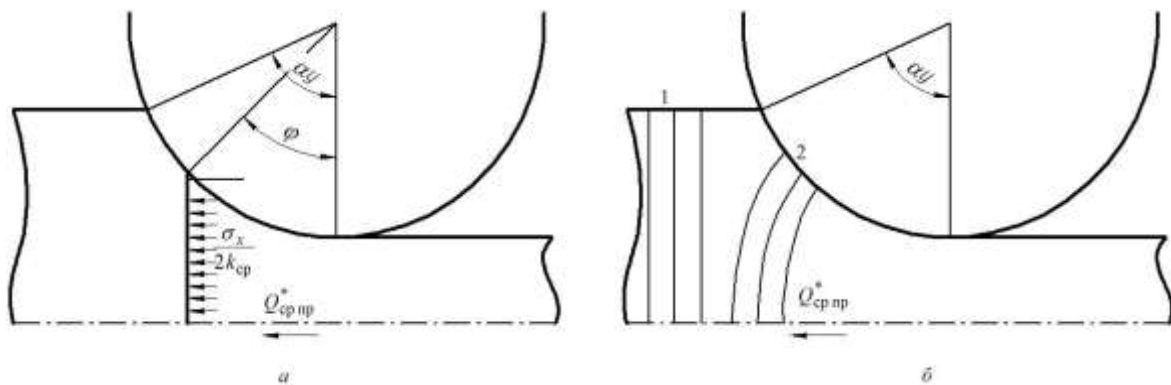


Рис. 4.7. Напрямок поздовжніх напружень і сил в осередку деформації і пластичної течії металу при стійкому процесі прокатування

Дія поздовжніх сил в осередку деформації підтверджується і на практиці.

В роботах багатьох авторів показано, що на певній частині осередку деформації виникає «зворотній» рух металу. На це звертав увагу ще В. Е. Грум-Гржимайло [44]. Якщо нанести вертикальні лінії на поверхню штаби (рис. 4.7, б, лінії 1), то при вході в осередок деформації вони вигинаються в напрямку, протилежному руху штаби (рис. 4.7, б, криві 2). Мабуть, це результат дії саме поздовжньої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

Проведений аналіз показує, що для забезпечення рівноваги в осередку деформації контактним силам, які втягують метал в валки, необхідно подолати дію як виштовхуючих сил, так і результуючу силу  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

Якщо в кожному перерізі осередку деформації поточні горизонтальні контактні і внутрішні сили рівні (4.13), то будуть однаковими і їх середньоінтегральні результуючі значення, тобто:



$$2Q_{\text{сер.к.}}^* = Q_{\text{сер.п.}}^* \quad (4.19)$$

Зауважимо, що  $Q_{\text{сер.к.}}^*$  визначається наступним чином:

$$Q_{\text{сер.к.}}^* = \frac{1}{\alpha_y} \int_0^{\alpha_y} Q_{\text{хк.}}^* d\varphi. \quad (4.20)$$

Це означає, що для підтримки балансу сил в осередку деформації нейтральний переріз має кілька зміститися в сторону виходу металу з валків з тим, щоб забезпечити урівноваження сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

У висновку до цього розділу ще раз підкреслимо, що в осередку деформації можна виділити середньоінтегральне значення результуючої поздовжніх сил пластично деформованого металу  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ . Теоретично ця сила в залежності від умов прокатування може мати різне спрямування. Враховуючи що  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  є силою опору, можна припустити, що в тих випадках, коли вона спрямована проти ходу прокатування, процес буде проходити стабільно. Якщо ця сила дорівнює нулю — прокатування буде відбуватись в граничних умовах, а якщо її напрям буде збігатися з напрямком руху штаби (сила стає активною) — стабільний процес неможливий.

Справедливість цього припущення оцінимо на основі порівняння з експериментальними даними.

#### 4.2.2. Порівняльний аналіз зміни результуючої поздовжніх сил і випередження

Проведемо теоретичне дослідження зміни поточної поздовжньої сили  $Q_{\text{хп.}}^*$  і результуючої  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  за умов дослідного прокатування, в якому вивчалася залежність випередження від кута захоплення. Дана залежність приведена на рис. 4.1,б, крива 1.

Досліди проводили на лабораторному стані 210 в валках діаметром 207 мм. Прокатували свинцеві ступінчасті зразки шириною 60 мм на кінцеву товщину 3,75 мм. Середній коефіцієнт тертя в дослідах становив  $f_y \approx 0,26$ .

Відповідно до параметрів дослідної прокатки були виконані розрахунки напружень  $p_x/2k_{\text{сер}}$ ,  $t_x/2k_{\text{сер}}$ ,  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$ , поточної поздовжньої сили  $Q_{xп.}^*$  і середньоінтегральної результуючої  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  при різних кутах захоплення. Результати розрахунків наведені на рис. 4.8—4.10.

При прокатуванні з кутом захоплення  $\alpha_y = 0,1$  рад (рис. 4.8) напруження  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$  є стискаючими, поточна сила  $Q_{xп.}^*$  по всій довжині осередку деформації спрямована протилежно руху штаби. Результуюча поздовжніх сил в даному випадку дорівнює  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0132$ . Відповідно до прийнятої гіпотези такий випадок прокатування відноситься до стійкого, що підтверджується експериментально.

Аналогічна картина зміни  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$  і  $Q_{xп.}^*$  спостерігається і при прокатуванні з кутами захоплення 0,2 і 0,25 рад. Результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  в цих випадках дорівнює відповідно  $-0,02$  і  $-0,0185$ .

У випадку прокатування з  $\alpha_y = 0,35$  рад (рис. 4.9) в осередку деформації з'являються поздовжні розтягувальні напруження на вхідній ділянці осередку деформації, і поточна сила  $Q_{xп.}^*$  змінює напрямок на протилежний. У цих випадках процес є також стійким, тому що результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  залишається стискаючою і рівною  $-0,0048$ .

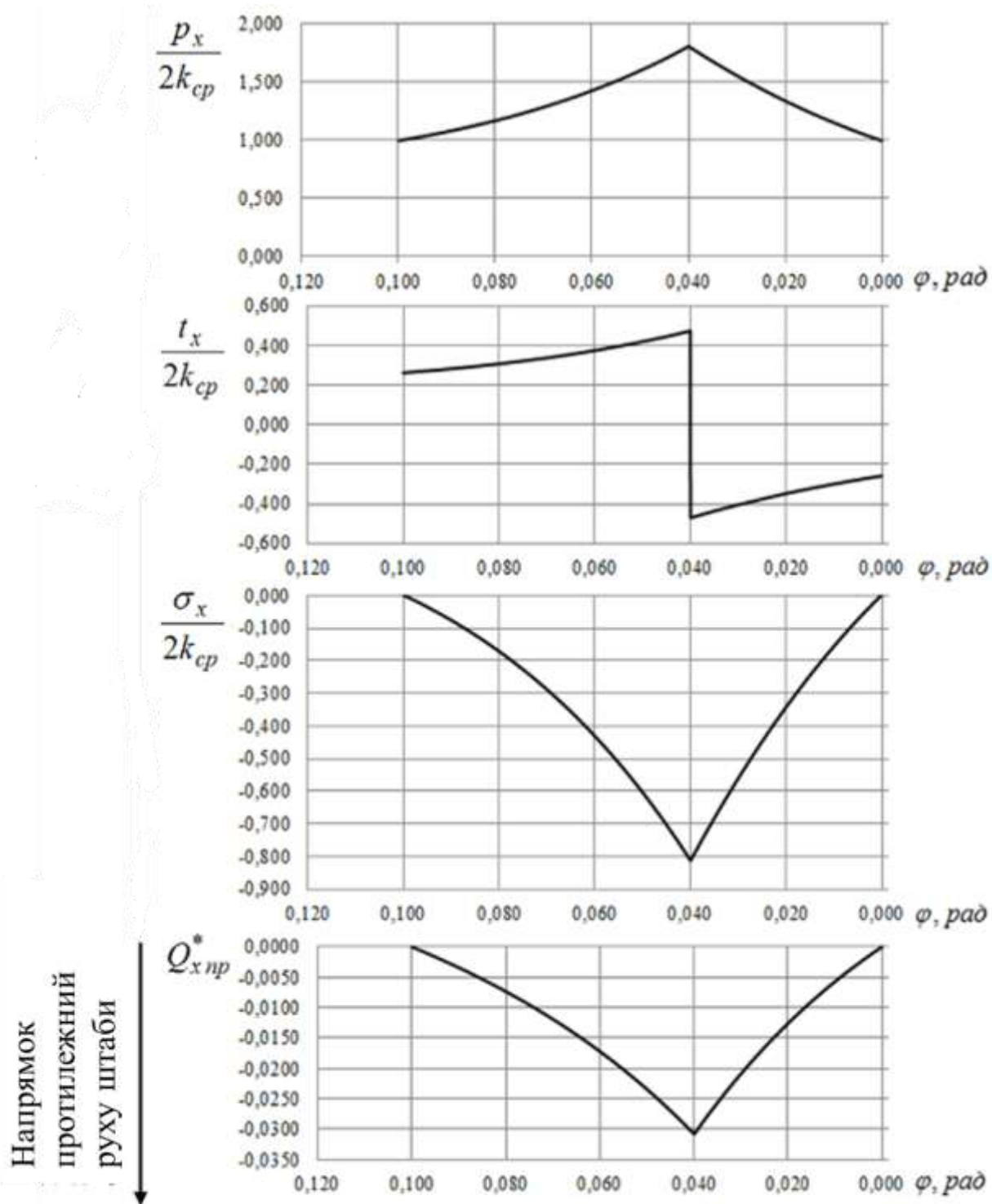


Рис. 4.8. Теоретичні розрахунки напружень і сил під час прокатування при  $\alpha_y = 0,1$  рад

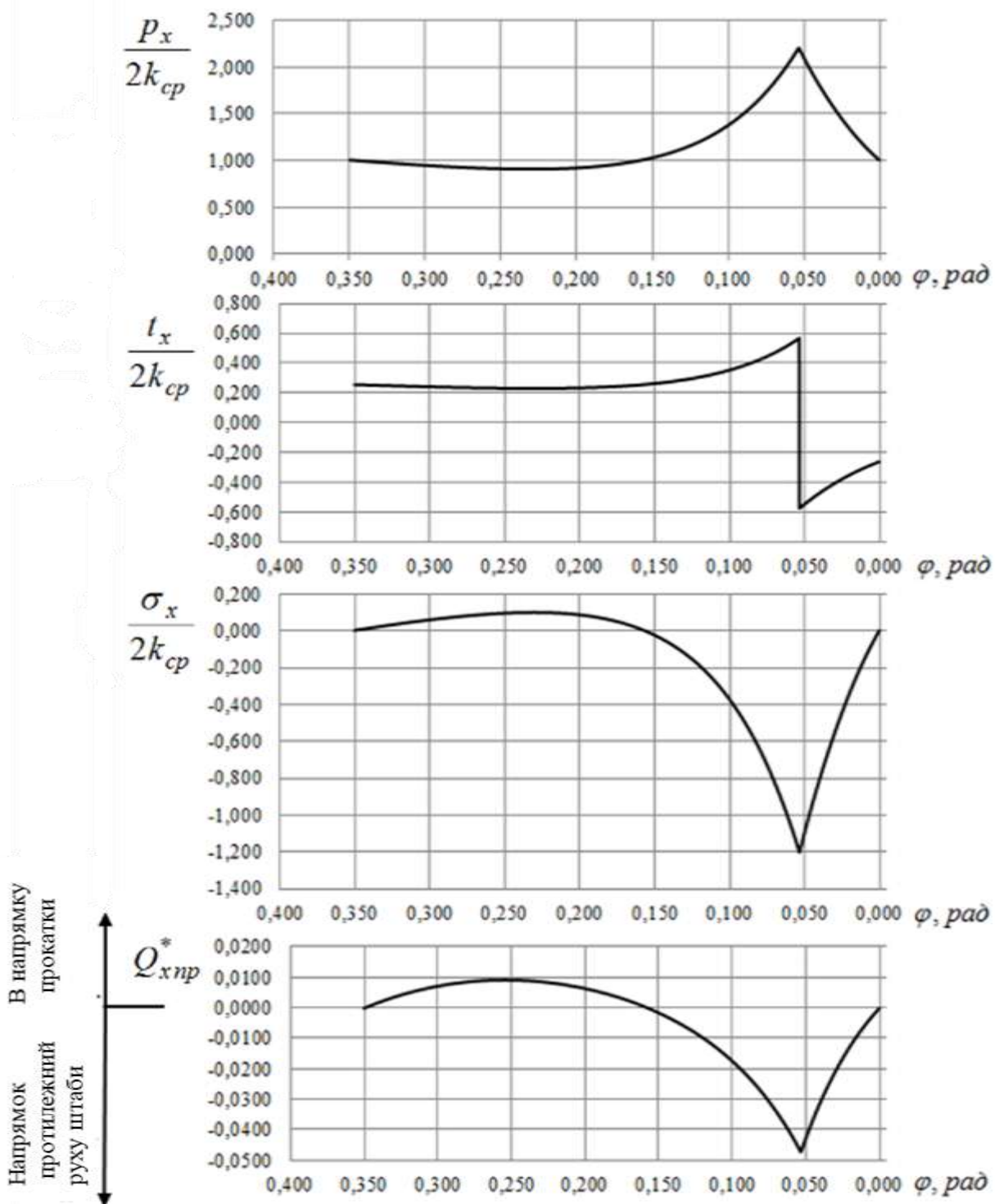


Рис. 4.9. Теоретичні розрахунки напружень і сил під час прокатування при  $\alpha_y = 0,35$  рад

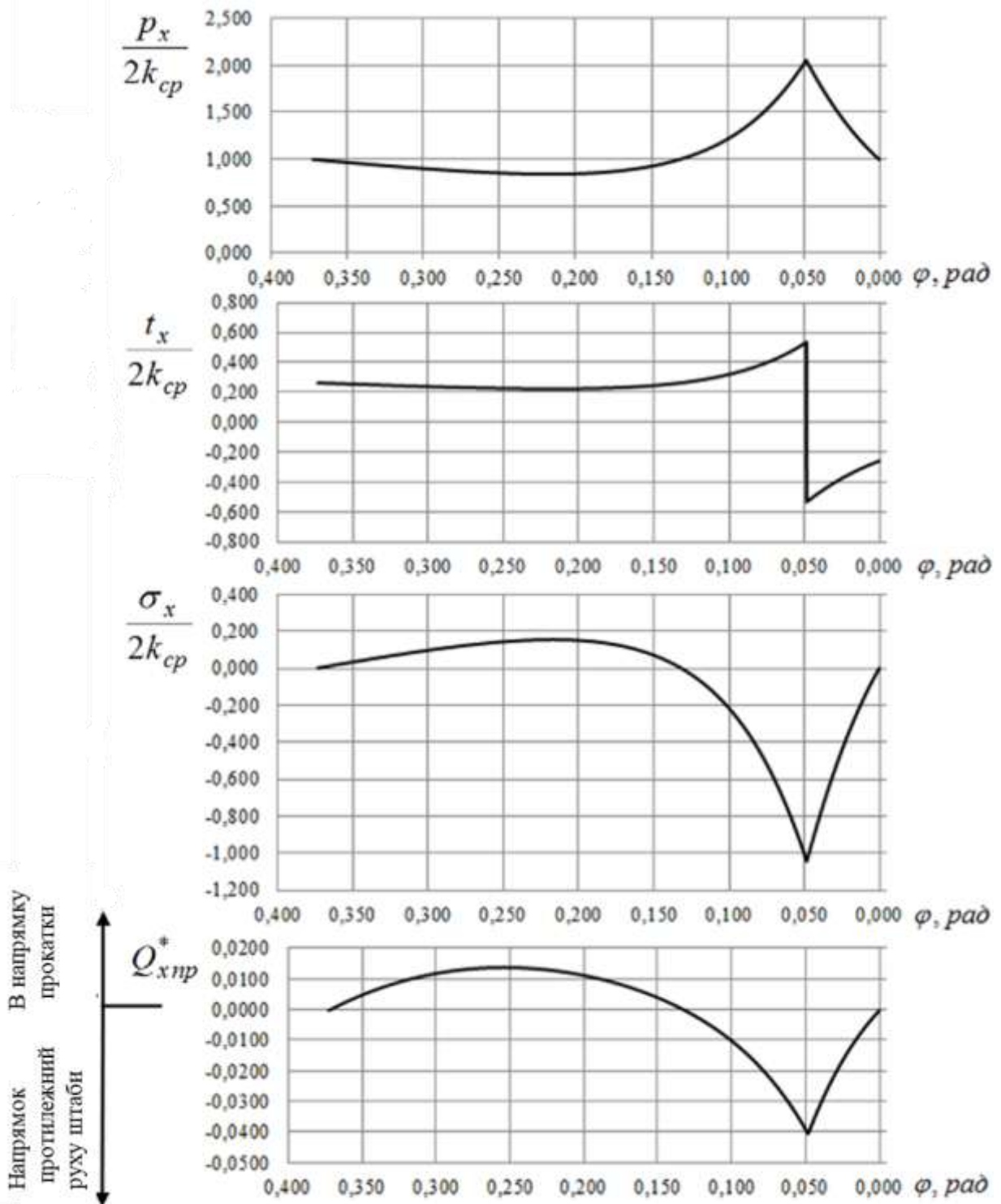


Рис. 4.10. Теоретичні розрахунки напружень і сил під час прокатування при  $\alpha_y = 0,37$  рад

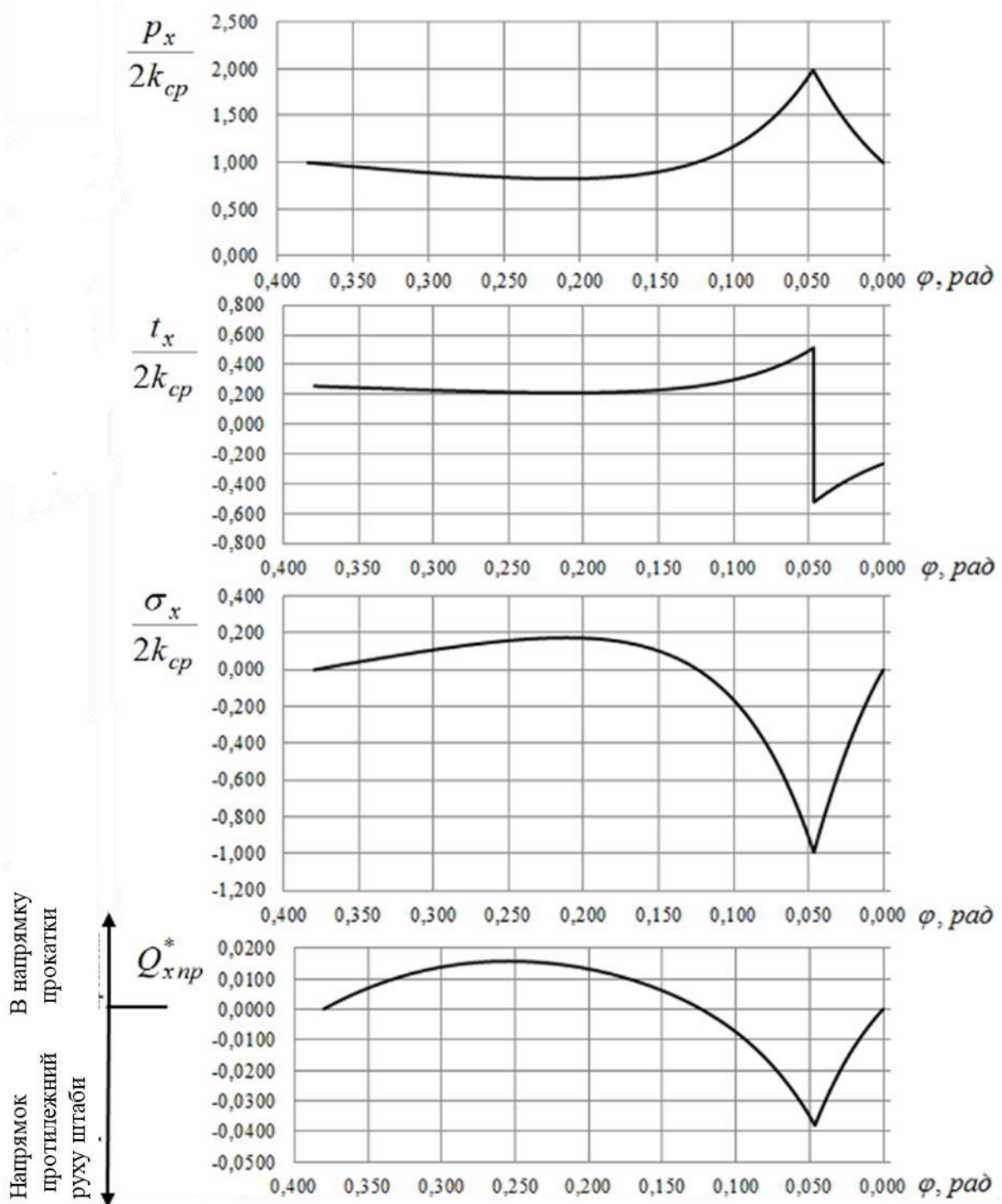


Рис. 4.11. Теоретичні розрахунки напружень і сил під час прокатування при  $\alpha_y = 0,38$  рад

При куті захоплення рівному 0,37 рад (рис. 4.10) область по-здовжніх розтягуючих напружень в осередку деформації зростає.

Відповідно збільшується і ділянка дії поточних сил, спрямованих по ходу прокатування, і середня результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  по абсолютній величині зменшується і становить  $-0,0003$ .

Прокатування при куті захоплення  $0,37$  рад близьке до граничного випадку, тому що  $Q_{\text{сер.п.}}^* \approx 0$ .

Збільшення кута захоплення до  $0,38$  рад (рис. 4.11) призводить до того, що середня результуюча змінює напрямок і стає розтягуючою (активною),  $Q_{\text{сер.п.}}^* = 0,002$ . Відповідно до прийнятої гіпотези, прокатування в цих умовах неможливе.

Теоретична залежність результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  від кута захоплення при параметрах прокатування, відповідних дослідним даними наведеним на рис. 4.1, б, крива 1, показана на рис. 4.12. Порівнюючи результати дослідів (рис. 4.1, б, крива 1) з отриманою залежністю  $Q_{\text{сер.п.}}^* = f(\alpha_y)$ , можна відзначити, що кут захоплення в сталому процесі якісно однаково впливає на значення поздовжньої результуючої сили і випередження. Причому граничні умови прокатування, отримані дослідним шляхом і розраховані теоретично, збігаються, що підтверджує правомірність прийнятої гіпотези. Важливо підкреслити, що дослідні і теоретичні граничні умови прокатування виникають при наявності зони випередження.

Втрата рівноваги металу в валках з подальшою пробуксовкою при наявності в осередку деформації зони випередження не вкладається в сучасну теорію прокатування і тому потребувала додаткової експериментальної перевірки, яку виконав О. П. Грудев [11].

При вивченні залежності випередження від кута захоплення автор прокатував свинцеві зразки різної початкової товщини на кінцеву, рівну  $1,1$  мм. Результати дослідів наведені на рис. 4.1, а.

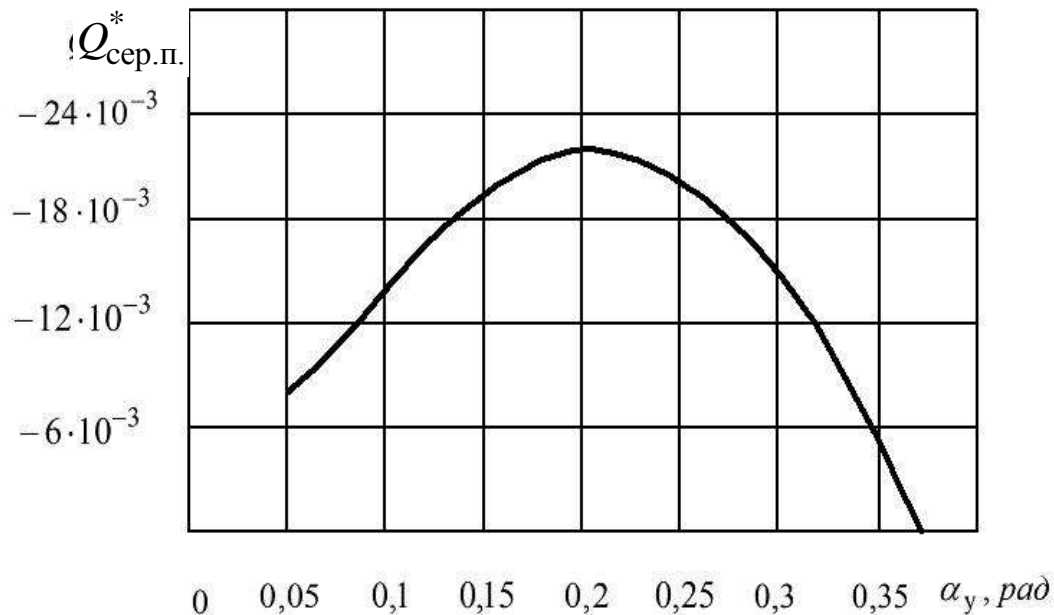


Рис. 4.12. Залежність середньої результуючої сили від кута захоплення

Перш ніж аналізувати зв'язок між дослідними значеннями граничних умов прокатування і теоретичними розрахунками результуючої поздовжніх сил, звернемо увагу на наступне. При прокатуванні з кутом захоплення що дорівнює 0,1 рад, кінцевою товщиною 1,1 мм і коефіцієнтом тертя 0,25 теоретичні результати розрахунків контактних напружень з використанням кулонівської залежності між контактними напруженнями не дають правильного результату, що видно з епюр, наведених на рис. 4.13.

Питомі сили тертя  $t_x$  в області нейтрального кута для значень, істотно більше опору деформації чистому зсуву. Нормальний тиск поблизу цього кута також підвищений. Така ж картина спостерігається і при інших кутах захоплення для зазначених умов прокатування. Отже, дана модель тертя в цих умовах не працює. На це надмірне зростання розрахункових значень контактних напружень при використанні кулонівської моделі тертя звертав увагу також і Я. Д. Василев в роботі [45].



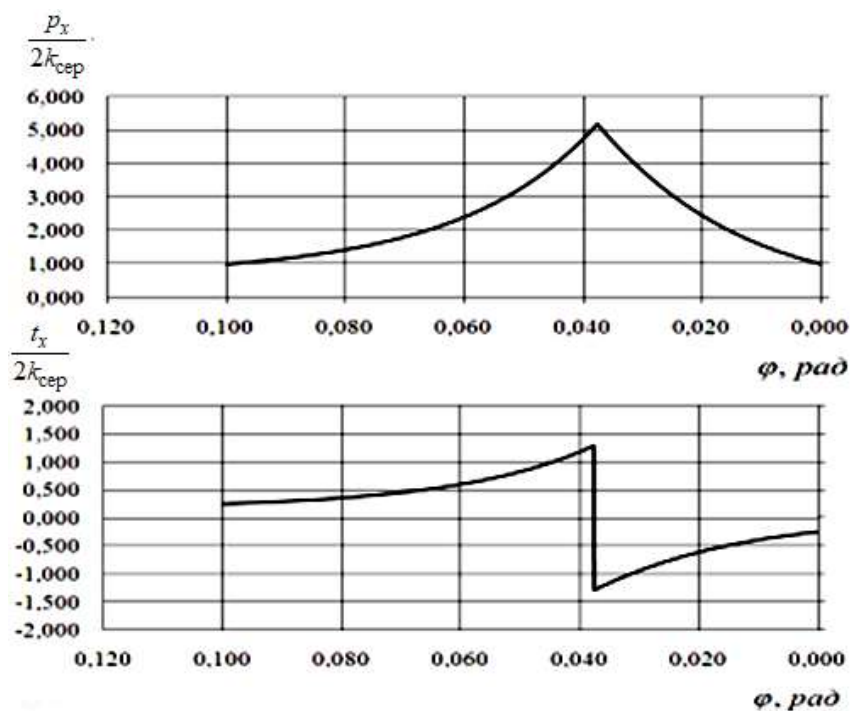


Рис. 4.13. Розподіл контактних напружень при кулонівській залежності між контактними напруженнями для випадку прокатування тонкої штаби

Як впливає з роботи [45], при описі зміни питомих сил тертя по всій довжині осередку деформації одним рівнянням, максимальні напруження тертя істотно нижче наведених.

Тому при теоретичному аналізі дослідів О. П. Грудєва у якості моделі розподілу питомих сил тертя використовували кусково-лінійну функцію, що включає кулонівську залежність на певних ділянках зон відставання та випередження, а також зону прилипання. Опис даної моделі наведено в книзі [42]. Епюри розподілу контактних напружень, що відповідають умовам рис. 4.13 приведено нижче.

Результати розрахунків з використанням кусково-лінійної функції у вигляді моделі тертя ля умов дослідів О. П. Грудєва для кутів захоплення  $\alpha_y = 0,1$ ;  $\alpha_y = 0,30$ ;  $\alpha_y = 0,35$ ;  $\alpha_y = 0,36$  рад наведено на рис. 4.14—4.17.

При прокатуванні з кутом захоплення  $\alpha_y = 0,10$  (рис. 4.14) контактні напруження при використанні кусково-лінійної моделі тертя суттєво нижчі значень, що отримані при кулонівській моделі тертя (рис. 4.13). Напруження  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$  і поточна сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  по всій довжині осередку деформації є стискаючою і направленою протилежно руху штаби. Середня результуюча сила, що дорівнює  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0282$ , також є стискаючою, що свідчить про стійкість процесу. При деформації металу з кутом захоплення  $\alpha_y = 0,30$  рад (рис. 4.15) сила  $Q_{xп.}^*$  в початковій частині осередку деформації змінила напрямок. Вони діють по ходу прокатування. В середній частині осередку деформації і на виході штаби із валків ця сила направлена протилежно руху штаби. Середньоінтегральне значення результуючої  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0094$ , процес також можна вважати стійким. При куті  $\alpha_y = 0,35$  рад (рис. 4.16) область поздовжніх сил пластично деформованого металу, що розтягують значно збільшилась, вона приблизно дорівнює площі стискаючих сил. Тому прокатка в цих умовах близька до граничного випадку. Результуюча  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0014$ . У випадку коли  $\alpha_y = 0,36$  (рис. 4.17)  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  стає додатною, а процес прокатки — неможливим.

Порівнюючи результати дослідів О. П. Грудєва (рис. 4.1, а) з теоретичним розрахунком (рис. 4.18), впевнюємося в тому, що і в цьому випадку втрата рівноваги штаби в осередку деформації і її гальмування відбуваються тоді, коли результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  приймає нульове значення.

Як уже зазначалося, в роботі [14] також досліджені граничні умови прокатки, результати яких наведені в табл. 4.2.

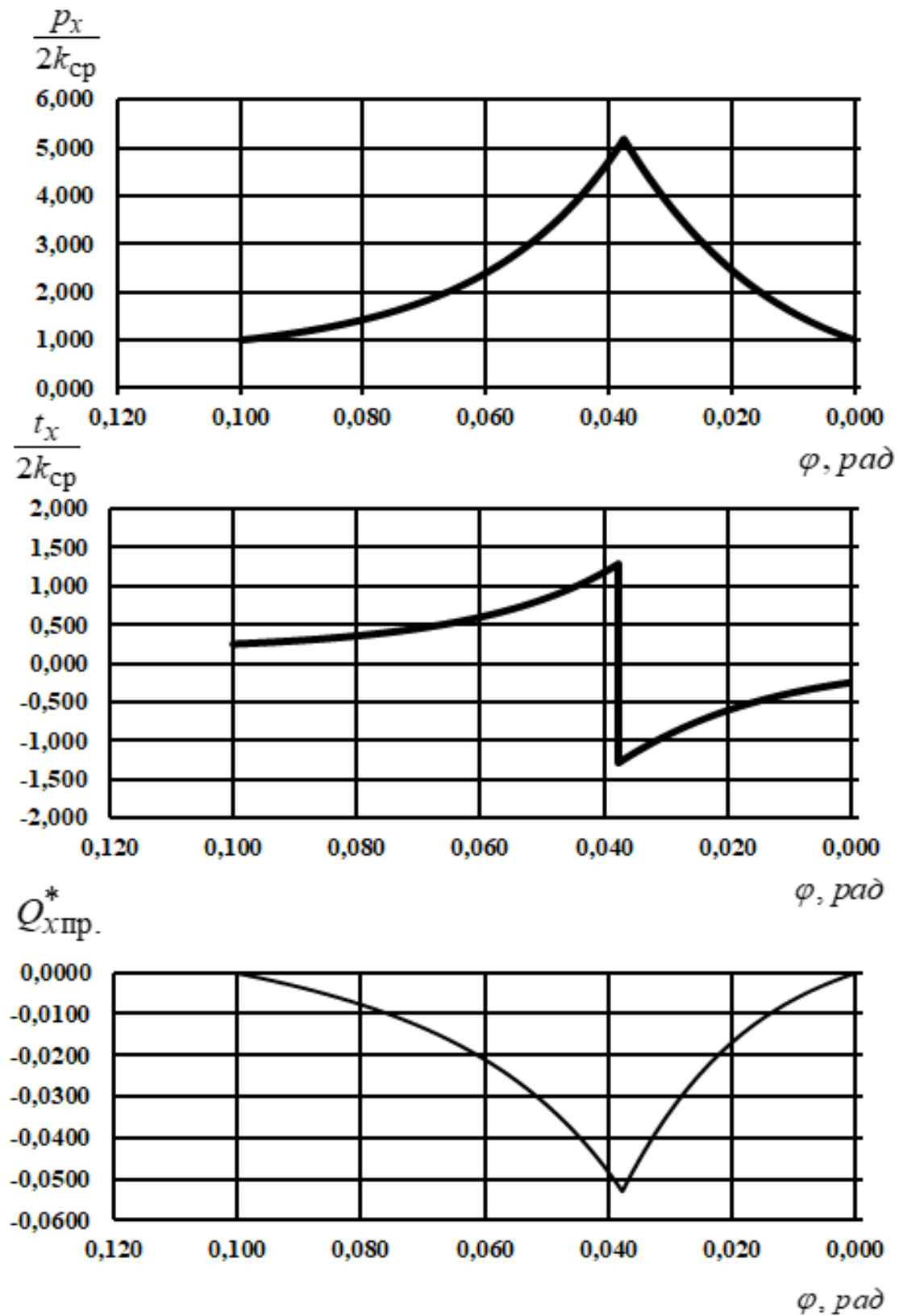


Рис. 4.14. Розподіл контактних (а, б), внутрішніх (в) напружень і поточної поздовжньої сили (г) при куті захоплення 0,1 рад

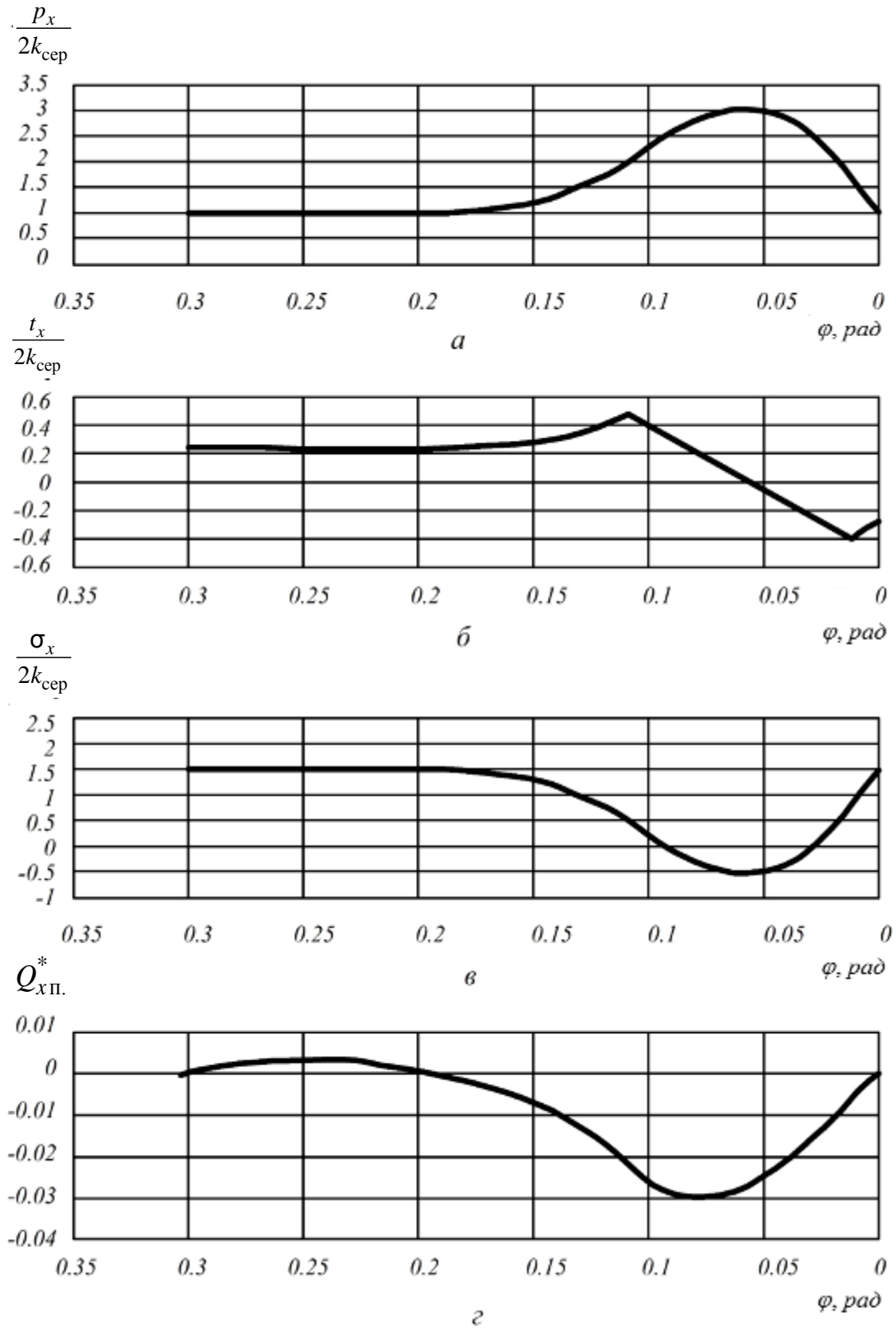


Рис. 4.15. Розподіл контактних (а, б), внутрішніх (в) напружень і поточної поздовжньої сили (г) при куті захоплення 0,3 рад

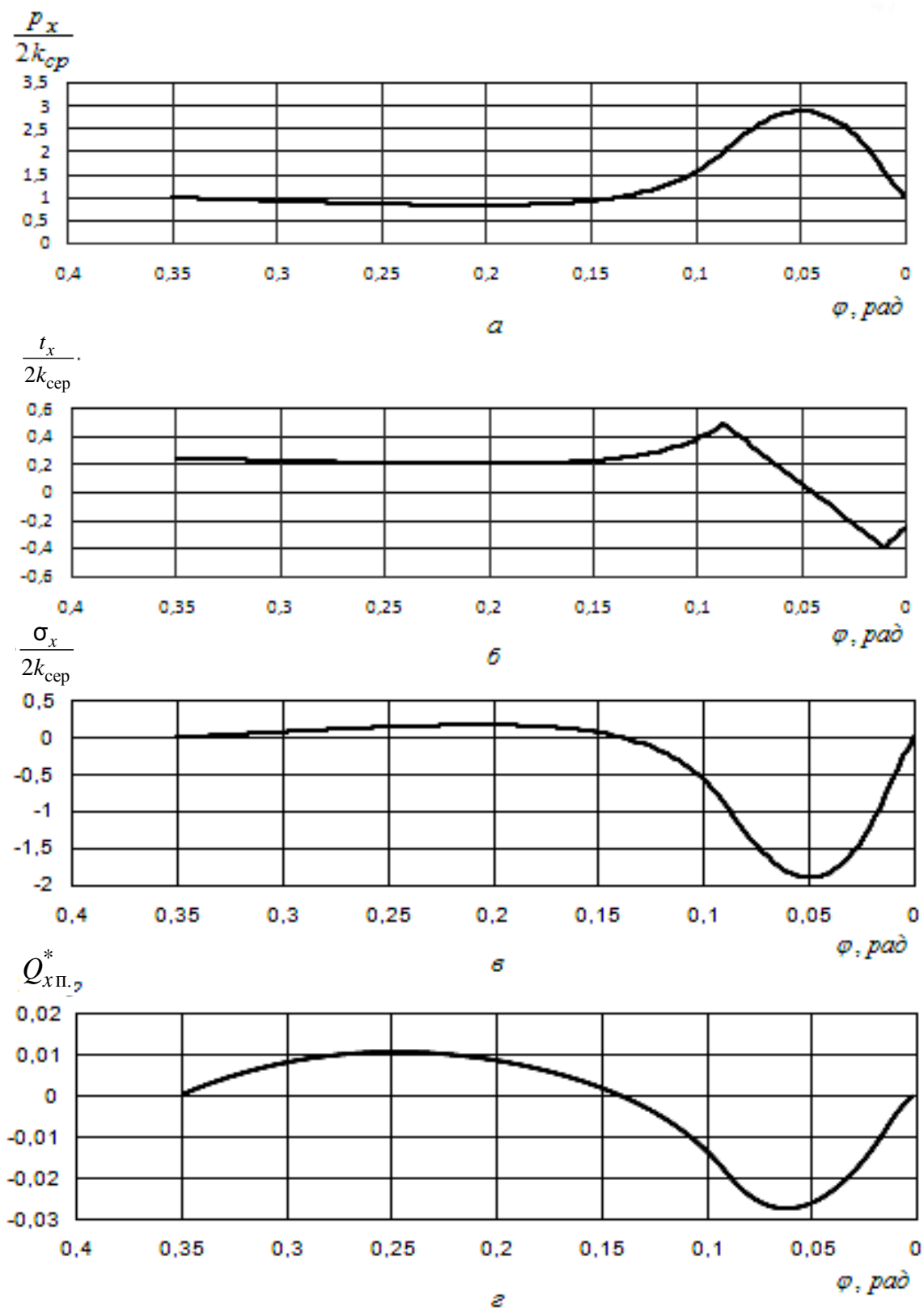


Рис. 4.16. Розподіл контактних (а, б), внутрішніх (в) напружень і поточної поздовжньої сили (г) при куті захоплення 0,35 рад

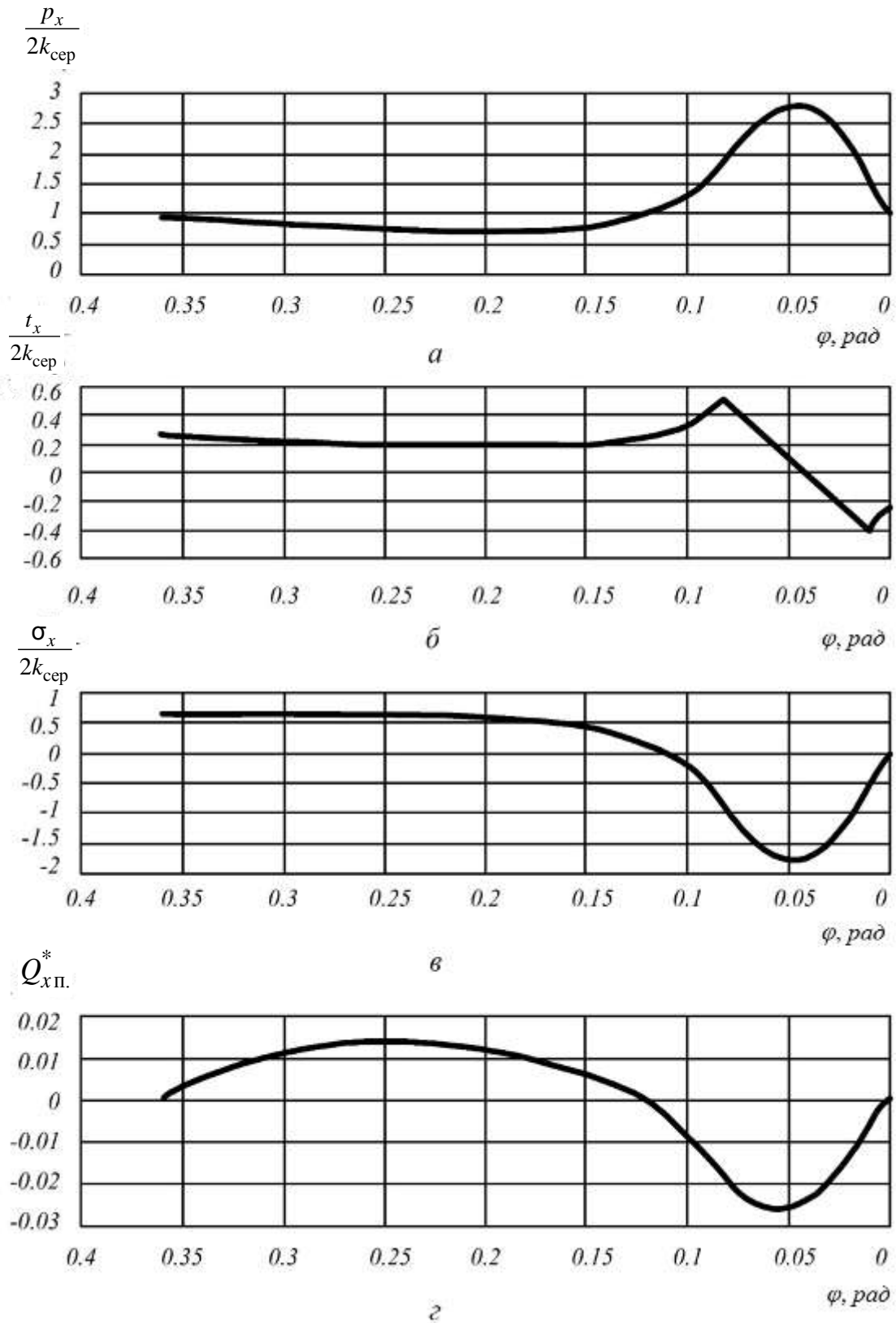


Рис. 4.17. Розподіл контактних (а, б), внутрішніх (в) напружень і поточної поздовжньої сили (г) при куті захоплення 0,36 рад

При параметрах деформації, які відповідають цим дослідом, також були виконані теоретичні розрахунки. Узагальнені залежності середньої результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  і випередження  $S$  від кута захоплення наведені на рис. 4.18.

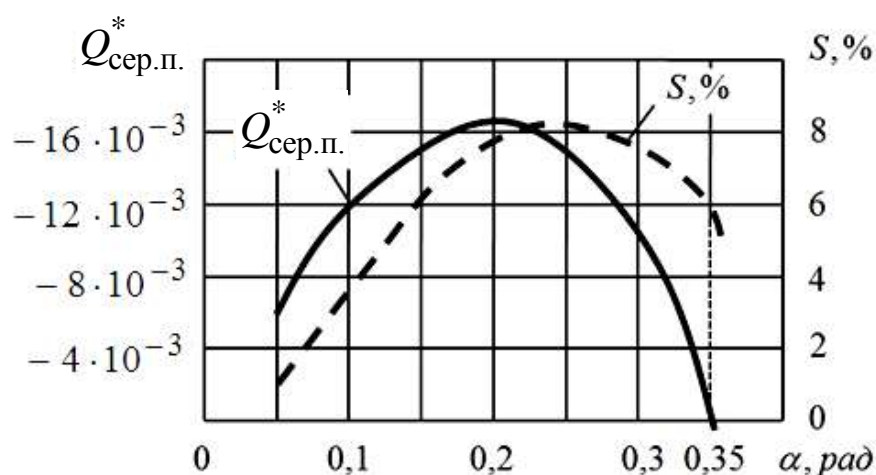


Рис. 4.18. Вплив кута захоплення на результуючу поздовжніх сил і випередження при прокатці з  $h_1 = 4,2$  мм

Як видно, теоретично граничні умови прокатки ( $Q_{\text{сер.п.}}^* = 0$ ) настаюють при куті захоплення 0,35 рад і випередженні 5 %, що відповідає дослідним даним (табл. 4.2).

Таким чином, проведений теоретичний аналіз показав, що, незалежно від наявності зони випередження, граничні умови прокатки настаюють тоді, коли середньоінтегральна результуюча поздовжня сила стає рівною нулю. В цьому випадку площі додатних і від'ємних значень під кривою  $Q_{x \text{ п.}}^*$  однакові. Звернемо увагу і на те, що у всіх випадках, що аналізуються відношення максимального кута захоплення до коефіцієнта тертя  $\frac{\alpha_y^{\max}}{f_y}$  менше двох. Це пов'язано, як вже зазначалося, з тим, що контактним

силам, що втягують необхідно додатково подолати поточні поздовжні сили пластично деформованого металу, тобто  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

#### 4.2.3. Методика оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатування

На основі проведених досліджень була запропонована методика, що дозволяє оцінити граничну захоплюючу здатність валків в сталому режимі. В основі цього методу лежить розгляд поздовжніх нормальних напружень і сил, що виникають в пластично деформованому металі. Вихідними даними для їх визначення є епюри контактних нормальних напружень. Ці епюри можна отримати при вирішенні диференціального рівняння рівноваги з використанням коректної для даних умов моделі тертя. Знаючи розподіл тиску в зоні контакту, і використовуючи рівняння пластичності, неважко розрахувати поздовжні внутрішні напруження, поточні поздовжні сили і їх середньоінтегральне результуюче значення. Вище було показано, що при стійкому прокатуванні ця результуюча не може бути спрямована по ходу прокатування (бути додатною), тому що вона є силою опору, реактивною силою. З цього випливає, що граничні умови прокатування настають тоді, коли сила  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  дорівнює нулю. Якщо ця сила є стискаючою (від'ємною), процес відбувається стійко, і штаба в осередку деформації знаходиться в рівноважному стані.

При цьому, як уже згадувалося, втрата рівноваги штаби може виникати і при наявності зони випередження. Це можливо тому, що при подальшому збільшенні кута захоплення втягуючих метал в валки сил стає недостатньо, щоб одночасно погасити приріст виштовхуючих сил і врівноважити результуючу  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

Таким чином, поздовжню стійкість прокату в осередку деформації, тобто прокатування без буксування, можна оцінити за



значенням середньоінтегральної результуючої сили пластично деформованого металу.

Послідовність оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатування полягає в наступному:

1. В результаті чисельного рішення рівняння рівноваги елементарних об'ємів металу (наприклад, методом Рунге-Кутта) отримуємо епюри розподілу контактних напружень в безрозмірному вигляді  $\frac{p_x}{2k_{\text{сер}}}$  і  $\frac{t_x}{2k_{\text{сер}}}$ .

2. З епюри нормального тиску, використовуючи рівняння пластичності, визначаємо поздовжнє внутрішнє напруження  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$ :

$$\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}} = \frac{p_x}{2k_{\text{сер}}} - 1.$$

3. Розраховуємо значення поточної поздовжньої внутрішньої сили пластично деформованого металу:

$$Q_{xп.}^* = \frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}} \left( \frac{h_1}{R} + \varphi^2 \right).$$

4. Визначаємо середньоінтегральну результуючу силу:

$$Q_{\text{сер.п.}}^* = \frac{1}{\alpha_y} \int_0^{\alpha_y} Q_{xп.}^* d\varphi.$$

Аналіз цієї результуючої дозволяє дати оцінку поздовжньої стійкості штаби в осередку деформації, і встановити чи будуть виконуватись умови, при яких прокатування ведеться без буксування.

Запропонований метод оцінки поздовжньої стійкості процесу став основою способу прокатування, на який отримано патент [46].

#### 4.2.4. Дослідження енергетичної взаємодії в осередку деформації при прокатуванні

Робота формозміни металу в осередку деформації при прокатуванні визначається, також, як і при осадженні, за формулою Фінка [47, 48]. Вона витрачається на подолання внутрішніх сил пластично деформованого прокату і залежить від фізико-механічних властивостей металу, що прокатується, геометрії осередку деформації, температури і кінематики процесу. З урахуванням аналізу, проведеного В. Н. Видріним [13], ця формула набула вигляду:

$$A_{\Phi} = 2k_{\text{сер}} \cdot h_1 \cdot b_1 (1 + S) R \psi \ln \frac{h_0}{h_1}, \quad (4.21)$$

де  $\psi$  — кут повороту валків, що відповідає довжині штаби яка прокатується.

Як відомо [13], формула Фінка в порівнянні з експериментом, дає істотно занижені результати. Зауважимо, що дослідження, пов'язані зі створенням нових технологій, вимагають більш точного урахування енерговитрат в зоні контакту штаби з валками.

Тому подальше вивчення даного питання буде актуальним. Для оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатування в роботах [35, 42] розроблена методика визначення середньої результуючої горизонтальних сил пластично деформованого металу  $Q_{\text{сер.п.}}$ . Поточне значення цієї сили можна розрахувати, виходячи з виразу:

$$Q_{\text{сер.п.}} = \sigma_x h_x b_{\text{сер}} = (p_x - 2k_{\text{сер}}) (h_1 + R\varphi^2) b_{\text{сер}}, \quad (4.22)$$

попередньо отримавши епюру нормальних напружень, наприклад, вирішуючи відоме рівняння рівноваги (4.15). Тоді:

$$Q_{\text{сер.п.}} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} Q_{x\text{п.}} d\varphi, \quad (4.23)$$

де  $h_x$  — поточне значення товщини штаби в зоні контакту штаби з валками;  $b_{\text{сер}}$  — середня ширина штаби;  $\varphi$  — поточний кут захоплення.

Згідно роботи [35] для того, щоб забезпечити стійкий процес прокатування контактним силам необхідно подолати середню результуючу  $Q_{\text{сер.п.}}$ . Схема дії сил в осередку деформації з урахуванням середньої результуючої має вигляд, наведений раніше на рис. 4.19.

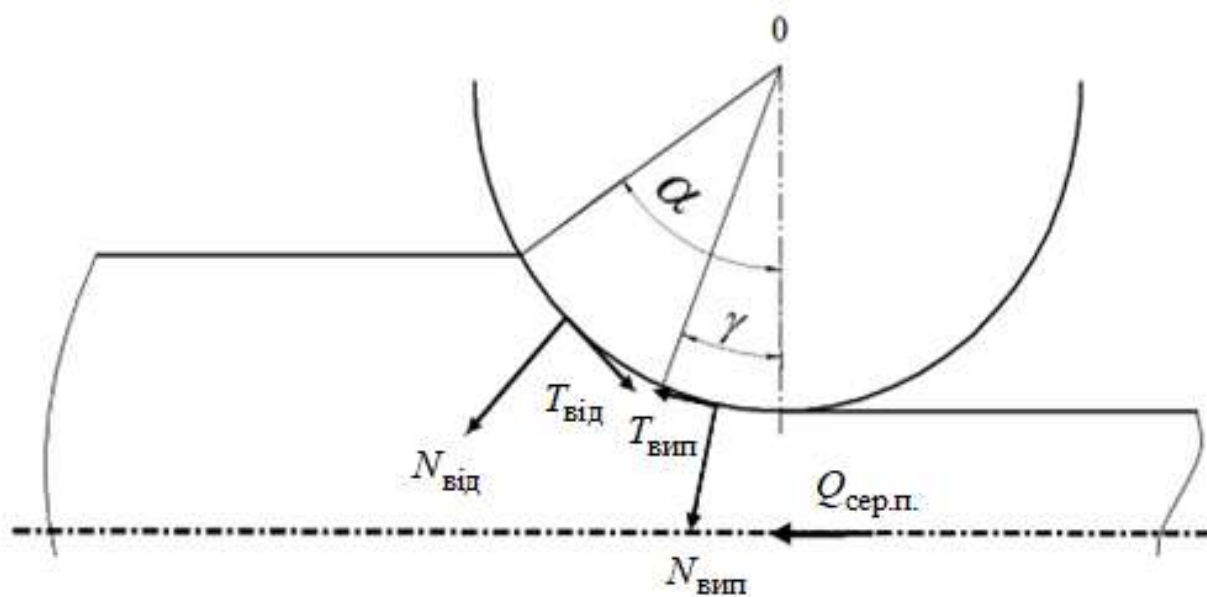


Рис. 4.19. Рівнодіючі сили в осередку деформації

У першому наближенні момент, який створюється цією силою, визначається

$$M_Q = Q_{\text{сер.п.}} R \quad (4.24)$$

Порівняємо його з моментом формозміни:

$$M_{\phi} = \frac{A_{\phi}}{\psi} = 2k_{\text{сер}} h_1 b_1 (1 + S) R \cdot \ln \frac{h_0}{h_1}, \quad (4.25)$$

попередньо приведемо їх до безрозмірного вигляду:

$$M_Q^* = \frac{M_Q}{2k_{\text{сер}}R \cdot b_{\text{сер}} \cdot R} = \frac{Q_{\text{сер.п.}}}{2k_{\text{сер}}R \cdot b_{\text{сер}}} = Q_{\text{сер.п.}}^* \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} M_{\phi}^* &= \frac{M_{\phi}}{2k_{\text{сер}}R \cdot b_{\text{сер}} \cdot R} = \frac{h_1}{R} \cdot \frac{b_1}{b_{\text{сер}}} (1+S) \cdot \ln \frac{h_0}{h_1} \\ &\approx \frac{h_1}{R} \cdot (1+S) \cdot \ln \frac{h_0}{h_1} \end{aligned} \quad (4.27)$$

З урахуванням втрат на тертя ковзання верхньої оцінки для  $M_Q^*$  і  $M_{\phi}^*$  може служити момент на бочках валків, який визначається:

$$2M_{\bar{\sigma}} = t_{\text{сер}}R \cdot b_{\text{сер}} \cdot R(\alpha - 2\gamma) \quad (4.28)$$

або в безрозмірній формі:

$$M_{\bar{\sigma}}^* = \frac{t_{\text{сер}}}{2k_{\text{сер}}}(\alpha - 2\gamma) \quad (4.29)$$

Проаналізуємо значення моментів  $2M_{\bar{\sigma}}$ ;  $M_{\phi}^*$  і  $M_Q^*$  при конкретних умовах простого процесу прокатування і різних режимах тертя в осередку деформації. В табл. 4.5 представлені режими обтиснень, умови тертя на контакті валків з деформованою штабою при прокатуванні в валках діаметром 200, 300 і 400 мм.

Розрахункові значення кута нейтрального перерізу  $\gamma$ , середньої результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ , сил тертя в зонах відставання  $T_{\text{від}}^*$  і випередження  $T_{\text{вип}}^*$ , моментів  $2M_{\bar{\sigma}}$ ;  $M_{\phi}^*$  і  $M_Q^*$  також наведені в цій таблиці. Як впливає з табл. 4.5, у всіх випадках прокатування.

Таблиця 4.2. Розрахункові значення моментів і середньої результуючої поздовжніх сил в осередку деформації

Номер експерименту		1	2	3	4	5	6
Товщина штаби, мм	$h_0$	2,0	4,0	5,0	6,0	2,0	3,0
	$h_1$	1,75	2,0	3,0	4,0	1,5	2,0
$\alpha$ , рад		0,05	0,1414	0,1155	0,1155	0,05	0,0701
$R$ , мм		100	100	150	150	200	200
$f$ або $f_3$		0,12	0,2	0,22	0,23	0,12	0,25
		0,3	0,35	0,3	0,3	0,15	0,25
$\gamma$ , рад		0,0197	0,044	0,041	0,0424	0,021	0,022
		0,0222	0,0472	0,04112	0,04216	0,01945	0,02727
$Q_{\text{сер.п.}}^*$		-0,0027	-0,0119	-0,0143	-0,013	-0,003	-0,0046
		-0,0069	-0,01832	-0,01336	-0,0136	-0,0031	-0,00736
$T_{\text{від}}^*$		0,00415	0,02826	0,02488	0,02375	0,00496	0,01237
		0,00834	0,03981	0,02231	0,022	0,004582	0,01071
$T_{\text{вип}}^*$		0,00274	0,01433	0,01501	0,01453	0,00329	0,01018
		0,00666	0,01653	0,01234	0,01265	0,002917	0,00682
$2M_{\text{б}}^*$		0,00282	0,02786	0,0197	0,01844	0,00334	0,00488
		0,00736	0,03254	0,01995	0,0187	0,00333	0,00778
$M_Q^*$		0,0027	0,0119	0,013	0,013	0,003	0,0046
		0,0069	0,01832	0,01336	0,0136	0,0031	0,00736
$M_{\text{ф}}^*$		0,00237	0,011	0,0111	0,0115	0,0023	0,046
		0,0024	0,0154	0,01108	0,0115	0,00226	0,00435
$M_Q^* / M_{\text{ф}}^*$		1,14	1,08	1,18	1,13	1,3	1,07
		2,88	1,19	1,18	1,18	1,37	1,69

Примітка: верхній рядок для кожного прокатуваного зразка стосується до випадку, коли моделлю тертя в осередку деформації служила залежність:  $t_x = f \cdot p_x$ , нижня — закон пластичного тертя  $t_x = f_3 \cdot 2k_{\text{сер}}$ .

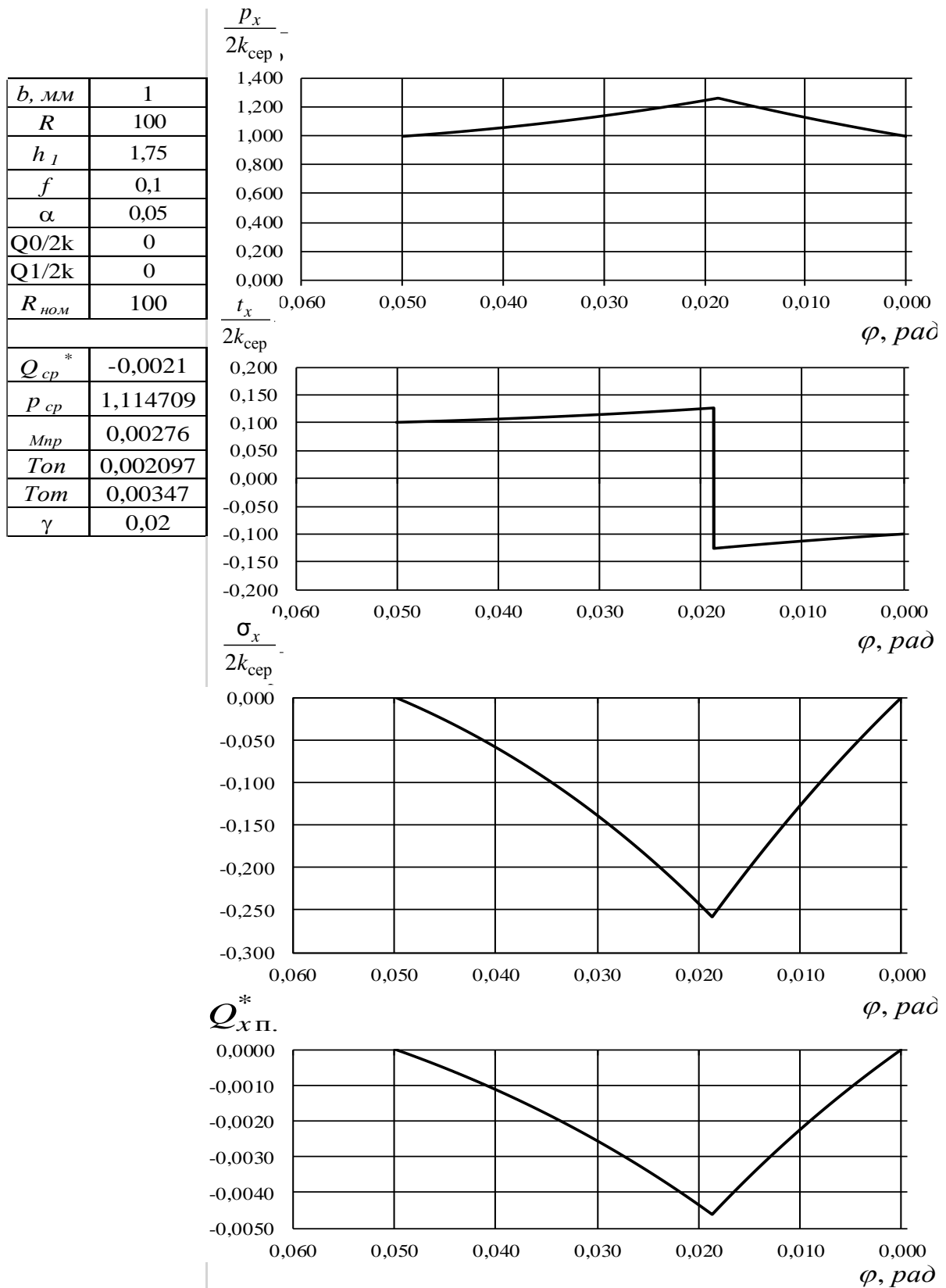


Рис. 4.20. Епюри контактних і внутрішніх напружень, а також поточної поздовжньої сили

$Q_{\text{сер.п.}}^*$  є від'ємною величиною, тобто спрямована протилежно руху штаби, що, згідно з [35, 42], вказує на стійкий процес прокатування без проявів пробуксувок.

Для прикладу на рис. 4.20 показано розподіл нормального тиску  $p_x/2k_{\text{сер}}$  і питомих сил тертя  $t_x/2k_{\text{сер}}$ , а також внутрішніх поздовжніх нормальних напружень  $\frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}}$  і поточної поздовжньої

сили  $Q_{x\text{п.}}^*$  при прокатуванні першого зразка з кулонівською моделлю тертя. Крім того, на цьому ж рисунку наведені значення  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ ,  $T_{\text{від}}^*$ ,  $T_{\text{вип}}^*$  і кута  $\gamma$ .

Як видно, у всіх перерізах поздовжні нормальні напруження є стискаючими, поточні поздовжні сили по всій довжині осередку деформації спрямовані протилежно руху штаби,  $Q_{\text{сер.п.}}^* = -0,0021$ , що характеризує процес прокатування як стійкий.

Проаналізуємо результати розрахунків, наведені в табл. 4.5. Як випливає з неї, у всіх випадках прокатування момент на бочках валків істотно перевищує значення  $M_{\text{ф}}^*$  і  $M_{\text{Q}}^*$ , що відповідає закону збереження енергії при простому процесі прокатування

$$2M_{\text{б}} = M_{\text{ф}} + 2M_{\text{тер.к.}}$$

де  $2M_{\text{тер.к.}}$  — момент сил тертя ковзання в осередку деформації.

Звернемо увагу на те, що в зміні моментів  $M_{\text{ф}}^*$  і  $M_{\text{Q}}^*$  спостерігається певна узгодженість. Залежно від параметрів прокатування вони синхронно або зростають, або зменшуються. Причому зазначені моменти істотно розрізняються тільки в двох випадках (див. розрахунки під номером 1 і 6 при моделі пластичного тертя). Ці результати дають підставу припустити, що природа дії моментів  $M_{\text{ф}}^*$  і  $M_{\text{Q}}^*$  однакова.

Тоді середня результуюча  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  являє собою внутрішню силу, яку необхідно подолати активним силам, щоб забезпечити формозміну металу в подовжньому напрямку. Саме в цьому полягає фізична суть сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$ .

Результати проведених розрахунків також показали, що момент формозміни штаби залежить від умов тертя на контакті. При моделі тертя ковзання ( $t_x = f \cdot p_x$ ) він трохи менше в порівнянні з законом пластичного тертя.

У всіх розглянутих випадках прокатування  $M_Q^*$  трохи перевищує  $M_{\text{ф}}^*$ , тому момент формозміни металу, розрахований за формулою (4.29), повинен давати результати ближчі до експерименту.

Таким чином, запропоновано нову методику визначення моменту формозміни металу, яка базується на розрахунку середньої результуючої подовжніх сил в осередку деформації. Розрахунки моменту формозміни за запропонованою методикою дають результати на 15—30 % більші, ніж значення цього параметру обчислені за формулою Фінка.

### **4.3. Подовжня стійкість штаби в осередку деформації при прокатуванні з натяжінням**

Безперервне тонколистове прокатування завжди ведеться з натяжінням штаби, що дозволяє підвищити стійкість процесу від поперечного зміщення металу. Натяжіння штаби істотно впливає на витрату енергії і на співвідношення зон відставання і випередження. Заднє натяжіння зменшує довжину зони випередження і збільшує потужність, що витрачається на прокатування.

Слід підкреслити, що сила заднього натяжіння практично завжди більше сили переднього натяжіння. Це повинно відображатися на подовжній стійкості процесу. Співвідношення між зад-



нім і переднім натяжінням залежить від коефіцієнта тертя в контакті валка і штаби, характеру розподілу питомих сил тертя і довжини зони прилипання. Регулювання в раціональних межах умов тертя при прокатуванні з натяжінням може відкрити додаткові резерви для побудови енергозберігаючої технології виробництва. Відомо, що при математичному моделюванні складних технологічних процесів обмежитися тільки однією моделлю, як правило, не вдається.

#### 4.3.1. Методи розрахунку напружень тертя при прокатуванні

Розрахунок напружень тертя це одна з основних задач теорії пластичного тертя. У ній використовують ряд методик для розрахунку напружень тертя, одні з яких орієнтовані на розрахунок епюри тертя  $t$ , інші — на розрахунок середнього напруження тертя  $t_{\text{сер}}$  [49].

При високих значеннях  $p_{\text{сер}}$  і при високих значеннях коефіцієнта тертя розрахункове значення за відомим виразом  $t_{\text{сер}} = fp_{\text{сер}}$  може перевищувати максимальні значення тертя [119], що вже зазначалося в попередніх розділах і показано на рис. 4.13. Автор [49] рекомендує використовувати модель тертя Кулона тільки при невеликих (до 0,1) значеннях коефіцієнта тертя.

У таких випадках застосовують принцип декомпозиції і будують систему моделей різного ієрархічного рівня. Однією з них є двохзвенна модель тертя в осередку деформації при прокатуванні, виведення і аналіз якої наведено нижче.

### 4.3.2. Двохзвенна модель тертя в осередку деформації при прокатуванні

В роботах [50—52] наведені моделі розподілу питомих сил тертя в осередку деформації, які в певному діапазоні зміни параметрів прокатування дають досить близькі по відношенню до результатів дослідів значення. Однак вони відносяться до розряду відповідних функцій і фізичного обґрунтування не мають.

У дослідженні [53] запропонована модель розподілу питомих сил тертя і зроблено спробу її обґрунтування з позиції сучасної теорії прокатування.

Припустимо процес прокатування як осадку в напрямку осі, що проходить під кутом  $\frac{\alpha}{2}$  ( $\alpha$  — кут захоплення) до вертикалі, з подальшим транспортуванням металу з осередку деформації як пружного тіла.

Виділимо елемент металу у вигляді трикутної призми (рис. 4.21) і розглянемо його рівновагу в умовах осаджування. Припустимо, що деформація є плоскою і взаємно—перпендикулярні грані призми є головними площадками. У цьому випадку на гранях призми будуть діяти головні нормальні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ , а на контактній поверхні, що є похилою площадкою, — нормальний тиск  $p_x$  і дотичне напруження  $\tau_{oc}$ .

Умова рівноваги елемента має вигляд:

$$\begin{cases} \sigma_1 \sin \psi dl - p_x \cos \psi dl + \tau_{oc} \sin \psi dl = 0; \\ \sigma_3 \cos \psi dl - p_x \cos \psi dl - \tau_{oc} \sin \psi dl = 0. \end{cases}$$

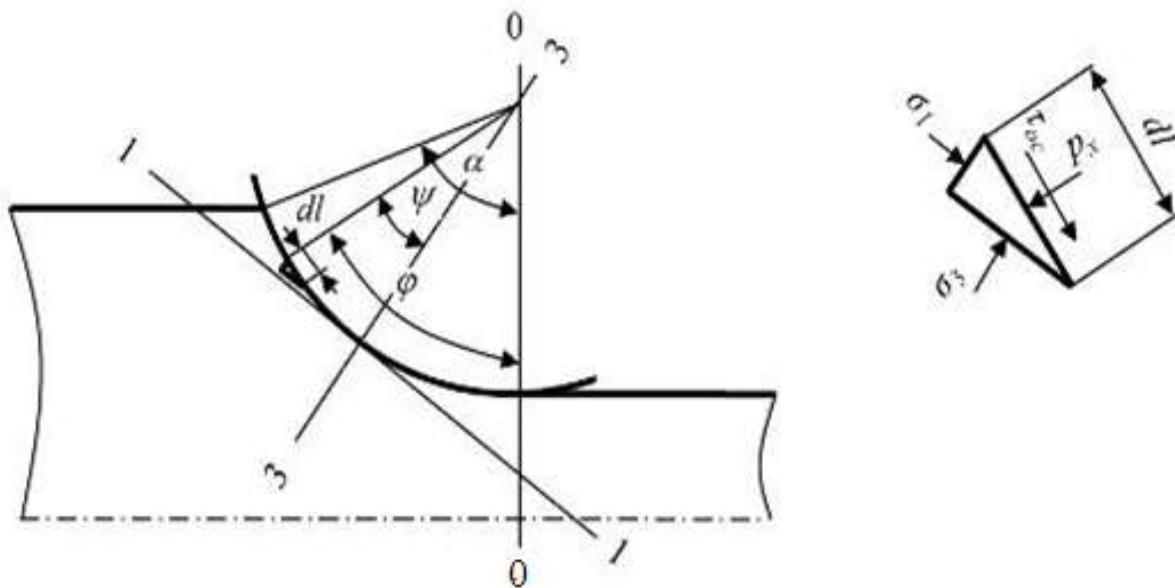


Рис. 4.21. Схема сил, прикладених до елементарної призми

Віднімаючи другий вираз з першого, і з огляду на рівняння пластичності, маємо:

$$\tau_{oc} = \frac{1}{2} 2k_{cep} \sin 2\psi.$$

При виділенні елемента праворуч від осі 3—3 дотичне напруження  $\tau_{oc}$  змінить свій напрямок, тому що пластична течія металу направлена в протилежну сторону. Кінцевий вираз для визначення  $\tau_{oc}$  праворуч від осі 3—3 має вигляд, аналогічний вищеведеному рівнянню. Якщо прийняти за початок відліку вісь 0—0 (рис. 4.21), то отримаємо одне рівняння, що описує зміну питомих сил тертя на контактї при осадці металу валками:

$$\tau_{oc} = \frac{1}{2} 2k_{cep} \sin 2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (4.30)$$

Виокремимо другу складову тертя, пов'язану з транспортуванням штаби через осередок деформації попередньо продеформованих елементів металу. Нехай ця складова залежить від ковзання і визначається функцією:

$$\tau_{\text{тер}} = fp_x. \quad (4.31)$$

Тоді рівняння питомої сили тертя в зоні контакту металу з валками набуває вигляду:

$$t_x = \tau_{\text{тер}} + \tau_{\text{ос}} = fp_x + \frac{1}{2} 2k_{\text{сер}} \sin 2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (4.32)$$

Зауважимо, що  $f$  є умовним коефіцієнтом. Як впливає з виразу (4.32), він не дорівнює середньому коефіцієнту тертя в осередку деформації, що одержаний як відношення площ епюр питомих сил тертя і нормального тиску.

Необхідно зазначити, що представлена модель в певній мірі відповідає рівнянню К. Н. Шевченко, наведеному в [53]:

$$\tau_x = fp_x + t_0(V_B - V_x), \quad (4.33)$$

де  $t_0$  — деяка постійна;  $V_B$  — лінійна швидкість обертання валків;  $V_x$  — тангенціальна швидкість металу.

Моделі зміни питомих сил тертя (4.32) і (4.33) відносять до розряду двохзвенних.

Проведемо перевірку на відповідність виразу (3.32) граничним умовам прокатування. З теорії відомо, що гранична захоплююча здатність валків в сталому режимі виникає при  $\alpha = 2f$ . В цьому випадку осередок деформації є тільки зоною відставання і питомі сили тертя на виході металу з валків дорівнюють нулю. У першому наближенні, приймаючи  $\sin 2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) \approx 2\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)$  і з огляду на граничні умови на виході металу з валків:  $p_x = 2k_{\text{сер}}$  і  $t_x = 0$ , з рівняння (4.32) отримуємо  $\alpha = 2f$ . Як видно, вираз (4.32) відображає граничну умову прокатування в сталому режимі.

Вводячи в другій член виразу (4.32) коефіцієнт  $n_1 = \left(\frac{2f}{\alpha}\right)^2$ , з останнього можна отримати відому в теорії формулу для визначення кута нейтрального перерізу.

Проведений аналіз показує, що запропонована модель тертя відповідає граничним і кинематическим умов прокатування.

В [54] О. П. Грудєв зробив суттєве зауваження щодо формули (4.33), пов'язане з тим, що добуток  $fp_x$  становить лише частину від загальної питомої сили тертя в контакті валків і штаби. Тоді як в теорії прийнято вважати, що цей добуток є повною питомою силою тертя. З огляду на це, введемо в рівняння (4.32) коефіцієнт  $n_2$ , який за величиною завжди менше одиниці і визначається з граничних умов при вирішенні рівняння рівноваги. Це можливо, так як модель (4.32) описує зміну питомих сил тертя по всій довжині осередку деформації, як в зоні відставання, так і в зоні випередження. Отже, гранична умова, що при  $h_x = h_1$ , тиск  $p_x = 2k_{\text{сер}}$  можна використовувати для визначення  $n_2$ .

Крім цього, для того, щоб добуток  $n_2 f$  було близьким до коефіцієнта тертя ковзання в пружній зоні і початковій частині осередку деформації до другого доданку в якості множника введемо функцію  $\frac{\alpha - \varphi}{\alpha}$ .

Остаточно модель розподілу питомих сил тертя в осередку деформації при прокатуванні набуває вигляду:

$$\frac{t_x}{2k_{\text{сер}}} = n_2 f \frac{p_x}{2k_{\text{сер}}} + \frac{1}{2} \sin \left[ 2n_1 \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right) \right] \frac{\alpha - \varphi}{\alpha}. \quad (4.34)$$

Зауважимо, що  $f$  є умовним коефіцієнтом, з вище представленого рівняння випливає, що він не дорівнює середньому кое-

фіцієнту тертя в осередку деформації, який отримано як відношення площ епюр питомих сил тертя і нормального тиску

$$f_{\text{сер}} = \frac{\int_{\gamma}^{\alpha} \frac{t_x}{2k_{\text{сер}}} d\varphi + \int_0^{\gamma} \frac{t_x}{2k_{\text{сер}}} d\varphi}{\int_0^{\alpha} \frac{P_x}{2k_{\text{сер}}} d\varphi} \quad (4.35)$$

Дамо деякі пояснення щодо методики розрахунку питомих сил тертя згідно (4.34) і середнього коефіцієнта тертя (4.35) в осередку деформації.

Зауважимо, що цей середній коефіцієнт повинен бути отриманий з рішення диференціального рівняння рівноваги (4.15) з урахуванням (4.34) і дорівнює його дослідному значенню для заданих умов прокатування. Тому процедура вирішення складається з декількох етапів. Попередньо слід задатися умовним коефіцієнтом  $f$ . У першому наближенні він може бути прийнятий рівним дослідному значенню коефіцієнта тертя ковзання, або розрахований по одній з відомих емпіричних формул, наприклад, формулою О. П. Грудєва [1]. В результаті рішення рівняння рівноваги елементарних об'ємів металу з урахуванням моделі тертя (4.34) отримуємо епюри розподілу контактних напружень і середній коефіцієнт тертя  $f_{\text{сер}}$ . Якщо цей коефіцієнт не задовольняє дослідним даними, то варіюючи величиною  $f$ , знаходимо необхідне значення  $f_{\text{сер}}$ . В цьому випадку розрахований середній тиск металу на валки буде відповідати дослідному значенню коефіцієнта тертя і рівноваги штаби в осередку деформації.

Для розрахунку  $\frac{P_x}{2k_{\text{сер}}}$ ,  $\frac{t_x}{2k_{\text{сер}}}$  і  $f_{\text{сер}}$  із застосуванням ЕОМ

була розроблена програма чисельного визначення цих величин з використанням методу Рунге—Кутта.

На нашу думку, цю методику розрахунку контактних напружень і середнього коефіцієнта тертя можна поширити на випадки тонколистового гарячого і холодного прокатування, а також при визначенні поздовжньої стійкості штаби в осередку деформації.

Нижче наведені приклади розрахунку контактних напружень при параметрах деформації, що відповідають дослідному прокатуванню жерсті. Так, в роботі [55] показані режими обтиснень, кінематичні і силові параметри при прокатуванні жерсті

0,2×855 мм на стані 1400. Розрахунки розподілу  $\frac{P_x}{2k_{\text{сер}}}$  і  $\frac{t_x}{2k_{\text{сер}}}$  на-

ведені для випадків прокатування в третій і четвертій клітках. Параметри деформації наведені в табл. 4.6. Результати обчислень показані на рис. 4.22 і в табл. 4.6 (знаменник).

*Таблиця 4.6.* Режими деформації, кінематичні і силові параметри прокатування жерсті на стані 1400

№ кліті	Товщина штаби, мм		$\frac{\sigma_0}{\sigma_{T0}}$	$\frac{\sigma_1}{\sigma_{T1}}$	$f_y$	$\frac{P_{\text{сер}}}{2k_{\text{сер}}}$	$\alpha_{\text{спл}}$ , рад	$f$	$S, \%$
	$h_0$	$h_1$							
3	1,24	0,73	0,238	0,223	0,049	1,21	0,0325	0,057	5,45
		1,24				5,39			
4	0,73	0,44	0,223	0,266	0,048	1,33	0,0225	0,059	7,55
						1,6			6,38

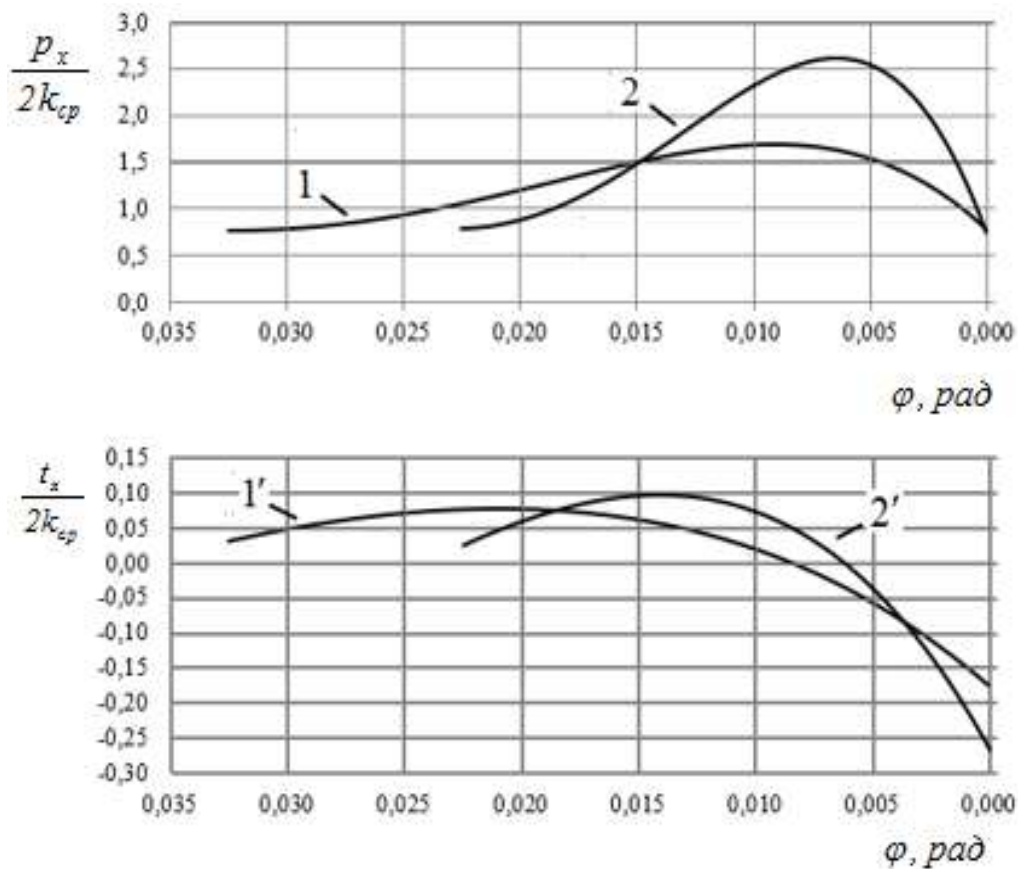


Рис. 4.22. Розподіл контактних напружень при прокатуванні металу в 3 і 4 клітках стану 1400

Коригуючи значення  $f$ , рівність між  $f_{сер}$  і дослідним коефіцієнтом тертя  $f_y$  ( $f_{сер} = f_y = 0,049$ ) при прокатуванні в третій клітці було досягнуто при  $f = 0,057$  (табл. 4.6). Зауважимо також, що добуток  $fn_2 = 0,04$  істотно нижче середнього по осередку деформації коефіцієнта тертя. Необхідно також зазначити, що розрахункові і дослідні значення безрозмірного середнього тиску  $\frac{P_x}{2k_{сер}}$  і випередження  $S$  досить близькі. При розрахунку випередження кут нейтрального перерізу визначали безпосередньо з епюри розподілу питомих сил тертя.



Аналогічні висновки можна зробити, аналізуючи дані прокатування металу в четвертій кліті.

Для подальших досліджень на основі рівняння (4.34) було визначено набір значень коефіцієнтів  $n_1$  і  $n_2$  в залежності від значень коефіцієнту тертя отриманого по формулі (4.35). Значення цих коефіцієнтів отримано при однакових геометричних параметрів прокатування без натяжіння. Результати залежності цих коефіцієнтів від коефіцієнту тертя наведено на рис. 4.23. Із залежностей наведених на рис. 4.23 видно, що коефіцієнт  $n_1$  знаходиться у діапазоні значень менше одиниці і зменшується зі збільшенням  $f_{\text{сер}}$ .

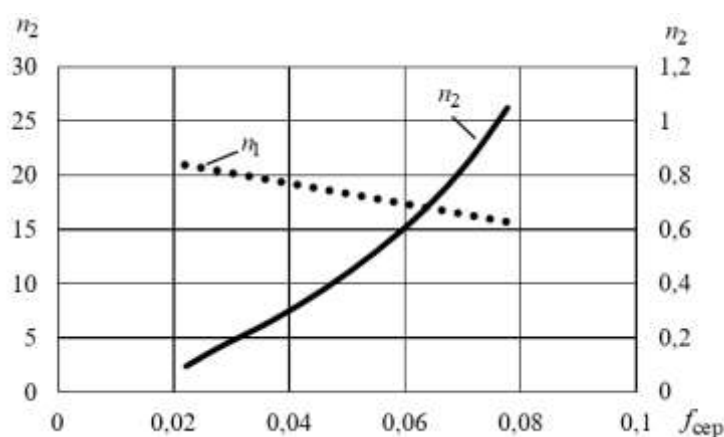


Рис. 4.23. Значення  $n_1$  і  $n_2$  від коефіцієнту тертя  $f_{\text{сер}}$

Нижче буде продовжений порівняльний аналіз дослідних епюр розподілу нормальних контактних напружень при прокатуванні з різним натяжінням штаби і теоретичним розрахунком зміни тиску в осередку деформації при використанні двохзвенної моделі тертя.

Попередньо розглянемо методику визначення результуючої поздовжніх сил і стійкості процесу при прокатуванні з натяжінням штаби.

### 4.3.3. Методика оцінки поздовжньої стійкості штаби в осередку деформації при прокатуванні з натяжінням

У попередньому розділі, на основі аналізу поздовжніх сил пластично деформованого металу, розроблена методика визначення поздовжньої стійкості штаби в валках при простому процесі прокатування.

Використаємо цю ідею для оцінки поздовжньої стійкості штаби при прокатуванні з натяжінням. Нехай для цих умов деформації виконано чисельне рішення рівняння рівноваги металу в осередку деформації і отримана еюра розподілу тиску по довжині осередку деформації, що має вигляд, наведений на рис. 4.24.

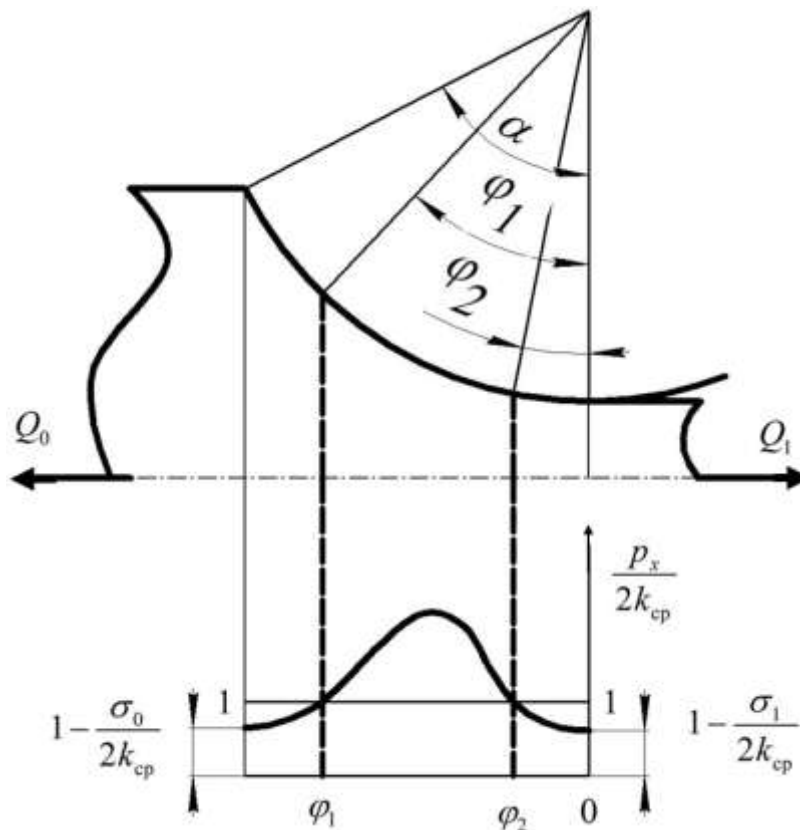


Рис. 4.24. Еюра розподілу тиску при прокатуванні з натяжінням

Зауважимо, що в перерізах  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  тиск  $p_x$  дорівнює середньому опору деформації  $2k_{\text{ср}}$ . На вході в осередок деформації діє сила заднього натягіння розкату  $Q_0$  і, відповідно, поздовжні напруження натягіння  $\sigma_0/2k_{\text{ср}}$ , а на виході — сила переднього натягіння  $Q_1$  і напруження  $\sigma_1/2k_{\text{ср}}$ .

Виділимо поточний об'єм поблизу входу металу у валки, обмежений перерізами  $\alpha$  і  $\varphi_1$  (рис. 4.25). Дію відкинутої правої частині штаби замінимо напруженнями  $\sigma_x/2k_{\text{ср}}$ . Якщо процес є стабільним, то рівновага поточного об'єму можлива тільки у випадку, коли напруження  $\sigma_x/2k_{\text{ср}}$  спрямовані по ходу прокатки. Цей напрямок поздовжніх нормальних напружень буде незмінним аж до перерізу  $\varphi_1$ .

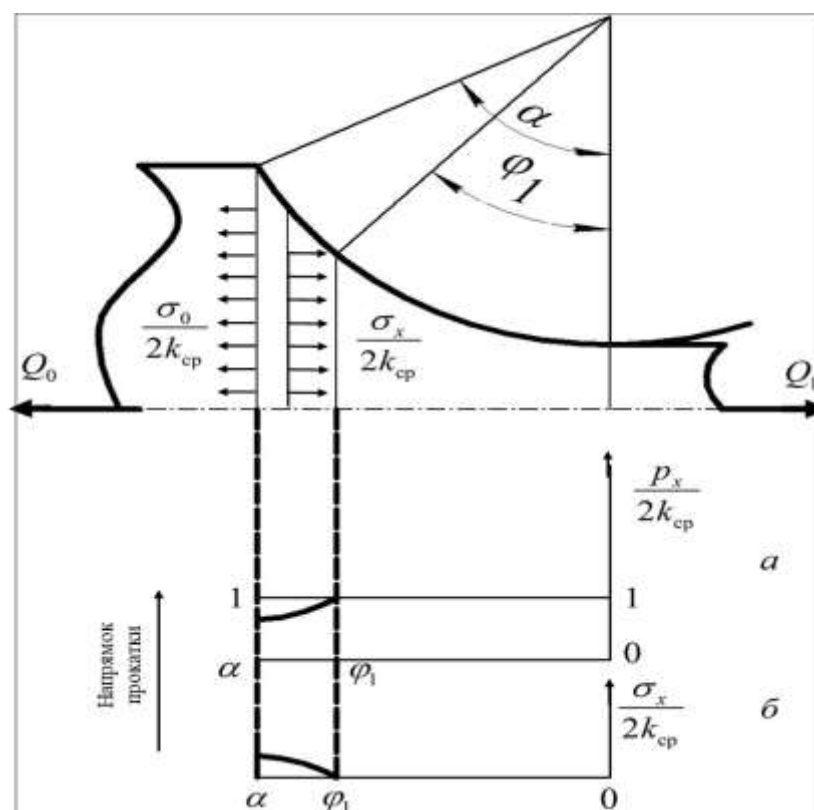


Рис. 4.25. Тиск і поздовжні напруження на ділянці осередку деформації, обмежений перерізами  $\alpha$  і  $\varphi_1$

Відповідно до рівняння пластичності, напруження  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$  на ділянці  $\alpha—\varphi_1$  будуть змінюватися так, як показано на рис. 4.25, б, і зазначений напрямок буде вважатися додатним.

Далі розглянемо ділянку осередку деформації, обмежений перерізами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  (рис. 4.26). Тут, відповідно до рівняння пластичності, напруження  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$  є стискаючі і спрямовані проти руху штаби, тобто так, як показано на рис. 4.26, б.

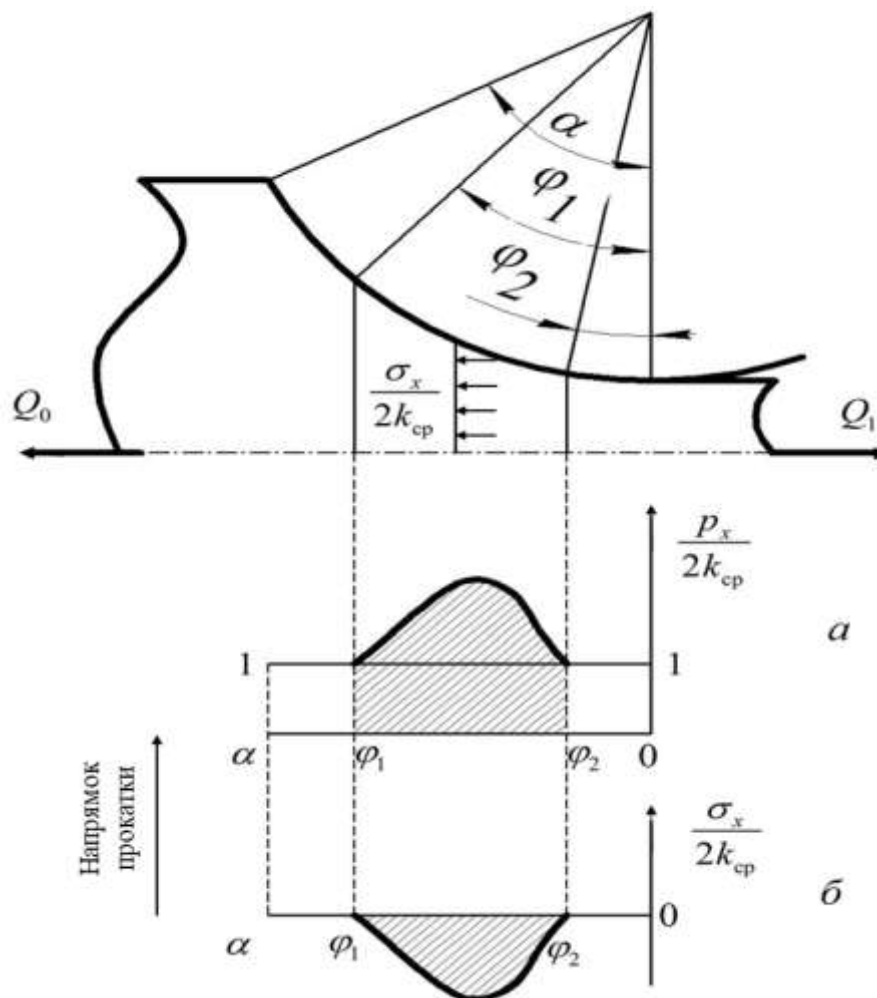


Рис. 4.26. Тиск і поздовжні напруження на ділянці осередку деформації, обмежений перерізами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$

На ділянці осередку деформації, обмеженому перерізами 0 і  $\varphi_2$  (рис. 4.30) розподіл поздовжніх напружень  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$  істотно залежить від сили переднього натягіння розкату. Рівновага на цій ділянці буде дотримуватися, якщо поздовжні напруження будуть спрямовані протилежно руху штаби (рис. 4.27, б).

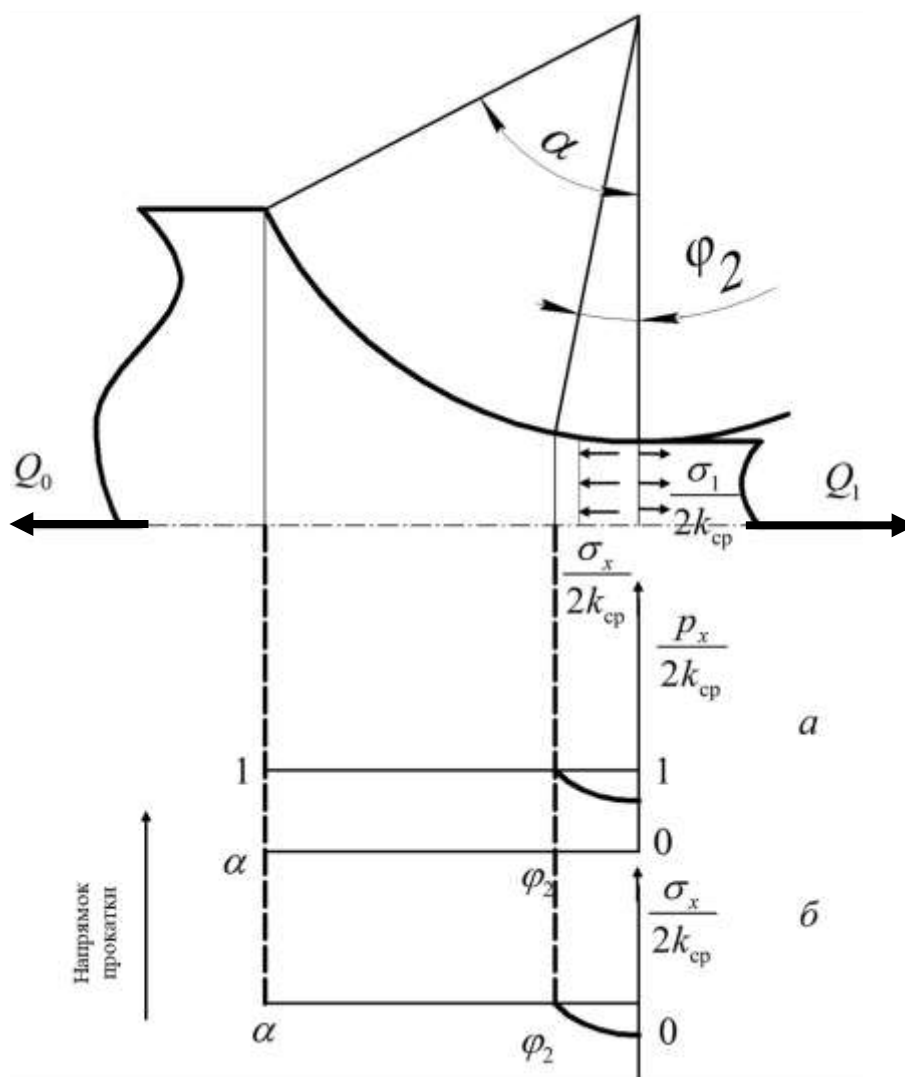


Рис. 4.27. Тиск і поздовжні напруження поблизу виходу металу з валків

Тоді в цілому епюра зміни поздовжніх напружень  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$  по довжині осередку деформації матиме вигляд, показаний на рис. 4.28.

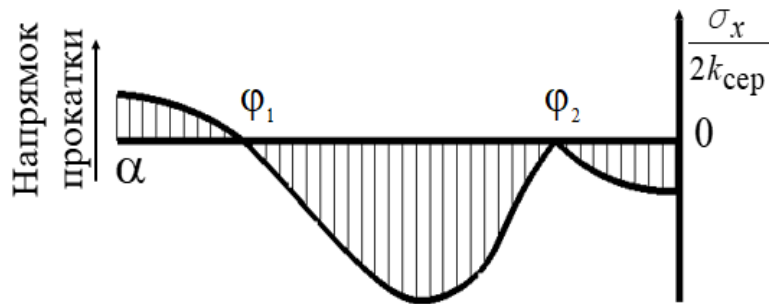


Рис. 4.28. Розподіл поздовжніх нормальних напружень в осередку деформації при прокатуванні з натягінням

Маючи картину розподілу  $\sigma_x/2k_{\text{сер}}$ , неважко розрахувати поточну поздовжню силу пластично деформованого металу в безрозмірному вигляді:

$$Q_{xп.}^* = \frac{\sigma_x}{2k_{\text{сер}}} \left( \frac{h_1}{R} + \phi^2 \right).$$

Характер її зміни показаний на рис. 4.29.

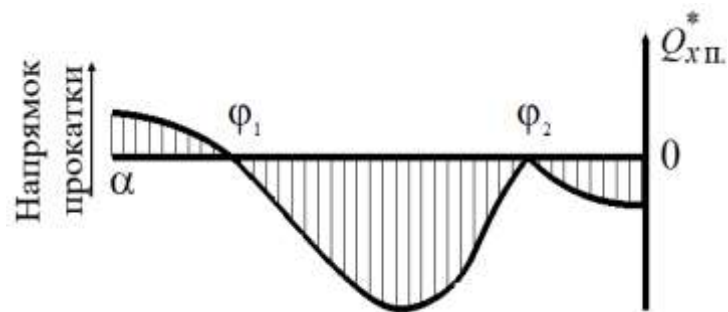


Рис. 4.29. Характер зміни поточної поздовжньої сили по довжині осередку деформації

Середньоінтегральне значення результуючої поздовжніх сил при деформації штаби з натягінням розраховується за формулою:

$$Q_{\text{сер.п.}}^{*Н} = \frac{1}{\alpha} \left[ \int_{\varphi_1}^{\alpha} Q_{x\text{п.}}^{*} d\varphi - \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} Q_{x\text{п.}}^{*} d\varphi - \int_0^{\varphi_2} Q_{x\text{п.}}^{*} d\varphi \right]. \quad (4.36)$$

Геометрично вираз (4.36) являє собою алгебраїчну суму площ під кривою  $Q_{x\text{п.}}^{*Н}$  на ділянках  $\alpha - \varphi_1$ ,  $\varphi_1 - \varphi_2$  і  $\varphi_2 - 0$ , віднесених до кута захоплення.

За величиною і напрямком дії результуючої  $Q_{\text{сер.п.}}^{*Н}$  можна оцінити стійкість штаби в осередку деформації при прокатуванні з натягінням, як і при простому процесі.

Проаналізуємо стійкість процесу прокатування при деформації металу з різними режимами натягіння і порівняємо результати розрахунків з дослідними даними, наведеними в [24].

#### **4.3.4. Порівняльний аналіз дослідних і розрахункових епюр контактних напружень при прокатуванні з натягінням штаби**

На основі експериментальних даних А. А. Корольова [24] по дослідженню впливу натягіння штаби на характер розподілу тиску в осередку деформації і випередження, наведені в табл. 4.3, проаналізуємо зміну результуючої поздовжніх сил  $Q_{\text{сер.п.}}^{*Н}$  і визначимо подовжню стійкість процесу прокатування.

Автор проводив дослідну прокатку на лабораторному стані дуо в сталевих гладких валках діаметром 250 мм. Устаткування стану включало 2 моталки, що дозволило прокатувати рулонну сталь (сталь 10, відпалену) поперечними розмірами  $1,95 \times 30$  мм з різними натягінням штаби і незмінним налаштуванням валків. При цьому зміна кінцевої товщини прокату від досліду до досліду виникала через неоднакове сплющення валків при прокатуванні штаби з різними натягіннями. Розподіл тиску в осередку

деформації вимірювався штифтовою месдозою, а випередження визначалося методом кернів.

Вихідні дані і результати дослідів наведені в табл. 4.3 і 4.4.

При розрахунках контактних напружень скористалися диференційним рівнянням рівноваги при питомих силах тертя, заданих виразом (4.34), середнє значення опору деформації і умовах прокатування, наведених в першому розділі роботи в табл. 4.3.

При визначенні середнього опору деформації використовували залежність напруження плинності від відносного обтиснення для сталі 10, наведену в роботі [24].

Середнє по осередку деформації напруження плинності визначали за формулою:

$$\sigma_{\text{Ссер}} = \frac{\sigma_{\text{Свих}} + \sigma_{\text{Ск}}}{2}, \quad (4.37)$$

де  $\sigma_{\text{Свих}}$  і  $\sigma_{\text{Ск}}$  — напруження плинності зразків до і після проходження відповідно.

Початкову межу плинності металу брали 260 МПа.

Середній опір деформації, згідно [1], визначається по формулі:

$$2k_{\text{сер}} = k_1 k_2 \sigma_{\text{Ссер}}, \quad (4.38)$$

де  $k_1$  — коефіцієнт, що враховує схему деформації,  $k_1 = 1,15$ ;  $k_2$  — коефіцієнт, що враховує вплив температури зразка в зоні прокатування і швидкість деформації.

Згідно [1],  $k_2 = 1,1—1,2$ , в розрахунках приймали 1,15.

Розраховані значення середнього опору деформації для кожного із зразків, які прокатуються наведено в табл. 4.8.

Величини сплюснутих кута захоплення і радіусу валків визначали наступним чином:

$$\alpha_{\text{СПЛ}} = \Delta h / l_{\text{СПЛ}}; \quad (4.39)$$



$$R_{\text{СПЛ}} = l_{\text{СПЛ}} / \alpha_{\text{СПЛ}} \cdot \quad (4.40)$$

**Таблиця 4.7. Дослідні і розрахункові значення середніх тисків в осередку деформації при прокатуванні сталі 10 і усередненому опорі деформації**

№ зразка	$\alpha_{\text{СПЛ}}$ , рад	$R_{\text{СПЛ}}$ , мм	$2k_{\text{сер}}$ , МПа	$p_{\text{сер}}$ , МПа		Відносна помилка, %	$f_{\text{сер}}$
				дослідне	розрах.		
90	0,04	344	447	720	729	1,2	0,106
91	0,0453	307	435	580	609	4,7	0,119
92	0,0498	262	442	450	506	12	0,14
93	0,0317	319	397	550	569	3	0,121
94	0,0399	282	417	520	531	2	0,135
95	0,0426	325	436	630	718	12	0,105
96	0,049	249	440	600	625	4	0,122
97	0,0427	346	443	670	759	12	0,101
98	0,0506	254	443	620	618	≈0	0,129
99	0,0569	231	452	480	499	4	0,15
100	0,067	214	463	400	525	23,8	0,196

На графіках рис. 4.30—4.33 під номером 1 наведені експериментальні епюри розподілу тиску при різних передніх і задніх натяжіннях штаби. Аналіз впливу натяжіння на величину і характер зміни нормального контактного напруження, а також на середній тиск і силу прокатування докладно описаний в дослідженнях [24]. А. А. Корольовим виявлені нові особливості цього впливу і встановлені закономірності досліджуваних залежностей.

Не торкаючись зроблених автором висновків, порівняємо теоретичні та експериментальні епюри розподілу тиску. Розрахо-

вані епюри розподілу нормального тиску і питомих сил тертя наведені на рис. 4.30—4.33 (під номерами 3 і 4 відповідно).

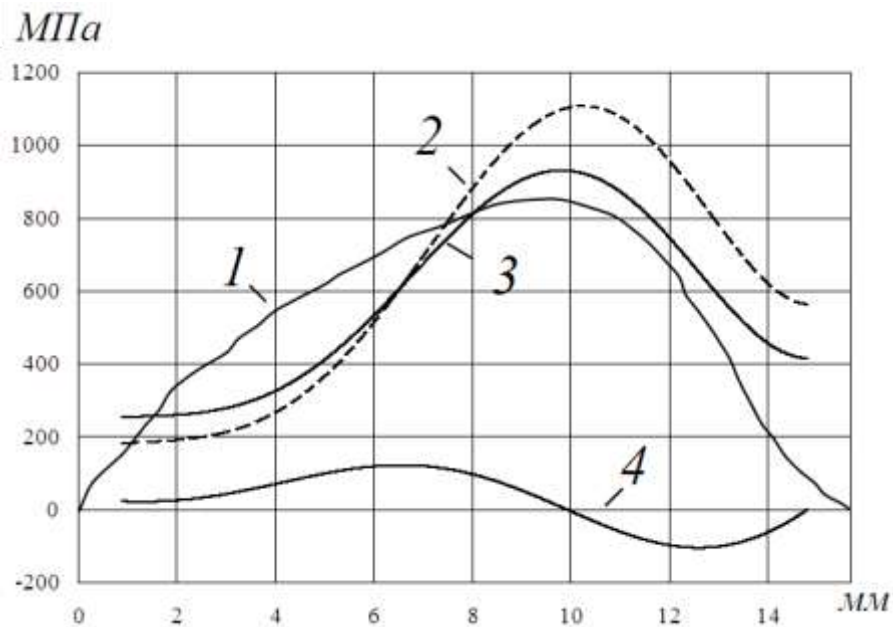


Рис. 4.30. Дослідна і розрахункові епюри контактних напружень при прокатуванні зразка № 91

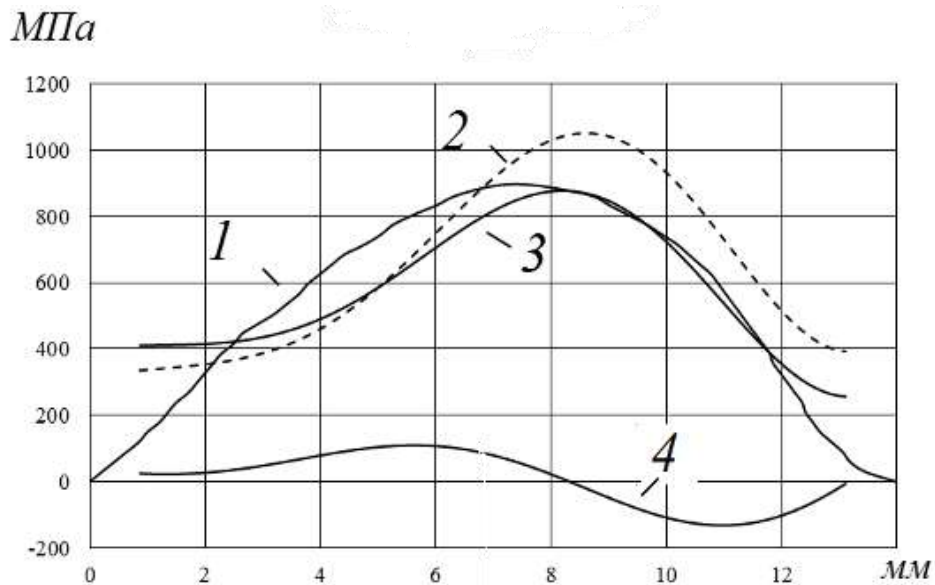


Рис. 4.31. Дослідна і розрахункові епюри контактних напружень при прокатуванні зразка № 96

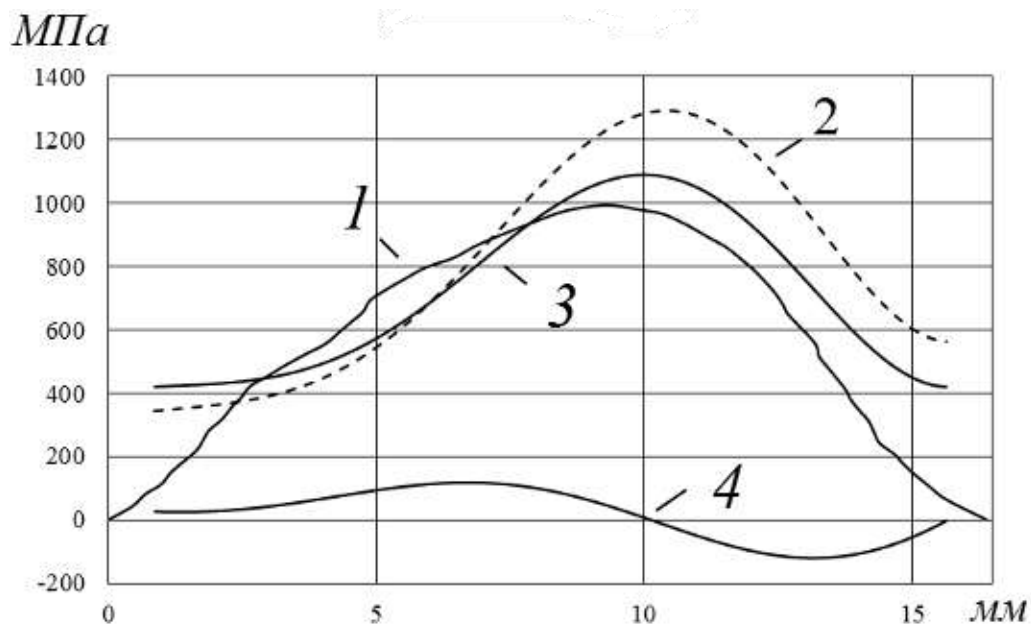


Рис. 4.32. Дослідна і розрахункові епюри контактних напружень при прокатуванні зразка № 97

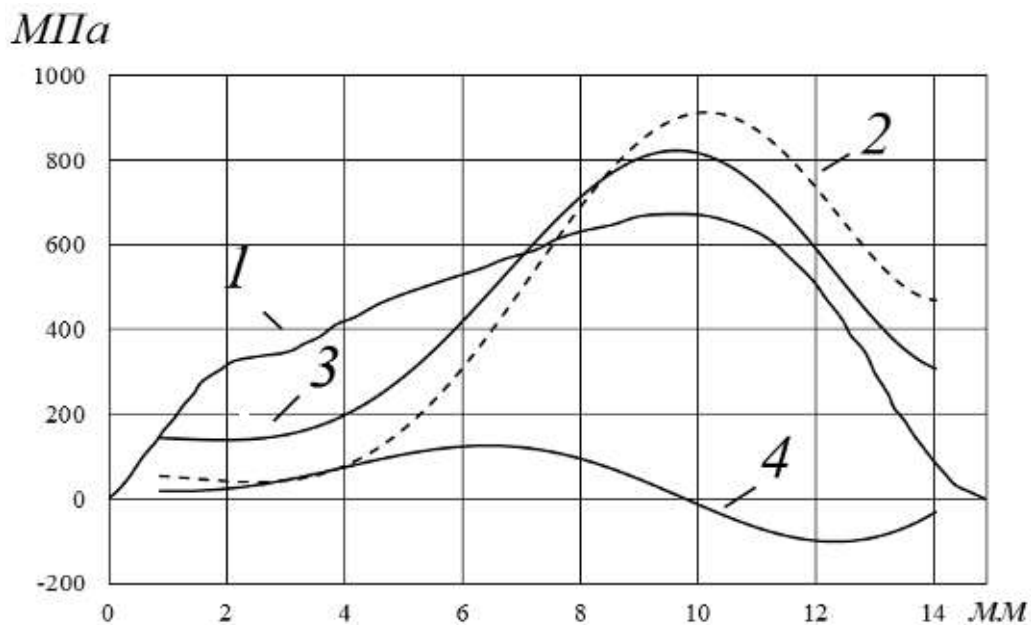


Рис. 4.33. Дослідна і розрахункові епюри контактних напружень при прокатуванні зразка № 99

Порівняння характеру розподілу дослідного і розрахункового тиску при прокатуванні з натягом показує, що поблизу меж

осередку деформації експериментальне значення нормального контактного напруження менше теоретичного. Ближче до середини контактної зони валка і розкату тиск поступово збільшується. Максимум тиску в обох випадках знаходиться поблизу нейтрального перерізу. В цілому теоретичний і дослідний розподіл нормального тиску є досить близькими. Зі збільшенням натяжіння штаби, особливо заднього, ці напруження зменшуються. Якісно розрахункові епюри зміни питомих сил тертя відповідають експериментальним. Зі збільшенням заднього натяжіння штаби нейтральний переріз зміщується до виходу металу з валків.

При розрахунку розподілу нормального тиску  $p_x$  з урахуванням зміни напруження плинності по довжині осередку деформації, його поточне значення визначали з використанням графіка рис. 4.6 і виразу:

$$\sigma_{\text{пот.}} = \sigma_{\text{Свих.}} + a\varepsilon_x^b, \quad (4.41)$$

де  $\varepsilon_x$  — поточне по осередку деформації відносне обтиснення, яке можна визначити за формулою:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta h_x}{h_0} \cdot 100, \quad (4.42)$$

де  $\Delta h_x$  — поточне абсолютне обтиснення,  $\Delta h_x = R\varphi^2$ ;  $a$  і  $b$  — постійні коефіцієнти, обчислені з урахуванням графіка рис. 4.6.

Для сталі 10 коефіцієнти наступні:  $a = 11,2$ ;  $b = 0,77$ . При цьому передбачалося, що  $\varepsilon_x = \varepsilon$  (рис. 4.6).

Поточне значення опору деформації металу знаходимо з використанням (4.38):

$$2k_{\text{пот.}} = 1,15 \cdot 1,15 \sigma_{\text{пот.}} \quad (4.43)$$

Слід зауважити, що наведена методика розрахунку поточного опору деформації вже використовувалася в роботах інших авторів.

Розрахунковий розподіл тиску в зоні контакту з урахуванням зміни опору деформації також наведено на рис. 4.30—4.33 під номером 2. У цьому випадку тиск поблизу входу металу у валки менше розрахункового значення при усередненому опорі деформації, а в середній частині і на виході з валків вище. Звернемо увагу на те, що теоретичні епюри тиску при усередненому опорі деформації трохи ближче до дослідних даних в порівнянні з тим випадком, коли останній змінюється по довжині контактної зони.

В ході дослідження також виконано порівняльний аналіз дослідного і розрахункового тиску металу на валки. Результати дослідження наведені в табл. 4.7.

Як впливає з даної таблиці, дослідні і розрахункові значення середнього тиску відрізняються не більше ніж на 12 % за винятком прокатування зразка під номером 100. У семи випадках відносна помилка не перевищує 4 %. Тому збіжність розрахункових і дослідних даних можна вважати задовільною.

В табл. 4.8 наведено порівняльний аналіз розрахункового середнього тиску при змінному  $2k_{\text{пот}}$  з його дослідним значенням.

Як видно, в цьому випадку відмінності між дослідним і розрахунковим значеннями середнього тиску дещо більше, ніж при усередненому опорі деформації  $2k_{\text{сер}}$ . Можливо це пов'язано з тим, що в дослідах швидкість прокатки не перевищувала 50 мм/с, при цьому швидкість деформації була малою і її вплив на зміну цього напруження плинності набагато менше того, яке враховується коефіцієнтом  $k_2$  (формула 4.43).

Мабуть, формула (4.43) недостатньо точно враховує реальний характер зміни напруження текучості. Тому наступні розрахунки при оцінці стійкості штаби в осередку деформації на виробничих станах будемо вести при середньому опорі деформації  $2k_{\text{сер}}$ . При теоретичному визначенні енергосилових параметрів в цьому випадку скористаємося методикою [45].

Таким чином, модель тертя (4.34), може використовуватися для прогнозування розподілу контактних напружень при тонколистовому прокатуванні.

**Таблиця 4.8. Порівняння дослідних і розрахункових значень середнього тиску металу на валки при змінному опорі деформації**

№ зразка	$2k_{\text{сер}}$ , МПа		Відносна помилка розрахунку, %	$f_{\text{сер}}$
	дослідне	розрахов.		
90	720	749	3,9	0,106
91	580	630	7,9	0,119
92	450	532	15,4	0,14
93	550	601	8,5	0,121
94	520	542	4	0,135
95	630	768	20	0,105
96	600	667	10	0,122
97	670	806	16,9	0,101
98	620	646	4	0,129
99	480	520	7,7	0,15
100	400	545	26,6	0,196

З урахуванням зазначеного, нижче наведені дослідження позовжньої стійкості процесу прокатування з використанням моделі (4.34).

#### **4.3.5. Дослідження впливу натягіння штаби на результуючу позовжніх сил пластично деформованого металу**

Теоретично проаналізуємо вплив переднього і заднього питомих натягіннь штаби на результуючу позовжніх сил пластично деформованого металу. Для цього побудуємо епюри контактних напружень  $\frac{p_x}{2k_{\text{сер}}}$  і  $\frac{t_x}{2k_{\text{сер}}}$ , а також поточних позовжніх сил

$Q_{\text{хп}}^*$  для випадків, відповідних прокатуванню зразків № 90, 91,

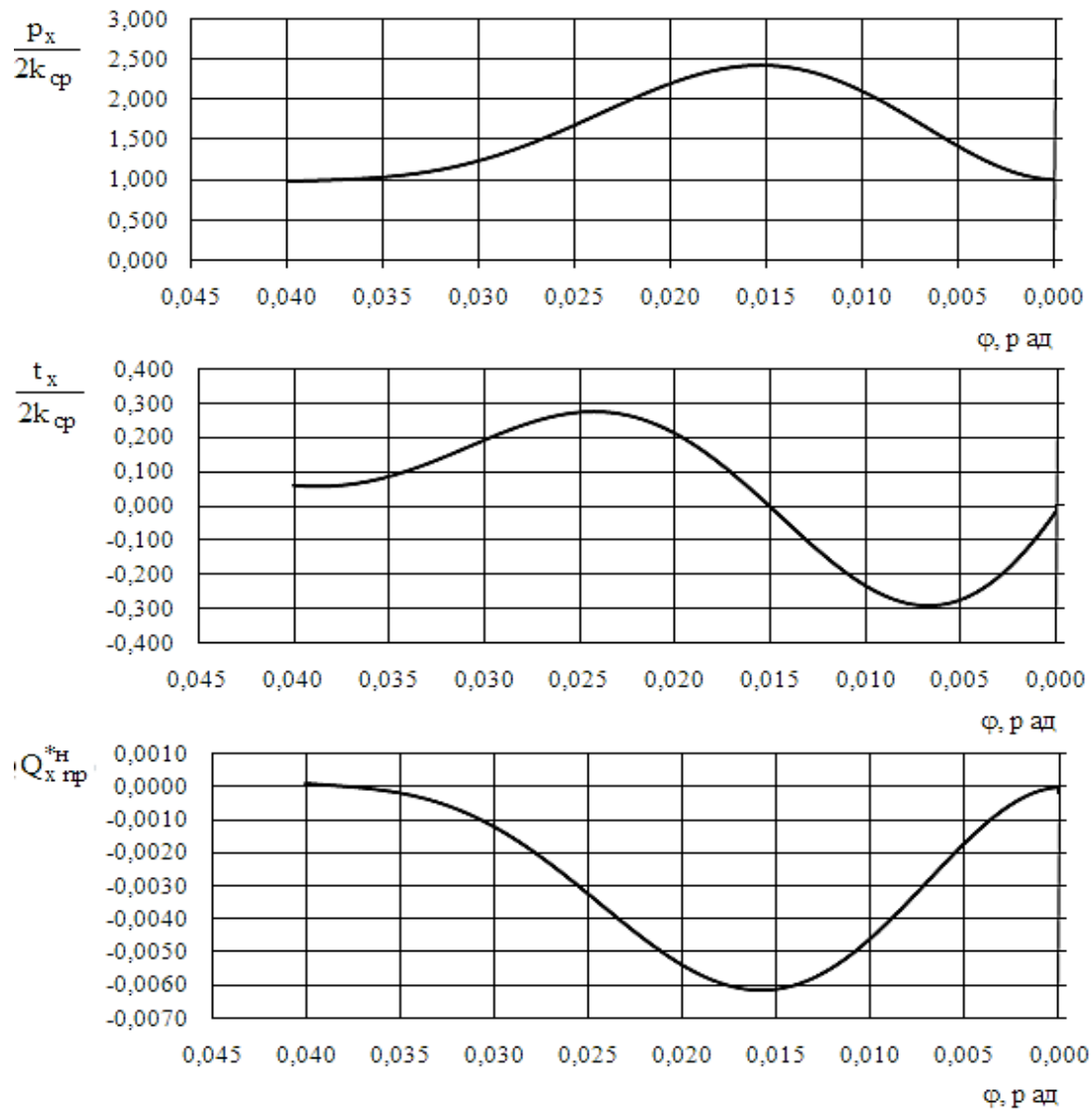
92, 99 і 100 (табл. 4.3). Результати розрахунків наведені на рис. 4.34—4.38.

Як видно з епюр рис. 4.34, при прокатуванні з дуже малим заднім натяжінням і при відсутності переднього поточна сила  $Q_{хп.}^{*н}$  практично по всій довжині осередку деформації спрямована протилежно руху розкату і середня результуюча, що визначається за формулою (4.37), є від'ємною. Це свідчить про стійкість процесу деформації.

Прокатування зразка № 91 (рис. 4.38) відбувалася також при відсутності переднього, але при значному задньому натяжінні  $\left(\frac{\sigma_0}{2k_{сер}} = 0,389\right)$ . Сила  $Q_{хп.}^{*н}$  поблизу входу металу в осередок деформації є додатною, спрямованою по ходу руху штаби. Поблизу середньої частини осередку деформації вона переходить через нульове значення і далі, аж до виходу металу з валків,  $Q_{хп.}^{*н}$  спрямована протилежно ходу процесу прокатування. Сила  $Q_{хп.}^{*н}$  за абсолютним значенням стає менше в порівнянні з попереднім випадком.

Аналізуючи розподіл  $Q_{хп.}^{*н}$  при прокатуванні зразка № 92 (рис. 4.36) з великим заднім питомим натяжінням  $\left(\sigma_0/2k_{сер} = 0,674\right)$  можна помітити, що процес прокатки ведеться в умовах, близьких до граничних, тому що результуюча  $Q_{сер.п.}^{*н}$  близька до нульового значення.

На рис. 4.37 наведені епюри, що відповідають умовам прокатування зразка № 99  $\left(\sigma_0/2k_{сер} = 0,668 \text{ і } \sigma_1/2k_{сер} = 0,289\right)$ .

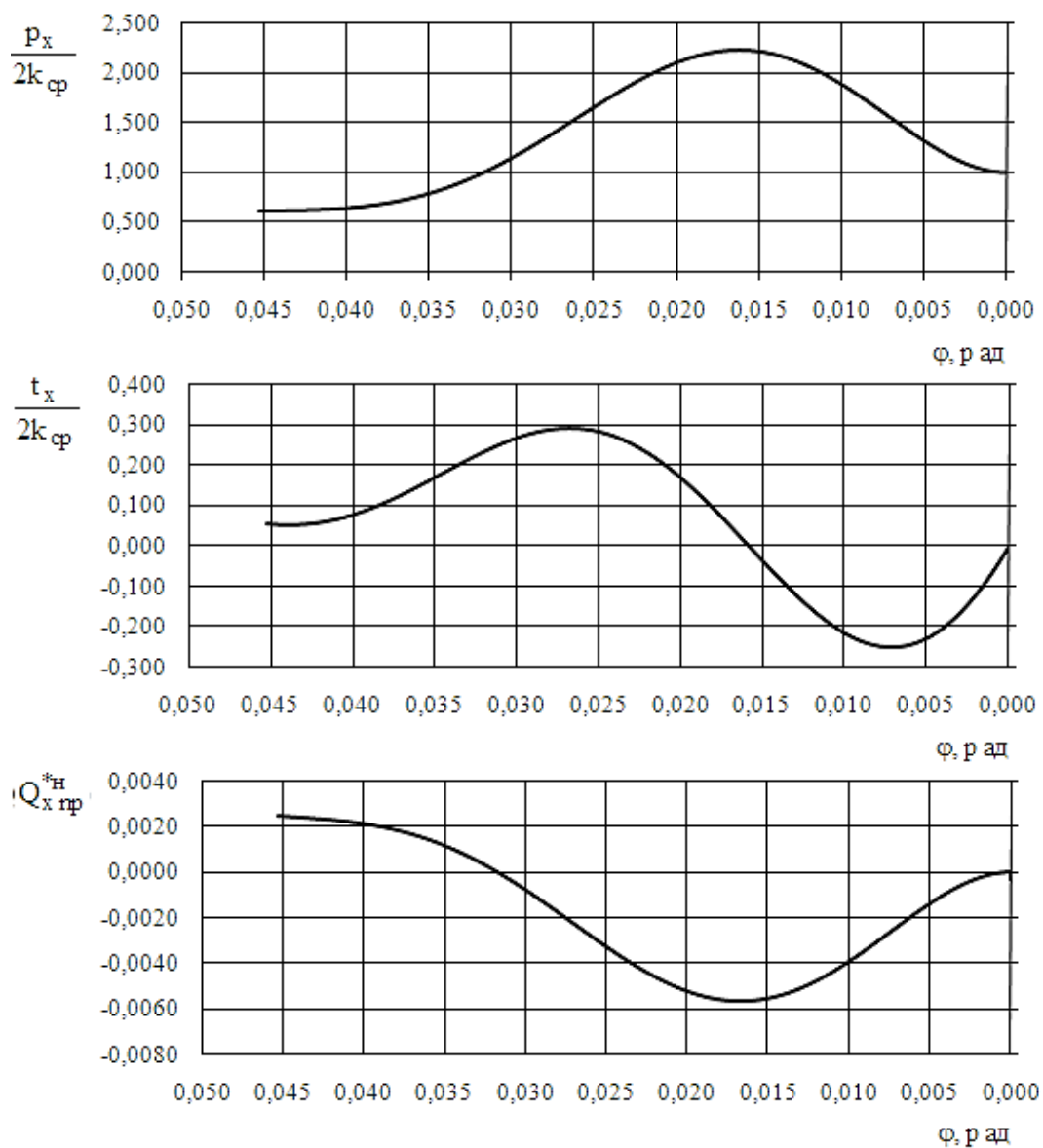


$b$ , мм	30
$R_{спл}$ , мм	344,3
$h_1$ , мм	1,400
$f$	0,173
$\alpha$ , рад	0,040
$\sigma_0/\sigma_{T0}$	0,021
$\sigma_1/\sigma_{T0}$	0,000
$R_{ном}$ , мм	124,3

$Q_{ср np}^*$	-0,00279
$f_{ср}$	0,106
$n_1$	0,366
$p_{ср}/2k_{ср}$	1,637
$M_{np}^*$	0,038

Рис. 4.34. Етюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні зразка № 90

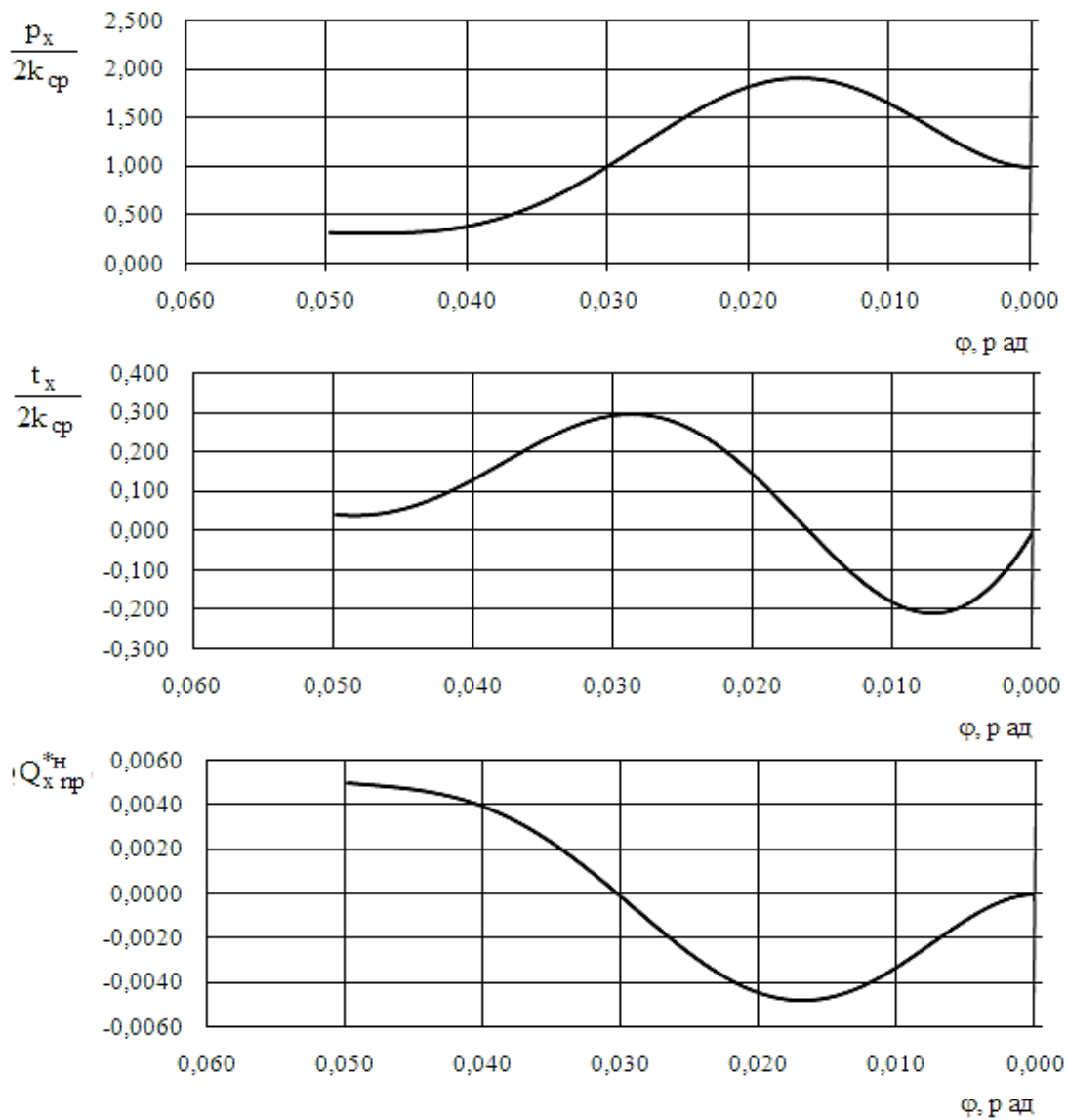




$b$ , мм	30
$R_{спл}$ , мм	307,6
$h_1$ , мм	1,320
$f$	0,183
$\alpha$ , рад	0,045
$\sigma_0/\sigma_{T0}$	0,389
$\sigma_1/\sigma_{T0}$	0,000
$R_{ном}$ , мм	124,3

$Q_{ср np}^*$	-0,00170
$f_{ср}$	0,120
$n_1$	0,500
$p_{ср}/2k_{ср}$	1,394
$M_{np}^*$	0,038

Рис. 4.35. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні зразка № 91



$b, \text{ мм}$	30
$R_{\text{спл}}, \text{ мм}$	262,4
$h_1, \text{ мм}$	1,300
$f$	0,189
$\alpha, \text{ рад}$	0,050
$\sigma_0 / \sigma_{T0}$	0,674
$\sigma_1 / \sigma_{T0}$	0,000
$R_{\text{ном}}, \text{ мм}$	124,3

$Q_{\text{ср np}}^*$	-0,00030
$f_{\text{ср}}$	0,143
$n_1$	0,703
$p_{\text{ср}} / 2k_{\text{ср}}$	1,114
$M_{np}^*$	0,033

Рис. 4.36. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні зразка № 92

В цьому випадку заднє питоме натяжіння штаби залишилося практично незмінним по відношенню до прокатування зразка № 92, але деформація металу проводилася при істотному передньому натяжінні. Результуюча поздовжніх сил  $Q_{\text{сер.п.}}^{*Н}$  також була близька до нульового значення, що свідчить про слабкий вплив переднього натяжіння на поздовжню стійкість штаби в осередку деформації.

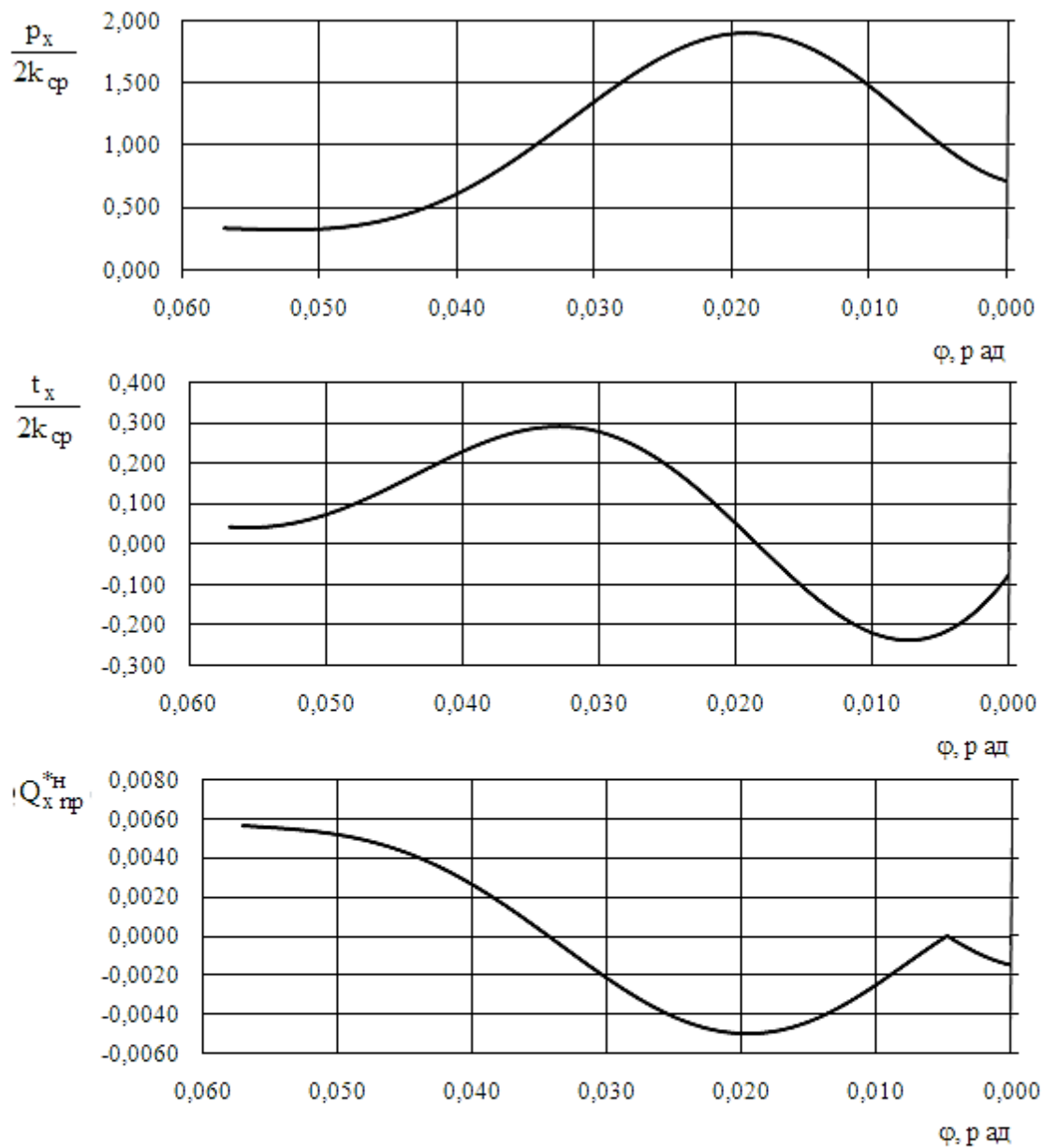
Аналогічні висновки можна зробити і при аналізі розрахункових епюр, що відповідають прокатуванню зразка № 100 (рис. 4.38).

В табл. 4.9 наведені розрахункові значення середньої результуючої сили пластично деформованого металу, для умов дослідів, що розглядаються.

**Таблиця 4.9. Значення середньої результуючої поздовжніх сил під час прокатування зразків з натяжінням**

Номер зразка	90	91	92	93	94	95	96	97	98	98	100
$Q_{\text{сер.п.}}^{*Н}$	—0,00279	—0,0025	—0,0003	—0,0023	—0,00136	—0,00293	—0,00278	—0,00298	—0,00211	—0,000169	—0,000474

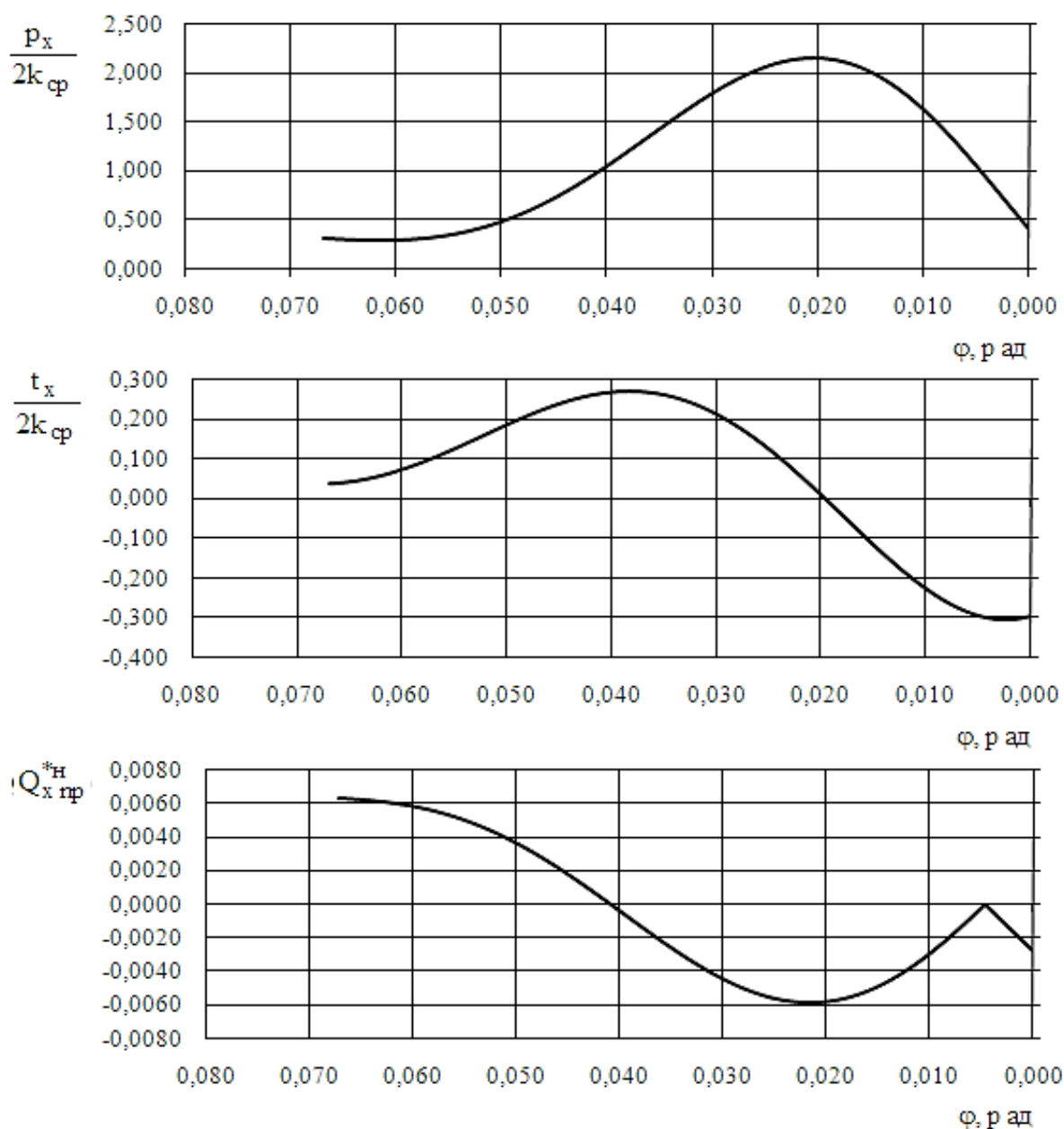
Як видно з табл. 4.9, сила  $Q_{\text{сер.п.}}^{*Н}$  у всіх випадках від'ємна, спрямована проти ходу прокатування, отже, процес деформації повинен протікати без пробуксовок, хоча і з різним ступенем поздовжньої стійкості штаби в валках.



$b$ , мм	30
$R_{спл}$ , мм	230,9
$h_1$ , мм	1,200
$f$	0,200
$\alpha$ , рад	0,057
$\sigma_0 / \sigma_{T0}$	0,668
$\sigma_1 / \sigma_{T0}$	0,289
$R_{ном}$ , мм	124,3

$Q_{ср np}^*$	-0,000169
$f_{ср}$	0,154
$n_1$	0,646
$p_{ср} / 2k_{ср}$	1,073
$M_{np}^*$	0,035

Рис. 4.37. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні зразка № 99



$b$ , мм	30
$R_{спл}$ , мм	214,1
$h_1$ , мм	1,000
$f$	0,200
$\alpha$ , рад	0,067
$\sigma_0/\sigma_{T0}$	0,689
$\sigma_1/\sigma_{T0}$	0,597
$R_{ном}$ , мм	124,3

$Q_{ср np}^*$	-0,000474
$f_{ср}$	0,150
$n_1$	0,617
$p_{ср}/2k_{ср}$	1,160
$M_{np}^*$	0,040

Рис. 4.38. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні зразка № 100

Узагальнимо результати теоретичного дослідження поздовжньої стійкості штаби в валках при прокатуванні з натяжінням і порівняємо їх з дослідними даними. Для цього проаналізуємо залежність дослідного випередження  $S$  і середнього тиску  $\frac{P_{\text{ср}}}{2k_{\text{ср}}}$ , а також результуючої  $Q_{\text{ср.п.}}^{*н}$  від натягу штаби. З таблиці 4.7 видно, що перші шість зразків з дослідів, наведених в [24], прокатували без переднього натяжіння. Залежність зазначених параметрів від питомого заднього натяжіння розкату показано на рис. 4.39.

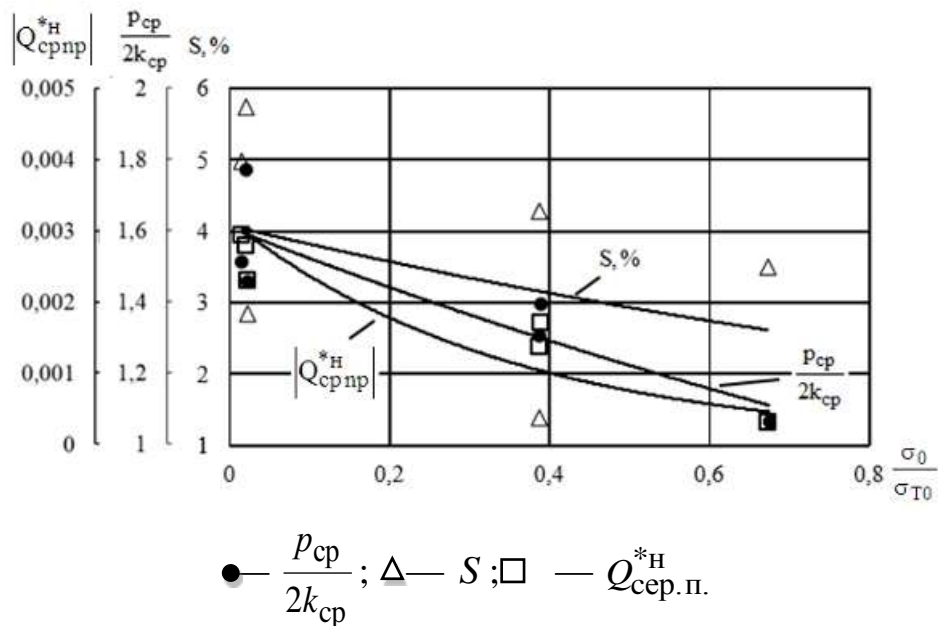


Рис. 4.39. Вплив заднього натяжіння штаби на силові і кінематичні параметри

Як випливає з графіків рис. 4.39, зі збільшенням заднього питомого натяжіння середній тиск і випередження в осередку деформації зменшуються. Ця залежність також відома з роботи [24]. Зі збільшенням заднього натяжіння також по абсолютній величині знижується і середня результуюча сила  $Q_{\text{ср.п.}}^{*н}$ , що свід-

чить про менш стійкий процес прокатування в поздовжньому напрямку.

Слід зауважити, що деякий розкид точок на графіках пов'язаний з різним обтисненням металу в результаті сплющування валків при зміні натяжіння штаби.

При оцінці впливу переднього і заднього натяжіннь штаби на середній тиск дослідники користуються коефіцієнтом  $\xi_{\text{ср}}$ , що визначається за формулою (4.7). З огляду на те, що в даних розрахунках прийнято середнє по довжині контактної зони опір деформації  $2k_{\text{ср}}$ , то величини  $\xi_0$  і  $\xi_1$  визначаються за формулами (4.8; 4.9).

Зауважимо, що якщо прокатка здійснюється без натяжіння штаби, то  $\xi_{\text{ср}} = 1$ , в інших випадках він менше одиниці. Заднє натяжіння сильніше впливає на  $\xi_{\text{ср}}$  в порівнянні з переднім.

На рис. 4.40 наведені графіки впливу коефіцієнту натяжіння  $\xi_{\text{ср}}$  на вищевказані параметри.

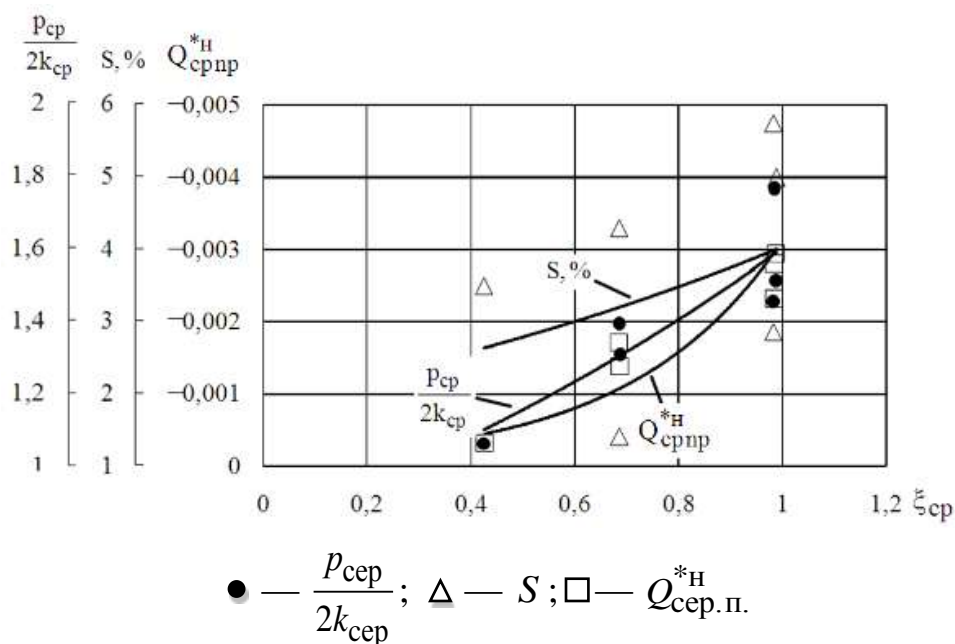


Рис. 4.40. Залежність кінематичних і силових параметрів від коефіцієнту натяжіння:

Як видно, зі збільшенням коефіцієнту натягіння середній тиск і випередження зменшуються. Особливо слід підкреслити, що при збільшенні натягіння (показник  $\xi_{\text{сер}}$  зменшується) середня результуюча поздовжніх сил пластично деформованого металу зменшується за модулем. Останнє погіршує стійкість штаби в осередку деформації, отже, одним з обмежень на величину натягіння є поздовжня стійкість процесу прокатування.

Проведений аналіз показує, що запропонована методика оцінки поздовжньої стійкості досить точно відображає результати дослідів. Середня результуюча сила  $Q_{\text{сер.п.}}^{*н}$  істотно залежить від заднього натягіння штаби і слабо — від переднього. Зі збільшенням коефіцієнту натягіння  $\xi_{\text{сер}}$  поздовжня стійкість процесу прокатування також зростає.

З аналізу даних табл. 4.3 і 4.4 щодо прокатування зразків під № 92, 100 і № 95, 96 видно, що в кожній парі цих зразків мало місце близьке чи рівне значення заднього натягіння. Для № 92, 100  $q_0 = 0,674, 0,689$  відповідно, а для № 95, 96  $q_0 = 0,016$ . При цьому з переднім натягінням катали тільки зразки № 100 і № 96, рівним  $q_{0_{100}} = 0,597, q_{0_{96}} = 0,384$ . Проаналізувавши вплив натягіння штаби на поздовжню стійкість процесу прокатування і середній тиск під час прокатки цих зразків зазначимо, що значення

$Q_{\text{сер.п.}}^{*н}$   
і  $\frac{P_{\text{сер}}}{2k_{\text{сер}}}$  для кожної з пар зразків при прокатці тільки з заднім або

із заднім і переднім натягінням відрізняються не істотно. Для першої пари зразків № 92, 100:  $Q_{\text{сер.п.}}^{*н} = -0,00043; -0,00045$

(різниця складає 4,7 %),  $\frac{P_{\text{сер}}}{2k_{\text{сер}}} = 1,131; 1,145$  (різниця складає



1,2 %). Для другої пари зразків № 95, 96:  $Q_{\text{сер.п.}}^{*н} = -0,0031$ ;  
—0,00295 (різниця складає 4,8 %),  $\frac{P_{\text{сер}}}{2k_{\text{сер}}} = 1,677; 1,432$  (різниця

складає 14,6 %). Зазначені вище факти підтверджують менший ступінь впливу переднього натяжіння на силові параметри прокатування, а також на поздовжню стійкість процесу прокатування.

Так само, аналіз за даними табл. 4.9 показав, що при збільшенні заднього натяжіння в 1,7—2,3 рази середня результуюча поздовжня сила зменшується на 30—40%. Переднє натяжіння стрічки слабо впливає на цю силу, декілька збільшуючи її.

Як зазначено раніше, середня результуюча  $Q_{\text{сер.п.}}^{*н}$ , будучи силою опору, при стійкому процесі прокатування завжди спрямована протилежно руху розкату. Дані табл. 4.9 повністю узгоджуються з результатами дослідної прокатки, яка у всіх випадках відбувалася без пробуксовок.

#### **4.4. Приклади оцінки поздовжньої стійкості штаби в валках при холодному прокатуванні**

##### **4.4.1. Вплив натяжіння штаби на сумарний момент при безперервному прокатуванні**

Розробка енергозберігаючої технології прокатування на безперервних станах видається важливою теоретичної і практичної задачею. Одним з ефективних шляхів вирішення якої є раціоналізація режимів натяжіння штаби в міжклітьових проміжках. Методика розрахунку раціональних, з точки зору енергозбереження, режимів натягу поки не в повній мірі розроблена, хоча окремі публікації з даного питання в технічній літературі є. Так, в роботі [55] при визначенні раціонального режиму натяжіння штаби при холодному прокатуванні виходили з критерію, що представляє

собою відношення сумарних потужностей на бочках валків при деформації з натягінням і без нього. Однак, за допомогою цього критерію без урахування додаткових умов важко визначити раціональний режим натягіння.

Як уже зазначалося, в роботі [55] була зроблена спроба побудови методики розрахунку раціональних режимів натягіння, яка полягала у визначенні критеріального співвідношення між потужністю прокатування з натягінням штаби і потужністю простого процесу при однакових умовах деформації і  $V_{1H} = V_0$ :

$$\frac{W_{CH}}{W_c} = \left\{ \frac{p_{ср ср} \psi_{CH} \left( \frac{l_{CH}}{l_c} \right)^2}{p_{ср ср} \psi_c \left( \frac{l_c}{l_c} \right)^2} + \frac{Rh_0}{2p_{ср ср} \psi_c l_c^2} \times \frac{(1 + S_c)}{(1 + S_{CH})}, \right. \quad (4.44)$$

$$\left. \times [\sigma_0 \varepsilon + S_{CH} (1 - \varepsilon) (\sigma_1 - \sigma_0)] \right\}$$

де  $W_{CH}$ ,  $W_c$  — сумарна потужність на бочках валків при прокатці з натягом і без нього;  $p_{ср ср}$ ,  $p_{ср ср}$  — середнє контактне нормальне напруження при прокатуванні з натягінням і без натягіння;  $\psi_{CH}$ ,  $\psi_c$  — коефіцієнт, що характеризує положення точки прикладання рівнодіючої контактних сил (коефіцієнт плеча моменту) при прокатуванні з натягінням і без натягіння;  $l_{CH}$ ,  $S_{CH}$ ,  $l_c$ ,  $S_c$  — довжина осередку деформації і випередження при прокатуванні з натягінням і без натягіння, розраховані з урахуванням впливу пружних деформацій валків і штаби;  $\varepsilon$  — питоме відносне обтиснення штаби;  $V_{1H}$ ,  $V_0$  — швидкість штаби на виході з осередку деформації при прокатуванні з натягінням і без натягіння.

Автори роботи [55] проаналізували існуючі режими натягу смуги на безперервних станах холодної прокатування 1400; 1700 і 1680 Виходячи з критеріального співвідношення потужностей (4.44) вони запропонували нові режими натягіння, що забезпечують скорочення сумарної по всіх клітках енергії на ведення процесу. Зауважимо, що при розробці цих режимів не враховува-

лася поздовжня стійкість штаби в валках. Автори в якості граничного фактору спиралися тільки на величину нейтрального кута. Але, як показано вище, втрата рівноваги в осередку деформації може відбуватися при наявності зони випередження через дії результуючої поздовжніх сил пластично деформованого металу. Тому на додаток до проведеного дослідження доцільно виконати перевірку поздовжньої стійкості штаби в валках при реально існуючих режимах натягіння розкату і запропонованих в [55].

Як впливає з основного рівняння безперервної прокатки [13], всі складові сумарного балансу робіт при незмінних граничних умовах залежать від характеру розподілу питомих сил тертя в осередках деформації всіх клітей стану. У свою чергу сили тертя в зонах відставання і випередження багато в чому визначаються режимом натягіння металу. Тому відповідно до викладеного вище доцільно встановити наскільки ефективно вплив умов тертя і натягіння штаби на зниження енерговитрат на бочці валків кожної з клітей і в цілому по безперервному стану. Крім того, певний інтерес щодо досліджуваних залежностей пов'язаний з тим, що втрата рівноваги сил в осередку деформації може виникати при наявності зони випередження [1]. У зв'язку з цим в кожному випадку прокатки слід давати оцінку поздовжньої стійкості штаби в валках [56].

Методика проведення дослідження включала чисельне рішення рівняння з урахуванням натягіння розкату при різних моделях тертя на контактi. Серед них застосували закон тертя ковзання ( $t_x = fp_x$ ), закон пластичного тертя ( $t_x = f_3 2k_{сер}$ ) і двохзвенну модель плавної зміни питомих сил тертя в осередку деформації, описану в роботі [56]. При вирішенні задачі визначали розподіл контактних напружень, використовуючи методику [56] розраховували поточне в осередку деформації значення поздовжніх сил  $Q_{хп}$  і середньоінтегральне  $Q_{сер.п}$  їх значення. Крім того, знаходили сили тертя в зонах відставання  $T_{від}$  і випередження

$T_{\text{вип.}}$ , момент на бочці валків  $M_{\bar{\sigma}}$  і його сумарне значення в цілому по стану  $\sum \sum M_{\bar{\sigma}}$ .

Як приклад розглянемо випадок прокатки листа на неперервному чотириклітьовому стані в валках діаметром  $D = 200$  мм. Режим обтиснень наведено в табл. 4.10.

Згідно [17] момент на бочці валків (рис. 4.41) визначали використовуючи залежність:

$$M_{\bar{\sigma}} = 2k_{\text{сер}} R b_{\text{сер}} \left( \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{t_x}{2k_{\text{сер}}} d\varphi - \int_0^{\gamma} \frac{t_x}{2k_{\text{сер}}} d\varphi \right) \quad (4.45)$$

або в безрозмірній формі:

$$M_{\bar{\sigma}}^* = \frac{M_{\bar{\sigma}}}{2k_{\text{сер}} R^2 b_{\text{сер}}}.$$

Зауважимо, що вираз в дужках формули (4.45) являє собою різницю безрозмірних сил тертя в зонах відставання  $T_{\text{від}}^*$  і випередження  $T_{\text{вип.}}^*$ . Поточне значення поздовжньої сили пластично деформованого металу розраховували за формулою (4.22) і середньо інтегральне значення цих сил визначали за формулою (4.23), а далі визначали їх безрозмірну форму.

Таблиця 4.10. Режим обтиснення на чотирьохклітьовому стані

Номер кліті	Товщина штаби, мм		Абсолютне обтиснення $\Delta h$ , мм	Кут захоплення $\alpha$ , рад
	$h_0$	$h_1$		
1	3,0	2,0	1,0	0,1
2	2,0	1,4	0,6	0,0771
3	1,4	0,9	0,5	0,0707
4	0,9	0,6	0,3	0,0548

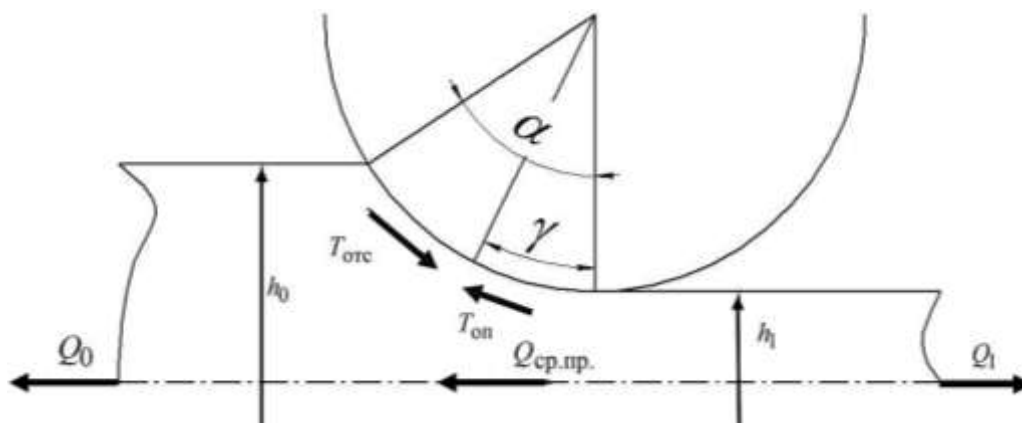


Рис. 4.41. До визначення моменту на бочці валка

Результати дослідження впливу натяжіння розкату на сумарний момент  $\sum \sum M_6^*$  в табл. 4.11. Аналіз отриманих даних показує, що зі збільшенням натяжіння металу сумарний момент на бочці валків зменшується. При граничних значеннях натяжіння це зменшення становить:

$$\delta = \frac{0,01768 - 0,01472}{0,01768} \cdot 100\% = 16,7\%.$$

Зі збільшенням натяжіння поздовжня стійкість штаби в валках дещо знижується. Нагадаємо, що відповідно до методики [56], якщо  $Q_{\text{ср.п.}}^* < 0$ , то процес відбувається стабільно, при  $Q_{\text{ср.п.}}^* = 0$  прокатування ведеться в граничних умовах, при  $Q_{\text{ср.п.}}^* > 0$  вона неможлива через брак втягуючих метал в валки сил. Порівнюючи моменти на бочках валків безперервного стану при граничних натяжіннях ( $q = 0,1$  і  $q = 0,3$ ), відзначимо, що частка першої кліті в загальному зниженні  $\sum \sum M_6^*$  найбільш істотна.

$$\delta_1 = \frac{0,00580 - 0,00347}{0,00580} \cdot 100\% = 40,2\%; \delta_2 = 9,3\%; \delta_3 = 12\%; \delta_4 = -11,6\%.$$

Таблиця 4.11. Вплив режиму натяжіння на енергосилові параметри при прокатуванні з моделлю тертя у вигляді  $t_x = fp_x$  ( $f = 0,2$ )  $\sum \sum M_{\bar{6}}^*$

Номер кліті	$q_{0_i}$	$q_{1_i}$	$Q_{\text{сер.п.}}^*$	$\gamma$	$T_{\text{від}}^*$	$T_{\text{вип}}^*$	$M_{\bar{6}}^*$	$\sum \sum M_{\bar{6}}^*$
1	0	0,1	-0,0088	0,039	0,01678	0,01098	0,00580	0,01768
2	0,1	0,1	-0,0061	0,03	0,01288	0,00861	0,00427	
3	0,1	0,1	-0,0071	0,028	0,01418	0,00993	0,00425	
4	0,1	0	-0,0073	0,022	0,01318	0,00982	0,00326	
1	0	0,2	-0,0078	0,042	0,01558	0,01092	0,00466	0,01625
2	0,2	0,2	-0,0036	0,029	0,01146	0,00739	0,00407	
3	0,2	0,2	-0,0050	0,027	0,01256	0,00855	0,00401	
4	0,2	0	-0,0061	0,021	0,01235	0,00884	0,00351	
1	0	0,3	-0,0070	0,046	0,01428	0,01081	0,00347	0,01472
2	0,3	0,3	-0,0013	0,028	0,01004	0,00617	0,00387	
3	0,3	0,3	-0,0030	0,026	0,01092	0,00718	0,00374	
4	0,3	0	-0,0048	0,019	0,01144	0,0078	0,00364	

В останній кліті при задньому натяжінні  $q_{0_4} = 0,3$  момент на бочці валків зростає в порівнянні з випадком, коли  $q_{0_4} = 0,1$ , і тому відносно зниження моменту на бочці валків  $\delta_4$  є від'ємною величиною.

Інші моделі тертя якісно однаково впливають на залежність  $\sum \sum M_{\bar{6}}^*$  від натяжіння.

Залежність сумарного моменту  $\sum \sum M_{\bar{6}}^*$  і середньої результуючої сили  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  від натяжіння штаби при двохзвенній моделі тертя (табл. 4.12) приблизно така ж, як і при кулонівському законі, але при значно меншому коефіцієнті тертя  $f_{\text{сер}}$ , який визначали за формулою (4.37)

Слід зауважити, що в розрахунках значення  $f_{\text{сер}}$  в осередку деформації кожної кліти утримували на постійному рівні. За такої умови можна оцінити вплив натяжіння на зниження моменту в даній кліті і  $M_{\text{б}}^*$  в чистовому вигляді.

Аналізуючи зміну  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  в осередках деформації всіх клітей безперервного стану при моделі тертя [56], необхідно відзначити, що при прокатуванні в другій кліті з питомим натяжінням  $q_{0_2} = q_{1_2} = 0,3$  значення середньої результуючої сили позитивне і дорівнює 0,00041.

**Таблиця 4.12. Вплив режиму натяжіння штаби на енергосилові параметри при прокатуванні з двохзвеною моделлю тертя [56]**

Номер кліті	$q_{0_i}$	$q_{1_i}$	$f_{\text{сер}}$	$Q_{\text{сер.п.}}^*$	$\gamma$	$T_{\text{від}}^*$	$T_{\text{вип}}^*$	$M_{\text{б}}^*$	$\sum \sum M_{\text{б}}^*$
1	0	0,1	0,142	-0,00692	0,0310	0,01199	0,00671	0,00507	0,01529
2	0,1	0,1	0,149	-0,00505	0,0250	0,00966	0,00565	0,00401	
3	0,1	0,1	0,114	-0,00486	0,0230	0,00879	0,00512	0,00367	
4	0,1	0	0,116	-0,00341	0,0200	0,00732	0,00390	0,00255	
1	0	0,2	0,142	-0,00595	0,0319	0,01100	0,00608	0,00492	0,01514
2	0,2	0,2	0,149	-0,00282	0,0234	0,00876	0,00489	0,00387	
3	0,2	0,2	0,114	-0,00277	0,0206	0,00733	0,00388	0,00345	
4	0,2	0	0,116	-0,00327	0,0159	0,00617	0,00327	0,00290	
1	0	0,3	0,142	-0,00511	0,0329	0,01008	0,00714	0,00294	0,01307
2	0,3	0,3	0,149	0,00041	0,0222	0,00772	0,00401	0,00371	
3	0,3	0,3	0,114	-0,00300	0,0192	0,00698	0,00373	0,00325	
4	0,3	0	0,116	-0,00288	0,0150	0,00605	0,00288	0,00317	

При такому значенні  $Q_{\text{сер.п.}}^*$  процес прокатування в другій кліті відбувається в умовах, близьких до граничних. Наведемо епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил для

цього випадку прокатування (рис. 4.42). Як видно, нормальний тиск на межах осередку деформації і ближче до середньої частини його менше  $2k_{\text{сер}}$ .

$$\delta = \frac{0,01529 - 0,01307}{0,01529} \cdot 100\% = 14,5\%;$$

$$\delta_1 = \frac{0,00507 - 0,00294}{0,00507} \cdot 100\% = 42\%; \delta_2 = 7,5\%; \delta_3 = 11,4\%; \delta_4 = -24,3\%.$$

Відповідно до цього поточні сили пластично деформованого металу  $Q_{\text{хп}}^*$  на одній частині осередку деформації спрямовані згідно з рухом штаби, на іншій — в протилежний бік. Причому площі додатних і від'ємних значень цих сил досить близькі, що і вказує на умови деформації, близькі до граничних.

Як відомо, режим обтиснення металу значною мірою визначає розподіл питомих сил тертя в осередку деформації, що має позначитися і на сумарному моменті на бочках валків безперервного стану. Перерозподілимо обтиснення по клітям стану таким чином, щоб вони були збільшені в другій і четвертій клітях в порівнянні з наведеними в табл. 4.10, і визначимо зміну моментів  $M_{\delta}^*$  і  $\sum \sum M_{\delta}^*$  для випадку прокатування з кулонівською моделлю тертя ( $f = 0,2$ ) і при раніше прийнятих натяжіннях штаби. Новий режим обтиснень і результати розрахунків наведені в табл. 4.13. З аналізу даних табл. 4.11 і 4.13 випливає, що на залежність моменту  $\sum \sum M_{\delta}^*$  від натяжіння штаби певний вплив має і режим обтиснень по клітям безперервного стану.



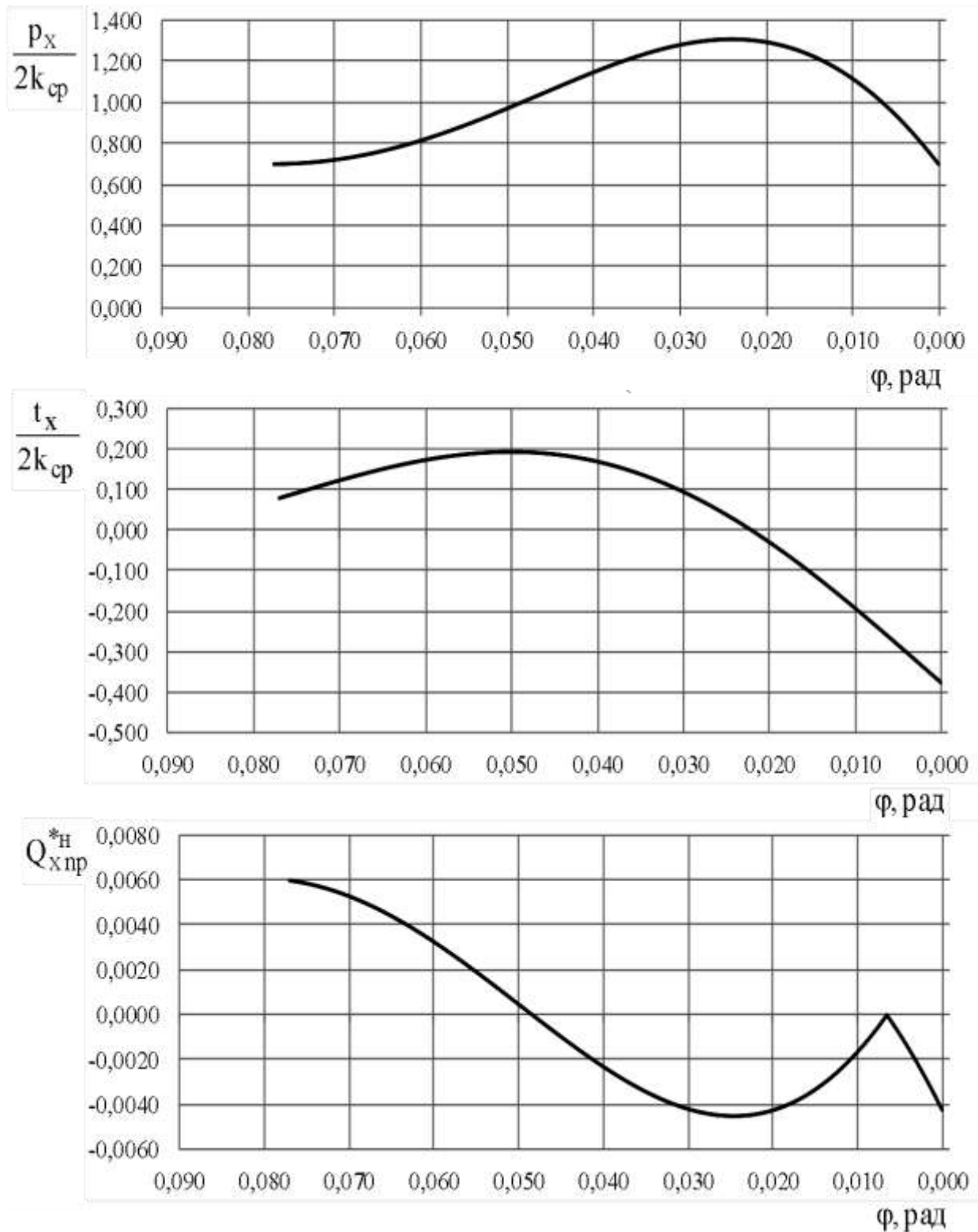


Рис. 4.42. Контактні напруження і поточні поздовжні сили при прокатці в другій кліті з  $q_{0_2} = q_{1_2} = 0,3$

Так, відносне зниження сумарного моменту при першому режимі обтиснень становить  $\delta = 16,7\%$ , а при обтисненнях, представлених в табл. 4.13,  $\delta = 22\%$ .

$$\delta = \frac{0,01769 - 0,01384}{0,01769} \cdot 100\% = 22\%;$$

$$\delta_1 = \frac{0,00181 + 0,00089}{0,00181} \cdot 100\% = 149\%; \delta_2 = 11\%; \delta_3 = 11,4\%; \delta_4 = -2,4\%.$$

З цієї ж таблиці випливає, що при натяжіннях в першій кліті  $q_{0_1} = 0$  і  $q_{1_1} = 0,3$ , момент  $M_6^*$  стає від'ємним, тобто штаба за рахунок сили переднього натяжіння як би передає валкам деяку кількість енергії.

**Таблиця 4.13. Вплив натяжіння штаби на енергосилові параметри в умовах перерозподілів обтиснень при терті ковзання ( $f = 0,2$ )**

№ кліті	$h_0$ мм	$h_1$ , мм	$\alpha$ , рад	$q_{0_i}$	$q_{1_i}$	$Q_{\text{сер.п.}}^*$	$\gamma$	$T_{\text{від}}^*$	$T_{\text{вип}}^*$	$M_6^*$	$\sum M_6^*$
1	3	2,5	0,0707	0	0,1	-0,0059	0,032	0,00948	0,00767	0,00181	0,01769
2	2,5	1,5	0,1	0,1	0,1	-0,0074	0,035	0,01799	0,01075	0,00724	
3	1,5	1,0	0,0707	0,1	0,1	-0,0067	0,028	0,01334	0,0093	0,00404	
4	1,0	0,6	0,0632	0,1	0	-0,0087	0,024	0,01669	0,01209	0,00460	
1	3	2,5	0,0707	0	0,2	-0,0050	0,036	0,00836	0,00789	0,00047	0,01576
2	2,5	1,5	0,1	0,2	0,2	-0,0042	0,034	0,01592	0,00908	0,00684	
3	1,5	1,0	0,0707	0,2	0,2	-0,0045	0,027	0,01183	0,00802	0,00381	
4	1,0	0,6	0,0632	0,2	0	-0,0087	0,023	0,01554	0,01086	0,00468	
1	3	2,5	0,0707	0	0,3	-0,0046	0,04	0,00716	0,0085	-0,00089	0,01384
2	2,5	1,5	0,1	0,3	0,3	0,0012	0,033	0,01383	0,00739	0,00644	
3	1,5	1,0	0,0707	0,3	0,3	-0,0025	0,027	0,01031	0,00673	0,00358	
4	1,0	0,6	0,0632	0,3	0	-0,0057	0,021	0,01426	0,00955	0,00471	

Зі збільшенням натяжіння штаби сумарний момент на бочках валків безперервного стану зменшується. Частка першої кліті в загальному зниженні моменту є найбільш суттєвою. При цьому знижується і подовжня стійкість металу в осередках деформації.

При значному натяжінні в окремих клітках процес може здійснюватися в умовах, близьких до граничних.

Такі залежності мають місце при різних моделях тертя на контакті металу з валками. Перерозподіл обтиснень по клітках в умовах неперервного прокатування з натяжінням також впливає на сумарний момент.

Попередньо коротко розглянемо методику розрахунку енергосилових параметрів при холодному прокатуванні.

#### **4.4.2. Методика розрахунку енергосилових параметрів при холодному тонколистовому прокатуванні**

Холодне прокатування являє собою складний процес пружнопластичної деформації, в ході якого відбувається зміцнення, розігрів металу, зміна шорсткості штаби і збільшення її швидкості. При цьому пластична деформація штаби починається і закінчується пружною, робочі валки пружно стискаються і розігріваються під дією пластичної деформації. Основними особливостями пластичної деформації тонколистового металу в холодному стані є великі контактні напруження (до 1500 МПа). Тому вирішальний вплив на енергосилові параметри в цих умовах надають сили контактного тертя і пружні деформації валків і штаби.

В якості моделі осередку деформації при холодному тонколистовому прокатуванні Я. Д. Василев, в роботі [57], пропонує схему, відповідно до якої зона контакту штаби з валками складається з трьох ділянок: пружного стиснення штаби протяжністю  $x_{0п}$ , пластичної деформації штаби  $l_{в}$  і пружного відновлення штаби  $x_{1п}$ . Загальна протяжність дуги контакту позначена  $l_{с}$ , а її приріст за лінією, що з'єднує центри обертання валків -  $x_1$ . Цей приріст складається з ділянок  $x_{1в}$  і  $x_{1п}$ .

На основі даної моделі зони контакту Я. Д. Василева розроблена методика визначення середнього тиску в осередку деформації [45, 57].

Відповідно до цієї методики, середній тиск на ділянці пластичного контакту штаби з валком визначається за формулою:

$$p_{\text{сер.в}} = \frac{\beta \sigma_{T\text{сер}} \xi_{\text{сер}}}{1 - \nu_{\text{п}}^2} \left[ 1 + \frac{f_y l_{\text{в}}}{2h_{\text{сер}}} \right]. \quad (4.46)$$

З урахуванням впливу пружних деформацій валків і штаби:

$$p_{\text{сер.с}} = 0,5 \left( p_0 \frac{x_{0\text{п}}}{l_{\text{с}}} + p_1 \frac{x_1}{l_{\text{с}}} \right) + p_{\text{сер.в}} \frac{l_{\text{в}}}{l_{\text{с}}}, \quad (4.47)$$

де  $\nu_{\text{п}}$  — коефіцієнт Пуассона для матеріалу штаби;  $\beta$  — коефіцієнт Лоде;  $p_0$ ,  $p_1$  — відповідно нормальні напруження на межах пружнопластичних контактів штаби з валками в зонах відставання і випередження:

$$p_0 = \beta \cdot \sigma_{T0} \cdot \xi_0 / (1 - \nu_{\text{п}}^2); \quad (4.48)$$

$$p_1 = \beta \cdot \sigma_{T1} \cdot \xi_1 / (1 - \nu_{\text{п}}^2) \quad (4.49)$$

де  $\xi_0$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_{\text{сер}}$  — коефіцієнти, що враховують натягіння штаби.

Остаточну, з урахуванням впливу пружних деформацій валків і штаби, середній тиск визначається за формулою:

$$p_{\text{сер.с}} = \frac{\beta}{2(1 - \nu_{\text{п}}^2)} \left( \sigma_{T0} \xi_0 \frac{x_{0\text{п}}}{l_{\text{с}}} + \sigma_{T1} \xi_1 \frac{x_{1\text{п}}}{l_{\text{с}}} \right) + \frac{\beta \sigma_{T\text{сер}} \xi_{\text{сер}}}{1 - \nu_{\text{п}}^2} \left[ 1 + \frac{f_y l_{\text{с}}}{3h_{\text{сер}}} (1 + 0,5\varepsilon) \frac{l_{\text{в}}}{l_{\text{с}}} \right] \frac{l_{\text{в}}}{l_{\text{с}}}, \quad (4.50)$$

де  $\frac{x_{0\Pi}}{l_c}$ ,  $\frac{x_{1\Pi}}{l_c}$ ,  $\frac{l_B}{l_c}$  — параметри, які характеризують осередок деформації;

$$\frac{x_{0\Pi}}{l_c} = \left(1 - \frac{x_{1\Pi}}{l_c}\right) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\beta\sigma_{T0}\xi_0}{\varepsilon E_{\Pi} + \beta\sigma_{T1}\xi_1(1-\varepsilon)}}\right]; \quad (4.51)$$

$$\frac{x_{1\Pi}}{l_c} = 1 / \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right) \frac{E_{\Pi}}{\beta\sigma_{T1}\xi_1}}\right]; \quad (4.52)$$

$$\frac{l_B}{l_c} = 1 - \frac{x_{0\Pi}}{l_c} - \frac{x_{1\Pi}}{l_c}; \quad (4.53)$$

де  $f_y$  — коефіцієнт тертя в сталому режимі прокатування:

$$f_y = \frac{k_{\text{см}} \left[1 + (0,5 + R_a) \left(0,4 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon_{\Sigma}}\right)\right]}{\left(1 + 0,25\sqrt{V_{50}} - 0,005V_{50}\right) \left(1 - 0,25\sqrt{\frac{t_{\text{ксп}} - 20}{230}}\right)} \times \left[0,07 - \frac{0,1V_{\varepsilon}^2}{2(1 + V_{\varepsilon}) + 3V_{\varepsilon}^2}\right]; \quad (4.54)$$

де  $k_{\text{см}}$  — коефіцієнт, який враховує природу масла;  $R_a$  — середньоарифметичне відхилення профілю;  $\varepsilon$  — питома відносне обтиснення (за прохід);  $\varepsilon_{\Sigma}$  — сумарне відносне обтиснення;  $V_{50}$  — кінематична в'язкість мастила при температурі  $50^{\circ}\text{C}$ ;  $V_B$  — окружна швидкість валків (швидкість прокатування).

Загальна протяжність дуги контакту та її приріст:

$$l_c = x_1 + \sqrt{R\Delta h + x_1^2}; \quad (4.55)$$

$$x_1 = x_{1\Pi} + 6 \frac{1 - \nu_B^2}{\pi E_B} p_{\text{сер.с}} R \left( 1 - 2 \frac{x_{1\Pi}}{l_c} \right) \left[ 4 \frac{x_{1\Pi}}{l_c} \left( 1 - \frac{x_{1\Pi}}{l_c} \right) + 1 \right], \quad (4.56)$$

де  $E_B$  — модуль пружності матеріалу валків;  $\nu_B$  — коефіцієнт Пуассона для матеріалу валків.

Сила прокатування розраховується за формулою:

$$P_c = p_{\text{сер.с}} b \cdot l_c, \quad (4.57)$$

де  $b$  — ширина штаби.

Момент прокатування дорівнює:

$$M_c = 2P\psi_c l_c + R_c b (q_0 h_0 - q_1 h_1), \quad (4.58)$$

де  $\psi_c$  — коефіцієнт плеча моменту;

$$\psi_c = \frac{1}{6} \left[ \frac{p_0}{p_{\text{сер.с}}} \left( 1 - \frac{\gamma_c}{\alpha_c} - \frac{x_1}{l_c} \right) \left( 1 - \frac{x_{1\Pi}}{l_c} \right) - \frac{p_1}{p_{\text{сер.с}}} \left( \frac{\gamma_c}{\alpha_c} + \frac{x_1}{l_c} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{x_{0\Pi}}{l_c} \right) + 2 \left( 1 + \frac{\gamma_c}{\alpha_c} - \frac{x_{1n}}{l_c} - 2 \frac{x_1}{l_c} - \frac{x_{0n}}{l_c} \right) \right], \quad (4.59)$$

де  $\frac{\gamma_c}{\alpha_c}$  — відношення кута нейтрального перерізу до сплющеного кута захоплення:

$$\frac{\gamma_c}{\alpha_c} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{(\Delta h + \Delta_{1\Pi}) \left( 2 - 3 \frac{x_{1\Pi}}{l_c} \right)}{4 f_y l_c \left( 1 - \frac{x_{1n}}{l_c} \right)^2} \right] - \frac{q_0 h_0 - q_1 h_1}{4 f_y p_{\text{сер.с}} l_c} - \frac{x_1}{l_c}, \quad (4.60)$$

де  $\Delta_{1\Pi}$  — максимальне значення пружного відновлення штаби:

$$\Delta_{1\Pi} = \frac{\beta \sigma_{T1} \xi_1}{E_{\Pi}} h_1, \quad (4.61)$$

де  $E_{\text{п}}$  — модуль пружності матеріалу штаби;  $R_c$  — сплющений радіус валків:

$$R_c = \frac{l_c^2}{\Delta h}. \quad (4.62)$$

Як відомо, на станах з неперервним процесом прокатування режими деформації та натягіння визначаються, виходячи з умови постійності секундних об'ємів металу, що проходить через кліті. У зв'язку з цим твердженням, при визначенні стійкості процесу прокатування з натягінням за методикою, наведеною в розділі 4.3 даної роботи, необхідно, щоб виконувалася умова:

$$V_{1_{i-1}} = V_{0_i}, \quad (4.63)$$

де  $i$  — номер кліті;  $V_{0_i}$  — швидкість входу металу в  $i$ -ту кліть;  $V_{1_{i-1}}$  — швидкість виходу металу з попередньої ( $i - 1$ ) кліті.

Тому в ході визначення поздовжньої стійкості процесу прокатування, для кожного з розглянутих режимів натягіння, на основі теоретично отриманих значень кута нейтрального перерізу  $\gamma$  розраховували випередження штаби і на основі його величини корегували значення  $V_B$ .

Розрахунок проводиться ітераційним шляхом на ЕОМ.

1. Спочатку визначається довжина осередку деформації за відомою формулою:

$$l = \sqrt{R\Delta h}.$$

2. Потім приймається наступна рівність:

$$l_c = l.$$

3. Розраховується довжина осередку деформації з урахуванням сплющення валків за формулою (4.55).

4. Визначається відносна різниця  $\Delta$  прийнятого і обчисленого значень  $l_c$ . Ця різниця повинна бути задовільною (як пра-

вило, 5—10 %). Далі розраховуються сила і момент прокатування за відповідними формулами.

5. Якщо  $\Delta$  не відповідає необхідному значенню, то змінюється величина  $l_c$ .

6. Для забезпечення запасу сил, що втягують метал в валки, при можливих коливаннях технологічних параметрів (температури, коефіцієнту тертя, геометрії підкату та ін.), отримані значення натягів для граничних умов слід зменшити на 2—3 %. При цьому середня результуюча сила по клітях стана буде  $Q_{\text{сер.п.}}^{*H} < 0$ , що свідчить про стійкість процесу, тобто про достатність втягуючих сил для забезпечення нормальних умов прокатування. У той же час сумарний момент по клітях буде близький до раціонального.

#### **4.4.3. Склад основного обладнання та елементи технології на безперервному тонколистовому стані 1680 холодного прокатування**

Стан 1680 неперервний чотириклітьовий призначений для виробництва тонколистової холоднокатаної сталі з вуглецевих сталей звичайної якості, вуглецевих якісних конструкційних сталей, низьколегованих сталей, маловуглецевих якісних сталей для холодного штампування [58].

Автори статті [26] проаналізували умови прокатування листа поперечними розмірами  $0,8 \times 1000$  мм з підкату  $2,5 \times 1000$  мм на безперервному чотириклітьовому стані 1680 комбінату «Запоріжсталь».

При існуючому режимі натяжінні штаби були визначені зусилля прокатування в кожній кліті, середній тиск, заднє і переднє питомі натяжіння і умови тертя на контакті. Крім того, визначені моменти і потужності прокатування, а також випередження штаби по всім клітям стану. На основі рівняння енергетичного балансу потужності і залежності (4.44) автори [26] запропонували но-



вий більш прогресивний (енергозберігаючий) режим натягіння штаби, а також розрахували ефективність цієї пропозиції. Результати дослідження показані в табл. 4.14. У цій же таблиці наведені розрахункові значення середньої результуючої поздовжніх сил  $Q_{\text{сер.п.}}^{*H}$ .

**Таблиця 4.14** Режими обтиснення, натягіння і результати розрахунку поздовжньої стійкості штаби у валках при прокатуванні листа 0,8x1000 мм з підкату 2,5x1000 мм на чотирикільтовому стані 1680

№ кліті	1	2	3	4
$h_1$ , мм	1,65	1,22	0,9	0,8
Існуючий режим натягіння				
$p_{\text{сер.п.}}$ , Н/мм <sup>2</sup>	637	580	623	715
$\alpha$ , рад	0,0556	0,0343	0,028	0,0117
$f_{\text{сер}}$	0,113	0,0819	0,0703	0,081
$\sigma_0/\sigma_{T0}$	0,159	0,355	0,351	0,363
$\sigma_1/\sigma_{T1}$	0,355	0,351	0,363	0,062
$Q_{\text{сер.п.}}^{*H}$	-0,0032	-0,00001	-0,000091	-0,00038
Запропонований в [51] режим натягіння				
$p_{\text{сер.п.}}$ , Н/мм <sup>2</sup>	626	551	582	681
$\alpha$ , рад	0,0558	0,0346	0,0286	0,0119
$f_{\text{сер}}$	0,115	0,082	0,0703	0,0815
$\sigma_0/\sigma_{T0}$	0,159	0,39	0,403	0,423
$\sigma_1/\sigma_{T1}$	0,39	0,403	0,423	0,062
$Q_{\text{сер.п.}}^{*H}$	-0,0033	0,00022	0,000135	-0,00029

Як впливає з розрахункових значень сили  $Q_{\text{сер.п.}}^{*H}$  за існуючого режиму натягіння прокатка в усіх клітях відбувається стійко без порушення умов рівноваги штаби в валках. Однак у другій

і третій клітях прокатка ведеться в умовах близьких до граничних.

В черговий раз необхідно зазначити, що виробничий режим натяжіння штаби близький до раціонального. Подальше збільшенні натяжіння штаби між клітями стану 1680 може привести до втрати рівноваги розкату. Особливо це стосується деформація штаби в другій і третій клітях (табл. 4.14).

У цьому можна переконатися, аналізуючи результати розрахунку сили  $Q_{x.п.}^{*н}$  при прокатуванні по пропонованому режиму натяжіння металу в другій і третій клітях стану 1680. За даними табл. 4.14 середня результуюча поздовжніх сил  $Q_{сер.п.}^{*н}$  змінює знак, що має привести до нестійкої поведінки штаби в осередку деформації.

Розрахунки раціональних режимів натяжіння за запропонованою в даній роботі методикою показали, що заводські режими натяжіння є раціональними. Як з точки зору поздовжньої стійкості штаби, так і енерговитрат.

На закінчення відзначимо, що з посиленням режиму натяжіння при безперервної прокатки сумарні енергосилові параметри деформації зменшуються, що позитивно відбивається на енергозберігаючій технології. Про це свідчать дослідження [26] та інші. Однак, зі збільшенням натяжіння штаби (особливо заднього) знижується поздовжня стійкість металу в осередку деформації і при прагненні раціоналізувати процес за умовами натяжіння останнім необхідно враховувати. Вираз (4.44) не може бути використано для оцінки цієї раціоналізації, тому що залежність співвідношення потужностей від натяжіння штаби не має екстремуму.

#### 4.5. Дослідження та оцінювання поздовжньої стійкості штаби при гарячому прокатуванні в умовах виробництва

При розрахунку поздовжньої стійкості виходили з реального режиму обтиснень при прокатці листа кінцевими поперечними розмірами  $3 \times 1400$  мм зі сталі Ст 3 кп [59], що наведений в табл. 4.15.

Таблиця 4.15. Режим обтиснень, кінематичні і силові параметри

№ кліті	Товщина штаби		Обтиснення		Кут захоплення $\alpha$ , рад	Швидкість прокатки $V$ , м/с	Дослідна сила прокатки $P_{оп}$ , МН	Середній тиск $P_{сер}$ , МПа
	$h_0$ , мм	$h_1$ , мм	$\Delta h$ , мм	$\varepsilon$ , %				
5	27	13,62	13,38	49,6	0,209	1,89	12,33	140
6	13,62	8,33	5,29	38,8	0,131	3,08	10,75	142
7	8,33	5,61	2,72	32,6	0,0944	4,6	12,57	302
8	5,61	4,28	1,33	23,3	0,066	6,03	10,67	344
9	4,28	3,37	0,91	21,3	0,055	7,66	9,53	369
10	3,37	3	0,37	11	0,035	8,6	4,55	271

Температура металу за дослідними даними [59] в п'ятій кліті становить  $t_5 = 1050$  °С. Втрату температури металу при прокатці в п'ятій кліті визначали за формулою:

$$\Delta t = 0,0021 \left( \frac{t + 273}{100} \right)^4 \cdot \frac{\tau}{h_0}, \quad (4.64)$$

де  $t$  — температура металу в попередньому проході, °С;  $\tau$  — час попереднього проходу і подальшої паузи, с;  $h_0$  — товщина штаби після попереднього проходу, мм.

Використовуючи дослідні дані по часу прокатки металу в даній кліті, приймаємо час паузи  $t_{пауза} = 3$  с. Розрахована температура металу по формулі (4.64) для кожного проходу приведена в табл. 4.16.

Таблиця 4.16. Розрахункові значення коефіцієнту тертя, температури металу, і сплющеної дуги захоплення

№ кліті	5	6	7	8	9	10
Температура, $t, ^\circ\text{C}$	1012	1000	996	970	925	900
Коефіцієнт тертя, $f_y$	0,298	0,234	0,185	0,171	0,173	0,18
Сплющена довжина дуги захоплення, $l_{\text{спл}}, \text{мм}$	63,88	40,17	30,5	22,1	18,8	12,3
Сплющений кут захоплення, $\alpha_{\text{спл}}, \text{рад}$	0,209	0,131	0,089	0,059	0,048	0,030
Сплющений радіус валків, $R_{\text{спл}}, \text{мм}$	305	305	342	367	388	409

Величини сплющеної довжини осередку деформації визначали за формулою:

$$l_{\text{спл}} = \sqrt{R \cdot \Delta h + \frac{P_{\text{оп}} \cdot R}{26850 \cdot b}}, \quad (4.65)$$

де  $P_{\text{оп}}$  — дослідне значення сили прокатки в Н, наведені в табл. 4.15;  $b$  — ширина штаби, мм.

Значення сплющеного кута захоплення розраховували за формулою (4.39).

Сплющений радіус валків визначали за формулою (4.40).

Для визначення коефіцієнту тертя при сталому процесі прокатки скористаємося формулою С. Екелунда [12]:

$$f_y = k_n \cdot k_M \cdot k_v \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot t). \quad (4.66)$$

При прокатці в чавунних загартованих шліфованих валках  $k_n = 0,99$ ; при деформації сталі з вмістом вуглецю 0,2—0,3 %;  $k_M = 1,2$ ;  $k_v$  — коефіцієнт що враховує швидкість прокатки, значення коефіцієнта  $k_v$  при різній швидкості прокатки наведені в [60]:

$$f_{y5} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 1050) \approx 0,298;$$

$$f_{y6} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 1020) \approx 0,234;$$

$$f_{y7} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 980) \approx 0,185;$$

$$f_{y8} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 940) \approx 0,171;$$

$$f_{y9} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 910) \approx 0,173;$$

$$f_{y10} = 0,9 \cdot 1,2 \cdot 0,7 \cdot (0,55 - 0,00024 \cdot 875) \approx 0,18.$$

Значення отриманих параметрів  $l_{\text{спл}}$ ,  $\alpha_{\text{спл}}$ ,  $R_{\text{спл}}$  і  $f_y$  наведені в табл. 4.16.

Далі визначали напруження текучості по всім клітям чистової групи стану 1680. Для його розрахунку в діапазоні температур 800—1300 °С скористалися формулою Л. В. Андреюка і Г. Г. Тюленєва [61]:

$$\sigma_T = S \cdot \sigma_{T_0} \cdot U^a \cdot (10\varepsilon)^b \cdot \left(\frac{T}{1000}\right)^c, \quad (4.67)$$

де  $\sigma_{T_0}$  — базове напруження плинину металу, що прокатується, МПа;  $U$  — середня швидкість деформації,  $\text{с}^{-1}$ ;  $\varepsilon$  — середня ступінь деформації в частках одиниці;  $T$  — температура металу в даній кліті, °С.

Швидкість деформації та середню ступінь деформації розраховували за такими формулами:

$$U = \frac{V}{l_{\text{спл}}} \cdot \frac{\Delta h}{h_0}; \quad (4.68)$$

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta h}{h_0}; \quad (4.69)$$

Для сталі Зкп  $S = 0,885$ ;  $\sigma_{T_0} = 77,9$  МПа;  $a = 0,135$ ;  $b = 0,164$ ;  $c = -2,8$ .

Результати розрахунку напруження плинущу наведені в табл. 4.17. В табл. 4.18 наведені питомі натяжіння штаби між клітьми, взяті з практичних даних [59].

**Таблиця 4.17. Напруження плинущості металу в чистовий групі клітей стану**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$\sigma_T$ , МПа	80	84,5	93	157,7	176,9	192

**Таблиця 4.18. Питомі сили натяжіння штаби між клітьми по практичним даним**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$\sigma_{T_0}$ , МПа	$\frac{0}{0}$	$\left(\frac{2,4}{32,5}\right)^*$	$\frac{2,2}{23,6}$	$\frac{1,2}{18,7}$	$\frac{1,2}{36}$	$\frac{1,7}{27,2}$
$\sigma_{T_1}$ , МПа	$\frac{2,4}{32,5}$	$\frac{2,2}{23,6}$	$\frac{1,2}{18,7}$	$\frac{1,2}{36}$	$\frac{1,7}{27,2}$	$\frac{0,05}{0,05}$

*Примітка:* \* — у чисельнику мінімальне значення питомого натяжіння, в знаменнику — максимальне.

Безрозмірне значення питомих натяжіннь в кожній кліті чистової групи безперервного стану 1680 розраховували за формулою:

$$q_{0i} = \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{Ti}}; \quad q_{1i} = \frac{\sigma_{1i}}{\sigma_{Ti}}. \quad (4.70)$$

Приймаємо мінімальні і максимальні питомі натяжіння в безрозмірному вигляді і зводимо їх до таблиці 4.19. В табл. 4.20 наведені також середні значення питомих натягів по клітьми чистової групи стана.

Зауважимо, що питомі безрозмірні натяжіння у всіх трьох випадках перед 5 і після 10 кліті є однаковими.

Таблиця 4.19. Безрозмірні питомі натяжіння

№ кліті	5	6	7	8	9	10
Задній питомий натяг, $q_0$	$\left(\frac{0}{0}\right)^*$	$\frac{0,039}{0,53}$	$\frac{0,034}{0,363}$	$\frac{0,03}{0,256}$	$\frac{0,015}{0,44}$	$\frac{0,015}{0,246}$
Передній питомий натяг, $q_1$	$\frac{0,039}{0,53}$	$\frac{0,034}{0,363}$	$\frac{0,03}{0,256}$	$\frac{0,015}{0,44}$	$\frac{0,015}{0,246}$	$\frac{0,01}{0,01}$

Примітка. У чисельнику \* — мінімальне значення питомого натяжіння, в знаменнику — максимальне.

Таблиця 4.20. Середній режим натягу

№ кліті	5	6	7	8	9	10
Задній середній питомий натяг, $q_{0\text{ср}}$	0	0,2845	0,1985	0,143	0,2275	0,13
Передній середній питомий натяг, $q_{1\text{ср}}$	0,2845	0,1985	0,143	0,2275	0,13	0,01

Далі, відповідно до методики наведеної вище, розрахуємо епюри поточних поздовжніх сил  $Q_{x\text{пр}}^{*н}$  і знайдемо їх середнє результуюче значення  $Q_{\text{ср пр}}^{*н}$  при режимах натягу зазначених в табл. 4.19 і 4.20.

Результати розрахунків показали, що при прокатці з мінімальними і середніми значеннями питомих натяжінь процес у всіх клітях чистової групи стану буде протікати стійко без часткових буксувань, про що свідчать дані табл. 4.21.

**Таблиця 4.21. Результати визначення результуючої поздовжніх сил по клітям чистової групи стану при прокатці з різними питомими натягами**

Режим на- тяжіння	Номер кліті чистової групи сталі					
	5	6	7	8	9	10
Мінімальні питомі натяжіння	$Q_{\text{ср пр}}^{*н} =$ – 0,02526	– 0,01254	– 0,00729	– 0,00503	– 0,00467	– 0,00306
Середні питомі на- тяжіння	$Q_{\text{ср пр}}^{*н} =$ – 0,0202	– 0,00041	– 0,00287	– 0,00252	– 0,00205	– 0,00230
Максималь- ні питомі натяжіння	$Q_{\text{ср пр}}^{*н} =$ – 0,01652	0,01252	0,00149	– 0,00094	0,000619	– 0,00142

При прокатці з максимальними питомими натяжіннями в 6, 7, і 9 клітях стійкий процес неможливий, тому що середньоінтегральна результуюча сила пластично деформованого металу набуває додатних значень. Аналіз наведених у табл. 4.21 даних показує, що, за окремими винятками, при всіх режимах натягу поздовжня стійкість металу в валках зменшується від п'ятої до десятої кліті. Це пов'язано з тим, що в зазначеному напрямку результуюча сила  $Q_{\text{ср пр}}^{*н}$  по абсолютній величині також зменшується, що, мабуть пов'язано з величиною коефіцієнта тертя.

На рис. 4.43—4.45 наведені епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатці в 6, 7 і 9 клітях з максимальними питомими натяжіннями.



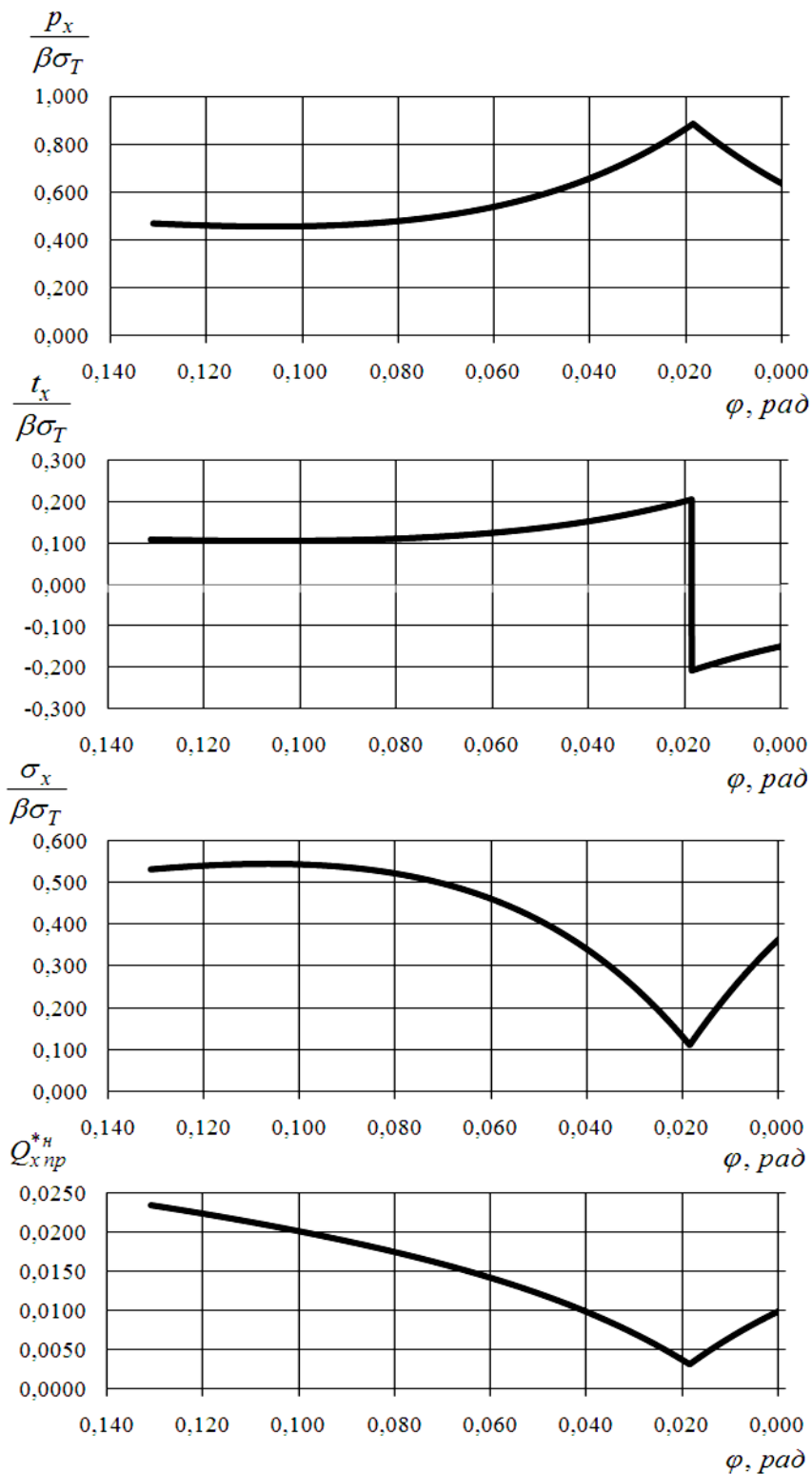


Рис. 4.43. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні в 6 кліті з максимальним натягом штаби

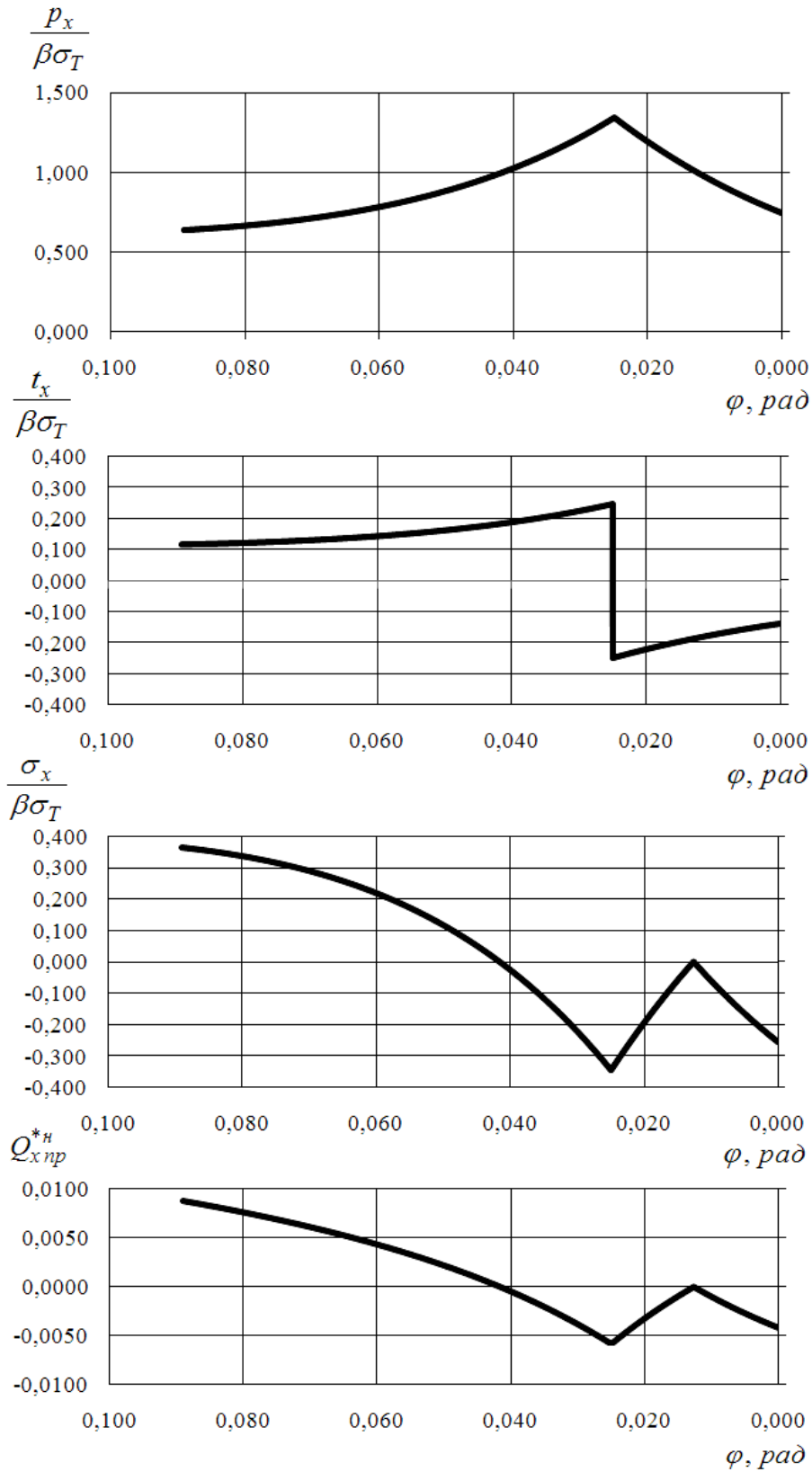


Рис. 4.44. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатці в 7 кліті з максимальним натяжінням штаби

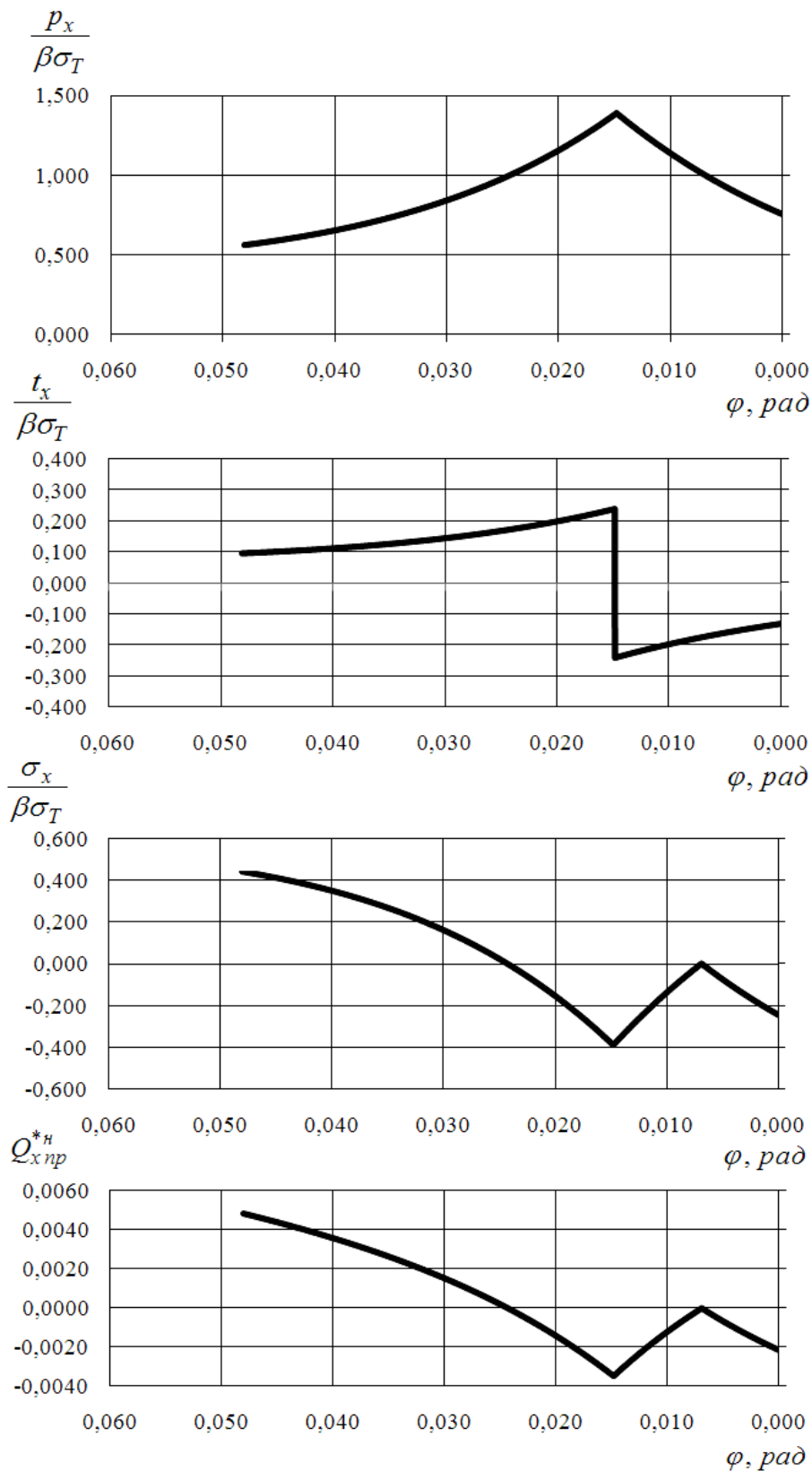


Рис. 4.45. Епюри контактних напружень і поточних поздовжніх сил при прокатуванні в 9 кліті з максимальним натягом штаби

Скорегуємо максимальний режим натяжіння з тим, щоб прокатка металу у всіх клітках чистової групи стану 1680 була б стійкою. Для цього зменшимо заднє натяжіння в 6, 7 і 9 клітках.

Конкретні значення скоригованого режиму натяжіння і отримані величини результуючої поздовжніх сил приведені в таблиці 4.22.

**Таблиця 4.22. Скоригований режим питомих натяжінь і значення результуючої сили**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$q_{0i}$	0	0,286	0,27	0,25	0,23	0,15
$q_{1i}$	0,286	0,27	0,25	0,23	0,15	0,01
$Q_{\text{ср пр}}^{*H}$	-0,201	-0,00003	-0,0008	-0,0012	-0,002	-0,0022

Визначимо середній питомий натяг по кожній кліті:

$$q_{\text{ср}i} = \frac{|q_{0i}| + q_{1i}}{2}, \quad (4.71)$$

а також середній питомий натяг в цілому по чистовій групі клітей:

$$q_{\text{ср.гр}} = \frac{|q_{0i}| + \sum q_{\text{ср}i}}{n}, \quad (4.72)$$

де  $n$  — число клітей в чистовий групі стану.

При мінімальних питомих натяжіннях:

$$q_{\text{ср.гр}}^{\min} = 0,02225.$$

При середніх питомих натяжіннях:

$$q_{\text{ср.гр}}^{\text{ср}} = 0,1664.$$

При скоригованих, максимальних питомих натяжіннях:

$$q_{\text{ср.гр}}^{\max} = 0,1952.$$

Далі визначимо середню результуючу силу  $Q_{\text{ср пр}}^{*H}$  по всій чистовій групі стану:

$$Q_{\text{ср пр гр}}^{*н} = \left| \sum \frac{Q_{\text{ср пр}}^{*н}}{6} \right|. \quad (4.73)$$

При мінімальному питомому натяжінні вона становить — 0,00964, при середньому — 0,00505; при скоригованому максимальному — 0,00438.

Побудуємо залежність середньої результуючої сили від середнього питомого натяжіння по всій чистової групі клітей стану (рис. 4.46).

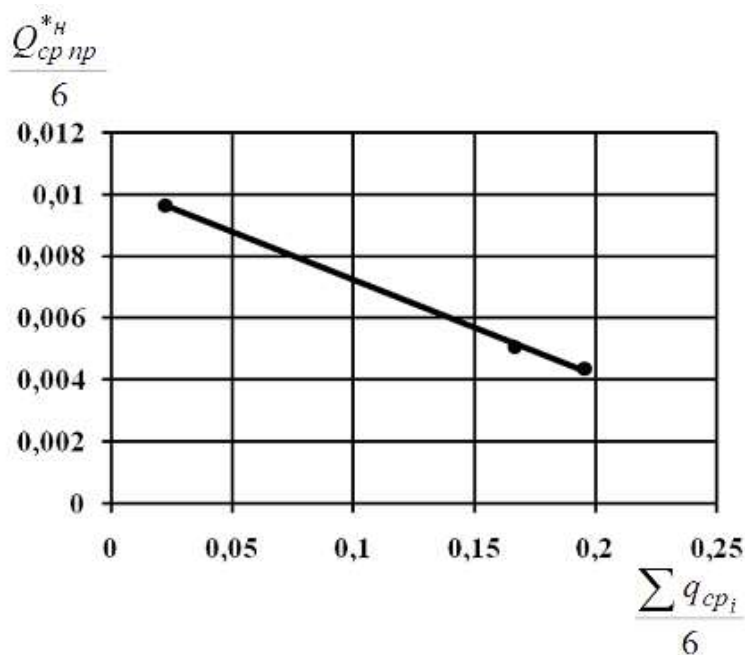


Рис. 4.46. Вплив натягу штаби на результуючу поздовжніх сил при прокатуванні в чистовий групі клітей стану 1680

Проаналізуємо зміну сумарного по всіх клітях чистової групи стану моменту прокатки від питомого натягу штаби. Момент прокатки в кожній кліті розраховували виходячи з розподілу питомих сил тертя і нормального тиску за відомою формулою Баюкова

$$M_{\text{пр}} = 2f_y \cdot p_{\text{ср}} \cdot R^2 \cdot b \cdot (\alpha - 2\gamma), \quad (4.74)$$

або в безрозмірній формі

$$M_{\text{пр}}^* = 2f_y \cdot \frac{P_{\text{ср}}}{\beta\sigma_T} \cdot \frac{R_{\text{спл}}}{R_{\text{ном}}} \cdot (\alpha - 2\gamma). \quad (4.75)$$

де  $R_{\text{ном}}$  — номінальний радіус валків в кожній кліті, введений в формулу (4.75) для отримання безрозмірного моменту прокатки.

Для прикладу, визначимо безрозмірний момент прокатки для п'ятої кліті при мінімальному питомому натяжінні  $q_0 = 0$ ;  $q_1 = 0,039$ .

На рис. 4.47 наведені розраховані епюри розподілу нормального тиску  $\frac{p_x}{\beta\sigma_T}$ , питомих сил тертя  $\frac{t_x}{\beta\sigma_T}$ , нормальних поздовжніх напружень  $\frac{\sigma_x}{\beta\sigma_T}$  і розподіл поточної поздовжньої сили  $Q_{x\text{пр}}^*$ .

Середній тиск  $\frac{P_{\text{ср}}}{\beta\sigma_T}$  визначали, використовуючи епюру нормальних напружень. Силу тертя в зоні відставання розраховували, виходячи з епюри розподілу питомих сил тертя в цій зоні:

$$T_{\text{отс}} = \int_{\gamma}^{\alpha} f_y \cdot p_x R b d\varphi,$$

або в безрозмірному вигляді

$$T_{\text{отс}}^* = \int_{\gamma}^{\alpha} f_y \cdot \frac{p_x}{\beta\sigma_T} d\varphi. \quad (4.76)$$

Аналогічно визначали силу тертя в зоні випередження:

$$T_{\text{оп}} = \int_0^{\gamma} f_y \cdot p_x R b d\varphi, \quad T_{\text{оп}}^* = \int_0^{\gamma} f_y \cdot \frac{p_x}{\beta\sigma_T} d\varphi. \quad (4.77)$$

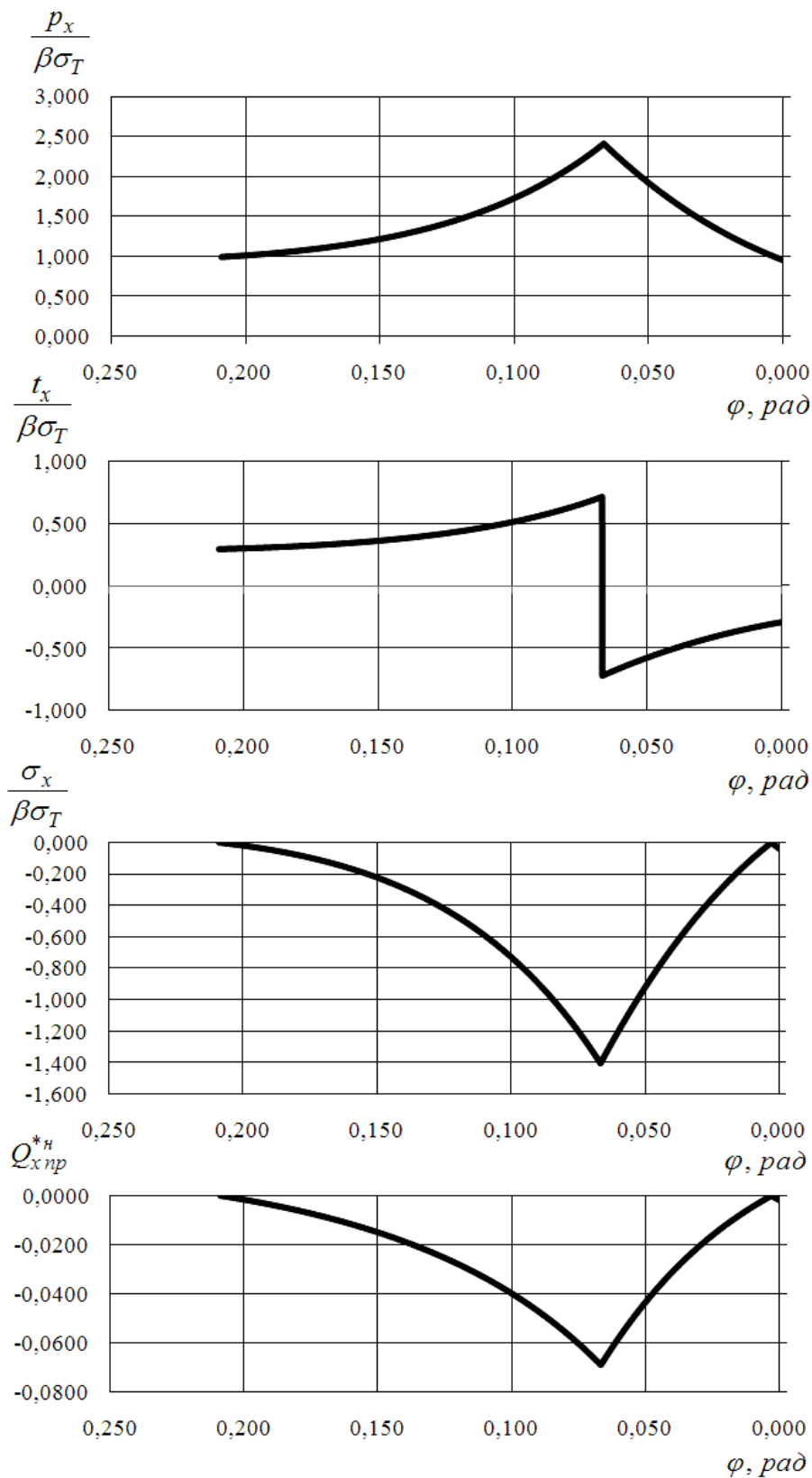


Рис. 4.47. Розрахункові епюри для п'ятої кліти чистової групи стану 1680 при мінімальному задньому і передньому питомому натяжіннях

В табл. 4.23, 4.24 і 4.25 наведені розрахункові значення моменту прокатки, середнього тиску питомих сил тертя в зоні відставання і випередження, розраховані по теоретичним епюграм, при мінімальному, середньому і скоригованому максимальному питомому натяжінню штаби.

**Таблиця 4.23. До розрахунку моменту прокатки в чистовій групі клітей тонколистового стану 1680 при мінімальних питомих натяжіннях штаби**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$\frac{P_{\text{ср}}}{\beta\sigma_T}$	1,480	1,410	1,403	1,404	1,505	1,405
$T_{\text{отс}}^*$	0,0608	0,02753	0,01429	0,00833	0,0071	0,00412
$T_{\text{оп}}^*$	0,0313	0,01568	0,008812	0,00582	0,0054	0,00347
$M_{\text{пр}}^*$	0,067	0,0267	0,01366	0,00668	0,00481	0,00189

**Таблиця 4.24. До розрахунку моменту прокатки в чистовій групі клітей тонколистового стану 1680 при середніх питомих натяжіннях штаби**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$\frac{P_{\text{ср}}}{\beta\sigma_T}$	1,338	1,024	1,162	1,171	1,2204	1,306
$T_{\text{отс}}^*$	0,05303	0,02152	0,01234	0,00679	0,00607	0,00405
$T_{\text{оп}}^*$	0,03029	0,00984	0,00678	0,00502	0,00406	0,00299
$M_{\text{пр}}^*$	0,04196	0,02724	0,01432	0,00409	0,00622	0,00351



**Таблиця 4.25. До розрахунку моменту прокатки в чистовій групі клітей тонколистового стану 1680 при скоригованому максимальному режимі натяжіння штаби**

№ кліті	5	6	7	8	9	10
$\frac{P_{\text{ср}}}{\beta\sigma_T}$	1,337	0,99	1,027	1,07	1,20	1,287
$T_{\text{отс}}^*$	0,05297	0,02052	0,01099	0,00656	0,00597	0,00404
$T_{\text{оп}}^*$	0,03028	0,00988	0,00592	0,00422	0,00404	0,00291
$M_{\text{пр}}^*$	0,0418	0,0239	0,01274	0,00626	0,00589	0,00379

Знайдемо сумарні моменти по всіх клітях чистової групи стану 1680 при різних режимах натяжіння.

При мінімальних питомих натяжіннях він дорівнює:

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{пр}}^* &= 0,067 + 0,0267 + 0,01366 + \\ &+ 0,00668 + 0,00481 + 0,00189 = 0,12074. \end{aligned}$$

У разі прокатки штаби із середнім питомим натяжінням по всіх клітях чистової групи стану 1680:

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{пр}}^* &= 0,04196 + 0,02724 + 0,01432 + \\ &+ 0,00409 + 0,00622 + 0,00351 = 0,09734. \end{aligned}$$

При скоригованому максимальному режимі натяжіння:

$$\begin{aligned} \sum M_{\text{пр}}^* &= 0,0418 + 0,0239 + 0,01274 + \\ &+ 0,00626 + 0,00589 + 0,00379 = 0,0943. \end{aligned}$$

Побудуємо залежність сумарного моменту прокатки від середнього питомого натягу штаби по всій чистовій групі  $q_{\text{ср.гр}}$  (рис. 4.48).

Як видно зі збільшенням питомого натяжіння штаби в міжклітьовому проміжку сумарний момент прокатки в чистовій групі клітей тонколистового стану 1680 зменшується.

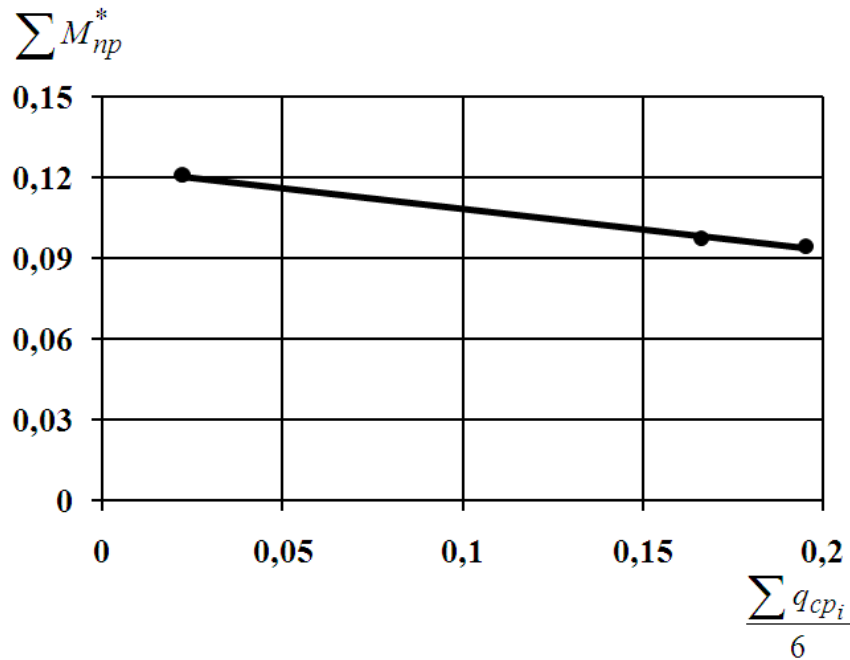


Рис. 4.48. Залежність сумарного моменту прокатки від режиму натягіння

Очевидно, що вести процес прокатки зі значними натягіннями металу енергетично вигідно. З графіка рис. 4.48 випливає, що при прокатуванні з скоригованим режимом натягіння сумарний момент зменшується на 22 % в порівнянні з прокатуванням штаби з мінімальними натягіннями.

Поєднавши графіки рис. 4.46 і 4.48, продовжимо лінію 2, до перетину з горизонтальною віссю (рис. 4.49). Перетин, відповід-

ний питомому натягінню  $\frac{\sum q_{срi}}{6} = 0,33$ , теоретично визначає

граничні умови прокатки в чистовій групі клітей стану 1680. Здавалося б очевидно, що є можливість ще більше зменшити сумарний момент прокатки за рахунок збільшення питомого натягіння

до  $\frac{\sum q_{срi}}{6} = 0,25—0,33$ . Однак, з огляду на коливання таких тех-

нологічних параметрів, як температура металу, обтиснення, коефіцієнт тертя, середній тиск, співвідношення зон відставання і випередження, в осередку деформації повинен мати місце певний запас поздовжньої стійкості штаби. Крім того, маючи на ува-

зі, що можливості регулювання натягу в п'ятій кліті обмежені, а сила  $Q_{ср пр}^{*H}$  по абсолютній величині значно перевищує її значення по іншим клітям чистової групи, то слід визнати, що скоригований режим натягіння штаби є дуже близьким до оптимального.

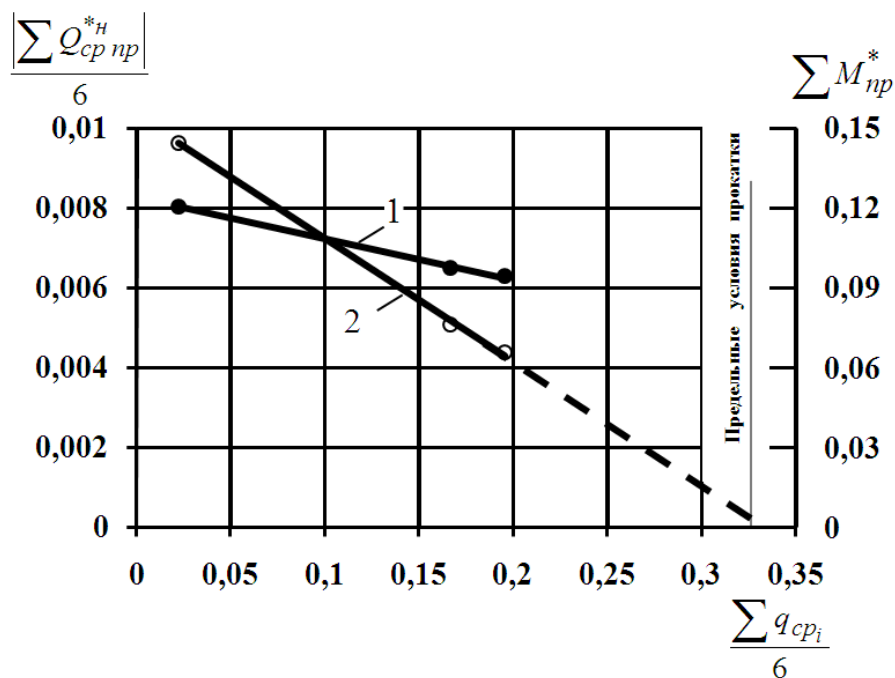


Рис. 4.49. Вплив режиму міжклітьового натягіння штаби на результуючу поздовжніх сил по всій чистовій групі клітей і сумарний момент прокатки: 1 — сумарний момент прокатки, 2 — результуюча поздовжніх сил

Як показано, при цьому режимі натягіння, поряд зі стійкою поведінкою штаби в валках чистової групи стану, матиме місце і енергозберігаюча технологія прокатки.

Таким чином, проведене дослідження показало, що запропонований метод оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатки дозволяє розробити оптимальний режим натягіння штаби в міжклітьових проміжках безперервного стану.

#### 4.6. Питання для контролю знань

1. Що розуміють під поздовжньою стійкістю процесу прокатки?
2. Чим в теорії характеризуються граничні умови прокатки?
3. Як в теорії пояснюється можливість процесу прокатування з ефективними мастилами при однозонному ковзанні металу у валках?
4. Які умови процесу прокатування сучасна теорія прокатки не зможе пояснити?
5. Як впливає задній і передній натяг штаби на зусилля і момент прокатки?
6. Які умови повинні виконуватись при безперервному прокатуванні?
7. Чому дорівнює тиск металу на валки на межах осередку деформації при прокатуванні з натягом?
8. У чому полягає фізична суть прокатки з натягом по В. М. Видріну?
9. В чому полягає гіпотеза плоских перерізів?
10. В чому причина появи поздовжніх нормальних розтягуючих напружень при простому процесі прокатуванні?
11. Що визначає середня результуюча поздовжніх сил в осередку деформації?
12. Чому середня результуюча поздовжніх внутрішніх сил не може бути спрямована за рухом штаби, що прокатують?
13. Як визначається прискорення пластично деформованого металу у контакті валків і штаби?
14. В чому полягає методика оцінки поздовжньої стійкості процесу прокатки?
15. Які складові балансу поздовжніх сил в осередку деформації?

16. Як змінюється результуюча внутрішніх поздовжніх сил в залежності від кута захоплення?
17. У чому полягає фізична суть середньої результуючої поздовжніх сил пластично деформованого металу?
18. Вплив заднього і переднього натягу на розподіл тиску в осередку деформації?
19. Види законів і функцій по розподілу питомих сил тертя?
20. Як направлені внутрішні поздовжні напруження при прокатуванні з заднім натягом?
21. Як направлені внутрішні поздовжні напруження при прокатуванні з переднім натягом?
22. Як впливає задній і передній натяг на поздовжню стійкість процесу прокатки?
23. Чому дорівнює максимальне значення питомих сил тертя?
24. В яких перерізах осередку деформації при прокатуванні з натягом поздовжні нормальні напруження дорівнюють нулю?
25. Чому дорівнює сумарний момент від натягу при неперервній прокатці?
26. Як впливає передній і задній натяг штаби на кут нейтрального перерізу?

#### 4.7. Перелік літератури до розділу 4

1. Грудев А. П. Захватывающая способность прокатных валков. М. : СП Интермет Инжиниринг, 1998. 283 с.
2. Грудев А. П. Зависимость максимальных углов захвата от толщины прокатываемых полос / А. П. Грудев, Ю. В. Зильберг // Изв. вузов. Черная металлургия. — 1962. — № 1. — С. 117—120.

3. Прокофьев В. И. Максимальные углы захвата при установившемся процессе прокатки / В. И. Прокофьев // *Обработка металлов давлением : Научные труды, ДМетИ.* — М. : Металлургиздат. — 1962. — Вып. XLVIII. — С. 324—329.
4. Экспериментальное исследование максимальных углов захвата при установившемся процессе прокатки / А. П. Чекареев, В. И. Прокофьев, В. П. Галицкий [и др.] // *Обработка металлов давлением : Научные труды, ДМетИ.* — М. : Металлургия. — 1967. — Вып. LII. — С. 79—88.
5. Павлов И. М. К вопросу об отрицательном опережении при прокатке / И. М. Павлов, В. К. Белосевич // *Изв. вузов. Черная металлургия.* — 1961. — № 10. — С. 46—49.
6. Максименко О. П. Исследование процесса прокатки в режиме гидродинамического трения / О. П. Максименко, В. М. Самохвал // *Изв. вузов. Черная металлургия.* — 2007. — № 2. — С. 40—43.
7. Старченко Д. И. Особенности высокоскоростной прокатки со сверхвысоким отставанием / Д. И. Старченко, В. И. Капранов, А. В. Шемякин // *Обработка металлов давлением: тр. Ждановского металлургического института.* — М. : Металлургия. — 1969. — Вып. XVIII. — С. 123—129.
8. Бояршинов М. И. Об отрицательном опережении при прокатке / М. И. Бояршинов, В. В. Мельцер // *Изв. вузов. Черная металлургия.* — 1964. — № 9. — С. 106—112.
9. Файнберг Ю. М. Обрывы металла при холодной прокатке и влияние опережения / Ю. М. Файнберг // *Сталь.* — 1941. — № 2 — С. 31—38.
10. Тарновский И.Я., Поздеев А.А., Ляшков В. Б. Деформация металла при прокатке. М. : Металлургиздат, 1956. 287 с.
11. Грудев А. П., Зильберг Ю. В. Исследование внешнего трения при прокатке свинца. *Обработка металлов давлением : Научные труды, ДМетИ.* М. : Металлургиздат, 1962. Вып. XLVIII. С. 209—310.

12. Бахтинов Б. П. Использование резервных сил трения при прокатке на блюминге / Б. П. Бахтинов // Сталь. — 1957. — № 9. — С. 805—809.
13. Выдрин В. Н. Динамика прокатных станов. / В. Н. Выдрин. — Свердловск : Metallurgizdat, 1960. — 255 с.
14. Романюк Р. Я. Підвищення поздовжньої сталості процесу тонколистової прокатки на основі розвитку теоретичних положень щодо контактної взаємодії полоси з валками : дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.03.05 „Процеси та машини обробки тиском” / Р. Я. Романюк. — Дніпропетровськ, 2012. — 132 с.
15. Клименко П. Л. Контактное напряжение при прокатке с технологической смазкой / П. Л. Клименко // Сучасні проблеми металургії. Наукові вісті. Т. 8. Пластична деформація металів. — Дніпропетровськ : Сучасні технології. — 2005. — С. 44—49.
16. Технология прокатного производства: учеб. для вузов / А.П. Грудев, Л.Ф. Машкин, М.И. Ханин. — М. : Metallurgiya. — 1994. — 656 с.
17. Зотов В.Ф. Производство проката / В.Ф. Зотов. — М. : «Интермет Инжиниринг», 2000. — 352 с.
18. Flat—rolled steel processes : advanced technologies / editor, V. V. Ginzburg. CRC Press. — 2009. — 372 p.
19. Гарбер Э.А. Производство проката : Справочное издание. Том 1. Производство холоднокатаных полос и листов (сортамент, теория, технология, оборудование) / Э.А. Гарбер. — М. : Теплотехник, 2007. — 368 с.
20. Гарбер Э.А. Станы холодной прокатки (теория, оборудование, технология) / Э.А. Гарбер. — М. : ОАО «Черметинформация», Череповец : ГОУ ВПО ЧГУ, 2004. — 416 с.
21. Коновалов Ю.В. Справочник прокатчика. Справочное издание в 2—х книгах. Книга 2. Производство холоднокатаных

- листов и полос / Ю. В. Коновалов. — М. : Теплотехник, 2008. — 669 с.
22. Технология прокатного производства. В 2—кн, кн. 2. Справочник / М. А. Беняковский, К. Н. Богоявленский, А. Н. Виткин и др. — М. : Metallurgia, 1991. — 423 с.
23. Бровман М.Я. Влияние натяжения на усилия прокатки / М. Я. Бровман // Известия высших учебных заведений. ЧМ. — № 2, 1980. — С. 73—75.
24. Королёв А. А. Новые исследования деформации металла при прокатке / А. А. Королёв. — М. : Metallurizdat, 1953. — 268 с.
25. Зильберг Ю. В. Некоторые спорные проблемы контактного трения при осадке и прокатке / Теория прокатки. Материалы Всесоюзной научно—технической конференции «Теоретические проблемы прокатного производства». М.: «Metallurgia». 1975.
26. Василёв Я. Д. Разработка энергосберегающих режимов натяжения на непрерывных станах холодной прокатки / Я. Д. Василёв, Д. Н. Самокиш // Metallургическая и горно-рудная промышленность. — 2013. — № 2. — С. 34—38.
27. Гулидов И. Н. Оборудование прокатных цехов (эксплуатация, надежность): Учеб. Пособие для студентов сред. спец. учеб. заведений / И. Н. Гулидов. — М. : Интернет Инжиниринг, 2004. — 320 с.
28. Василев Я. Д. Влияние режимов натяжений и обжатий на расход энергии при холодной прокатке / Я. Д. Василев, Д. Н. Самокиш // Обработка материалов давлением. Сборник научных трудов. — Краматорск : ДГМА, 2013. — № 3. — С. 154—159.
29. Кохан Л. С., Белелюбский Б. Ф., Лаптева М. И., Гузенков С. А. Влияние натяжения на силовой режим прокатки и стойкость валков прокатного оборудования / Технология металлов. — 2011. — № 9. — С. 12—15.



- 
- 
30. Полухин В. П. Математическое моделирование и расчет на ЭВМ листовых прокатных станов / В. П. Полухин. — М. : Metallurgiya, 1972. — 512 с.
  31. Полухин В. П. Алгоритмы расчетов основных параметров прокатных станов / В. П. Полухин и др. — М. : Metallurgiya, 1980. — 320 с.
  32. Чернов П. П. Влияние режимов межклетевого натяжения на удельный расход энергии при тонколистовой холодной прокатке / П. П. Чернов, Ю. А. Мухин, К. В. Бахаев // Труды шестого конгресса прокатчиков, 2005. — С. 186—190.
  33. Скороходов В. Н. Исследование влияния режимов натяжения на расход энергии при тонколистовой холодной прокатке / В. Н. Скороходов, Ю. А. Мухин, К. В. Бахаев // Metallurgicheskaya i gornorudnaya promyshlennost'. — 2002. — С. 33—37.
  34. Исследование влияния режима межклетевого натяжения на стабильность процесса и удельный расход энергии на прокатку / В. Н. Скороходов, Ю. А. Мухин, П. П. Чернов [и др.] // Производство проката. — 2000. — № 6. — С. 9—12.
  35. Максименко О. П. Исследование средней результирующей горизонтальных сил в очаге деформации / О. П. Максименко, Р. Я. Романюк // Изв. вузов. Черная металлургия. — 2009. — № 10. — С. 22—24.
  36. Ekelund S. Analysis of Factors Influencing Rolling Pressure and Power Consumption in the Hot Rolling of Steel // Steel, Vol. 93, Aug. 21, 1933, pp. 27—29.
  37. Siebel E. Resistance and Deformation and the Flow Material During Rolling // Stahl und Eisen, Vol. 50, 1930, p. 1769.
  38. Nadai A. The Forces Required for Rolling Steel Strip Under Tension // Journal of Applied Mechanics, June 1939, pp. A54—A62.

39. Orowan E., Pascoe K.J. A Simple Method of Calculating Roll Pressure and Power Consumption in Flat Hot Rolling // Iron and Steel Institute (London), No. 34, 1946, pp. 124—126.
40. Sims R.B. The Calculation of Roll Force and Torque in Hot Rolling // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, No. 168, 1954, pp. 191—200.
41. Alexander J.M. A Slip Line Field for the Hot Rolling Process // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 169, 1955, pp. 1021—1030.
42. Максименко О. П., Лобойко Д. И., Измайлова М. К. Продольная устойчивость полосы в валках с анализом контактных условий : монография / О. П.Максименко, Д. И.Лобойко, М. К. Измайлова. — Днепропетровск : ДДТУ, 2016. — 212 с.
43. Берёзкин Е. Н. Курс теоретической механики / Е. Н. Берёзкин. — М. : МГУ, 1974. — 647 с.
44. Грум—Гржимайло В. Е. Прокатка и калибровка / В. Е. Грум—Гржимайло. — Л. : “Кубуч”, 1933. — 127 с.
45. Васильов Я. Д. Теорія поздовжньої прокатки / Я. Д. Васильов, О. А. Мінаєв. — Донецьк : УНІТЕХ, 2009. — 488 с.
46. Максименко О. П. Спосіб прокатування плоских виробів / О. П. Максименко, В. М. Самохвал, М. Є. Нехаєв, Д. І. Лобойко // Патент 89747. Бюлетень про видачу патентів, 2014. — № 8.
47. Виноградов А. П. Расход энергии при прокатке и мощность двигателей при станах / А. П. Виноградов. *Металлург.* 1935. № 2 — С. 34—38.
48. Павлов И. М. Теория прокатки / И. М. Павлов. М: *Металлургиздат*, 1950. 610 с.
49. Зильберг Ю. В. Методы расчета напряжения трения при пластической деформации / Ю. В. Зильберг // *Теория и практика металлургии.* — 2002. — № 4(30). — С. 31—39.

- 
- 
50. Леванов А. Н. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением / А. Н. Леванов, В. Л. Колмогоров, С. П. Буркин и др. — М. : Metallurgiya, 1976. — 416 с.
51. Семенюта А. Я. Определение удельных давлений при прокатке широких полос средней толщины / А. Я. Семенюта // Обработка металлов давлением : Научные труды, ДМетИ. — М. : Metallurgiya. — 1967. — Т. 52. — С. 118—123.
52. Василёв Я. Д. Модель напряжения трения при тонколистовой прокатке / Я. Д. Василёв, А. В. Дементиенко // Изв. вузов. Черная металлургия. — 2002. — № 1. — С. 29—33.
53. Шевченко К. Н. Закон трения при прокатке и другие замечания. // Теория прокатки : Матер. науч.—техн. конф. “Теоретические проблемы прокатного производства”. — М. : Metallurizdat, 1962. — С. 459—461.
54. Грудев А. П. Внешнее трение при прокатке / А. П. Грудев. — М. : Metallurgiya, 1973. — 288 с.
55. Василёв Я. Д. Разработка энергосберегающих режимов натяжений на непрерывных станах холодной прокатки / Я. Д. Василёв, Д. Н. Самокиш // Металлургическая и горнорудная промышленность. — 2013. — № 2. — С. 34—38.
56. Максименко О. П. Продольная устойчивость процесса прокатки с натяжением полосы при двухзвенной модели трения в очаге деформации / О. П. Максименко, М. К. Измайлова, Д. И. Лобойко // Металлургическая и горнорудная промышленность. — 2015. — № 4.
57. Василёв Я. Д. Определение условий ведения процесса холодной прокатки тонких полос с минимальной силой / Я. Д. Василёв, С. И. Потаповский // Изв. вузов. Черная металлургия. — 1988. — № 9. — С. 68—71.
58. Прокатные станы. Справочник в 3—х томах. Т. 3. Листопрокатные станы и профилегибочные агрегаты / В. Г. Антипин, Д. К. Нестеров, В. Г. Князев и др. — М. : Metallurgiya, 1992. — 428 с.

59. Сафьян М. М. Прокатка широкополосной стали / М. М. Сафьян. — М. : Metallurgy, 1969. — 460 с.
60. Грудев А. П. Теория прокатки / А. П. Грудев. — [изд. 2-е перераб. и доп.] — М. : “СП Интермет Инжиниринг”, 2001. — 280 с.
61. Василёв Я. Д. Производство полосовой и листовой стали / Я. Д. Василёв, М. М. Сафьян. — К. : Вища школа, 1976. — 192 с.

---

---

## ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

### А

Адаптивність, *adaptation*, 32

Адекватність, *adequacy*, 45

### Б

Безперервне формування заготовки,  
*continuous forming of the billet*, 10

### В

Вектор змінних, *variables vector*, 19

Викид, *outlier*, 144

Вимірювання, *measurements, test*, 138

Випадкова похибка, *random measurement error*, 143

Випередження, *forward slip*, 12

Відставання, *backward slip*, 12

Відтворюваність вимірювань, *reproducibility of measurements*, 142

Відтворюваність дослідів, *reproducibility of experiments*, 138

### Г

Граничні умови, *boundary conditions*, 210

### Д

Динаміка системи, *system dynamics*, 19

Дисперсія, *dispersion*, 158, 161

Діаграма Ісікави, *Ishikawa's diagram*, 36

Довірчий інтервал, *confidence interval*, 169

Дробовий факторний експеримент, *fractional factorial design*, 99,  
107

### Е

Експеримент, *experiment*, 137

Елемент, *element*, 18

### З

Засоби вимірювань, *measuring device*, 139

### І

Ієрархічність, *hierarchy*, 23

### Й

Ймовірність, *probability*, 171

### К

Категорії причин, *categories of the reasons*, 37

Клас точності приладу, *classes of accuracy (deviaces)*, 146

Коефіцієнт кореляції, *correlation coefficient*, 191

Критерій Грабса, *Grubbs criterion (G - criterion)*, 152, 345

Кохрена, *Cochran criterion (Cochran's C test)*, 81, 152, 344

Пірсона, *Pearson criteria ( $\chi^2$  - criterion)*, 160, 180

подібності, *similarity criteria*, 71

Стюдента, *Student criterion (t - criterion)*, 160, 170

Фішера, *Fisher criterion (F - criterion)*, 84, 160

### М

Математичне моделювання, *mathematical modeling, simulation*, 43

Межа відтворюваності, *reproducibility limit*, 143

Межа повторюваності, *repeatability limit*, 143

Месдоза, *mesdose*, 120

Міри центральної тенденції, *measures of central tendency*, 168

Модель, *model*, 35

### Н

Надсистема, *supersystem*, 18

**О**

Опорне значення, (*accepted*) *reference value*, 140

**П**

Планування експерименту, *design of experiments (DOE)*, 59, 77

Побудова моделі, *model design*, 25

Поздовжня сталість, *longitudinal stability*, 210

Повний факторний експеримент, *full factorial design*, 99

Повторюваність, *repeatability*, 142

Правильність, *trueness*, 142

Прецизійність, *precision*, 142

Прилипання металу, *adhesion of metal*, 13

Принципи системного підходу, *principles of system approach*, 17

Проблемна ситуація, *problem situation*, 9

**Р**

Регресія, *regression*, 193

Розвиток наукового підходу, *development of the scientific approach*, 11

Розмірність, *dimension*, 139

**С**

Самоорганізація, *self-organization*, 28

Система, *system*, 18

Системна підготовка, *system training*, 6

Систематична похибка, *bias, systematic error*, 141

Системотехніка, *system engineering*, 21

Стан (системи, об'єкту), *state*, 19

Стандартне відхилення, *standard deviation*, 142

Статистика Манделя, *Mandela's statistics*, 152

**Т**

Тензометрія, *tensometry*, 118

Теоретичні моделі, *theoretical models*, 41

Тестування моделі, *testing of model*, 45

Точність вимірювань, *accuracy of measurements*, 140

## Ф

Фазова змінна, *phase variable*, 19

Фазова траєкторія, *phase path(trajjectory)*, 19

Функція Гауса, *Gaussian function*, 161

## Ц

Цілеспрямованість, *single-mindedness*, 23

Цілісність, *integrity*, 23

## Ч

Числовий експеримент, *numerical experiment*, 44



## Додаток А. Критичні значення для критерію Кохрена

Кільк. дисп. р	Кількість результатів вимірів n в базовому елементі											
	2		3		4		5		6		11	
	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%	1%	5%
2	0,999	0,998	0,995	0,975	0,979	0,939	0,959	0,906	0,937	0,877	0,854	0,788
3	0,993	0,967	0,942	0,871	0,833	0,798	0,834	0,746	0,793	0,707	0,674	0,602
4	0,968	0,906	0,864	0,768	0,781	0,684	0,721	0,629	0,676	0,590	0,554	0,488
5	0,928	0,841	0,788	0,684	0,696	0,598	0,633	0,544	0,588	0,506	0,470	0,412
6	0,883	0,781	0,722	0,616	0,626	0,532	0,564	0,480	0,520	0,445	0,408	0,357
7	0,838	0,727	0,664	0,561	0,568	0,480	0,508	0,431	0,466	0,397	0,362	0,315
8	0,794	0,680	0,615	0,516	0,521	0,438	0,463	0,391	0,423	0,360	0,325	0,283
9	0,754	0,638	0,573	0,478	0,481	0,403	0,425	0,358	0,387	0,329	0,295	0,257
10	0,718	0,602	0,536	0,445	0,447	0,373	0,393	0,331	0,357	0,303	0,270	0,235
11	0,684	0,570	0,504	0,417	0,418	0,348	0,366	0,308	0,332	0,281		
12	0,653	0,541	0,475	0,392	0,392	0,326	0,343	0,288	0,310	0,262		
13	0,624	0,515	0,450	0,371	0,369	0,307	0,322	0,271	0,291	0,243		
14	0,599	0,492	0,427	0,352	0,349	0,291	0,304	0,255	0,274	0,232		
15	0,575	0,471	0,407	0,335	0,332	0,276	0,288	0,242	0,259	0,220	0,192	0,167
16	0,553	0,452	0,388	0,319	0,316	0,262	0,274	0,230	0,246	0,208		
17	0,532	0,434	0,372	0,305	0,301	0,250	0,261	0,219	0,234	0,198		
18	0,514	0,418	0,356	0,293	0,288	0,240	0,249	0,209	0,223	0,189		
19	0,496	0,403	0,343	0,281	0,276	0,230	0,238	0,200	0,214	0,181		
20	0,480	0,389	0,330	0,270	0,265	0,220	0,229	0,192	0,205	0,174	0,150	0,130
25	0,413	0,334	0,278	0,228	0,222	0,185	0,190	0,160	0,170	0,144		
30	0,363	0,293	0,241	0,198	0,191	0,159	0,164	0,138	0,145	0,124	0,105	0,092
35	0,325	0,262	0,213	0,175	0,168	0,140	0,144	0,121	0,127	0,108		
40	0,294	0,237	0,192	0,158	0,151	0,126	0,128	0,108	0,114	0,097	0,082	0,071
60	0,215	0,174		0,113	0,107	0,089		0,076		0,068	0,057	0,050

За даними:

1. URL: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій\\_Кохрена](https://uk.wikipedia.org/wiki/Критерій_Кохрена)
2. ДСТУ ГОСТ ІСО 5725-2:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 2. Основний метод визначення повторюваності і відтворюваності стандартного методу вимірювання. (ГОСТ ІСО 5725-2-2003, IDT). Надано чинності з 2006-07-01. - Національний стандарт України.

## Додаток Б. Критичні значення для критерію Грабса

Кільк. дисп. р	Одне найбільше або одне най- менше		Два найбільших або два най- менших	
	Більше 1%	Більше 5%	Менше 1%	Менше 5%
3	1,155	1,155	-	-
4	1,496	1,481	0,0000	0,0002
5	1,764	1,715	0,0018	0,0090
6	1,973	1,887	0,0116	0,0349
7	2,139	2,020	1,0308	0,10708
8	2,274	2,126	0,0563	0,1101
9	2,387	2,215	0,0851	0,1492
10	2,482	2,290	0,1150	0,1864
11	2,564	2,355	0,1448	0,2213
12	2,636	2,412	0,1738	0,2537
13	2,699	2,462	0,2016	0,2836
14	2,755	2,50	0,2280	0,3112
15	2,806	2,549	0,2530	0,3367
20	3,001	2,709	0,3585	0,4391
25	3,135	2,822	0,4376	0,5123
30	3,236	2,908	0,4985	0,5672
35	3,316	2,979	0,5469	0,6101
40	3,381	3,036	0,5862	0,6445

За даними: ДСТУ ГОСТ ІСО 5725-2:2005 Точність (правильність і прецизійність) методів та результатів вимірювання. Частина 2. Основний метод визначення повторюваності і відтворюваності стандартного методу вимірювання. (ГОСТ ІСО 5725-2-2003, IDT). Надано чинності з 2006-07-0

**Навчальне видання**

**Максименко Олег Павлович**

**Нікулін Олександр Вікторович**

**Самохвал Володимир Михайлович та інші**

**СИСТЕМНИЙ ПІДХІД, МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕНЬ  
ПРОЦЕСІВ ПРОКАТУВАННЯ З АНАЛІЗОМ  
ПОЗДОВЖНЬОЇ СТАЛОСТІ**

*Навчальний посібник*

Підписано до друку 01.03.2021. Формат 60×84 1/16

Папір друк. Друк — різнограф. Ум.-друк. арк. 20,17

Тираж — 300. Зам. № 6/21

Видавець і виготовлювач

Дніпровський державний технічний університет

51918, м. Кам'янське, вул. Дніпробудівська, 2

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи

до державного реєстру видавців серія ДК № 5399

від 26.07.2017 р.