

О. В. Нікулін
Т. В. Наконечна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
факти і формули, задачі і тести

Навчальний посібник



Дніпропетровськ
Видавець Біла К. О.
2015

УДК 517.5
ББК 22.1
Н 65

Рекомендовано до друку рішенням засідання Вченої ради факультету прикладної математики Дніпропетровського національного університету ім. О. Гончара (протокол № 6 від 31.03.2015)

Рецензенти:

Гук Н. А., проф., д-р фіз.-мат. наук (Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара);

Говоруха В. Б., проф., д-р фіз.-мат. наук (Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет);

Самохвалов С. Є., проф., д-р техн. наук (Дніпродзержинський державний технічний університет).

Нікулін О. В.

Н 65 Вища математика: факти і формули, задачі і тести : навч. посіб. / О. В. Нікулін, Т. В. Наконечна. – Дніпропетровськ : Біла К. О., 2015. – 188 с.

ISBN 978-617-645-207-2

Посібник написано відповідно до робочої навчальної програми з вищої математики. В ньому викладені основні теоретичні факти і формули вищої математики (лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу та елементів теорії ймовірностей і математичної статистики, комплексного аналізу, операційного числення), задачі з основних розділів вищої математики. Наводяться приклади розв'язання тестових завдань, які можуть бути застосовані для підготовки до поточного та підсумкового контролю з вищої математики.

УДК 517.5
ББК 22.1

ISBN 978-617-645-207-2

© Нікулін О. В., Наконечна Т. В., 2015

Зміст

Передмова	6
Розділ 1. Загальноматематичні поняття	7
1.1. Вступ до теорії множин	7
1.2. Дії над множинами	7
1.3. Стандартні позначення поширених числових множин	8
1.4. Взаємно однозначна відповідність між множинами	8
1.5. Логічна символіка	9
1.6. Приклади тестових завдань	10
Розділ 2. Елементи лінійної алгебри. Аналітична геометрія	15
2.1. Матриці і визначники	15
2.2. Системи лінійних рівнянь. Методи розв'язання	18
2.3. Векторна алгебра	19
2.4. Аналітична геометрія на площині	24
2.5. Аналітична геометрія у просторі	27
2.6. Завдання для самостійного розв'язування	32
2.7. Приклади тестових завдань	34
Розділ 3. Диференціальне числення	39
3.1. Функція. Основні визначення	39
3.2. Теорія границь	40
3.3. Похідна функції дійсного аргументу	43
3.4. Функції кількох змінних	49
3.5. Метод найменших квадратів	51
3.6. Елементи теорії поля	52
3.7. Завдання для самостійного розв'язування	55
3.8. Приклади тестових завдань	58
Розділ 4. Інтегральне числення	70
4.1. Невизначений інтеграл	66
4.2. Визначений інтеграл	71
4.3. Застосування визначеного інтегралу	73
4.4. Невласні інтеграли	74
4.5. Кратні інтеграли	76

4.6.	Криволінійні інтеграли	79
4.7.	Задачі для самостійного розв'язування	83
4.8.	Приклади тестових завдань	85
Розділ 5.	Диференціальні рівняння	98
5.1.	Основні визначення	96
5.2.	Основні методи аналітичного розв'язання	97
5.3.	Системи диференціальних рівнянь	98
5.4.	Завдання для самостійного розв'язування	99
5.5.	Приклади тестових завдань	102
Розділ 6.	Ряди	111
6.1.	Числові ряди	109
6.2.	Функціональні ряди	110
6.3.	Ряди Фур'є	112
6.4.	Завдання для самостійного розв'язування	114
6.5.	Приклади тестових завдань	116
Розділ 7.	Теорія ймовірностей та математична статистика	122
7.1.	Теорія ймовірностей. Основні визначення і формули	120
7.2.	Випадкові величини. Закони розподілу	121
7.3.	Числові характеристики випадкових величин	123
7.4.	Деякі закони розподілу ДВВ	124
7.5.	Деякі закони розподілу НВВ	126
7.6.	Закон великих чисел (ЗВЧ)	129
7.7.	Елементи математичної статистики	129
7.8.	Елементи теорії кореляції. Вибіркові рівняння регресії	133
7.9.	Завдання для самостійного розв'язування	134
7.10.	Приклади тестових завдань	139
Розділ 8.	Комплексний аналіз та операційне числення	147
8.1.	Комплексний аналіз. Основні визначення	145
8.2.	Типи функцій комплексної змінної	147

8.3. Диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної	149
8.4. Ряди в комплексній області	151
8.5. Особливі точки функції. Лишок функції комплексної змінної	155
8.6. Операційне числення. Основні визначення	157
8.7. Основні теореми операційного числення	157
8.8. Згортка функцій. Теореми розкладу	158
8.9. Деякі застосування перетворення Лапласа	159
8.10. Завдання для самостійного розв'язування	160
8.11. Приклади тестових завдань	161
Додатки	169
Предметний покажчик-словник	181
Перелік рекомендованої літератури	186

ПЕРЕДМОВА

Однією з основних форм навчання студентів з вищої математики є їх самостійна робота. До неї входить вивчення необхідного матеріалу, розв'язування задач при виконанні індивідуальних завдань та контрольних робіт. Успішність самостійної роботи забезпечується використанням підручників та навчальних посібників, які потрібно оновлювати в процесі модернізації освіти. При написанні посібника прийнято, що до книги потрібно включати практичні матеріали та теоретичні відомості, які необхідні при вивченні курсу відповідно діючим робочим навчальним програмам. Основною метою книги є допомога студентам технічних напрямів у практичному опануванні математичними поняттями, фактами та методами, на які спираються технічні науки, та які є базисом математизації у відповідних галузях виробництва. Засвоєння студентами знань з вищої математики та вміння застосовувати їх на практиці є важливими елементами навчального процесу. Знання, набуті в процесі самостійної роботи, можуть бути ефективно використані в подальшому навчанні і практичній діяльності. Тому посібники, які орієнтовані на самостійну роботу студентів, актуальні.

Порівняльне невеликий об'єм посібника пояснюється тим, що при створенні передбачалося його використання як для послідовного вивчення наведеного матеріалу, так і для отримання порад при розв'язанні задач. Мета посібника сприяти студентам швидше опанувати навичками та знаннями з математики. Вважаємо своїм приємним обов'язком виразити щиру вдячність колегам і рецензентам за цінні поради по рукопису посібника з метою поліпшення його якості.

РОЗДІЛ ПЕРШИЙ. ЗАГАЛЬНОМАТЕМАТИЧНІ ПОНЯТТЯ

1.1. Вступ до теорії множин

Поняття множини належить до категорії загальних або основоположних в математиці. Група видатних математиків (псевдонім Н. Бурбакі) прийняла наступне положення: «Множина утворюється з елементів, які мають деякі властивості та знаходяться в деяких відношеннях між собою або з елементами інших множин».

Множини позначають великими літерами (буквами) латинського алфавіту – $A, B, C \dots$, а елементи множин – маленькими літерами $a, b, c \dots$. Той факт, що елемент a належить множині, записують наступним чином $a \in A$. Порожня множина (множина, що не містить жодного елемента) позначається \emptyset .

Існують два основні способи завдання множин.

Множина A визначається безпосереднім перерахуванням всіх своїх елементів $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

Множина A визначається як сукупність тих елементів деякої універсальної множини U , які володіють деякою властивістю $p(x)$. У цьому разі пишуть:

$$A = \{x \mid p(x)\} \text{ або } A = \{x \in U \mid p(x)\}.$$

Множини A і B можна порівняти між собою за допомогою відношень «включення» і «рівності».

Множина A називається підмножиною множини B ($A \subset B$), якщо з того, що $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Множини A і B називаються рівними ($A = B$), якщо вони складаються з одних і тих самих елементів.

При порівнянні множин діють властивості рефлексивності і транзитивності: $A \subset A$ – рефлексивність; $A \subset B$ і $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ – транзитивність.

1.2. Дії над множинами

Перетин множин $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \in B\}$.

Об'єднання множин $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ або } x \in B\}$.

Різниця множин $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

Доповнення множини $\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ і } x \notin A\}$.

Симетрична різниця $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Дії над множинами підпорядковуються наступними законами:

Комутативності $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$.

Асоціативності $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Ідемпотентності $A \cap A = A$; $A \cup A = A$.

Порожньої множини $\emptyset \cap A = \emptyset$; $\emptyset \cup A = A$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

Дистрибутивності

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$; $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

1.3. Стандартні позначення поширених числових множин

$N = \{1; 2; 3; \dots\}$ – множина усіх натуральних чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \dots\}$ – множина усіх цілих чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z; n \in N \right\}$ – множина усіх раціональних чисел;

$R = \{x \mid -\infty < x < \infty\}$ – множина усіх дійсних чисел.

Розглянуті множини задовольняють наступні включення: $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Кожному дійсному числу відповідає єдина точка числової прямої, та кожній точці числової прямої відповідає єдине число. Тому числові множини, які є підмножинами множини дійсних чисел, можуть бути числовими проміжками.

Розглянемо їх (a і b – дійсні числа, кінцеві точки; $a < b$):

$[a; b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$ – відрізок (сегмент), замкнений проміжок ;

$(a; b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ – півінтервал, піввідкритий проміжок;

$[a; b) = \{x \mid a \leq x < b\}$ – півінтервал, піввідкритий проміжок;

$(a; b) = \{x \mid a < x < b\}$ – інтервал, відкритий проміжок.

Нехай a – скінчене дійсне число. Інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε – околом числа (точки) a .

1.4. Взаємно однозначна відповідність між множинами

Будемо говорити, що між множинами A і B встановлена *взаємнооднозначна* відповідність, якщо кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і при цьому кожен елемент множини B відповідає тільки одному елементу множини A .

Множини називаються *еквівалентними* (рівнопотужними), якщо між ними можна встановити взаємнооднозначну відповідність.

Для того, щоб скінченні множини A і B були еквівалентними необхідно і достатньо, щоб кількість елементів в них було однакова.

Якщо множина A еквівалентна множині натуральних чисел, то вона називається *зліченою*.

1.5. Логічна символіка

Скінчений ряд послідовно записаних букв (літер) називають словом. Речення складається зі слів. Висловлюванням в мові називають речення, про яке можна стверджувати, що воно або хибне, або істинне. Формальна, наприклад, математична теорія – це множина висловлювань, що мають смисл у цій теорії.

Числення висловлювань визначається як формальна теорія за допомогою аксіоматичного методу. Аксіоми розглядаються як формальні послідовності виразів, а методи доведення теорем – як методи, що дають змогу дістати вирази з інших за допомогою операцій над символами.

Довільну формальну теорію можна будувати за такою схемою:

- визначити множину формул або мову теорії;
- визначити підмножину формул, які називають аксіомами;
- задати правила доведення теорії.

Запис $\neg A = \bar{A}$ означає «не A », тобто заперечення.

Запис $S_1 \Rightarrow S_2$ означає, що «з висловлення S_1 слідує висловлення S_2 ».

Символ \Rightarrow – це символ імплікації.

Запис $S_1 \Leftrightarrow S_2$ означає, що «з висловлення S_1 еквівалентно висловленню S_2 ». Символ \Leftrightarrow – це символ еквівалентності.

Запис $S_1 \wedge S_2$ означає « S_1 і S_2 ». Символ « \wedge » – це символ кон'юнкції.

Запис $S_1 \vee S_2$ означає «і / або». Символ « \vee » – це символ диз'юнкції.

Запис $\forall x \in A : S(x)$ означає «для будь-якого елемента $x \in A$ вірно твердження $S(x)$ ».

Запис $\exists x \in A : S(x)$ означає «існує елемент $x \in A$, для якого вірно твердження $S(x)$ ».

У математичних висловлюваннях користуються словами і виразами. Тому при їх запису зручно користуватися логічними символами. Наприклад, рівність двох множин можна записати у вигляді: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$.

Предикат $P(x)$ розуміють, як змінне висловлювання, якщо x — змінна. При цьому $P(x)$ — логічна змінна, а x — нелогічна змінна.

1.6. Приклади тестових завдань

1. Нехай $A = \{x \mid f_1(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f_2(x) = 0\}$. Виразити множину розв'язків рівняння $f_1^2(x) + f_2^2(x) = 0$ через ці множини.

А	Б	В	Г	Д
$A \setminus B$	$A \cap \bar{B}$	$\bar{A} \cup B$	$A \cap B$	$A \cup B$

2. Записати всі підмножини множини $A = \{a; b\}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{a\}, \{b\}, \{a; b\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}$	$\{0; 1\}, \{a\}, \{b\}$	$0, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, 1$

3. На множині $A = \{63; 64; 65; 66; 67\}$ задано невизначене висловлювання $K(n) = \{n - \text{просте число}\}$. Знайти істинне висловлювання.

А	Б	В	Г	Д
$K(65)$	$K(64)$	$K(67)$	$K(63)$	$K(66)$

4. Нехай $A = \{x \mid f_1(x) = 0\}$, $B = \{x \mid f_2(x) = 0\}$. Виразити множину розв'язків рівняння $f_1(x)/f_2(x) = 0$ через ці множини.

А	Б	В	Г	Д
$\bar{A} \cup \bar{B}$	$A \setminus B$	$A \cup \bar{B}$	$A \cap B$	$A \cup B$

5. Серед заданих множин знайти скінченні з потужності:

- I – множина цілих чисел, що діляться на 10;
- II – множина всіх коренів заданого многочлена;
- III – множина всіх чотирикутників;
- IV – множина всіх точок відрізка $[0; 1]$.

А	Б	В	Г	Д
II та IV	IV	II	I	III

6. Оцінити висловлювання $\forall n \in N \wedge n > 1 \Rightarrow n^2 > n$.

А	Б	В	Г	Д
не можна оцінити	істинне	невизначене	інша відповідь	хибне

7. Установіть відповідність між твердженнями (1 – 4) і множинами трикутників (А–Д).

Твердження	Множина фігур
1. Центр описаного кола знаходиться на одній із сторін	А. Множина всіх тупокутних трикутників
2. Центр описаного кола є точкою перетину бісектрис	Б. Множина всіх гострокутних трикутників, що не є правильними
3. Центр описаного кола знаходиться на одній із сторін	В. Множина всіх правильних трикутників
4. Центр описаного кола знаходиться на одній із сторін	Г. Множина всіх прямокутних трикутників
	Д. Множина всіх рівнобедрених трикутників, що не є рівносторонніми

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

8. Установіть відповідність між діями над множинами $A = \{x | x^2 - 3x > 0\}$ і $B = \{x | x^2 - 5x + 4 > 0\}$ (1–4) та результатами дій (А–Д).

Дії з множинами	Результати
1. $A \setminus B$	А (1;3)
2. $A \cup B$	Б $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$
3. $B \setminus A$	В $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$
4. $A \cap B$	Г (3;4]
	Д [0;1)

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Скільки підмножин має множина $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$?

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **г.**

Розв'язання.

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0; \\ f_2(x) = 0, \end{cases} \Rightarrow A \cap B.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: визначення дій з множинами: переріз множин).

Завдання 2. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання.

Для скінченої множини можна перелічити всі її підмножини. В даному випадку маємо: $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a; b\}$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: визначення множини та її підмножин).

Завдання 3. Правильна відповідь: **в.**

Розв'язання.

Складаємо таблицю істинності висловлювання $K(n)$ на множині A :

Висловлювання	$K(63)$	$K(64)$	$K(65)$	$K(66)$	$K(67)$
Істинність	хибне	хибне	хибне	хибне	істинне

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: числення предикатів).

Завдання 4. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання.

$$f_1(x)/f_2(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f_1(x) = 0; \\ f_2(x) \neq 0, \end{cases} \Rightarrow A \setminus B.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: визначення дій з множинами: різниця множин).

Завдання 5. Правильна відповідь: **в.**

Розв'язання.

Серед заданих множин тільки множина Π скінчена.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: потужність множини).

Завдання 6. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання.

Розв'язуємо нерівність $n^2 > n \Rightarrow n^2 - n = n \cdot (n - 1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} n > 0; \\ n > 1. \end{cases}$

Тоді формула $n^2 > n$ є наслідком формули $\forall n \in N \wedge n > 1$.
 (Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: логічне слідування формул).

Завдання 7. Таблиця відповідностей:

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2			×		
3		×			
4	×				

Розв'язання.

1. Дійсно, якщо центр описаного кола знаходиться на стороні трикутника, то ця сторона є діаметром кола, протилежний кут – прямий. Тоді трикутник – прямокутний. Множина Г.

2. Дійсно, центр описаного кола знаходиться в точці перетину серединних перпендикулярів трикутника. Якщо вона співпадає з точкою перетину бісектрис, то трикутник – правильний (рівносторонній). Обираємо множину В.

3. Дійсно, якщо точка перетину висот знаходиться всередині трикутника, то трикутник є гострокутним. Якщо вона не збігається з точкою перетину медіан, то трикутник не є правильним. Обираємо множину Б.

4. Дійсно, якщо основа однієї з висот знаходиться на продовженні сторони трикутника, то односторонній кут – тупий. Тоді трикутник – тупокутний. Множина А.

Заповнюємо таблицю.

Завдання 8. Таблиця відповідностей:

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2		×			
3					×
4			×		

Розв'язання.

Розв'язуємо нерівності, визначаємо множини A і B :

$$x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x \cdot (x - 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0; \\ x - 3 > 0; \\ x < 0; \\ x - 3 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3; \\ x < 0, \end{cases} \Rightarrow A = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty).$$

$$x^2 - 5x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x - 4) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 1; \\ x > 4, \end{cases} \Rightarrow B = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty).$$

1. Знаходимо $A \setminus B = (3; 4]$. Обираємо результат Г.
2. Знаходимо $A \cup B = (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$. Обираємо результат Б.
3. Знаходимо $B \setminus A = [0; 1)$. Обираємо результат Д.
4. Знаходимо $A \cap B = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$. Обираємо результат В.

За результатами обчислень заповнюємо таблицю.

Завдання 9.

Розв'язання.

Спочатку розглянемо побудову універсальної множини U . До її складу входять (послідовно лічимо) підмножини $\emptyset, \{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{x_1, x_2\}, \dots, \{x_1, \dots, x_n\}$.

Обчислення кількості N підмножин приводить до суми:

$$N = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = (1 + 1)^n = 2^n.$$

Використана формула біному Ньютона.

Відповідь: $N = 2^n$.

**РОЗДІЛ ДРУГИЙ.
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ.
АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

2.1. Матриці і визначники

2.1.1. Визначення та види матриць

Прямокутна таблиця, яка складається з m рядків та n стовпців називається *матрицею вимірності $m \times n$* . Символом a_{ij} позначається елемент матриці A , причому: i — номер рядка ($1 \leq i \leq m$), а j — номер стовпця ($1 \leq j \leq n$). Якщо $m = n$ дістаємо квадратну матрицю порядку n :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } A_{(n \times n)} = \{a_{ij}\}_{i=1, j=1}^{n, n}.$$

Діагональ $a_{11} \ a_{22} \ \dots \ a_{nn}$ зветься *головною діагоналлю* квадратної матриці A , а діагональ $a_{1n} \ a_{2, n-1} \ \dots \ a_{n1}$ називається *побічною діагоналлю*.

Квадратна матриця зветься *одиничною матрицею порядку n* , якщо її елементи, які знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють 1, а усі інші елементи дорівнюють нулю.

Матриця називається *нульовою матрицею*, або *нуль-матрицею*, якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю.

Квадратна матриця називається *симетричною*, якщо її елементи, розташовані симетрично відносно головної діагоналі рівні між собою: $a_{ij} = a_{ji}$.

Якщо матриця складається з одного рядка, то вона зветься *матрицею – рядком* вимірності $1 \times n$. Якщо матриця складається з одного стовпця, то вона зветься *матрицею – стовпцем* вимірності $m \times 1$.

2.1.2. Дії над матрицями

1. *Порівняння.* $A_{(m \times n)} = B_{(m \times n)} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$.

2. *Транспонування.* Транспонування матриці — це заміна її рядків на стовпці з однаковими номерами, наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. **Додавання матриць.** $A_{(m \times n)} + B_{(m \times n)} = C_{(m \times n)} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Додавання матриць комутативне $A + B = B + A$ та асоціативне $A + (B + C) = (A + B) + C$.

4. **Множення матриці на число.** $\lambda \cdot A_{(m \times n)} = B_{(m \times n)} \Leftrightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Дана операція має наступні властивості $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

5. **Множення матриць.** $A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)} \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$.

Наприклад,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-3) \\ 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}.$$

У загальному випадку множення матриць не комутативне. Множення матриць асоціативне та пов'язано з операцією додавання законами дистрибутивності

$$(AB)C = A(BC); \quad A(B + C) = AB + AC; \quad (A + B)C = AC + BC.$$

2.1.3. Визначники

Поставимо у відповідність квадратній матриці n -го порядку число, яке називається її *визначником* (детермінантом) n -го порядку та позначається символом

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначник другого порядку обчислюється за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Визначник третього порядку можна обчислити за правилом Саррюса

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку D називається визначник $(n-1)$ -го порядку, який утворюється з визначника D шляхом відки-

дання того стовпця і того рядка, на перетині яких стоїть цей елемент.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 & +2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad a_{23} = 0; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається вираз виду $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. У наведеному прикладі $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -16$.

Теорема. Визначник n -го порядку ($n \geq 2$) дорівнює сумі добутків елементів його будь-якого рядка (стовпця) на відповідні алгебраїчні доповнення.

Наприклад, розклад визначника n -го порядку за елементами i -го рядка

має такий вигляд: $|A| = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}$.

Зокрема, для визначника третього порядку формула його розкладу за елементами першого рядка має вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2.1.4. Властивості визначників

1. Величина визначника не змінюється після транспонування.
2. При перестановці двох довільних рядків (стовпців) визначника його знак змінюється на протилежний.
3. Загальний множник всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.
4. Величина визначника не зміниться, якщо к елементам будь-якого його рядка (стовпця) додати лінійну комбінацію інших його рядків (стовпців).
5. Визначник дорівнює нулю, якщо:
 - всі елементи будь-якого його рядка (стовпця) дорівнюють нулю;
 - визначник має два пропорційних рядка (стовпця);
 - рядки (стовпці) визначника лінійно залежні.
6. Визначник добутку двох квадратних матриць дорівнює добутку визначників цих матриць: $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.
7. Сума добутків елементів будь-якого рядка(стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення будь-якого іншого рядка(стовпця) визначника дорівнює нулю.

2.1.5. Обернена матриця

Матрицею, оберненою до даної квадратної матриці A , називається матриця, яка позначається символом A^{-1} та задовольняє співвідношення $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E — одинична матриця. Квадратна матриця A зветься *невиродженою*, якщо її визначник відрізняється від нуля, тобто $\det A \neq 0$. Якщо $\det A = 0$, то A — *вироджена* матриця. Обернена матриця знаходиться за формулою $A^{-1} = \frac{1}{\det A} (A^*)^T$, де A^* — матриця, *приєднана* до матриці A , та елементами матриці $A^* \in A_{ij}$ — алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$).

Визначник оберненої матриці дорівнює оберненій величині визначника даної матриці $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

2.2. Системи лінійних рівнянь. Методи розв'язання

Система m лінійних рівнянь з n невідомими має вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

Розв'язком системи (2.1) називається впорядкований набір з n дійсних чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, після підстановки яких в кожне рівняння системи замість відповідних змінних x_1, x_2, \dots, x_n , ми отримаємо тотожні рівності.

Якщо система має розв'язок, то вона зветься *сумісною*. У протилежному випадку система зветься *несумісною*. Сумісна система, яка має єдиний розв'язок, зветься *визначеною*. Якщо система має більш за один розв'язок, вона зветься *невизначеною*.

Система лінійних рівнянь (2.1) називається *однорідною*, якщо стовпець вільних членів нульовий, навпаки, вона називається *неоднорідною*.

До найбільш поширених методів розв'язання систем лінійних рівнянь належать метод Гаусса, метод Крамера й метод матричного числення.

Метод Гаусса полягає у послідовному вилученні невідомих з рівнянь системи, починаючи з другого (прямий хід). Оберненим ходом знаходять значення невідомих. Його можна застосувати до будь-якої лінійної системи.

Метод Крамера застосовується до систем з n рівнянь з n невідомими, у випадку, коли матриця коефіцієнтів системи є не виродженою. За правилом Крамера розв'язок системи знаходиться за формулами $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ ($i = 1, \dots, n$), де Δ — головний визначник системи (визначник матриці системи) і $\Delta \neq 0$, а Δ_i — допоміжні визначники, що утворюються з основного шляхом заміни i -го стовпця на стовпець вільних членів.

Методом матричного числення розв'язок системи знаходиться за формулою $X = A^{-1}B$, де X — матриця-стовпець невідомих, B — матриця-стовпець вільних членів, A^{-1} — обернена матриця системи.

2.3. Векторна алгебра

2.3.1. Основні визначення

Вектором $\vec{a} = \overline{AB}$ називається напрямлений відрізок. Довжина вектора — це відстань між його початком A і кінцем B . Позначається таким чином: $|\vec{a}|$.

Якщо початок і кінець вектора співпадають ми маємо нульовий вектор $\vec{0}$.

Одиничним вектором (ортом) називається вектор довжина якого дорівнює одиниці.

Ненульові вектори \vec{a} і \vec{b} називаються колінеарними ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. Якщо вектори однаково спрямовані, це позначається таким чином ($\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$), навпаки — ($\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$).

Два вектори називаються рівними, якщо вони колінеарні, однаково спрямовані і мають однакові довжини.

Вектори називаються компланарними, якщо вони лежать в одній площині або на паралельних площинах.

2.3.2. Лінійні дії над векторами

До лінійних дій над векторами відносяться додавання, віднімання та множення на число.

Додавати вектори можна за правилами трикутника та паралелограма.

Правило трикутника. Сумою двох векторів \vec{a} і \vec{b} називається третій вектор $\vec{a} + \vec{b}$, початок якого співпадає з початком вектора \vec{a} , а кінець — з кінцем вектора \vec{b} , якщо кінець вектора \vec{a} розміщено у початку вектора \vec{b} .

Правило паралелограма. Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ суми двох векторів \vec{a} і \vec{b} співпадає з

діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах, як на сторонах за умови, що всі три вектори приведені до єдиного початку.

Додавання векторів комутативне і асоціативне.

Різницею векторів \vec{a} і \vec{b} , приведених до єдиного початку, називається третій вектор $\vec{a} - \vec{b}$, направлений з кінця вектора, який віднімається в кінець вектора, який зменшується.

Добутком вектора \vec{a} на дійсне число λ називається вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, колінеарний вектору \vec{a} , причому

$$|\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|; \quad \lambda > 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \vec{b}; \quad \lambda < 0 \Rightarrow \vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}.$$

Якщо $|\lambda| > 1$, відбувається розтяг вектора в $|\lambda|$ разів, якщо $|\lambda| < 1$, тоді відбувається стиск вектора в $1/|\lambda|$ разів.

2.3.3. Проекції вектора на вісь. Властивості проєкцій

Нагадаємо, що віссю називається пряма, на якій вибрано додатний напрям та одиниця довжини. Отже, вісь повністю визначається своїм ортом.

Позначимо через A_1 і B_1 проєкції точок A і B на вісь u . Тоді проєкцією вектора \vec{AB} на вісь u називається число, яке дорівнює довжині відрізка A_1B_1 , причому, це число береться зі знаком «плюс», коли напрям відрізка A_1B_1 співпадає з напрямом осі u , та зі знаком «мінус» якщо ці напрями протилежні.

Проєкція вектора \vec{AB} на вісь u дорівнює добутку довжини вектора \vec{AB} на косинус кута між ним та віссю u , тобто, $pr_u \vec{AB} = |\vec{AB}| \cos \varphi$, де φ — це кут між вектором \vec{AB} й віссю u .

Властивості проєкцій

$$1. pr_u(\vec{a} + \vec{b}) = pr_u \vec{a} + pr_u \vec{b}; \quad 2. pr_u(\lambda \vec{a}) = \lambda \cdot pr_u \vec{a}.$$

2.3.4. Розклад вектора по базису

Система векторів $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ називається лінійно залежною, якщо існує набір з k дійсних чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не рівних нулю одночасно й таких, що має місце тотожна рівність

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_k \vec{x}_k \equiv \vec{0}, \quad (2.2)$$

або інакше кажучи, якщо лінійна комбінація векторів $\sum_{i=1}^k \lambda_i \vec{x}_i$ дорівнює нулю.

Якщо тотожність (2.2) виконується тільки за умовою, що всі $\lambda_i (i = \overline{1, k})$ до-

рівнюють нулю, тоді така система буде називатися *лінійно незалежною*.

Базисом простору називається його максимальна лінійно незалежна система векторів.

Так, наприклад, базисом на прямій (простір R^1) є довільний ненульовий вектор даної прямої $\{\bar{e}_1\}$. Базисом на площині (простір R^2) є будь-яка впорядкована пара неколінеарних векторів $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Базисом в просторі (простір R^3) є будь-яка впорядкована трійка некомпланарних векторів $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

В просторах R^2 і R^3 будь-який вектор \bar{x} може бути представлений єдиним способом як лінійна комбінація векторів базису (розкладений по векторах базису), тобто

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 \quad \bar{x} \in R^2 \quad (2.3)$$

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{e}_1 + \lambda_2 \bar{e}_2 + \lambda_3 \bar{e}_3 \quad \bar{x} \in R^3. \quad (2.4)$$

Коефіцієнти розкладів (2.3) та (2.4) називаються *координатами* вектора \bar{x} у відповідному базисі.

Базис називається *ортонормованим*, якщо вектори базису попарно ортогональні та мають одиничну довжину. Для ортонормованого базису прийняті позначення $\bar{e}_1 = \bar{i}$, $\bar{e}_2 = \bar{j}$, $\bar{e}_3 = \bar{k}$. Базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ називається ще й *канонічним* базисом, якщо трійка векторів — права.

Нехай в просторі R^3 задано базис $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Тоді для двох будь-яких векторів $\bar{a} = \{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\}$ і $\bar{b} = \{\beta_1; \beta_2; \beta_3\}$, заданих своїми координатами, лінійні дії над ними зводяться до лінійних дій над їх координатами. Отже,

$$\bar{a} + \bar{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\bar{e}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\bar{e}_2 + (\alpha_3 + \beta_3)\bar{e}_3 \quad (2.5)$$

$$\lambda \bar{a} = (\lambda \alpha_1)\bar{e}_1 + (\lambda \alpha_2)\bar{e}_2 + (\lambda \alpha_3)\bar{e}_3. \quad (2.6)$$

З рівності (2.6) легко дістати умову колінеарності векторів:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \bar{b} = \lambda \bar{a} \Leftrightarrow \frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} = \frac{\beta_3}{\alpha_3} = \lambda.$$

2.3.5. Декартова (прямокутна) система координат на площині і в просторі

Нехай на площині задано деяка точка O (початок координат) і ортонормований базис $\{\bar{i}, \bar{j}\}$. Сукупність точки O і даного ортонормованого базису називають декартовою прямокутною системою координат на площині.

Аналогічно, сукупність деякої точки простору O й ортонормованого базису $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ утворює прямокутну декартову систему координат в просторі.

Всі наступні визначення й поняття ми будемо формулювати для тривимірного простору R^3 .

Осі, які проходять через точку O у напрямках векторів $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, називаються відповідно віссю *абсцис* (вісь Ox), віссю *ординат* (вісь Oy) та віссю *аплікват* (вісь Oz). Вектори $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ називаються основними (базисними) *ортами*.

Радіус-вектором точки M простору R^3 називається вектор \overline{OM} , кінець якого співпадає з точкою M , а початок — з початком координат. Якщо відомі координати вектора \overline{OM} в базисі $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, тобто $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, тоді впорядкована трійка чисел (x, y, z) буде називатися координатами точки M в декартовій прямокутній системі координат.

Для будь-яких двох точок простору $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ координати вектора $\overline{AB} = \{X, Y, Z\}$ визначаються рівностями $X = x_2 - x_1; Y = y_2 - y_1; Z = z_2 - z_1$.

Нехай $\bar{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$, тоді $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Напрямок ненульового вектора $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$ визначається кутами α, β, γ , які даний вектор утворює з додатними напрямками координатних осей Ox, Oy, Oz . Косинуси цих кутів, так звані *напрямні косинуси вектора*, знаходяться за формулами: $\cos \alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}$. Напрямні косинуси вектора пов'язані співвідношенням $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Для будь-якого ненульового вектора \bar{a} його орт може бути знайдено за формулою $\bar{a}^0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$. Як ми бачимо, напрямні косинуси вектора \bar{a} — суть координати його орта. Слід відзначити, що координати базисних ортів такі:

$$\bar{i} = (1; 0; 0), \bar{j} = (0; 1; 0), \bar{k} = (0; 0; 1)$$

2.3.6. Добутки векторів та їх властивості

Скалярним добутком двох ненульових векторів \bar{a} і \bar{b} називається число, що дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos \varphi, \text{ де } \varphi \text{ — кут між векторами } \bar{a} \text{ і } \bar{b}.$$

Основні властивості скалярного добутку двох векторів:

1	$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$	4	$\bar{a} \cdot \bar{b} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}$, або $\bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$
2	$(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$	5	$\bar{a}^2 = \bar{a} \cdot \bar{a} = \bar{a} ^2 \Rightarrow \bar{a} = \sqrt{\bar{a}^2}$
3	$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$	6	$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{a} \text{np}_{\bar{a}} \bar{b} = \bar{b} \text{np}_{\bar{b}} \bar{a}$

Якщо вектори \bar{a} і \bar{b} задано своїми координатами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то їх скалярний добуток визначається формулою

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Кут φ між векторами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ визначається рівні-

стю
$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Векторним добутком вектора \bar{a} на вектор \bar{b} називається третій вектор $\bar{a} \times \bar{b}$, який визначається трьома умовами:

- 1) Довжина вектора $\bar{a} \times \bar{b}$ дорівнює $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi$, де $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$
- 2) Вектор $\bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярний до кожного з векторів \bar{a} і \bar{b} ;
- 3) Вектори \bar{a} , \bar{b} і $\bar{a} \times \bar{b}$ утворюють праву тройку векторів.

Основні властивості векторного добутку двох векторів:

1	$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$	4	$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$, або $\bar{a} = \bar{0} \vee \bar{b} = \bar{0}$
2	$(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$	5	$ \bar{a} \times \bar{b} = S$, S – площа паралелограму, побудованого на векторах \bar{a} і \bar{b} як на сторонах
3	$\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$		

Якщо вектори \bar{a} і \bar{b} задано своїми координатами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то їх векторний добуток дорівнює символічному визначнику третього порядку

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}(a_y b_z - a_z b_y) - \bar{j}(a_x b_z - a_z b_x) + \bar{k}(a_x b_y - a_y b_x).$$

Мішаним добутком трьох векторів називається число, що дорівнює скалярному добутку вектора \bar{c} на векторний добуток векторів \bar{a} і \bar{b} , тобто $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Основні властивості мішаного добутку трьох векторів:

1	$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$	4	$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = 0 \Leftrightarrow$ вектори компланарні
2	$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b}$	5	$V = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} $, V – об'єм паралелепіпеду, побудованого на даних векторах, як на ребрах
3	$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$		

Якщо вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ задано своїми координатами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$, їх мішаний добуток обчислюється за формулою

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}.$$

2.4. Аналітична геометрія на площині

Наведемо деякі відомі задачі аналітичної геометрії на площині:

Відстань між точками $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ — $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Площа трикутника з вершинами у точках $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$:

$$S = \frac{1}{2} \text{mod} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Координати точки M , яка поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{|M_1M|}{|MM_2|}$

$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

2.4.1. Пряма лінія на площині

Загальне рівняння прямої на площині: $l: Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$.

Зокрема, коли $C = 0$ — пряма проходить через початок координат, якщо $A = 0 \Rightarrow l \parallel O_x$ та $B = 0 \Rightarrow l \parallel O_y$.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом — $y = kx + b$, k — тангенс кута нахилу прямої до додатного напрямку осі O_x , b — величина відрізка, відсікаємого на осі O_y .

$y - y_0 = k(x - x_0)$ — рівняння прямої через точку $M_0(x_0; y_0)$ з кутовим коефіцієнтом k ; зокрема, $y = kx$ — рівняння прямої, що проходить через початок координат.

Рівняння прямої через дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$: $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

Рівняння прямої у відрізках на осях: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (a і b — величини відрізків,

які відсікаються прямою відповідно від координатних осей Ox і Oy).

Якщо пряма задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$ і $B \neq 0$, тоді $k = -A/B$ та $b = -C/B$.

Один з кутів між прямими $l_1: y = k_1x + b_1$ та $l_2: y = k_2x + b_2$ знаходиться за формулою $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Зокрема, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих на площині мають вигляд: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$; $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

Нехай пряма l задана своїм загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$. Вектор $\vec{n} = \{A; B\}$ називається нормальним вектором прямої l . Для прямих l_1 і l_2 , заданих своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ й $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, кут φ між ними дорівнює куту між їх нормальними векторами $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1\}$ і

$$\vec{n}_2 = \{A_2; B_2\}, \text{ тобто } \cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Так як $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, тоді умова паралельності прямих l_1 і l_2 має вид $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; якщо ж $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, тоді прямі співпадають.

Так як $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, тоді умова перпендикулярності прямих l_1 і l_2 приймає вид $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax + By + C = 0$ дорівнює

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

2.4.2. Основні криві другого порядку на площині

Канонічне рівняння кола з центром у точці $C(a; b)$ і радіусом R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Канонічне рівняння еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Зокрема, якщо $a = b = R$ дістанемо $x^2 + y^2 = R^2$ — канонічне рівняння кола з центром в початку коорди-

нат і радіусом R . Ексцентриситет еліпса $\varepsilon = c/a < 1$, де $c^2 = a^2 - b^2$. Рівняння директрис еліпса $x = \pm a/\varepsilon$.

Канонічне рівняння гіперболи: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$. Якщо $a = b$ дістаємо рівнобічну гіперболу $x^2 - y^2 = a^2$. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = c/a$, $\varepsilon > 1$, де $c^2 = a^2 + b^2$. Рівняння асимптот гіперболи $y = \pm bx/a$, а рівняння директрис гіперболи — $x = \pm a/\varepsilon$.

Канонічне рівняння параболи $y^2 = 2px$ (симетрія відносно осі Ox) та $x^2 = 2py$ (симетрія відносно осі Oy). Для параболи з рівнянням $y^2 = 2px$, де p — параметр, фокус $F(p/2; 0)$, директриса $x = -p/2$. Ексцентриситет параболи $\varepsilon = 1$.

Для еліпса і гіперболи a та b — півосі, $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ — фокуси. Фокальна відстань дорівнює $2c$; для еліпса $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, для гіперболи $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2.4.3. Полярні координати

Візьмемо на площині точку O (полюс) і проведемо через нею вісь OP (полярну вісь). Для довільної точки M на площині полярним радіусом ρ даної точки називається довжина вектора \overline{OM} , а полярним кутом φ точки M називається кут нахилу вектора \overline{OM} до полярної осі OP . Пара чисел (ρ, φ) , де $(0 \leq \rho < +\infty; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, називається полярними координатами точки M на площині. Перейти від декартових координат до полярних можна за допомогою формул: $x = \rho \cos \varphi$; $y = \rho \sin \varphi$. А від полярних до декартових — за допомогою формул: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = y/x$.

Деякі визначні криві в полярних координатах:

$\rho = a$ — полярне рівняння кола з центром у початку координат і радіусом a ;

$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ — лемніската Бернуллі (двохпелюсткова троянда);

$\rho = a\varphi$ — спіраль Архімеда;

$\rho = a(1 \pm \cos \varphi)$ — кардіоида;

$\rho = a \sin 3\varphi$ — трьохпелюсткова троянда;

$\rho = a \sin 2\varphi$ — чотирьохпелюсткова троянда.

2.4.4. Параметричне завдання кривої на площині

Крива лінія на площині може бути задана своїми параметричними рівнян-

нями $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ($t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ — параметр). Приклади параметричного завдання деяких відомих кривих:

1) Параметричні рівняння кола з центром в початку координат и радіусом R :

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

2) Параметричні рівняння еліпса з центром в точці $O(0,0)$ та півосями a і b :

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases} \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

3) Параметричні рівняння циклоїди: $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$. Значенню параметра $t \in [0; 2\pi]$ відповідає перша арка циклоїди.

4) Параметричні рівняння астроїди (гіпоциклоїди): $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}, \quad (0 \leq t < 2\pi).$

2.5. Аналітична геометрія у просторі

2.5.1. Площина у просторі

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\bar{N} = \{A; B; C\}$ (\bar{N} — нормальний вектор площини).

Загальне рівняння площини у просторі — $Ax + By + Cz + D = 0$, де $|A| + |B| + |C| \neq 0$. Зокрема, якщо $D = 0$, площина проходить через початок координат. Якщо, наприклад, $A = 0$, тоді площина паралельна осі Ox , а якщо $A = 0, D = 0$, то площина проходить через вісь Ox .

Рівняння площини у відрізках на осях — $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (a, b, c — величини відрізків, відсікаємих площиною відповідно від осей Ox, Oy і Oz).

Рівняння площини через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, які не лежать на одній прямій:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Один з кутів між двома площинами $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $(\alpha_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ знаходиться за формулою $\cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|}$.

Умови паралельності та перпендикулярності площин

$$(\alpha_1) \parallel (\alpha_2) \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2 \quad \text{та} \quad (\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \bar{N}_1 \perp \bar{N}_2.$$

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини $Ax + By + Cz + D = 0$ дорівнює $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

2.5.2. Пряма лінія у просторі

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \text{— загальні рівняння прямої в просторі (як лінії}$$

перетину двох площин).

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad \text{— канонічне рівняння прямої } l \text{ з напрямним}$$

вектором $\bar{s} = (m, n, p)$ і, яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

$x = x_0 + mt; y = y_0 + nt; z = z_0 + pt$ — параметричні рівняння прямої l , яка проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = (m, n, p)$.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{— рівняння прямої через дві точки } M_1(x_1; y_1; z_1) \text{ і}$$

$M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Один з кутів між двома прямими $l_1: x = x_1 + m_1t; y = y_1 + n_1t; z = z_1 + p_1t$ та $l_2: x = x_2 + m_2t; y = y_2 + n_2t; z = z_2 + p_2t$ знаходиться за формулою

$$\cos \varphi = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

$$(l_1) \parallel (l_2) \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2},$$

$$(l_1) \perp (l_2) \Leftrightarrow \bar{s}_1 \perp \bar{s}_2 \Leftrightarrow m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0.$$

Прямі l_1 і l_2 належать одній площині, якщо вектори \bar{s}_1, \bar{s}_2 і $\overline{M_1M_2}$ компланарні, тобто $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \overline{M_1M_2} = 0$. В розгорнутому вигляді ця умова може бути записана таким чином:

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

Якщо $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2$ і $\bar{s}_1 \nparallel \overline{M_1M_2}$, тоді прямі l_1 і l_2 належать одній площині і паралельні. Якщо $\bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \parallel \overline{M_1M_2}$, тоді прямі l_1 і l_2 співпадають.

Якщо для прямих l_1 і l_2 умова (2.6) не виконується, то дані прямі лежать в паралельних площинах і називаються *мимобіжними*.

Відстань d від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до прямої, яка проходить через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і має напрямний вектор $\bar{s} = \{m; n; p\}$ знаходиться за формулою

$$d = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_1M_0}|}{|\bar{s}|}.$$

Відстань d між двома мимобіжними прямими

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}; \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

обчислюється за формулою $d = \frac{|\overline{M_2M_1} \cdot \bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}{|\bar{s}_1 \times \bar{s}_2|}$.

2.5.3. Взаємне розташування прямої і площини у просторі

Кут між прямою $l: x = x_0 + mt; y = y_0 + nt; z = z_0 + pt$ та площиною $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою

$$\sin \varphi = \frac{|\bar{N} \cdot \bar{s}|}{|\bar{N}| \cdot |\bar{s}|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямої l та площини (α) :

$$(\alpha) \parallel l \Leftrightarrow \bar{N} \perp \bar{s} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

$$(\alpha) \perp l \Leftrightarrow \bar{N} \parallel \bar{s} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Для того щоб пряма l належала площині (α) необхідно виконання наступних умов $\bar{N} \perp \bar{s}$ і $M_0(x_0; y_0; z_0) \in (\alpha)$.

Нехай пряма $l: x = x_0 + mt; y = y_0 + nt; z = z_0 + pt$ не паралельна площині $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Для того щоб знайти точку перетину прямої і площини необхідно вираз для змінних x, y, z з рівнянь прямої підставити в рівняння

площини. З отриманого рівняння знаходимо значення параметру $t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$. Залишилося тільки підставити отримане значення параметра t в рівняння прямої.

2.5.4. Основні поверхні другого порядку в просторі

Поверхнею другого порядку називається множина точок простору, прямокутні координати яких задовольняють рівнянню вида

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

де хоча б один з коефіцієнтів A, B, C, D, E, F відрізнявся від нуля.

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ — канонічне рівняння сфери з центром в точці $C(a; b; c)$ та радіусом R .

$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ — канонічне рівняння еліпсоїда з центром на початку координат та півосями $a; b; c$. Якщо $a = b = c = R$ дістанемо $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром на початку координат і радіусом R .

$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ — канонічне рівняння еліптичного циліндра, твірні якого паралельні осі Oz . Зокрема, якщо $a = b$, дістанемо круговий циліндр.

$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ — канонічне рівняння гіперболічного циліндра, твірні якого паралельні осі Oz .

$y^2 = 2px$ — канонічне рівняння параболічного циліндра, твірні якого паралельні осі Oz .

$y^2 = 2pz$ — канонічне рівняння параболічного циліндра, твірні якого паралельні осі Ox .

$z^2 = 2px$ — канонічне рівняння параболічного циліндра, твірні якого паралельні осі Oy .

$x^2 + y^2 = z^2$ — канонічне рівняння кругового конуса.

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ — канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїда

$x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = -1$ — канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїда.

$x^2/p - y^2/q = 2z$ ($p > 0, q > 0$) — канонічне рівняння гіперболічного параболоїда.

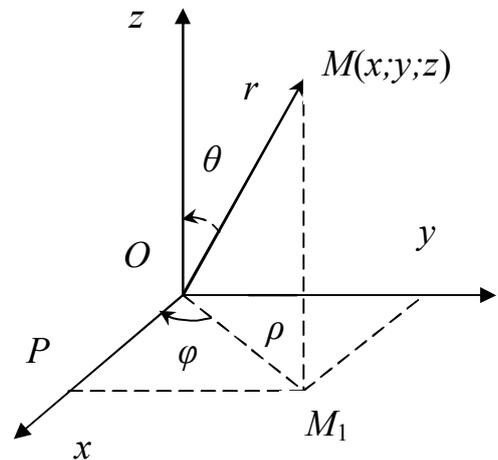
$x^2/p + y^2/q = 2z$ ($p > 0, q > 0$) — канонічне рівняння еліптичного параболоїда. Зокрема, якщо $q = p$, дістанемо круговий параболоїд з рівнянням $2pz = x^2 + y^2$.

2.5.5. Циліндрична і сферична системи координат

В циліндричній системі координат розташування точки M визначається впорядкованою трійкою чисел (φ, ρ, z) , де (φ, ρ) — полярні координати проекції точки M на площину Oxy , z — апліката точки M .

Залежність між прямокутними координатами точки $M(x, y, z)$ і її циліндричними координатами мають вид $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$, де $0 \leq \rho < +\infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $-\infty < z < \infty$.

В сферичній системі координат розташування точки M в просторі визначається впорядкованою трійкою чисел (r, φ, θ) (рисунок праворуч), де r — довжина радіус-вектора точки M , φ — кут між проекцією вектора \overline{OM} на площину Oxy й віссю абсцис, обчислюваний в додатному напрямі (проти ходу годинникової стрілки), і θ — кут між радіус-вектором \overline{OM} й віссю аплікат. Для будь-якої точки простору маємо $0 \leq r < +\infty$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 < \theta < \pi$.



Формули переходу від декартових координат до сферичних мають вид $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$. Перехід від сферичних координат до декартових здійснюються за формулами:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, \quad \begin{cases} \varphi \in [0; \pi], y \geq 0 \\ \varphi \in (\pi; 2\pi), y < 0 \end{cases}$$

Циліндричні й сферичні координати дають можливість значно спростити рівняння деяких поверхонь другого порядку.

Так, наприклад, рівняння кругового циліндру $x^2 + y^2 = R^2$ в циліндричних координатах має вид $\rho = R$, кругового параболоїда $z = x^2 + y^2$ — $z = \rho^2$, а рівняння сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферичних координатах прийме вид $r = R$.

2.6. Завдання для самостійного розв'язування

ЗАДАЧА 1.

Розв'язати систему трьома способами: а) методом Гаусса; б) за допомогою формул Крамера; в) за допомогою матричного числення:

$$1.1. \begin{cases} x + 5y - 4z = 12 \\ x - 5y + 2z = -4 \\ 2x + 3y + 5z = 4 \end{cases} \quad 1.2. \begin{cases} x + 6y - 3z = -1 \\ -x + 2y + z = -3 \\ 2x - y - 3z = 4 \end{cases} \quad 1.3. \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 2 \\ -x + 3y - 2z = -8 \\ 2x - 3y - 7z = 10 \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} 3x + 2y + 5z = 4 \\ -3x + y + z = -1 \\ 4x - y - 3z = -3 \end{cases} \quad 1.5. \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y - 3z = -5 \\ 3x - 2y - 2z = 8 \end{cases} \quad 1.6. \begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x - y - 3z = -1 \\ 3x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

ЗАДАЧА 2.

Знайти значення матричного поліному $P(A)$, де A — задана, E — одинична матриця (3×3).

$$2.1. P(A) = 3A^2 - 4A + 5E,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2.2. P(A) = 2A^2 + 2A + 3E,$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2.3. P(A) = -2A^2 - 5A + E,$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.4. P(A) = 4A^2 + 3A - 7E,$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$2.5. P(A) = 2A^2 + 5A + 3E,$$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2.6. P(A) = 6A^2 + 7A - 4E,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ЗАДАЧА 3.

Лінія задана рівнянням у полярній системі координат. Потрібно:

1) побудувати лінію по точках, починаючи від $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, змінюючи значення через проміжок $\pi/8$; 2) знайти рівняння даної лінії в декартовій прямокутній системі координат, у якої початок співпадає з полюсом, а додатна піввісь – з полярною віссю; 3) за рівнянням в декартовій прямокутній системі координат визначити, яка це лінія.

$$3.1. \quad \rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

$$3.2. \quad \rho = \frac{4}{3 + 3 \cos \varphi}$$

$$3.3. \quad \rho = \frac{3}{1 + 2 \cos \varphi}$$

$$3.4. \quad \rho = \frac{6}{4 - 5 \cos \varphi}$$

$$3.5. \quad \rho = \frac{5}{1 - 2 \cos \varphi}$$

$$3.6. \quad \rho = \frac{2}{3 + \cos \varphi}$$

ЗАДАЧА 4.

Задані координати трьох точок на площині Oxy . Треба знайти:

1) рівняння медіани AM і висоти AD у трикутнику ABC ; 2) координати точки M_1 , симетричної точці C відносно прямої AB ; 3) рівняння прямої, яка проходить через точку B паралельно AC ; 4) рівняння сторін паралелограма $ABKL$, якщо C – точка перетину його діагоналей.

$$4.1. \quad A(-1; 2), B(3; 5), C(4; 0)$$

$$4.2. \quad A(-2; 1), B(2; 5), C(3; 0)$$

$$4.3. \quad A(5; 0), B(2; 3), C(-2; -1)$$

$$4.4. \quad A(0; 3), B(1; 6), C(4; 2)$$

$$4.5. \quad A(-3; -2), B(-2; 1), C(1; -3)$$

$$4.6. \quad A(4; -1), B(1; 2), C(-3; 0)$$

ЗАДАЧА 5.

За допомогою паралельного переносу системи координат визначити тип лінії. Знайти, якщо потрібно піввісі, фокуси, ексцентриситет, директриси, асимптоти, вершини та інше. Зробити рисунок.

$$5.1. \quad x^2 + 4y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$$

$$5.2. \quad x^2 - 4x + 3y - 2 = 0$$

$$5.3. \quad 2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 5 = 0$$

$$5.4. \quad x^2 - 9y^2 + 4y - 32 = 0$$

$$5.5. \quad 4x^2 - y^2 - 6y + 27 = 0$$

$$5.6. \quad x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$$

ЗАДАЧА 6.

Задані координати вершин піраміди A_1, A_2, A_3, A_4 . Знайти:

1) довжину ребра A_1A_2 ; 2) кут між ребрами A_1A_2 та A_1A_4 ; 3) кут між ребром A_1A_4 та гранню $A_1A_2A_3$; 4) площу грані $A_1A_2A_3$; 5) об'єм піраміди; 6) рівняння прямої A_1A_2 ; 7) рівняння площини $A_1A_2A_3$; 8) рівняння висоти, проведе-

ної з вершини A_4 до грані $A_1A_2A_3$. Зробити рисунок.

- 6.1. $A_1(14;4;5)$, $A_2(-5; -3;2)$, $A_3(4; -8; -4)$, $A_4(1; -4;6)$;
 6.2. $A_1(-2;0; -4)$, $A_2(-1;7;1)$, $A_3(-2; -6; -3)$, $A_4(-2;2; -1)$;
 6.3. $A_1(1;2;0)$, $A_2(3;0; -3)$, $A_3(5;2;6)$, $A_4(8;4; -9)$;
 6.4. $A_1(2; -1;2)$, $A_2(1;2; -1)$, $A_3(3;2;1)$, $A_4(-4;2;5)$;
 6.5. $A_1(1;1;2)$, $A_2(-1;1;3)$, $A_3(2; -2;4)$, $A_4(-1;0; -2)$;
 6.6. $A_1(2;3;1)$, $A_2(4;1; -2)$, $A_3(6;3;7)$, $A_4(7;5; -3)$.

2.7. Приклади тестових завдань

Змістовий модуль № 1

Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія

Тестове завдання

У завданнях 1 – 12 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей

1. Знайти різницю $A_{11} - A_{23}$ для відповідних елементів матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

а	б	в	г
1	12	3	-5

2. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{vmatrix}$.

а	б	в	г
5	8	-4	-8

3. Знайти добуток матриць $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

а	б	в	г
$\begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	(0)	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

4. Чому дорівнює косинус кута між векторами $\vec{a} = \{4;3;0\}$ і $\vec{b} = \{0;3;4\}$?

а	б	в	г
-0,5	9/25	0	1/5

5. При якому цілому значенні параметра m вектори $\vec{a} = \{4, -5, -6\}$ та $\vec{b} = \{-8, 2m, 12\}$ колінеарні?

а	б	в	г
5	-0,5	-2	не існує

6. Знайти вектор $\overline{BA} + \overline{BC}$, якщо $A(1, -4, 0)$, $B(-1, 2, -3)$, $C(1, -2, 1)$.

а	б	в	г
$\{1, 4, -8\}$	$\{2, -4, 4\}$	$\{-2, 2, 5\}$	$\{4, -10, 7\}$

7. Яка з наведених площин паралельна площині Oxy ?

а	б	в	г
$-5x + 7z + 9 = 0$	$-3x - 2y + 5 = 0$	$2z + 5 = 0$	$2z + 5y = 0$

8. Написати канонічні рівняння прямої, що проходить через початок координат та паралельна осі Oz .

а	б	в	г
$5x + 3z - 9 = 0$	$\frac{x-4}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-0}{2}$	$\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{6}$	$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$

9. Написати рівняння площини, що проходить через точку $A(3, -2, 1)$ та має нормальний вектор $\vec{N} = \{1; 2; -2\}$.

а	б	в	г
$x + 2y - 2z + 3 = 0$	$x + 2y - z = 5$	$x + 2y - 2z - 6 = 0$	$5z + 5 = 0$

10. Яка з наведених прямих проходить через початок координат?

а	б	в	г
$2x - 3y + 1 = 0$	$4x - 7y = 0$	$y - 2 = 0$	$5x + 5 = 0$

11. Знайти точку перетину прямої $-9x + 18 = 0$ з віссю Oy .

а	б	в	г
$(2; 0)$	$(0; 2)$	$(0; 0)$	не перетинається

12. Визначати півосі еліпса $9x^2 + 25y^2 = 1$.

а	б	в	г
3 і 5	2 і 4;	$(1/3)$ і $(1/5)$	5 і 3

Розв'язання задач 13 - 15 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

13. Знайти площу трикутника, який відтинає площина $5x - 6y + 3z + 120 = 0$ від координатного кута Oxy .

14. Знайти $\varphi(A)$, якщо $\varphi(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, а одиниця позначає одиничну

матрицю другого порядку.

15. При якому значенні C пряма $3x - 2y + z + 3 = 0$, $4x - 3y + 4z + 1 = 0$ паралельна площині $2x - y + Cz - 2 = 0$?

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання.

$$A_{11} - A_{23} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (3 - 5) + (5 - 0) = 3.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення визначників, мінори і алгебраїчні доповнення елементів визначника).

Завдання 2. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення визначників третього порядку).

Завдання 3. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання.

$$A \cdot B = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}}_{1 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{3 \times 1} = \underbrace{(1 \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2))}_{1 \times 1} = (0).$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: множення прямокутних матриць).

Завдання 4. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання.

$$\cos \angle(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{4 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 4}{\sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{9}{25}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: скалярний добуток двох векторів та його застосування).

Завдання 5. Правильна відповідь: **а.**

Розв'язання.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{4}{-8} = \frac{-5}{2m} = \frac{-6}{12} \Rightarrow \frac{-5}{2m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = 5.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: умова колінеарності двох векторів, заданих своїми координатами).

Завдання 6. Правильна відповідь: **г.**

Розв'язання.

$$\overline{BA} + \overline{BC} = (2; -6; 3) + (2; -4; 4) = (4; -10; 7).$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: лінійні дії над векторами).

Завдання 7. Правильна відповідь: **в.**

Розв'язання. Нормальний вектор площини колінеарний осі Oz .

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: окремі випадки розташування площини у просторі).

Завдання 8. Правильна відповідь: **г.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: канонічне рівняння прямої у просторі).

Завдання 9. Правильна відповідь: **а.**

Розв'язання.

$$1 \cdot (x - 3) + 2 \cdot (y + 2) - 2 \cdot (z - 1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 2z + 3 = 0.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: рівняння площини, що проходить через дану точку перпендикулярно до заданого вектора).

Завдання 10. Правильна відповідь: **б.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом).

Завдання 11. Правильна відповідь: **г.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: окремі випадки розташування прямої на площині, точки перетину прямих).

Завдання 12. Правильна відповідь: **в.**

Розв'язання.

$$9x^2 + 25y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{(1/3)^2} + \frac{y^2}{(1/5)^2} = 1.$$

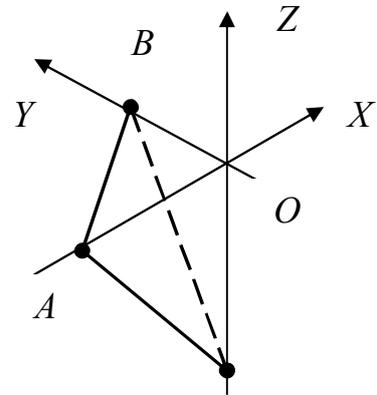
(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: криві другого порядку).

Завдання 13.

Розв'язання. Задана площина перетинає вісь абсцис у точці $A(-24;0;0)$, вісь ординат — у точці $B(0;20;0)$. Отже, ми отримали прямокутний трикутник, катети якого рівні відповідно 24 та 20. Таким чином,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 24 = 240 \text{ (кв.од.)}$$

Відповідь: 240.

**Завдання 14.**

Розв'язання. Нам потрібно знайти матрицю $\varphi(A) = (E + A) \cdot (E - A)^{-1}$.

$$E + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

За правилом знаходження оберненої матриці дістаємо

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{|E - A|} \cdot ((E - A)^*)^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Остаточно маємо: } \varphi(A) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\varphi(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Завдання 15.

Розв'язання. Відомо, що пряма паралельна площині, якщо її напрямний вектор перпендикулярний до нормального вектора площини. Знайдемо напрямний вектор прямої, як векторний добуток нормальних векторів площин, які входять до загальних рівнянь прямої

$$\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\bar{i} - 8\bar{j} - \bar{k}.$$

Так як нормальний вектор заданої площини має координати $\bar{N} = (2; -1; C)$, тоді $\bar{N} \perp \bar{s} \Leftrightarrow \bar{N} \cdot \bar{s} = 0 \Leftrightarrow -10 + 8 - C = 0 \Rightarrow C = -2$.

Відповідь: $C = -2$.

РОЗДІЛ ТРЕТІЙ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

3.1. Функція. Основні визначення

Якщо кожному числу x з деякої числової множини X за певним правилом поставлене у відповідність хоча б одне число y з множини Y , то кажуть, що y є функція від x і пишуть $y = f(x)$, $x \in X, y \in Y$.

Змінна x називається незалежною змінною, або аргументом, а змінна y — залежною змінною, або функцією; під символом f розуміють те правило, за яким кожному x відповідає y , або ті операції, які треба виконати над аргументом, щоб дістати відповідне значення функції.

Множина X називається областю визначення функції. Множина Y усіх чисел y , таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in X$ називається множиною значень функції, тобто $Y = \{y \mid y = f(x), \forall x \in X\}$. Основні способи завдання функції: аналітичний, графічний, табличний, програмний та описовий.

Основними елементарними функціями називаються такі:

Степенева функція $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$. Область визначення і графіки цієї функції залежать від значення α .

Показникова функція $y = a^x$, $a > 0, a \neq 1$.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$.

Тригонометричні функції: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Основні елементарні функції, а також функції, утворені за допомогою формул, в яких над основними елементарними функціями виконується лише скінчене число арифметичних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій, називаються елементарними.

Елементарні функції поділяють на такі класи.

1) Функція виду $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, де $n \in N$, коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_n — дійсні числа ($a_0 \neq 0$), називається цілою раціональною функцією, або многочленом (поліномом) степеня n .

2) Функція, що є відношенням двох многочленів $R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m}$,

називається *дробовою раціональною функцією*, або *раціональним дробом*. Сукупність поліномів і раціональних дробів утворює клас *раціональних функцій*.

3) Функція, утворена за допомогою скінченного числа суперпозицій та арифметичних операцій над раціональними функціями і над степеневими функціями з дробовими показниками і яка не є раціональною, називається *ірраціональною функцією*.

4) Елементарна функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається *трансцендентною функцією*.

Функцію $f(x)$, визначену на множині E , називають *обмеженою* на цій множині, коли існує число $M > 0$ таке, що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $|f(x)| < M$.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині E . Якщо для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу, взятих із множини E , з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що:

а) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція називається *зростаючою*;

б) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція називається *спадною*.

Зростаючі і спадні на множині E функції називаються *строго монотонними* на цій множині.

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині X точок осі Ox , розміщених симетрично відносно точки $x = 0$, тобто якщо $x \in X$, то й $-x \in X$.

Функцію $f(x)$ називають *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in X$ і *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in X$.

Функція $f(x)$, визначена на множині X , називається *періодичною* на цій множині, якщо існує число $T \neq 0$ таке, що $x + T \in X$ і $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in X$.

3.2. Теорія границь

3.2.1. Границя послідовності. Основні теореми

Стале число a називається границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, якщо яким би ні було наперед задане додатне число ε , яке може бути як завгодно малим, знайдеться такий номер $N = N(\varepsilon)$, що для всіх номерів $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Основні теореми

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$; 4. Якщо $x_n \leq y_n$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$;
 5. Якщо $x_n \leq y_n \leq z_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = b$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Границі деяких послідовностей

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : n > N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$ (x_n — нескінченно мала).

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N = N(M) : n > N \Rightarrow |x_n| > M$ (x_n — нескінченно велика)

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$; 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1$;
 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e, e = 2,7182\dots$; 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}} \left(\frac{e}{n} \right)^n = 1$ (формула Стирлінга)

3.2.2. Границя функції. Основні теореми

Число A називається *границею функції* $y = f(x)$ коли $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, таке, що як тільки $0 < |x - x_0| < \delta$, тоді $|f(x) - A| < \varepsilon$: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Основні теореми

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (u(x) \pm v(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$;
 2. $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \cdot v(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} v(x)$;
 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} v(x)} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) \neq 0 \right)$;
 4. Якщо $g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A$, тоді $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Границя функції на нескінченності

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists \delta(M) > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) > 0 : |x| > N \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються *еквівалентними*

коли $x \rightarrow x_0$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$.

3.2.3. Однобічні границі

Число A називається *правою границею* (границею зправа) функції $f(x)$ коли $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що як тільки $0 < x - x_0 < \delta$, тоді $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Аналогічно можна навести визначення *лівої границі* (границі зліва)

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

3.2.4. Перша та друга визначні границі. Деякі важливі границі функції

Перша визначна границя $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ та її наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Друга визначна границя $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ і $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & 0 < a < 1 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm \frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow b} \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi, & b = -\infty \\ 0, & b = +\infty \end{cases}.$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих величин $\alpha(x) \rightarrow 0 (x \rightarrow x_0)$

№	Нескінченно мала функція	Еквівалентна функція
1	$\sin \alpha(x)$	$\alpha(x)$
2	$\operatorname{tg} \alpha(x)$	$\alpha(x)$
3	$\arcsin \alpha(x)$	$\alpha(x)$
4	$\operatorname{arctg} \alpha(x)$	$\alpha(x)$
5	$1 - \cos \alpha(x)$	$\alpha^2(x)/2$
6	$e^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x)$
7	$a^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x) \cdot \ln a$
8	$\log_a(1 + \alpha(x))$	$\alpha(x) \cdot \log_a e$
9	$\ln(1 + \alpha(x))$	$\alpha(x)$
10	$(1 + \alpha(x))^m - 1$	$m \cdot \alpha(x), m \in R$

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною* в точці x_0 , якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 та $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$.

Визначення неперервності можна дати мовою границь

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.3. Похідна функції дійсного аргументу

3.3.1. Визначення та зміст похідної. Таблиця похідних

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається скінчена границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx , коли приріст аргументу прямує до нуля будь-яким чином.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Для того щоб функція була диференційована в точці x_0 необхідно щоб вона була в цій точці неперервна.

Геометричний зміст похідної.

Значення похідної функції $f'(x)$ в точці x_0 чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою $x = x_0$.

Механічний зміст похідної:

Швидкість — похідна шляху за часом $v(t) = S'(t)$.

Прискорення — похідна швидкості за часом $a(t) = v'(t)$

Таблиця похідних основних елементарних функцій та основні правила диференціювання

Основні правила диференціювання	
1	$(u \pm v)' = u' \pm v'$
2	$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
3	$(C \cdot u)' = C(u)'$
4	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0$
5	$y'_x = f'(u) \cdot u'(x)$, якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$
6	$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$, $y(x)$ і $x(y)$ взаємообернені
7	$\begin{cases} y = y(t) \\ x = x(t) \end{cases} \quad y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}$ — похідна параметричної функції
Похідні основних елементарних функцій	
$C' = 0$	
$x' = 1$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1$
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$, $a > 0, a \neq 1$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	$(\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\operatorname{arctgu})' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	$(\operatorname{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Дотична і нормаль до кривої

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

3.3.2. Диференціал функції

Диференціалом dy функції $y = f(x)$ в точці x називається лінійна частина її приросту: $\Delta y = \underbrace{f'(x)\Delta x}_{dy} + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \rightarrow 0$ коли $\Delta x \rightarrow 0$.

Так як $\Delta x = dx$, тоді $dy = f'(x)dx$.

Властивості диференціала функції

1. $dC = 0$; 2. $d(Cu) = Cdu$; 3. $d(u \pm v) = du \pm dv$; 4. $d(uv) = u dv + v du$;

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$; 6. $dy = f'(u)du$ — поза залежністю від того, чи є змінна u

незалежною змінною або функцією від x (властивість інваріантності форми диференціалу першого порядку).

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$ — формула наближеного обчислення значення функції.

3.3.3. Похідні та диференціали вищих порядків. Похідні n -го порядку для деяких функцій

$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$ — похідна n -го порядку ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$d^n y = d(d^{n-1}y)$ — диференціал n -го порядку ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$d^n y = y^{(n)}(x)dx^n$.

1. $(x^n)^{(n)} = n!$; 2. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}, m > n$;

3. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; 4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; 5. $(e^x)^{(n)} = e^x$;

6. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$; 7. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Формула Лейбніца

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + n \cdot u^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + n \cdot u' \cdot v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)}.$$

3.3.4. Деякі теореми про диференційовані функції

Теорема Ролля. Якщо функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, диференційована у всіх внутрішніх точках цього відрізка і на його кінцях приймає рівні значення $f(a) = f(b)$, тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться, хоча б одна точка $c(a < c < b)$, така, що $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Якщо функція $y = f(x)$ визначена и неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована у всіх внутрішніх точках цього відрізка, тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться, хоча б одна точка $c(a < c < b)$, така, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема Коші. Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ визначені і неперервні на відрізку $[a; b]$, диференційовані у всіх внутрішніх точках цього відрізка та $\varphi'(x) \neq 0 \forall x \in (a; b)$, тоді на інтервалі $(a; b)$ знайдеться точка $c(a < c < b)$, така що має місце співвідношення $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$.

3.3.5. Правило Лопіталя розкриття невизначеностей $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

та $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$. **Формули Тейлора і Маклорена**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{— правило Лопіталя розкриття невизначенос-}$$

тей $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$ та $\left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\}$ (за умовою, що границя відношення похідних існує). Точка x_0

може бути або деякою певною точкою, або символом нескінченності.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)},$$

$\theta \in (0; 1)$ — формула Тейлора.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{(n+1)}, \quad \theta \in (0; 1) \quad \text{—}$$

формула Маклорена.

3.3.6. Локальні екстремуми функції. Умови монотонності та опуклості функції

Точка x_0 називається точкою *локального* (місцевого) *максимуму*, якщо існує окіл $O(x_0)$ даної точки такий, що для всіх $x \in O(x_0)$ виконується нерівність $f(x_0) > f(x)$. Число $f(x_0)$ — *максимум* функції $f(x)$.

Точка x_0 називається точкою *локального* (місцевого) *мінімуму*, якщо існує окіл $O(x_0)$ даної точки такий, що для всіх $x \in O(x_0)$ виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Число $f(x_0)$ — *мінімум* функції $f(x)$.

Точки мінімуму і максимуму називаються точками *екстремуму* функції.

Точка x_0 називається *критичною* точкою функції $y = f(x)$, якщо значення $f'(x_0)$ або дорівнює нулю, або не існує.

Точки екстремумів функції потрібно шукати серед її критичних точок.

Теорема Ферма. Якщо x_0 — точка екстремуму диференційованої функції $y = f(x)$, тоді $f'(x_0) = 0$ (**необхідна умова** існування екстремуму в точці).

Нехай x_0 — критична точка функції, яка в цій точці неперервна, й крім того існує окіл даної точки, в якому функція має похідну, з виключенням, можливо, самої точки x_0 . Тоді, якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 перша похідна змінює знак з *плюса* на *мінус*, то точка x_0 — *точка локального максимуму функції*; якщо знак похідної змінюється з *мінуса* на *плюс*, то x_0 — *точка локального мінімуму функції*; якщо ж знак похідної не змінюється — то в точці x_0 екстремум відсутній (**достатні умови** існування екстремуму функції в точці).

Отже, для того щоб дослідити функцію однієї змінної на екстремум необхідно знайти спочатку її критичні точки (**необхідна умова**), визначити їхній характер (**достатні умови**) й обчислити відповідні значення функції.

Точка x_0 називається точкою *перегину функції*, якщо при переході через цю точку крива змінює напрям опуклості.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна в точці x_0 й двічі неперервне диференційована в деякому околі даної точки. Тоді для того щоб точка x_0 була точкою перегину необхідно і достатньо, щоб при переході через цю точку друга похідна змінювала свій знак.

Зв'язок між поведінкою функції та знаками її першої і другої похідної наведено в таблиці

Функція y	Похідна y'
Зростає	$y'(x) > 0$
Спадає	$y'(x) < 0$

Функція y	Похідна y''
Опукла вгору	$y''(x) < 0$
Опукла вниз	$y''(x) > 0$

3.3.7. Винаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції

Теорема Вейєрштрасса. Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ досягає на цьому відрізку свого найбільшого та найменшого значень.

Для знаходження найбільшого(найменшого) значень функції на відрізку необхідно:

- знайти критичні точки функції, які належать даному відрізку (характер цих критичних точок з'ясовувати не треба);
- обчислити значення функції в цих точках і на кінцях відрізка;
- вибрати з отриманих значень найбільше (найменше) значення.

3.3.8. Асимптоти графіка функції

Пряма $x = a$ називається *вертикальною асимптотою* кривої $y = f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Пряма $y = kx + b$ називається *похилою асимптотою* кривої $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, якщо $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (kx + b)) = 0$. Коефіцієнти похилої асимптоти захо-

дяться з співвідношень: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$. Зокрема, якщо $k = 0$

маємо *горизонтальну асимптоту* $y = b$, де $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Інколи необхідно

окремо досліджувати випадки, коли $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$.

3.3.9. Загальна схема дослідження та побудови графіка функції

Для дослідження і побудови графіка функції треба з'ясувати:

- область визначення функції, точки розриву;
- точки перетину з координатними осями;
- парність, періодичність;
- поведінку функції в околі точок розриву. Рівняння вертикальних і похилих асимптот;
- екстремуми функції. Інтервали монотонності функції;
- точки перегину функції. Інтервали опуклості функції.

Ескіз графіка функції повинен проходити через знайдені характерні точки і враховувати характерні риси (опуклість, асимптоти, якщо вони є, парність тощо).

3.4. Функції кількох змінних

3.4.1. Основні визначення

Якщо кожній точці $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$, де $D \subset R^n$, за певним правилом (законом) відповідає певне значення $u \in U$, $U \subset R$, то кажуть, що на множині D визначено функцію від n змінних x_1, x_2, \dots, x_n , і записують $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, або $u = f(M)$. Множину D називають областю визначення або областю існування функції, множину U – областю значень функції.

Сукупність усіх точок $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -вимірному простору R^n і таких, що $|MM_0| = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \varepsilon$, де $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, називають n -вимірним ε -околом точки M_0 .

Число a називають *границею* функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точці M_0 , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що для всіх точок $M, M \neq M_0$, які лежать в δ -околі точки M_0 виконується нерівність $|f(x_1, x_2, \dots, x_n) - a| < \varepsilon$.

Функцію $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають *неперервною* в точці $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, якщо $\lim_{\substack{x_i \rightarrow x_i^0 \\ i=1,2,\dots,n}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

3.4.2. Частинні похідні. Диференціал першого порядку

Нехай $z = f(x, y)$. По аналогії з означенням похідної функції однієї змінної маємо

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}; \quad f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Повний диференціал першого порядку функції двох змінних має вид

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Застосування диференціалу першого порядку: $\Delta f(x, y) \approx df(x, y)$ або

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

що дає нам формулу наближеного обчислення значення функції.

Похідна неявної функції $F(x, y) = 0$, $y = y(x)$:

$$y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

Частинні похідні неявної функції $F(x, y, z) = 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

Частинні похідні складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Повна похідна складеної функції $z = f(x, y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Якщо $u = f(x, y, z)$ та $y = y(x)$, $z = z(x)$, тоді

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

3.4.2. Нормаль і дотична площина до поверхні

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{M_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{M_0} (y - y_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_{M_0} (z - z_0) = 0 \quad \text{— рівняння дотичної}$$

площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M(x_0; y_0; z_0)$.

$$\frac{x - x_0}{F'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(M_0)} \quad \text{— канонічне рівняння нормалі до повер-$$

хні $F(x, y, z) = 0$ в точці $M(x_0; y_0; z_0)$.

Якщо поверхня задана своїм явним рівнянням $z = f(x, y)$, тоді рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні приймуть вигляд

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} (x - x_0) + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} (y - y_0) = z - z_0;$$

$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

3.4.3. Похідні і диференціал другого порядку

Частинні похідні другого порядку функції двох незалежних змінних:

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}.$$

$$\text{Диференціал другого порядку } d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

3.4.4. Екстремуми функції двох незалежних змінних

Точка $M_0(x_0, y_0)$ називається точкою локального мінімуму (максимуму) функції $z = f(x, y)$, якщо існує окіл точки M_0 такий, що для всіх його точок, крім M_0 , має місце нерівність $\Delta f = f(M) - f(M_0) > 0$ ($\Delta f = f(M) - f(M_0) < 0$).

Необхідні умови існування екстремуму в точці. Якщо функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 локальний екстремум, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю або не існують.

Достатні умови існування екстремуму в точці. Нехай функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в стаціонарній точці $M_0(x_0, y_0)$ та деякому її околі. Покладемо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

I. Якщо $\Delta(x_0, y_0) > 0$, тоді в точці M_0 функція має екстремум, причому, якщо $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} < 0$ то це буде локальний максимум, якщо $\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} > 0$ — локальний мінімум;

II. Якщо $\Delta(x_0, y_0) < 0$ — в точці M_0 екстремуму немає;

III. Якщо $\Delta(x_0, y_0) = 0$ — сумнівний випадок, треба провести додаткові дослідження.

3.5. Метод найменших квадратів

Нехай проведено n незалежних вимірів деякої величини y , в результаті яких отримана наступна таблиця (y — функція від x):

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Будемо шукати залежність y вигляді $y = kx + b$. Назвемо відхилом в точці x_i різницю між відповідним значенням y_i з таблиці та розрахунковим значенням: $\varepsilon_i = y_i - (kx_i + b)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Знайдемо суму квадратів відхилів

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (kx_i + b - y_i)^2 = F(k, b)$$

та дослідимо функцію $F(k, b)$ на екстремум. Застосуємо необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних. Дістанемо лінійну систему відносно змінних k і b

$$\begin{cases} F'_k(k, b) = 0 \\ F'_b(k, b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i ; \\ k \sum_{i=1}^n x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases} .$$

Дана система має єдиний розв'язок

$$k = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - k \sum_{i=1}^n x_i}{n} .$$

Для отриманих значень параметрів k і b функція $F(k, b)$ досягає свого мінімального значення і, отже, пряма $y = kx + b$ найменше відхиляється від заданих точок (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$.

3.6. Елементи теорії поля

3.6.1. Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт

Область V простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини, називається *скалярним полем*.

Наприклад, у тривимірному просторі в системі координат $Oxyz$ стаціонарне скалярне (*просторове*) поле задається функцією $u = u(x, y, z)$. Скалярне поле, яке задається функцією $u = u(x, y)$, називається *плоским*.

Геометрично плоскі скалярні поля зображаються за допомогою *ліній рівня* $u(x, y) = c$, а просторові — за допомогою *поверхонь рівня* $u(x, y, z) = c$.

Швидкість зміни поля в точці характеризується *похідною за напрямом*.

$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$ — похідна скалярного поля $u = u(x, y, z)$ за

напрямом вектора \vec{l} , напрямні косинуси якого дорівнюють $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$.

$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$ — градієнт функції $u = u(x, y, z)$ в точці M .

Зв'язок між похідною за напрямом та градієнтом скалярного поля виражається формулою: $\partial u / \partial l = \text{grad } u \cdot \bar{n}$.

Швидкість зростання скалярного поля в довільній точці буде максимальною у напрямку градієнта.

Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта, дорівнює нулю.

Вектор-градієнт у кожній точці поля перпендикулярний до поверхні рівня, яка проходить через цю точку.

Основні властивості градієнту:

$$\text{grad } (u \pm v) = \text{grad } u \pm \text{grad } v; \quad \text{grad } (Cu) = C \text{ grad } u;$$

$$\text{grad } (u \cdot v) = u \cdot \text{grad } v + v \cdot \text{grad } u;$$

$$\text{grad } \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \cdot \text{grad } u - u \cdot \text{grad } v}{v^2}; \quad \text{grad } f(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \text{grad } u.$$

3.6. 2. Векторне поле. Дивергенція. Ротор (вихор)

Область V простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої векторної характеристики $\bar{F}(M)$, називається векторним полем.

Якщо $\bar{F}(M) = \bar{F}(x, y) = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$, $M(x, y) \in D \subset R^2$, тоді ми дістаємо *плоске векторне поле*.

Просторове векторне поле визначається завданням векторної функції

$$\bar{F}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}, \quad M(x, y, z) \in V \subset R^3.$$

Для оцінки зміни векторного поля використовують *оператор Гамільтона*

або *набла-оператор* (∇ – оператор): $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j}$ — якщо поле *плоске* та

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k} \text{ — якщо поле просторове.}$$

Оператор Гамільтона має властивості і вектора і диференціального оператора. Наприклад, $\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k} = \nabla u$.

Ротом векторного поля $\bar{F}(M) = P(x, y, z)\bar{i} + Q(x, y, z)\bar{j} + R(x, y, z)\bar{k}$ називають *векторну величину*

$$\text{rot } \bar{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

За допомогою ∇ – оператора можна записати, що $\text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F}$.

Основні властивості ротору:

$$\text{rot}(k_1 \bar{F}_1 + k_2 \bar{F}_2) = k_1 \text{rot } \bar{F}_1 + k_2 \text{rot } \bar{F}_2, \text{ де } k_1, k_2 \in R;$$

$$\text{rot}(u \bar{F}) = \text{grad } u \times \bar{F} + u \text{rot } \bar{F}.$$

Якщо $\text{rot } \bar{F}(M) = 0$ у довільній точці M , то векторне поле $\bar{F}(M)$ називають *безвихровим*. Якщо $\bar{F} = \text{grad } u$, де $u(x, y, z)$ — деяка скалярна функція, то векторне поле називається *потенціальним*.

Дивергенцією векторного поля $\bar{F}(M)$ в точці M називають скалярну величину

$$\text{div } \bar{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}, \text{ якщо поле просторове;}$$

$$\text{div } \bar{F}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y}, \text{ якщо поле плоске.}$$

За допомогою ∇ – оператора можна записати, що $\text{div } \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F}$.

Основні властивості дивергенції:

$$\text{div}(k_1 \bar{F}_1 + k_2 \bar{F}_2) = k_1 \text{div } \bar{F}_1 + k_2 \text{div } \bar{F}_2, \text{ де } k_1, k_2 \in R;$$

$$\text{div}(u \bar{F}) = \text{grad } u \cdot \bar{F} + u \text{div } \bar{F}; \text{ div }(\bar{F}_1 \times \bar{F}_2) = \text{rot } \bar{F}_1 \cdot \bar{a}_2 - \bar{a}_1 \cdot \text{rot } \bar{F}_2.$$

Якщо $\text{div } \bar{F}(M) = 0$ у довільній точці області, то поле $\bar{F}(M)$ називають *соленоїдним* або *трубчастим*.

Якщо векторне поле соленоїдне та потенціальне (безвихрове), то його називають *гармонічним* або *лапласовим*.

Оператором Лапласа називається диференціальний оператор виду

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Так як $\Delta u = \text{div}(\text{grad } u) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u$, тоді $\nabla^2 = \Delta$.

Рівняння $\Delta u = 0$ або $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ називається *рівнянням Лапласа*,

а функція, яка задовольняє це рівняння, називається *гармонійною функцією*.

3.7. Завдання для самостійного розв'язування

ЗАДАЧА 1.

Обчислити границі функцій (не користуючись правилом Лопіталя).

$$1.1. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+5x+4x^2} + 3x}{x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{2x-5}.$$

$$1.2. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3 - (x-1)^3}{(x+1)^2 - (x-1)^2};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x(\sqrt{x+1} - 1)};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3} + 3x};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}.$$

$$1.3. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,2x^3 + 7x^2 - 2x + 0,01}{3 - 4x - 0,06x^3};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{x}{1-x}}.$$

$$1.4. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - 5x^2 - 0,3x^4}{x + 3x^2 + 1,5x^4};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3)[\ln(x+2) - \ln x].$$

$$1.5. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \right);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4)[\ln(2-3x) - \ln(5-3x)].$$

$$1.6. \quad a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,001x^3 - 0,1x^2 + x - 1}{0,1x^2 + 10x + 5};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}{1 - \cos 2x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{6+x}}{x^2 - x - 6};$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}.$$

ЗАДАЧА 2.

Знайти похідні функцій:

2.1. a) $y = \operatorname{arctg} 4x + \frac{4}{x^2}$;

c) $\begin{cases} x = a \cos^3 2t; \\ y = b \sin^3 2t \end{cases}$;

b) $y = (\sin x)^{\ln x}$;

d) $e^{x+y} = xy$.

2.2. a) $y = \ln \sqrt{\frac{e+x}{e-x}}$;

c) $\begin{cases} x = \arccos 2t \\ y = \arcsin(t^2 - 1) \end{cases}$;

b) $y = x^{\ln x}$;

d) $x^2 + xy + y^2 = a^2, a \equiv \text{const}$.

2.3. a) $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$;

c) $\begin{cases} x = (2t - t^3)^2 \\ y = 4t^2 - t^4 \end{cases}$;

b) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$;

d) $e^{2xy} - x^2 + y^2 = 0$

2.4. a) $y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

c) $\begin{cases} x = t + \ln \cos t \\ y = t - \ln \sin t \end{cases}$;

b) $y = (\sin x)^{\ln x}$;

d) $x^6 y^3 - ye^x = 0$.

2.5. a) $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$;

c) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$;

b) $y = x^{\frac{1}{x^2}}$;

d) $xe^y - \cos(x+y) = 0$

2.6. a) $y = \cos(\ln^3 x)$;

c) $\begin{cases} x = 2t - \sin 2t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$;

b) $y = (\operatorname{tg} x)^{\sqrt{x}}$;

d) $\frac{y}{x} = \cos(xy)$

ЗАДАЧА 3.Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої на площині в точці A :

3.1. $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad A(0;0).$

3.4. $y = x^3 \ln x, \quad A(1,0).$

3.2. $y^3 = xy + 2x^2, \quad A(-1;1).$

3.5. $y + x^3 - 2x^2y^2 + 5x - 5 = 0, \quad A(1;1)$

3.3. $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = t / \ln t \end{cases} \quad A(e;e).$

3.6. $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad A(1;0)$

ЗАДАЧА 4.

Знайти інтервали монотонності та екстремуми функції:

4.1. $y = 3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$

4.4. $y = \frac{1}{3}(x^2 + x - 4)^3 - 4x^2 - 4x.$

4.2. $y = 5 - 6x^2 - 4x^3 - \frac{3}{4}x^4.$

4.5. $y = (x-3)^3(x+1)$

4.3. $y = \frac{1}{3}(x^2 - x - 4)^3 - 4x^2 + 4x.$

4.6. $y = (x+3)(x-1)^3$

ЗАДАЧА 5.Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$:

5.1. $y = 2 \cos 2x - \cos 4x, \quad \left[0; \frac{3\pi}{4}\right].$

5.4. $y = -e^{3x} + 3x, \quad [-\ln 3; \ln 3].$

5.2. $y = \ln \frac{2x-1}{x^2+2}, \quad [1;5].$

5.5. $y = -x - \frac{9}{x}, \quad [-4;-1]$

5.3. $y = 2 \cos^2 x + \cos 2x, \quad \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$

5.6. $y = \frac{x^2+8}{x-1}, \quad [-3;0]$

ЗАДАЧА 6.

Провести повне дослідження і побудувати графік функції:

6.1. $y = \frac{x^2+1}{x}.$

6.4. $y = x \ln(x+1)$

6.2. $y = \frac{x}{\sqrt{x-3}}.$

6.5. $y = (2+x^2)e^{-x^2}$

6.3. $y = x + \ln(x+1).$

6.6. $y = \frac{x}{x^2-1}$

ЗАДАЧА 7.

Обчислити наближено за допомогою диференціального числення:

7.1. $(2 - \sqrt{0,97})^{3,02}$.

7.4. $\ln\left[(2,02)^3 + \sqrt[3]{0,98} - 8\right]$.

7.2. $\ln(\sqrt{4,02} - \sqrt[3]{0,97})$.

7.5. $\sqrt[7]{(3,03)^4 + (1,98)^5 + 15}$.

7.3. $\frac{10}{(4,98)^3 - (5,03)^2}$.

7.6. $\operatorname{arctg} \frac{(1,04)^2}{0,98}$.

ЗАДАЧА 8.

Визначити дивергенцію та ротор векторного поля:

8.1. $\bar{F} = x^2i + y^2j - z^2k$.

8.4. $\bar{F} = 4xyz i - y^2z j - yz^2k$.

8.2. $\bar{F} = (x^2 - 1)i + 2y j + (z^2 + 1)k$.

8.5. $\bar{F} = (2xy + 3y^2 + 9y)i + (x^2 + 6xy)j$.

8.3. $\bar{F} = (x - y^2)i + x^3z j + xyk$.

8.6. $\bar{F} = (2x^2 + 4y)i + 2zy j + (z^2 + 2xy)k$.

3.7. Приклади тестових завдань

Змістовий модуль № 2

Диференціальне числення функції однієї змінної**Тестове завдання**

У завданнях 1 — 11 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Дві нескінченно малі функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називаються еквівалентними, якщо

а	б	в	г
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не існує

2. Чому дорівнює похідна від функції $(u(x) + c) \cdot (av(x) + b)$, $a, b, c, -\text{const}$?

а	б	в	г
$u' + av'$	$(u + c)av'$	$a(u'v + uv') + bu' + acv'$	$u'(av' + b)$

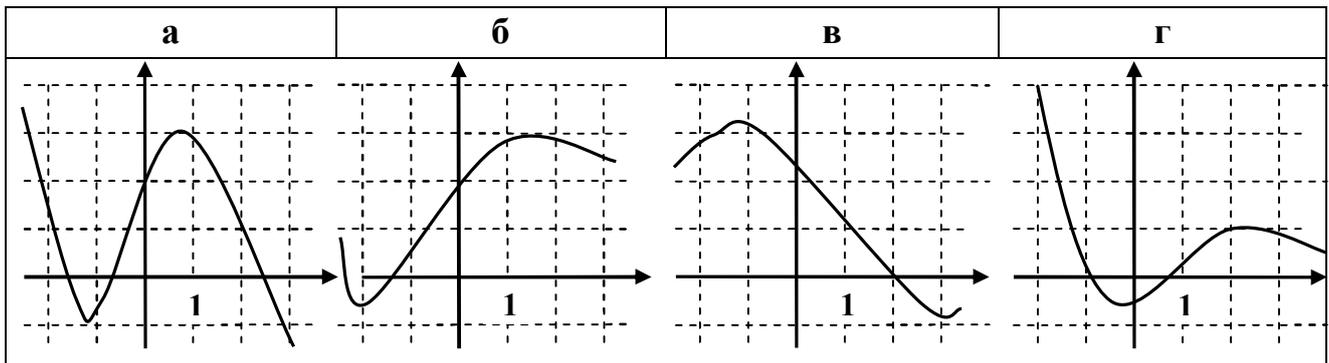
3. Нехай пряма $y = kx + b$ — асимптота кривої $y = f(x)$, коли $x \rightarrow \infty$. Чому дорівнює k ?

а	б	в	г
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$

4. Прискорення матеріальної точки, що рухається за законом $s = s(t)$ у момент часу t_0 дорівнює

а	б	в	г
$s(t_0)$	$s'(t)$	$s'(t_0)$	$s''(t_0)$

5. На якому рисунку функція, що задана графіком, спадає на відрізку $[-1; 2]$?



6. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})$.

а	б	в	г
∞	0	1	1/2

7. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{6x}$.

а	б	в	г
∞	0,5	1	0

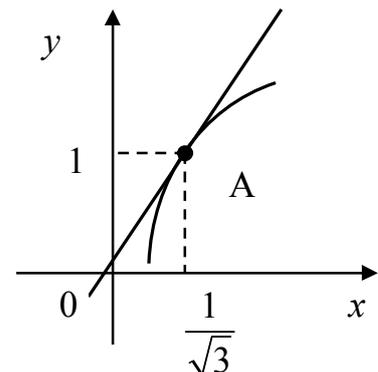
8. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{-2x}$.

а	б	в	г
0	1	e^{-2}	e^{-1}

9. На рисунку зображений графік функції $y = f(x)$ та

дотична до нього в точці $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$.

Знайдіть $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.



а	б	в	г
1	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$

10. Знайти похідну функції $y = \frac{\sqrt{x^3 - 2x}}{\sqrt{x}}$.

а	б	в	г
x^{-2}	$1 - \frac{1}{\sqrt{x^3}}$	$1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$

11. Знайти значення другої похідної функції $y = \ln 2x$ в точці $x_0 = 1$

а	б	в	г
-1	0	2	1

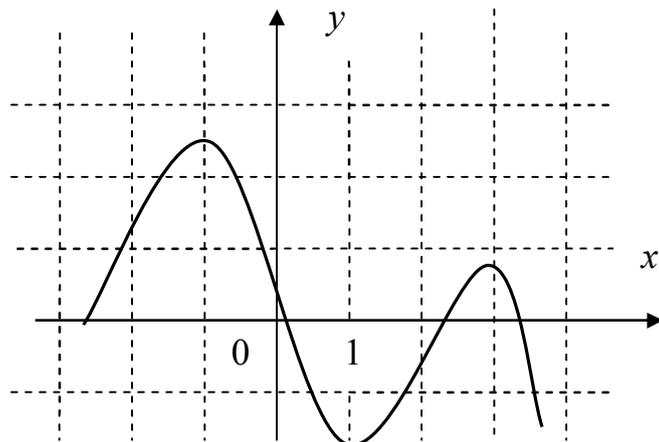
Розв'язання задач 12 - 15 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

12. Матеріальна точка рухається вздовж прямої за законом $s = 6t^2 - t^3$. Яка її найбільша швидкість?

13. Довести, що функція $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36}$ задовольняє диференціальне рівняння $y'' - 5y' + 6y = x$.

14. Порівняйте

- 1) $f'(-1)$ та $f'(0)$;
- 2) $f'(3)$ та $f'(1)$.
- 3) Знайдіть $f'(3) \cdot f'(2)$.



15. В якій точці графіка $y = x^{-2}$ треба провести дотичну, щоб площа трапеції, обмеженої цією дотичною та прямими $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ була найбільшою?

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: порівняння нескінченно малих величин, умова еквівалентності).

Завдання 2. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} ((u+c)(av+b))' &= (u+c)'(av+b) + (u+c)(av+b)' = u'(av+b) + (u+c)av' = \\ &= a(u'v + uv') + bu' + acv' \end{aligned}$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні формули диференціювання).

Завдання 3. Правильна відповідь: **б**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: асимптоти кривих та їх властивості).

Завдання 4. Правильна відповідь: **г**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: механічний зміст другої похідної).

Завдання 5. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: залежність поведінки функції від знака похідної).

Завдання 6. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} = 0.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: розкриття невизначеностей, що зводяться до основних типів).

Завдання 7. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{6x} \{ \ln(1+3x) \approx 3x, x \rightarrow 0 \} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6x} = 0,5.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: таблиця еквівалентних нескінченно малих величин).

Завдання 8. Правильна відповідь: **г**.

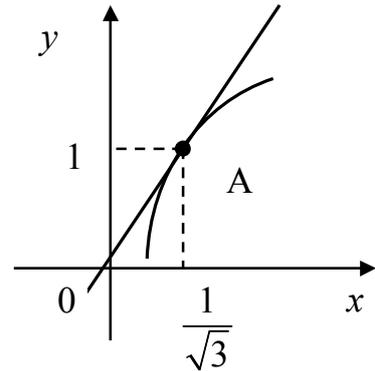
Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{2x} \right)^{-1} = e^{-1}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: друга визначна границя та її обчислення).

Завдання 9. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання. Значення похідної $f'(1/\sqrt{3})$ з геометричної точки зору — це тангенс кута нахилу дотичної до кривої в точці A до додатного напрямку осі абсцис, тобто $\frac{y_A}{x_A} = \frac{1}{1/\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.



(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: геометричний зміст похідної, дотична до кривої).

Завдання 10. Правильна відповідь: **г**.

Розв'язання.
$$y' = \left(\frac{\sqrt{x^3} - 2x}{\sqrt{x}} \right)' = (x - 2\sqrt{x})' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: похідні основних елементарних функцій).

Завдання 11. Правильна відповідь: **а**.

Розв'язання.

$$y' = (\ln 2x)' = \frac{(2x)'}{2x} = \frac{1}{x}; \quad y'' = (y')' = \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow y''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: похідні вищих порядків, обчислення значення похідної функції в точці).

Завдання 12.

Розв'язання. По-перше, знайдемо швидкість матеріальної точки.

$$v(t) = s'(t) = (6t^2 - t^3)' = 12t - 3t^2.$$

Для того, щоб знайти найбільшу швидкість матеріальної точки, дослідимо функцію $v(t)$ на екстремум, точніше на максимум за умовою, що $t > 0$. Знаходимо критичні точки цієї функції.

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow (12t - 3t^2)' = 0 \Leftrightarrow 12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Отже, функція має єдину критичну точку. З достатніх умов існування екстремуму в точці випливає, що так як $v''(t) = -4$, то в точці $t = 2$ функція набуває свого максимального значення, що дорівнює $v(2) = 24 - 12 = 12$ м/с.

Відповідь: $v_{\max} = 12$ м/с.

Завдання 13.

Розв'язання. Щоб переконатися в тому, що задана функція задовольняє рівняння $y'' - 5y' + 6y = x$, потрібно знайти першу та другу похідні функції та підставити в указане рівняння. Отже,

$$y' = \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36} \right)' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}$$

$$y'' = \left(2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} \right)' = 4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x}$$

Тоді, підставляючи вирази для функції та її похідних в рівняння, дістаємо

$$4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} - 5 \left(2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{6} \right) + 6 \left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{x}{6} + \frac{5}{36} \right) = x$$

$$4C_1 e^{2x} + 9C_2 e^{3x} - 10C_1 e^{2x} - 15C_2 e^{3x} - \frac{5}{6} + 6C_1 e^{2x} + 6C_2 e^{3x} + x + \frac{5}{6} = x$$

Відповідь: $x = x$.

Завдання 14.

Розв'язання. Згідно рисунку в точці $x = -1$ функція досягає максимуму, отже, $f'(-1) = 0$. На інтервалі $(-1; 1)$ функція спадає, отже, $f'(0) < 0$. Таким чином, $f'(-1) > f'(0)$.

В точках $x = 1$, $x = 3$ функція досягає відповідно мінімального та максимального значень, отже, $f'(1) = f'(3) = 0$.

Остаточно, $f'(3) \cdot f'(2) = 0$.

Відповідь: $f'(-1) > f'(0)$, $f'(1) = f'(3)$, $f'(3) \cdot f'(2) = 0$.

Завдання 15.

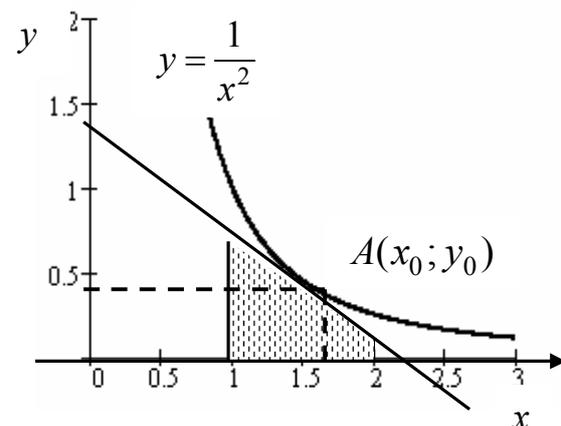
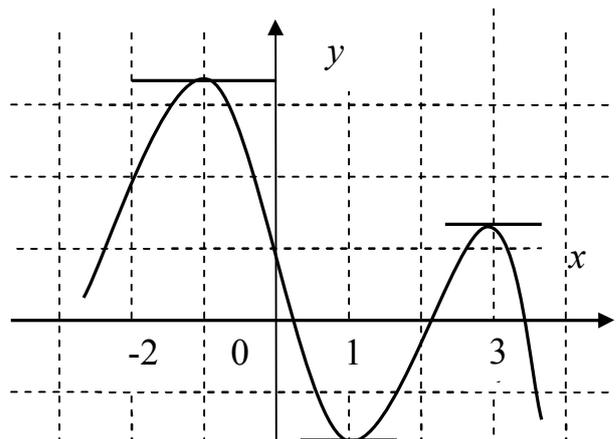
Розв'язання. Побудуємо рисунок та знайдемо рівняння дотичної до графіка функції в точці $A(x_0; y_0)$.

Скористуємося формулою

$$y_t = y_0 + y'(x_0)(x - x_0).$$

Так як $y(x_0) = \frac{1}{x_0^2}$, та $y'(x_0) = \frac{-2}{x_0^3}$

тоді



$$y_t(x) = \frac{1}{x_0^2} - \frac{2}{x_0^3}(x - x_0) = \frac{3}{x_0^2} - \frac{2x}{x_0^3}.$$

Отже, площа трапеції, обмеженої дотичною $y_t(x)$, вертикальними прямими $x=1$, $x=2$ та віссю абсцис дорівнює

$$S(x_0) = \frac{y_t(1) + y_t(2)}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{x_0^2} - \frac{2 \cdot 1}{x_0^3} + \frac{3}{x_0^2} - \frac{2 \cdot 2}{x_0^3} \right) = 3 \left(\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0^3} \right).$$

Дослідимо отриману функцію на екстремум для $x_0 > 0$. Знайдемо критичні точки функції $S(x_0)$ та з'ясуємо їх характер. Маємо

$$S'(x_0) = 3 \left(-\frac{2}{x_0^3} + \frac{3}{x_0^4} \right) = 3 \cdot \frac{3 - 2x_0}{x_0^4}; \quad S'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = 1,5.$$

Знаходимо $S'(1) = 3 > 0$; $S'(2) = -3/16 < 0$. Звідси випливає, що точка $x_0 = \frac{3}{2}$ є точкою максимуму функції $S(x_0)$. Нам залишилось ще знайти ординату точки дотику: $y_0 = \frac{1}{(1,5)^2} = \frac{4}{9}$. Отже, для того щоб площа вказаної трапеції була

максимальною, дотичну до кривої $y = \frac{1}{x^2}$ треба провести в точці з координатами $\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{9}\right)$.

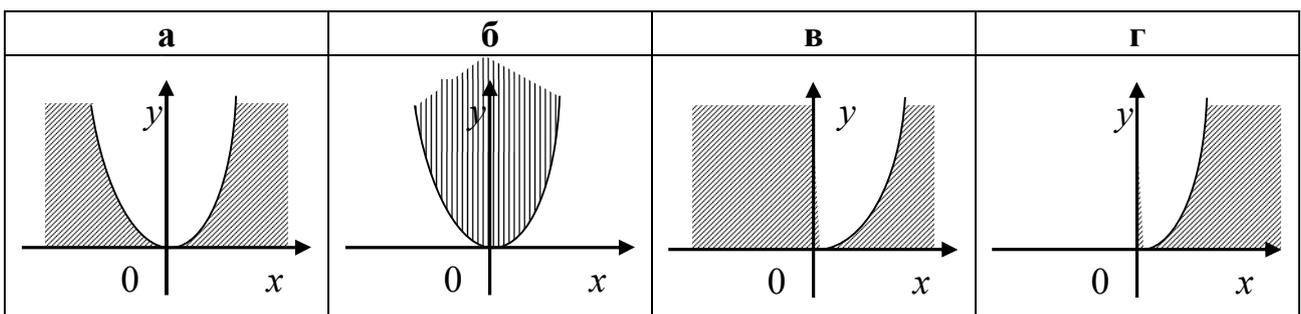
Відповідь: координати точки дотику $\left(\frac{3}{2}; \frac{4}{9}\right)$.

Диференціальне числення функції багатьох змінних

Тестове завдання

У завданнях 1 — 4 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. На якому рисунку зображена область визначення функції $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$?



2. Для функції $F(x; y) = \frac{x-2y}{2x-y}$ обчислити $F(a, b) \cdot F(b, a)$.

а	б	в	г
a/b	1	$a-b$	ab

3. Лінії рівнів (коли $z = 1, 2, \dots$) функції $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ — це сімейство :

а	б	в	г
гіпербол	парабол	еліпсів	концентричних кіл

4. Для функції $z = \frac{4}{x+y}$ знайти $|\overline{\text{grad}} z|$ в точці (1;1).

а	б	в	г
$\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	1

5. Під час деформації циліндра його радіус R зріс з 2 до 2,4 дм, а висота H зменшилася з 5 до 4,6. Обчислити наближено зміну об'єму V за формулою $\Delta V \approx dV$ та визначити відносну похибку.

6. Показати, що площини, дотичні до поверхні $xuz = a^3$, утворюють з координатними площинами піраміди сталого об'єму. Визначити цей об'єм.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: г.

Розв'язання.

$$x - \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \leq x^2 \end{cases} .$$

Область визначення знаходиться в першому квадранті праворуч від гілки параболи $x = \sqrt{y}$. Для того щоб з'ясувати, яку частину площини треба заштрихувати, візьмемо довільну точку I квадранту та підставимо в нерівність $x \geq \sqrt{y}$. Якщо для даної точки нерівність виконується, то штрихувати потрібно у напрямку цієї точки. (Наприклад, для точки I квадранту (2;1) маємо $2 > \sqrt{1}$).

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: функція багатьох змінних та область її визначення).

Завдання 2. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання.

$$F(a,b) \cdot F(b,a) = \frac{a-2b}{2a-b} \cdot \frac{b-2a}{2b-a} = 1.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення значень функції багатьох змінних).

Завдання 3. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. Дійсно для фіксованих значень змінної $z = c$

$$c = \frac{x^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4c} + \frac{y^2}{c} = 1.$$

Отже, ми отримали сімейство еліпсів з центром у початку координат та півосями $a = 2\sqrt{c}$; $b = \sqrt{c}$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: лінії та поверхні рівня).

Завдання 4. Правильна відповідь: **а**.

Розв'язання. За відомою формулою

$$\|\text{grad } z\|_{(1;1)} = \sqrt{(z'_x)|_{(1;1)}}^2 + (z'_y)|_{(1;1)}}^2.$$

$$z'_x = -\frac{4}{(x+y)^2}; z'_y = -\frac{4}{(x+y)^2} \Rightarrow z'_x|_{(1;1)} = -1; z'_y|_{(1;1)} = -1.$$

$$\|\text{grad } z\|_{(1;1)} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: частинні похідні, градієнт функції кількох змінних).

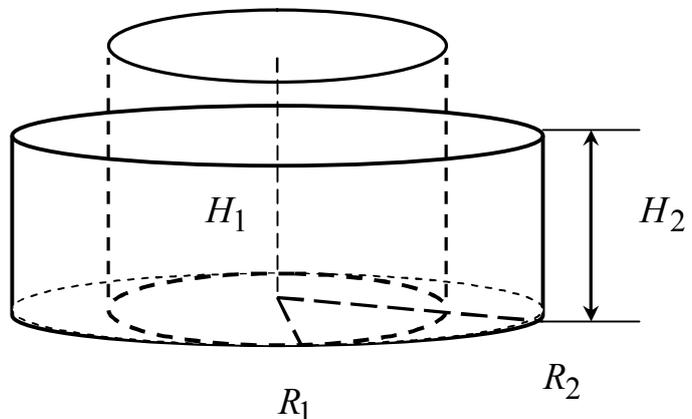
Завдання 5.

Розв'язання. За умовами задачі $R_1 = 2$; $R_2 = 2,4$ і $H_1 = 5$; $H_2 = 4,6$. За відомою формулою об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$. Тоді

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} \Big|_{M_1} \Delta R + \frac{\partial V}{\partial H} \Big|_{M_1} \Delta H,$$

де $M_1(2;5)$, а $\Delta R = 2,4 - 2 = 0,4$ та

$\Delta H = 4,6 - 5 = -0,4$. Тоді



$$\left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{M_1} = 2\pi RH \Big|_{(2;5)} = 20\pi \quad \left. \frac{\partial V}{\partial R} \right|_{M_1} = \pi R^2 \Big|_{(2;5)} = 4\pi.$$

Отже, наближене значення зміни об'єму дорівнює

$$dV = 20\pi \cdot 0,4 - 4\pi \cdot 0,4 = 6,4\pi.$$

Обчислимо тепер реальну зміну об'єму. Це можна зробити так:

$$\Delta V = \pi R_2^2 H_2 - \pi R_1^2 H_1 = \pi \cdot 2,4^2 \cdot 4,6 - \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 6,496\pi.$$

Знайдемо тепер відносну похибку за формулою $\delta = \left| \frac{\Delta V - dV}{\Delta V} \right| \cdot 100\%$.

Отже, $\delta = \left| \frac{6,496\pi - 6,4\pi}{6,496\pi} \right| \cdot 100\% \approx 1,48\%$. Таким чином, наближена формула дає похибку менше 1,5% вимірюваної величини.

Відповідь: $\Delta V \approx 6,4\pi$; $\delta \approx 1,48\%$.

Завдання 6.

Розв'язання. Візьмемо на поверхні $xyz - a^3 = 0$ точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ та поведемо в цій точці дотичну площину до поверхні. Її рівняння таке

$$F'_x \Big|_{M_0} (x - x_0) + F'_y \Big|_{M_0} (y - y_0) + F'_z \Big|_{M_0} (z - z_0) = 0,$$

де $F(x; y; z) = xyz - a^3$. Тоді

$$F'_x \Big|_{M_0} = yz \Big|_{M_0} = y_0 z_0, \quad F'_y \Big|_{M_0} = xz \Big|_{M_0} = x_0 z_0, \quad F'_z \Big|_{M_0} = xy \Big|_{M_0} = x_0 y_0.$$

Отже, дотична площина має вигляд

$$y_0 z_0 x + x_0 z_0 y + x_0 y_0 z = 3x_0 y_0 z_0.$$

Запишемо рівняння отриманої площини у відрізках на осях.

$$\frac{x}{3x_0} + \frac{y}{3y_0} + \frac{z}{3z_0} = 1.$$

Таким чином, об'єм піраміди, що утворює дотична площина з координатними осями, дорівнює $V = \left| \frac{1}{3} \cdot 3x_0 \cdot 3y_0 \cdot 3z_0 \right| = 27|x_0 y_0 z_0| = 27|a|^3$.

В силу довільного вибору точки M_0 ми приходимо до висновку, що будь-яка дотична площина до поверхні утворює з координатними осями піраміди сталого об'єму $V = 27|a|^3$.

Відповідь: $V = 27|a|^3$.

РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

4.1. Невизначений інтеграл

4.1.1. Визначення первісної. Основні властивості

Функція $F(x)$ називається *первісною* неперервної на проміжку $\langle a, b \rangle$ функції $f(x)$, якщо $F(x)$ диференційована на $\langle a, b \rangle$ і для $\forall x \in \langle a, b \rangle$ $f(x) = \frac{dF}{dx}$.

(*Основна властивість первісної*). Якщо функція $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, то будь-яка інша первісна функції $f(x)$ на цьому відрізку має вигляд $F(x) + C$.

Невизначений інтеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ означає сукупність всіх первісних функції $f(x)$.

Властивості невизначеного інтегралу

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{або} \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx; \quad \int 0 \cdot dx = C.$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \quad \forall \alpha, \beta \in R;$$

$$\int f'(x)dx = f(x) + C;$$

$\int f(u)du = F(u) + C$, в незалежності від того, чи є u незалежною змінною, або ж функцією від x — *інваріантність форми невизначеного інтегралу*.

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad \forall a, b \in R, a \neq 0.$$

4.1.2. Основні методи інтегрування. Таблиця інтегралів

Відомі три основні методи інтегрування (знаходження інтегралів):

I. *Безпосереднє інтегрування* (метод розкладу)

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sum_{i=1}^n k_i f_i(x); \\ \int f_i(x)dx = F_i(x) + C_i \end{array} \right\} = \sum_{i=1}^n k_i F_i + C.$$

II. *Формула заміни змінної* (підстановки) у невизначеному інтегралі;

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C,$$

$f(x)$ — неперервна, $x = \varphi(t)$ — диференційована функція.

III. Формула інтегрування частинами у невизначеному інтегралі

$$\int u dv = uv - \int v du ,$$

де $u(x), v(x)$ — диференційовані функції.

У випадку застосування інтегрування частинами будуть корисними дві прості схеми (які природно не охоплюють всі випадки). Нехай $P(x)$ — деякий поліном, а k — дійсне число. Тоді доцільно застосувати наступні визначення:

$$\text{I. } \int \underbrace{P(x)}_u \underbrace{\begin{cases} e^{kx} \\ a^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{cases}}_{dv} dx \quad \text{II. } \int \underbrace{\begin{cases} \ln x \\ \arcsin x (\arccos x) \\ \operatorname{arctg} x (\operatorname{arcctg} x) \end{cases}}_u \underbrace{P(x) dx}_{dv} .$$

За допомогою цих методів, як правило, при вдалої їх комбінації, з урахуванням лінійності інтегралів переходимо до використання табличних інтегралів.

ТАБЛИЦЯ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1	$\int du = u + C.$	12	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u+a}{u-a} \right + C.$
2	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1.$	13	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C.$
3	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C.$	14	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C.$
4	$\int e^u du = e^u + C.$	15	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C.$
5	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$	16	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C.$
6	$\int \sin u du = -\cos u + C.$	17	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$
7	$\int \cos u du = \sin u + C.$	18	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$
8	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C.$	19	$\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C.$

9	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$	20	$\int \operatorname{ch} u \, du = \operatorname{sh} u + C.$
10	$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln \cos u + C.$	21	$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C.$
11	$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln \sin u + C.$	22	$\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

4.1.3. Інтегрування елементарних раціональних дробів

Першого типу: $\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$

Другого типу: $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$

Третього типу: $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$ ($p^2-4q < 0$) — виділення повного

квадрата у знаменнику із заміною $x + \frac{p}{2} = t$:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx = \frac{M}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Четвертого типу $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$ ($p^2-4q < 0$) — за допомогою

підстановки $x = t - p/2$ даний інтеграл розкладається на інтеграли:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = M \int \frac{t \, dt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - M \frac{p}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4},$$

де

$$\int \frac{t \, dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2(1-k)(t^2+a^2)^{k-1}};$$

$$\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

4.1.4. Інтегрування раціональних дробів

При інтегруванні *правильних* раціональних дробів розглядають випадки:

- ✓ Знаменник дробу має тільки прості дійсні корені. Тоді дріб може бути представлено у вигляді суми простіших дробів першого типу.
- ✓ Знаменник дробу має тільки дійсні корені, деякі з них кратні. Тоді дріб представляється у вигляді суми простіших дробів першого і другого типів.
- ✓ Знаменник дробу поряд з дійсними коренями має прості комплексні корені. Тоді дріб представляється у вигляді суми дробів першого, другого і третього типів.
- ✓ Знаменник дробу поряд з дійсними коренями має також комплексні корені, деякі з них можуть бути кратними. Тоді дріб розкладається на суму простіших дробів всіх чотирьох типів.

У випадку, коли підінтегральний дріб є *неправильним* (ступінь многочлена, який стоїть у чисельнику більше або дорівнює степеня многочлена, який стоїть в знаменнику), необхідно шляхом ділення чисельника на знаменник представити його у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.

4.1.5. Раціоналізація інтегрування ірраціональних функцій

Підінтегральна функція	Підстановка
$f(x) = R \left(x, x^{\frac{m}{n}}, x^{\frac{r}{s}}, \dots, x^{\frac{p}{q}} \right), m, n, \dots, q \in \mathbb{N}$	$x = t^k, dx = kt^{k-1} dt, k - \text{загальний знаменник дробів } \frac{m}{n}, \dots, \frac{p}{q}$
$f(x) = R \left(x, u^{\frac{m}{n}}, u^{\frac{r}{s}}, \dots, u^{\frac{p}{q}} \right), m, n, \dots, q \in \mathbb{N}$ $u = \frac{ax+b}{cx+d}, ad-bc \neq 0, a, b, c, d \in \mathbb{R}$	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^k, x = \frac{b-d \cdot t^k}{c \cdot t^k - a}, dx = r(t) dt$ $k - \text{загальний знаменник дробів } \frac{m}{n}, \dots, \frac{p}{q}$
$f(x) = R \left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c} \right),$ $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$	<p>Підстановки Ейлера</p> $ax^2 + bx + c = z$ <p>I. $\sqrt{z} = t \pm \sqrt{a} \cdot x, a > 0$</p> <p>II. $\sqrt{z} = x \cdot t \pm \sqrt{c}, c > 0$</p> <p>III. $\sqrt{z} = (x - \alpha) \cdot t, a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$</p>

<p>Диференціальний біном</p> $f(x) = x^m (a + bx^n)^p,$ $a \neq 0, b \neq 0, a, b \in R, m, n, p \in Q$	<p>1) $p \in Z$ — розкрити дужки</p> <p>2) $\frac{m+1}{n} \in Z$ $a + bx^n = t^k$,</p> <p>3) $\frac{m+1}{n} + p \in Z$ $ax^{-n} + b = t^k$</p> <p>k — знаменник дробу p</p>
$f(x) = R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)$	$u = a \sin t \text{ або } u = a \operatorname{th} t$
$f(x) = R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)$	$u = a \operatorname{tg} t \text{ або } u = a \operatorname{sh} t$
$f(x) = R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)$	$u = \frac{a}{\cos t} \text{ або } u = a \operatorname{ch} t$

4.1.6. Інтегрування тригонометричних функцій

Підінтегральна функція	Додаткові умови	Метод інтегрування
<p>1) $f(x) = \cos ax \cos bx$</p> <p>2) $f(x) = \sin ax \cos bx$</p> <p>3) $f(x) = \sin ax \sin bx$</p>	$a \neq 0, b \neq 0$	<p>1) $0,5[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x]$</p> <p>2) $0,5[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]$</p> <p>3) $0,5[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x]$</p>
$f(x) = R(\sin x) \cos x$		Підстановка $\sin x = t, dt = \cos x dx$
$f(x) = R(\cos x) \sin x$		Підстановка $\cos x = t, dt = -\sin x dx$
$f(x) = R(\sin x, \cos x)$		<p>Перша універсальна підстановка</p> $\operatorname{tg}(x/2) = t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
$f(x) = R(\sin x, \cos x)$ $f(x) = R(\operatorname{tg} x)$	$R(-u, -v) = R(u, v)$	<p>Друга універсальна підстановка</p> $\operatorname{tg} x = t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\int \sin^m x \cos^n x dx$	$m, n \in Z,$ $m = 2k + 1, m > 0$	$\int \sin^{2k} x \cos^n x \sin x dx$ підстановка $\cos x = t, dt = -\sin x dx$
$\int \sin^m x \cos^n x dx$	$m, n \in Z,$ $n = 2r + 1, n > 0$	$\int \sin^m x \cos^{2r} x \cos x dx$ підстановка $\sin x = t, dt = \cos x dx$
$\int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$	$m, n \in Z,$ $m > 0, n > 0$	$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$ $\sin x \cos x = 0,5 \sin 2x$

4.2. Визначений інтеграл

4.2.1. Основні визначення та властивості

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ довільним способом на n частин $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) точками ділення $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. На кожному з відрізків $[x_{i-1}; x_i]$ виберемо довільну точку $x = \xi_i$ і утворимо інтегральну суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, де

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — довжина i -го частинного відрізка.

Якщо існує скінченна границя інтегральних сум I_n (коли $n \rightarrow \infty$), яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a; b]$ на частини і вибору точки $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, тоді ця границя називається **визначеним інтегралом Рімана** на відрізку $[a; b]$, а функція $y = f(x)$ називається інтегрованою на цьому відрізку.

$$\text{Отже,} \quad I = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Достатньою умовою інтегрування функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ є її неперервність на цьому відрізку.

Властивості визначеного інтеграла

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \dots = \int_a^b f(u) du; \quad 2. \int_a^a f(x) dx = 0;$$

$$3. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad 4. \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

$$5. \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad (f(x) \leq g(x)); \quad 6. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$7. \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \quad (\text{теорема про середнє значення})$$

$$8. m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a), \quad m = \min_{[a;b]} f(x); \quad M = \max_{[a;b]} f(x) \quad (\text{оцінка визначеного інтегралу})$$

ченого інтегралу)

$$9. \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad f(-x) = f(x) \quad \text{та} \quad \int_{-a}^a f(x)dx = 0, \quad f(-x) = -f(x).$$

Фізичний зміст визначеного інтеграла

- шлях S , пройдений тілом при прямолінійному русі зі швидкістю $v(t)$ за про-

міжок часу від t_1 до t_2 обчислюється за формулою $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

- маса стрижня з довжиною L та густиною $\rho = \rho(x)$ дорівнює $m = \int_0^L \rho(x)dx$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла — площа S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, де $f(x) \geq 0, x \in [a, b]$, віссю Ox ,

та відрізками вертикальних прямих $x = a$ та $x = b$, дорівнює $S = \int_a^b f(x)dx$.

4.2.2. Теорема Барроу. Формула Ньютона - Лейбніца

Теорема Барроу. Похідна визначеного інтегралу від неперервної функції по змінній верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції в цій верх-

ній межі: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$.

Формула Ньютона - Лейбніца. Якщо $F(x)$ — деяка первісна від неперервної на відріжку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, тоді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

4.2.3. Заміна змінної і формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Нехай маємо визначений інтеграл від неперервної на відрізку $[a, b]$ функції $f(x)$. Нехай $x = \varphi(t)$. Якщо функція $\varphi(t)$ та її похідна $\varphi'(t)$ неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$ й функція $f(\varphi(t))$ також неперервна на відрізку $[\alpha, \beta]$, тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad \text{— заміна змінної у визначеному інтегралі.}$$

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du \quad \text{— формула інтегрування частинами у визначеному}$$

інтегралі

4.3. Застосування визначеного інтегралу

4.3.1. Обчислення площ плоских фігур

1. $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ — площа фігури, обмеженої кривими $y = g(x)$ і $y = f(x)$, де $(f(x) \leq g(x))$ та вертикальними прямими $x = a$; $x = b$.

2. $\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt$ — площа фігури при параметричному завданні кривої.

3. $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi$ — площа криволінійного сектора у полярних координатах.

4.3.2. Обчислення довжини дуги кривої

1. $\int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ — довжина дуги кривої у декартових координатах

2. $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ — довжина дуги кривої при параметричному за-

вданні.

3. $\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$ — довжина дуги кривої у полярних координатах.

4.3.3 Обчислення об'ємів тіл обертання та площі поверхні обертання

1. Навколо осі Ox — $V_x = \pi \int_a^b y^2(x) dx$, осі Oy — $V_y = \pi \int_c^d x^2(y) dy$

2. Навколо осі Ox — $P_x = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$. Навколо осі Oy

— $P_y = 2\pi \int_c^d x(y) \sqrt{1 + x'(y)^2} dy$.

4.4. Невласні інтеграли

4.4.1. Невласний інтеграл I роду

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a, +\infty)$ й інтегрована на довільному скінченному відрізку $[a, b] \in [a, +\infty)$. Тоді якщо існує скінчена границя

ця $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, то її називають збіжним невластним інтегралом першого роду

та позначають $I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx$. Якщо границя не існує або дорівнює нескінченності, тоді інтеграл I називається розбіжним невластним інтегралом. Аналогічно визначаються інтеграли

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^b f(x) dx \quad \text{і} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

де c — довільна стала. Відмітимо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ збігається, якщо збігається

кожний з інтегралів $\int_{-\infty}^c f(x) dx$, $\int_c^{+\infty} f(x) dx$. Якщо первісна $F(x)$ підінтегральної

функції $f(x)$ неперервна на відповідних проміжках, можна застосувати узагальнену формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a); \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty);$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty), \text{ де } F(\pm\infty) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} F(t).$$

4.4.2. Невласний інтеграл II роду

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $[a, b)$ і $f(b) \rightarrow \infty$. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому проміжку $[a, b - \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$ і $b - \varepsilon > a$,

тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають невластним інтегралом від необмеженої функції або *невластним інтегралом другого роду*. Якщо існує скінчена границя

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, тоді інтеграл називають *збіжним*, якщо ж границя дорівнює нескінченності або не існує, тоді інтеграл називають *розбіжним*.

Аналогічно вводиться поняття невластного інтеграла від функції $f(x)$, не-

обмеженої на проміжку $(a, b]$: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

Якщо функція $f(x)$ необмежена на кожному з проміжків $[a, c)$ і $(c, b]$, але інтегрована на кожному з проміжків $[a, c - \delta)$ і $(c + \varepsilon, b]$, тоді невластний інтег-

рал $\int_a^b f(x)dx$ називають збіжним, якщо збігається кожний з інтегралів $\int_a^c f(x)dx$

і $\int_c^b f(x)dx$, а його значення визначається з рівності

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Якщо функція $f(x)$ інтегрована на кожному з проміжків $[a, c - \delta)$ і $(c + \varepsilon, b]$, тоді для невластного інтеграла має місце узагальнена формула Ньютона - Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(c + 0) + F(c - 0) - F(a).$$

4.5. Кратні інтеграли

4.5.1. Визначення і властивості подвійного інтегралу.

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в замкненій, обмеженій області $D \subset R^2$. Розіб'ємо область D на n частин з площами ΔS_i ($i = 1, 2, \dots, n$). В кожній частині виберемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ і складемо інтегральну суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ для функції $z = f(x, y)$ по області D . Якщо границя інтегральних сум I_n , коли максимальний діаметр розбиття прямує до нуля якщо $n \rightarrow \infty$, існує, скінчений і не залежить від способу розбиття області D на частини і вибору точки M_i , тоді ця границя називається *подвійним інтегралом* від функції $z = f(x, y)$ по області D :

$$\lim_{\max d(\Delta S_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Властивості подвійного інтегралу

$$1. \iint_D \sum_{i=1}^n C_i f_i(x, y) dS = \sum_{i=1}^n C_i \iint_D f_i(x, y) dS.$$

$$2. \iint_D f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS, \quad D = D_1 \cup D_2.$$

$$3. \iint_D f(x, y) dS \leq \iint_D g(x, y) dS, \quad 0 \leq f(x, y) \leq g(x, y).$$

$$4. mS \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq MS, \quad m = \min_D f(x, y), \quad M = \max_D f(x, y), \quad S \text{ — площа}$$

області D .

$$5. \iint_D f(x, y) dS = f(x_c, y_c) \cdot S \text{ — теорема про середнє значення.}$$

4.5.2. Обчислення подвійного інтегралу та його застосування

Обчислення *подвійного інтеграла* через двократний

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Заміна змінних у подвійному інтегралі

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

де $J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ — якобіан перетворення.

$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho$ — перехід у подвійному інтегралі до полярних координат.

Застосування подвійного інтегралу

1. Площа плоскої фігури — $S = \iint_D dx dy$ (в декартових координатах);

$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi$ (в полярних координатах).

2. Маса плоскої пластини — $\iint_D \gamma(x, y) dx dy$, $\gamma(x, y)$ — густина матеріальної

пластини в точці $M(x, y)$.

3. Об'єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x, y)$, знизу областю $D \subset R^2$, по боках — циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Oz , обчислюється за формулою $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ ($f(x, y) > 0$).

Якщо тіло, об'єм якого потрібно обчислити, обмежено поверхнями $z = \Psi_2(x, y)$ і $z = \Psi_1(x, y)$ ($0 \leq \Psi_1(x, y) < \Psi_2(x, y)$), причому ці поверхні проєктуються в область D на площині Oxy , то об'єм такого тіла дорівнює $V = \iint_D (\Psi_2(x, y) - \Psi_1(x, y)) dx dy$.

4. Площа поверхні $z = f(x, y)$ — $P = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy$.

4.5.3. Визначення і властивості потрійного інтегралу

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена в замкненій, обмеженій області V

простору R^3 . Розіб'ємо область V на n частин з об'ємами Δv_i ($i=1,2,\dots,n$). В кожній частині виберемо довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \theta_i)$ і складемо інтегральну суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \theta_i) \Delta v_i$ для функції $u = f(x, y, z)$ по області V . Якщо границя інтегральних сум I_n , коли максимальний діаметр розбиття прямує до нуля коли $n \rightarrow \infty$, існує, скінчена і не залежить від способу розбиття області V на частини і вибору точки M_i , то ця границя називається *потрійним інтегралом* від функції $u = f(x, y, z)$ по області V :

$$\lim_{\max d(\Delta v_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \theta_i) \Delta v_i = \iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Властивості потрійного інтегралу

- $\iiint_V \sum_{i=1}^n C_i f_i(x, y, z) dv = \sum_{i=1}^n C_i \iiint_V f_i(x, y, z) dv.$
- $\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dv + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dv, V = V_1 \cup V_2.$
- $\iiint_V f(x, y, z) dv \leq \iiint_V g(x, y, z) dv, 0 \leq f(x, y, z) \leq g(x, y, z).$
- $mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dv \leq MV, m \leq f(x, y, z) \leq M, V$ – об'єм області інтегрування.
- $\iiint_V f(x, y, z) dv = f(x_0, y_0, z_0) \cdot V$ — теорема про середнє значення.

4.5.4. Обчислення потрійного інтегралу та його застосування

Обчислення *потрійного інтеграла* через трьохкратний

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_U f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\varphi d\rho dz \quad \text{— перехід у потрійному}$$

інтегралі до циліндричних координат.

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \quad \text{— пере-}$$

хід у потрібному інтегралі до сферичних координат.

Застосування потрібного інтегралу

$$1. \text{ Об'єм тіла } \quad V = \iiint_V dx dy dz = \iiint_U \rho d\varphi d\rho dz = \iiint_G r^2 \sin \theta d\varphi dr d\theta .$$

$$2. \text{ Маса тіла } \quad m = \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz, \quad \gamma(x, y, z) \text{ — густина речовини в об-}$$

ласті V .

$$3. \text{ Координати центра мас тіла } \quad V \quad \gamma = \gamma(x, y, z) \text{ — густина речовини}$$

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_V x \cdot \gamma dv; \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_V y \cdot \gamma dv; \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_V z \cdot \gamma dv.$$

4.6. Криволінійні інтеграли

4.6.1. Криволінійний інтеграл по довжині дуги (I роду)

Нехай на площині Oxy задана кусково-гладка крива AB і на ній визначена неперервна функція $f(M) = f(x, y)$, $M \in AB$. Розіб'ємо дугу AB на n елементарних частин Δl_i точками розбиття $A = A_0, A_1, \dots, A_n = B$. На кожній дузі $A_{i-1}A_i$

виберемо точку $M_i(\xi_i, \eta_i)$ і складемо інтегральну суму $I_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$, де

Δl_i — довжина дуги Δl_i . Якщо існує скінчена границя послідовності інтегральних сум I_n , коли $\lambda = \max \Delta l_i \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB на частини і вибору точок M_i на частинних дугах, то ця границя називається криволінійним інтегралом першого роду від функції $f(x, y)$ по дузі AB і позначається так

$$\int_{(AB)} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

Аналогічно можна дати визначення криволінійного інтегралу I роду у випадку просторової кривої

$$\int_{(AB)} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta l_i.$$

Основні властивості криволінійного інтегралу першого роду

1. Лінійність
$$\int_L (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dl = \alpha \int_L f(x, y) dl + \beta \int_L g(x, y) dl$$

2. Незалежність криволінійного інтегралу від напрямку інтегрування

$$\int_{(AB)} f(x, y) dl = \int_{(BA)} f(x, y) dl$$

3. Адитивність по області інтегрування. Якщо дугу AB можна поділити на n частин точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , тоді

$$\int_{(AB)} f(x, y) dl = \int_{(AA_1)} f(x, y) dl + \int_{(A_1A_2)} f(x, y) dl + \dots + \int_{(A_{n-1}B)} f(x, y) dl.$$

Обчислення криволінійного інтегралу першого роду

1.
$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$
, де $L: x = x(t); y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$

2.
$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx$$
, де $L: y = \varphi(x), a \leq x \leq b$.

3.
$$\int_L f(x, y) dl = \int_\alpha^\beta f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi$$
, де $L: \rho = \rho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$.

4.
$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$$
, де $L: x = x(t); y = y(t), z = z(t), t_1 \leq t \leq t_2$.

Застосування криволінійного інтегралу першого роду

1. Длина дуги кривої:
$$l = \int_{(AB)} dl.$$

2. Площа циліндричної поверхні:
$$Q = \int_{(AB)} f(x, y) dl.$$

3. Маса кривої:
$$m = \int_{(AB)} \gamma(x, y) dl$$
, где $\gamma(x, y)$ — лінійна густина.

4. Статичні моменти. Координати центра мас плоскої кривої:

$$S_x = \int_{(AB)} x \cdot \gamma(x, y) dl, \quad S_y = \int_{(AB)} y \cdot \gamma(x, y) dl; \quad x_c = \frac{S_y}{m}, \quad y_c = \frac{S_x}{m}.$$

4.6.1. Криволінійний інтеграл по координатах (II роду)

Нехай на площині Oxy задана кусково-гладка крива AB і на ній визначена неперервна функція $P(x, y)$. Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A(x_0, y_0)$, $A_1(x_1, y_1), \dots, A_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), B(x_n, y_n)$. Складемо таку інтегральну суму

$$I_n = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \text{ и } (\xi_i, \eta_i) \text{ — координати деякої точки на}$$

дузі $A_{i-1}A_i$. Якщо існує скінчена границя послідовності інтегральних сум I_n коли $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \rightarrow 0$, яка не залежить від способу розбиття дуги AB на частини і вибору точок (ξ_i, η_i) на частинних дугах, то ця границя називається

криволінійним інтегралом другого роду від функції $P(x, y)$ вздовж дуги AB по

$$\text{координаті } x \text{ і позначається так } \int_{(AB)} P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

Аналогічно визначається криволінійний інтеграл від функції $Q(x, y)$ по

$$\text{координаті } y \text{ — } \int_{(AB)} Q(x, y) dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i, \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta y_i.$$

Криволінійний інтеграл II роду загального виду визначається рівністю

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(AB)} P(x, y) dx + \int_{(AB)} Q(x, y) dy.$$

По аналогії введемо криволінійний інтеграл II роду по просторовій кривій

$$\int_{(AB)} P(x, y, z) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i.$$

Основні властивості криволінійного інтегралу другого роду

$$1. \text{ Лінійність } \int_{(AB)} \sum_{i=1}^n k_i P_i(x, y) dx = \sum_{i=1}^n k_i \int_{(AB)} P_i(x, y) dx.$$

2. *Адитивність по області інтегрування.* Якщо дугу AB можна поділити на n частин точками A_1, A_2, \dots, A_{n-1} , тоді

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx = \int_{(AA_1)} P(x, y) dx + \int_{(A_1A_2)} P(x, y) dx + \dots + \int_{(A_{n-1}B)} P(x, y) dx.$$

3. Під час зміни напрямку інтегрування вздовж кривої, знак інтегралу змінюється на протилежний

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx = - \int_{(BA)} P(x, y) dx.$$

Обчислення криволінійного інтегралу другого роду

Якщо шлях інтегрування задано в параметричному вигляді $L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$,

$$t \in [\alpha; \beta]: \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)) dt.$$

Якщо шлях інтегрування задано в декартових координатах $L: y = f(x)$,

$$x \in [a; b]: \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b P(x, y(x)) dx + Q(x, y(x)) y'(x) dx.$$

Криволінійний інтеграл по замкненому контуру позначається наступним чином $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ и називається *циркуляцією*. Під додатним на-

прямом обходу при інтегруванні по замкненому контуру мається на увазі напрям руху проти годинникової стрілки.

$$\text{Формула Остроградського – Гріна} \quad \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

де L — межа області D .

Деякі застосування криволінійного інтегралу II роду

1. Робота A сили $\vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ по переміщенню матеріальної точки M вздовж дуги AB дорівнює $A = \int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$.

$$2. \text{Площа плоскої фігури} \quad S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

Для того щоб інтеграл $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ був незалежним від обраного

шляху інтегрування необхідно і достатньо виконання умови $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

При виконанні цієї умови буде вірно $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ по довільному замкненому контуру $L \subset D$.

4.7. Задачі для самостійного розв'язування

ЗАДАЧА 1.

Знайти невизначені інтеграли

$$\begin{array}{ll}
 1.1 & \int x \ln^2 x dx; \int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} dx; \\
 & \int \frac{x}{\sqrt[3]{2-x^2}} dx; \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx; \\
 & \int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x} \\
 1.2 & \int x^2 \sin 4x dx; \int \frac{2x dx}{(1+x)(1+x^2)}; \\
 & \int \sqrt[3]{2+\cos 2x} \sin 2x dx \\
 & \int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}; \int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}} \\
 1.3 & \int x^2 \cos 6x dx; \int \frac{dx}{x \ln^2 x}; \\
 & \int \frac{dx}{\cos^4 x}; \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2}} \\
 & \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+1)} \\
 1.4 & \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx; \int \frac{e^x}{4+3e^{2x}} dx; \\
 & \int \frac{x+4}{(x+1)^2(x^2+2x+1)} dx; \\
 & \int \cos^5 x dx; \int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx \\
 1.5 & \int \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} dx; \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{5-3x^2}}; \\
 & \int \frac{x dx}{(x-2)^2(x^2+4)}; \\
 & \int \frac{dx}{2+\cos x}; \int \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}} \\
 1.6 & \int x^2 e^{-0,5x} dx; \int \frac{dx}{\sqrt{3+\operatorname{tg} x} \cdot \cos^2 x}; \\
 & \int \frac{6x^2+21}{x(x-4)^2(x+2)} dx; \\
 & \int \sin^6 x dx; \int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x^2})}
 \end{array}$$

ЗАДАЧА 2.

Обчислити визначені інтеграли

$$\begin{array}{ll}
 2.1 & \int_0^{\ln \pi} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx, \int_1^{e^2} x \ln^2 x dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \cdot \sin 3x dx, \int_0^{16} \frac{x dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+9}}. \\
 2.2 & \int_4^9 \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx, \int_{\sqrt{e}}^{\sqrt[3]{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln^2 x}}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-2\sin x}{2+\sin x+2\cos x} dx.
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2.3 \quad & \int_0^1 \frac{x}{x^4+1} dx, \int_{-1}^0 (x^2+4x+4)\ln(x+2) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx, \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x} \cdot dx}{x}. \\
 2.4 \quad & \int_{-4}^0 (x^2+7x+12)\cos x dx, \int_{\pi}^{2\pi} \frac{x+\cos x}{x^2+2\sin x} dx, \int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin x dx, \int_1^2 \frac{dx}{4x+x^3}. \\
 2.5 \quad & \int_{-1}^0 (x^2+4x+4)\ln(x+2) dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx, \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{1+\ln x} \cdot dx}{x}, \int_{\ln 3}^{\ln 4} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx. \\
 2.6 \quad & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^4 x} dx, \int_0^{2\pi} (2x^2+4x+7)\cos 2x dx, \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos x+3\sin x}{2\sin x-3\cos x} dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx.
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 3.

Встановити збіжність або розбіжність невласних інтегралів

$$\begin{aligned}
 3.1 \quad & \int_2^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}; \int_0^{\pi} \frac{dx}{1-\cos x}. & 3.2 \quad & \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2-4}; \int_2^3 \frac{dx}{x^2-4x+4}. \\
 3.3 \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}; \int_0^1 \frac{dx}{x^2-1}. & 3.4 \quad & \int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}; \int_{-2}^1 \frac{x+4}{x^2-4} dx. \\
 3.5 \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+\cos^2 x}; \int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx. & 3.6 \quad & \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}; \int_{-1}^3 \frac{dx}{x^2+2x+1}.
 \end{aligned}$$

ЗАДАЧА 4.

Обчислити площі плоских фігур

$$\begin{aligned}
 4.1 \quad & a) y=4-x^2; y=x^2-2x; \quad b) \begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}; y=2(y \geq 2); \quad c) \rho^2=4\cos 2\varphi. \\
 4.2 \quad & a) y=x^2+4x; x-y+4=0; \quad b) \begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \\ (0 \leq t \leq 2\pi) \end{cases}; \quad c) \rho^2=9 \cdot \frac{\sin 3\varphi}{\cos \varphi} \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right). \\
 4.3 \quad & a) 4y=8x-x^2, 4y=x+6; \quad b) \begin{cases} x=4\cos^3 t \\ y=4\sin^3 t \end{cases}; \quad c) \rho=3(1+\cos 2\varphi).
 \end{aligned}$$

$$4.4 \quad a) y = x^3, y = x, y = 2x; \quad b) \begin{cases} x = t^2 \\ y = 1 - t^3 \end{cases}, x = 0, y = 0; \quad c) \rho = 3 \cos 2\varphi.$$

$$4.5 \quad a) x^2 + y^2 = 4x, y^2 = 2x; \quad b) \begin{cases} y = 6 \sin t \\ x = 2 \cos t \end{cases}, y = 3 (y \geq 3); \quad c) \rho = 4 \cos 3\varphi.$$

$$4.6 \quad a) y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4; \quad b) \begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t), y = 4 (y \geq 4) \\ t \in [0; 8\pi] \end{cases}; \quad c) \rho = 2 \cos 4\varphi.$$

ЗАДАЧА 5.

Обчислити довжину дуг кривих

$$5.1 \quad a) y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x, 1 \leq x \leq 4; \quad b) \rho = 6 \cdot \varphi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}.$$

$$5.2 \quad a) x^{2/3} + y^{2/3} = \sqrt[3]{25}; \quad b) \rho = \sec \varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$5.3 \quad a) y = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 3; \quad b) \rho = 6 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

$$5.4 \quad a) y = \frac{1}{2}x^2 - 1, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}; \quad b) \rho = 4 \sin^4 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 4\pi.$$

$$5.5 \quad a) 9y^2 = x(x-3)^2, 0 \leq x \leq 3; \quad b) \begin{cases} x = 12(\cos t + t \sin t) \\ y = 12(\sin t - t \cos t) \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$5.6 \quad a) y = \arcsin(e^{-x}), 0 \leq x \leq 1; \quad b) \rho = 3 \sin^2 \frac{\varphi}{4}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

4.8. Приклади тестових завдань

Змістовий модуль № 3

Інтегральне числення функції однієї змінної

Тестове завдання

У завданнях 1 — 15 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Знайти первісну функції $f(x) = \cos(x/2)$, яка проходить через т. $A(\pi; 2)$.

а	б	в	г	д
$\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$	$\cos \frac{x}{2} + 2$	$-2 \sin \frac{x}{2}$	$\sin \frac{x}{2}$	$2 \sin \frac{x}{2}$

2. Чому дорівнює $\int f'(x)dx$?

а	б	в	г	д
const	$f'(x) + C$	$f'(x)dx$	$x + C$	$f(x) + C$

3. За якою формулою можна обчислити довжину дуги кривої при параметричному завданні?

а	б	в	г	д
$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 - y^2} dt$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt$	$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + y^2} dt$	$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x^2 + y^2} dt$	$\int_{\alpha}^{\beta} (x'^2 + y'^2) dt$

4. За допомогою якої підстановки $x = ?$ раціоналізують інтеграл $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x} + 1} dx$?

а	б	в	г	д
t^6	t^4	t^{12}	t^3	t^{13}

5. Інтеграл $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$ береться частинами. Що позначимо через dv ?

а	б	в	г	д
$\sqrt{x} dx$	$\ln^2 x dx$	$\ln^2 x$	$\ln x dx$	\sqrt{x}

6. Знаменник раціонального дробу має тільки прості комплексні корені. На простіші дроби якого типу розкладається раціональний дріб?

а	б	в	г	д
I-го та III-го	IV - го	II - го	I - го	III - го

7. Порівняйте (без обчислень) величини $A = \int_0^1 \sqrt[3]{x} dx$ і $B = \int_0^1 x^2 dx$.

а	б	в	г	д
$A = B$	не можна порівняти	$A > B$	інша відповідь	$A < B$

8. Відомо, що $\int_{-a}^a \cos^{100} x dx = 4h$. Знайти $0,5 \int_0^a \cos^{100} x dx$.

а	б	в	г	д
$2h$	h	$0,5h$	0	$8h$

9. Установіть відповідність між функціями $f(x)$ (1–4) та невизначеними інтегралами $\int f(x)dx$ від цих функцій (А – Д).

Функція	Інтеграл
1. $\frac{1}{\operatorname{ch}(4x)}$	А $\frac{1}{5} \cdot \ln \left 1 - \frac{5}{x-1} \right + C$
2. $\frac{1}{x^2 - 7x + 6}$	Б $\ln \left x - 1 + \sqrt{(x-1)^2 + 2} \right + C$
3. $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$	В $\operatorname{arctg}(4e^{2x}) + C$
4. $\frac{x^2 + x}{x + 2}$	Г $\frac{x^2}{2} - x + 2 \cdot \ln x + 2 + C$
	Д $\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(e^{4x}) + C$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

10. Установіть відповідність між числом (1–4) та значенням визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ (А – Д).

Число	Інтеграл
1. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 2}$	А $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p+3}} dp$
2. $\operatorname{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}$	Б $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$
3. $\frac{e^2 - 1}{4}$	В $\int_1^e z \cdot \ln^2 z dz$
4. $2e^{-\sqrt{3}}(\sqrt{3} + 1)$	Г $\int_2^3 \frac{1}{(v-1) \cdot \sqrt[3]{\ln(v-1)}} dv$
	Д $\int_3^4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} dt$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

11. При якому значенні параметра a пряма $x = a$ поділяє площу фігури, обмеженої лініями $y = \frac{8}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ ($x \geq 2$) у відношенні 2:1?

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **д.**

Розв'язання.

$$F(x) = \int \cos \frac{x}{2} dx = 2 \sin \frac{x}{2} + C; F(\pi) = 2 \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Rightarrow C = 0; F(x) = \sin \frac{x}{2}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні властивості невизначеного інтегралу, таблиця інтегралів).

Завдання 2. Правильна відповідь: **д.**

Розв'язання. За основними властивостями невизначеного інтегралу

$$\int f'(x) dx = f(x) + C.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні властивості невизначеного інтегралу).

Завдання 3. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання. Довжина дуги кривої при параметричному завданні

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: використання визначених інтегралів).

Завдання 4. Правильна відповідь: **в.**

Розв'язання. Виконується заміна змінної $x = t^{12}$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: раціоналізація підінтегральних виразів).

Завдання 5. Правильна відповідь: **а.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: метод інтегрування частинами у невизначеному інтегралі).

Завдання 6. Правильна відповідь: **д.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: інтегрування раціональних дробів).

Завдання 7. Правильна відповідь: **в.**

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні властивості визначеного інтегралу, таблиця інтегралів, формула Ньютона-Лейбніца).

Завдання 8. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання. Скористуємося тим, що відрізок інтегрування симетричний відносно початку координат й підінтегральна функція є парною. Тоді

$$\int_{-a}^a \cos^{100} x \, dx = 4h \Rightarrow 2 \int_0^a \cos^{100} x \, dx = 4h \Rightarrow \int_0^a \cos^{100} x \, dx = 2h.$$

Отже, $0,5 \int_0^a \cos^{100} x \, dx = 0,5 \cdot 2h = h$

Завдання 9. Таблиця відповідностей :

	А	Б	В	Г	Д
1					х
2	х				
3		х			
4				х	

Розв'язання. 1. Дійсно, $\int \frac{1}{\operatorname{ch} 4x} dx = \int \frac{2}{e^{4x} + e^{-4x}} dx = \int \frac{2e^{4x}}{e^{8x} + 1} dx$, тоді ма-

ємо $\int \frac{2e^{4x}}{e^{8x} + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = e^{4x}; \\ dt = 4e^{4x} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^{4x} + C$. Інтеграл Д.

2. Дійсно, $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx = \int \frac{1}{(x-6) \cdot (x-1)} dx = \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-1} \right) dx$, тоді

маємо $\int \frac{1}{x^2 - 7x + 6} dx = \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-6} - \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{5} \ln \left| 1 - \frac{5}{x-1} \right| + C$. Інтеграл А.

3. Дійсно, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} dx$, тоді маємо

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} dx = \ln \left| x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right| + C. \text{ Інтеграл Б.}$$

4. Дійсно, $\int \frac{x^2 + x}{x+2} dx = \int \frac{x^2 + 2x - x}{x+2} dx = \int \left(x - 1 + \frac{2}{x+2} \right) dx$, тоді маємо

$$\int \frac{x^2 + x}{x+2} dx = \int x dx - \int dx + 2 \int \frac{dx}{x+2} = \frac{x^2}{2} - x + 2 \ln |x+2| + C. \text{ Інтеграл Г.}$$

Заповнюємо таблицю.

Завдання 10. Таблиця відповідностей :

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2		×			
3			×		
4	×				

Розв'язання.

А. Знаходимо: $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p+3}} dp \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{p+3} = t; p = t^2 - 3; \\ dp = 2t dt; t_H = \sqrt{3}; t_B = \infty; \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{3}}^{\infty} e^{-t} \cdot 2t dt$, тоді

$$\text{маємо } 2 \int_{\sqrt{3}}^{\infty} t \cdot e^{-t} dt \left\{ \begin{array}{l} t = u; dv = e^{-t} dt; \\ dt = du; v = -e^{-t}; \end{array} \right\} = 2 \left(-t e^{-t} \Big|_{\sqrt{3}}^{\infty} + \int_{\sqrt{3}}^{\infty} e^{-t} dt \right) = 2 \frac{(\sqrt{3} + 1)}{e^{\sqrt{3}}}.$$

Число 4.

Б. Знаходимо:

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ dt = e^x dx \end{array} \right\} = \int_1^e \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{arctg} t \Big|_1^e = \text{arctg}(e) - \frac{\pi}{4}. \text{ Число 2.}$$

В. Знаходимо:

$$\int_1^e z \cdot \ln^2 z dz \left\{ \begin{array}{l} \ln^2 z = u \quad du = \frac{2 \ln z}{z} dz \\ zdz = dv \quad v = \frac{z^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{z^2}{2} \ln^2 z \Big|_1^e - \int_1^e \frac{z^2}{2} \cdot \frac{2 \ln z}{z} dz =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \int_1^e z \ln z dz \left\{ \begin{array}{l} \ln z = u \quad du = \frac{1}{z} dz \\ zdz = dv \quad v = \frac{z^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{z^2}{2} \ln z \Big|_1^e - \int_1^e \frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{z} dz \right) =,$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{z}{2} dz \right) = \frac{1}{2} \int_1^e z dz = \frac{z^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 - 1}{4}. \text{ Число 3.}$$

Г. Знаходимо:

$$\int_2^3 \frac{dv}{(v-1) \cdot \sqrt[3]{\ln(v-1)}} \left\{ \begin{array}{l} \ln(v-1) = t \quad v = 2 \Rightarrow t = 0 \\ dt = \frac{dv}{v-1} \quad v = 3 \Rightarrow t = \ln 2 \end{array} \right\} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{3}{2} t^{2/3} \Big|_0^{\ln 2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\ln^2 2}$$

Число 1.

Д. Знаходимо

$$\int_3^4 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}-1} dt \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{t}-1=u \quad dt=2(u+1)du \\ t=(u+1)^2 \quad t=3 \Rightarrow u=\sqrt{3}-1 \\ \quad \quad \quad t=4 \Rightarrow u=1 \end{array} \right\} = \int_{\sqrt{3}-1}^1 \frac{2(u+1)^2}{u} du = 2 \int_{\sqrt{3}-1}^1 \left(u+2+\frac{1}{u} \right) du =$$

$$= u^2 \Big|_{\sqrt{3}-1}^1 + 4u \Big|_{\sqrt{3}-1}^1 + 2 \ln u \Big|_{\sqrt{3}-1}^1 = 5 - 2\sqrt{3} - 2 \ln(\sqrt{3}-1).$$

За результатами обчислень заповнюємо таблицю.

Завдання 11.

Розв'язання. Спочатку побудуємо вказану область. Позначимо через S площу фігури, яка обмежена кривою $y=8/x^2$, віссю абсцис та прямою $x=2$ ($x \geq 2$). Обчислення цієї площі приводить до невластного інтеграла

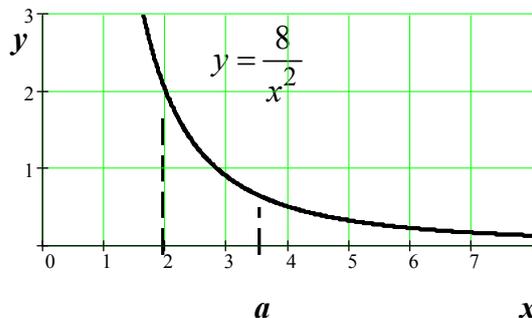
$$S = \int_2^{\infty} \frac{8}{x^2} dx = -\frac{8}{x} \Big|_2^{\infty} = 4.$$

За умовами задачі нам необхідно підібрати таке значення параметра a , для якого

$$\int_2^a \frac{8}{x^2} dx = 2 \int_a^{\infty} \frac{8}{x^2} dx = \frac{2}{3} S = \frac{8}{3}.$$

Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_2^a \frac{8}{x^2} dx = -\frac{8}{x} \Big|_2^a = 4 - \frac{8}{a} \\ \int_2^a \frac{8}{x^2} dx = \frac{8}{3} \end{array} \right. \Leftrightarrow 4 - \frac{8}{a} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow a = 6.$$



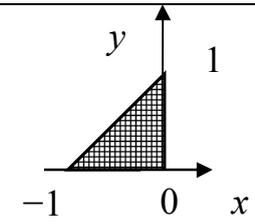
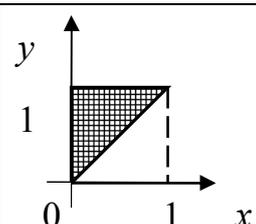
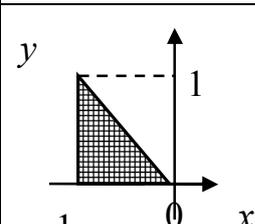
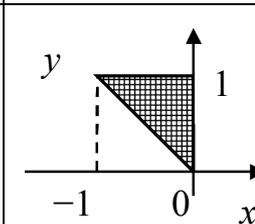
Відповідь: $a = 6$.

Кратні та криволінійні інтеграли

Тестове завдання

У завданнях 1 — 4 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Площу якої фігури обчислюється за допомогою інтеграла $\int_{-1}^0 \int_0^{1+x} dx dy$?

а	б	в	г
			

2. Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^0 \int_0^{\pi/2} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos y \, dx dy$.

а	б	в	г
0	π	-1	-2

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 dx dy dz$.

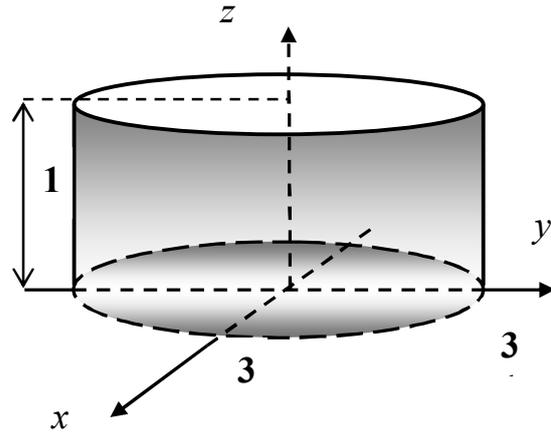
а	б	в	г
2	-1	-2	1

4. Знайти інтеграл $\int_{(0;0)}^{(1;1)} 7x \, dy$ вздовж кривої $y = \sqrt{x^5}$.

а	б	в	г
7	5	1	-3

Розв'язання задач 5 і 6 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

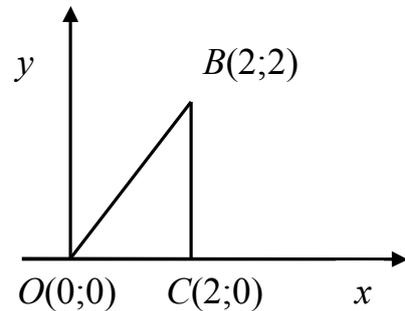
5. Знайти середню густину циліндра, зображеного на рисунку праворуч, якщо густина виражається функцією $\gamma(x, y, z) = 2\sqrt{z}$.



6. Обчислити криволінійний інтеграл

$\int_L x^2 dy + y^2 dx$, де L — контур трикутника OCB ,

зображеного на рисунку праворуч.



КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

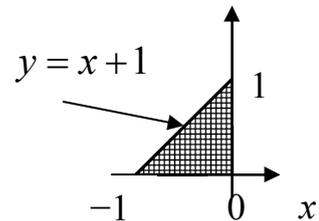
Завдання 1. Правильна відповідь: **а.**

Розв'язання. Даному подвійному інтегралу відповідає фігура, що визначається нерівностями :

$$-1 \leq x \leq 0; \quad 0 \leq y \leq 1 + x.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються

завданням : геометричний зміст подвійних інтегралів, зв'язок між подвійними та двократними інтегралами).



Завдання 2. Правильна відповідь: **г.**

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 \int_0^{\pi/2} \sin \frac{x}{2} \cdot \cos y \, dx \, dy &= \int_{-\pi}^0 \sin(x/2) \, dx \int_0^{\pi/2} \cos y \, dy = -2 \cos(x/2) \Big|_{-\pi}^0 \cdot \sin y \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -2(\cos 0 - \cos(\pi/2)) \cdot (\sin(\pi/2) - \sin 0) = -2. \end{aligned}$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення подвійних інтегралів за допомогою двократних інтегралів).

Завдання 3. Правильна відповідь: **а.**

Розв'язання.

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^0 dx dy dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^0 dz = x|_0^1 \cdot y|_{-1}^1 \cdot z|_{-1}^0 = (1-0) \cdot (1+1) \cdot (0+1) = 2.$$

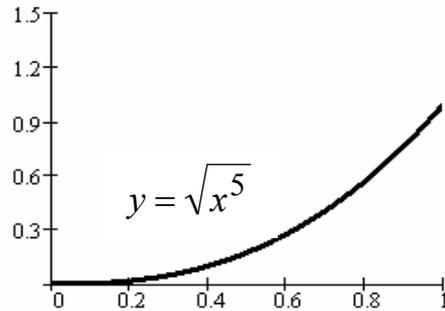
(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення потрійних інтегралів за допомогою трикратних інтегралів).

Завдання 4. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання.

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} 7x dy = \int_0^1 7x d(\sqrt{x^5}) = 7 \cdot \frac{5}{2} \int_0^1 x^{5/2} dx =$$

$$= 7 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{7} x^{7/2} \Big|_0^1 = 5.$$



(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: обчислення криволінійних інтегралів вздовж дуги кривої).

Завдання 5.

Розв'язання. Середнє значення густини знайдемо за допомогою теореми про середнє значення функції для потрійного інтеграла.

$$\gamma(\bar{P}) = \frac{1}{V} \iiint_V \gamma(x, y, z) dx dy dz,$$

де V — об'єм замкненої області інтегрування, \bar{P} — деяка точка цієї області.

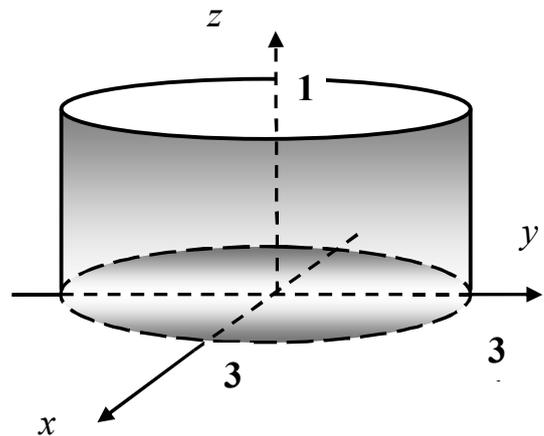
Об'єм циліндра можна знайти за допомогою відомої формули з шкільної геометрії $V = S \cdot H = \pi \cdot 3^2 \cdot 1 = 9\pi$.

Обчислимо тепер значення потрійного інтеграла. Так як в основі області інтегрування знаходиться круг з центром у початку координат та радіусу 3, доцільно перейти до циліндричних координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq \rho \leq 3; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi; \\ 0 \leq z \leq 1 \end{matrix}$$

Отже,

$$\iiint_V 2z dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho d\rho \int_0^1 2\sqrt{z} dz = \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^3 \cdot \frac{4}{3} z^{3/2} \Big|_0^1 = 2\pi \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{3} = 12\pi.$$

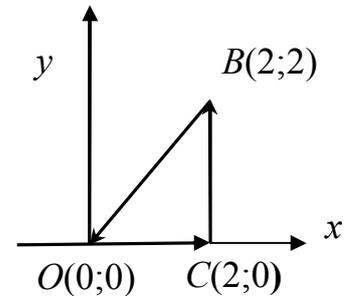


Остаточно, маємо $\gamma(\bar{P}) = \frac{1}{9\pi} \cdot 12\pi = \frac{4}{3}$.

Відповідь: $\frac{4}{3}$.

Завдання 5.

Розв'язання. Контур інтегрування уявляє собою замкнений контур трикутника. Так як в умові задачі додатково не вказується у якому напрямку треба виконувати обхід області, то ми будемо вважати що обхід виконується у додатному напрямі, тобто проти ходу годинникової стрілки.



На підставі властивості адитивності криволінійного інтеграла по області інтегрування маємо, що

$$\int_L x^2 dy + y^2 dx = \int_{OC} x^2 dy + y^2 dx + \int_{CB} x^2 dy + y^2 dx + \int_{BO} x^2 dy + y^2 dx$$

1) Для інтеграла по дузі OC : $y = 0, 0 \leq x \leq 2$. Тоді

$$\int_{OC} x^2 dy + y^2 dx = \int_0^2 x^2 d(0) + 0^2 dx = 0$$

2) Для інтеграла по дузі CB : $x = 2, 0 \leq y \leq 2$. Тоді

$$\int_{CB} x^2 dy + y^2 dx = \int_0^2 2^2 dy + y^2 d(2) = 4 y \Big|_0^2 = 8$$

3) Для інтеграла по дузі BO : $y = x$, а змінна x буде змінюватися від двох до нуля. Тоді

$$\int_{BO} x^2 dy + y^2 dx = \int_2^0 x^2 dx + x^2 dx = -\int_0^2 2x^2 dx = -\frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 = -\frac{16}{3}$$

Остаточно маємо

$$\int_L x^2 dy + y^2 dx = 0 + 8 - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

Відповідь: $\frac{8}{3}$.

РОЗДІЛ П'ЯТИЙ. ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

5.1. Основні визначення

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке зв'язує незалежні змінні (змінну), шукану функцію та її похідні або диференціали.

Якщо у диференціальному рівнянні невідомою є функція багатьох змінних, яка входить до рівняння разом зі своїми частинними похідними, то рівняння називається диференціальним рівнянням із частинними похідними.

Якщо до диференціального рівняння входить функція однієї змінної зі своїми похідними, то рівняння називається звичайним диференціальним рівнянням.

Якщо декілька невідомих функцій однієї змінної та їхніх похідних входять до кількох рівнянь, які треба розв'язати, то йдеться про систему звичайних диференціальних рівнянь.

В теоретичних дослідженнях користуються записом диференціальних рівнянь в неявній формі

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

або в нормальній (явній) формі

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Найвищий порядок похідної, що входить у диференціальне рівняння, називається порядком даного рівняння.

Розв'язком або інтегралом диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, яка після її підстановки зі своїми похідними у дане рівняння перетворює його в тотожність.

Розв'язок диференціального рівняння n -го порядку, який встановлює зв'язок між незалежною і залежною змінних та містить n незалежних сталих C_1, C_2, \dots, C_n , називається *загальним розв'язком* диференціального рівняння.

Форма запису загального розв'язку виду

$$F(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

називається *загальним інтегралом* диференціального рівняння. Знаходження розв'язку деякого диференціального рівняння називається інтегруванням заданого диференціального рівняння. Надаючи конкретних значень сталим C_1, C_2, \dots, C_n , отримуємо *частинний розв'язок* диференціального рівняння.

Важливу роль у теорії звичайних диференціальних рівнянь має теорема про існування і єдність розв'язку.

Розглядається задача Коші:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ; y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

та теорема Коші:

Якщо в диференціальному рівнянні функція $f(x, y, \dots)$ та її частинні похідні по змінним $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ неперервні в області G , яка містить значення $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, то існує єдиний розв'язок, який задовольняє початкові умови.

5.2. Основні методи аналітичного розв'язання

Диференціальне рівняння	Метод розв'язання
Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінним $f(x)g(y)dy + f_1(x)g_1(y)dx = 0$	$\int \frac{g(y)}{g_1(y)} dy + \int \frac{f_1(x)}{f(x)} dx = C$
Однорідне диференціальне рівняння першого порядку $y' = f(x, y), f(tx, ty) = f(x, y)$	$y = x \cdot v(x)$
Лінійне диференціальне рівняння першого порядку $y' + P(x)y = Q(x)$	$y = u(x) \cdot v(x)$
Рівняння Бернуллі $y' + P(x)y = Q(x)y^n$	$y = u(x) \cdot v(x)$
$y^{(n)} = f(x)$	n – кратне інтегрування
$F(x, y', y'') = 0$	$y' = p(x)$
$F(y, y', y'') = 0$	$y' = p(y), y'' = pp'$
$y'' + py' + qy = 0$ (ЛОДР) $k^2 + pk + q = 0$ – характеристичне рівняння, $k_{1,2}$ – його корені	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, k_1 \neq k_2$ $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_1 x}, k_1 = k_2$ $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$ $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$
$y'' + py' + qy = f(x)$ (ЛНДР)	$y = \bar{y} + y^*$ \bar{y} — загальний розв'язок ЛОДР y^* — частинний розв'язок ЛНДР

$y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x)$	$y^* = e^{\alpha x} Q_n(x), \quad k_1 \neq \alpha, k_2 \neq \alpha$ $y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x), \quad k_1 = \alpha, k_2 \neq \alpha$ $y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x), \quad k_1 = \alpha, k_2 = \alpha$
$y'' + py' + qy = A \cos mx + B \sin mx$	$y^* = a \cos mx + b \sin mx, \quad k_{1,2} \neq mi$ $y^* = x(a \cos mx + b \sin mx), \quad k_1 = mi$

5.3. Системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь (СДР) першого порядку, яка записана в нормальній формі, має вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{cases}$$

або у скорочену виді: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = \overline{1, n}$, векторній формі

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \text{де } \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язком СДР називається сукупність функцій $x_i = \varphi_i(t), \quad i = \overline{1, n}$, які перетворюють рівняння системи в правильні рівності відносно t .

Загальним розв'язком системи диференціальних рівнянь називається сукупність функцій $x_i = \varphi_i(t, C_1, C_2, \dots, C_n)$, які залежать від n довільних сталих та перетворюють рівняння системи в правильні рівності при будь-яких допустимих значеннях сталих C_1, C_2, \dots, C_n .

Частинним розв'язком системи диференціальних рівнянь називається розв'язок, який задовольняє заданим початковим умовам

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0.$$

Досить часто СДР розв'язують методом виключення змінної. Згідно з ним диференціюємо рівняння даної системи та виконуємо підстановки. В результаті

$$2.4 \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}; \quad y' + 4x^3 y = 4(x^2 + 1)e^{-4x} y^2.$$

$$2.5. \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = \frac{3}{2}; \quad xy' - y = y^2(\ln x + 2) \ln x.$$

$$2.6. \quad y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), \quad y(0) = 1; \quad y' + xy = \frac{1}{2}(1+x)e^{-x} y^2.$$

ЗАДАЧА 3.

Знайти загальні або частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$3.1. \quad y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctg} x; \quad x''(t^2 + 1) = 2tx', \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3.$$

$$3.2. \quad y'' = \frac{y'}{x} + \frac{x^2}{y'}; \quad tx'' + x' = \ln t; \quad x(1) = -2; \quad y'(0) = -1.$$

$$3.3. \quad xy''' + y'' = x + 1; \quad tx'' - 3x' = -\frac{t^5}{\sqrt{9-t^2}}; \quad x(3) = 0; \quad x'(3) = 0.$$

$$3.4. \quad xy''' = y''^2; \quad y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$3.5. \quad y'' = \frac{1}{1+x^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad yy'' = 3(y')^2.$$

$$3.6. \quad 2yy'' - y'^2 + y^2 = 0; \quad y'' = 2 - y; \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2.$$

ЗАДАЧА 4.

Знайти загальні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь та їх частинні розв'язки, якщо надані початкові умови:

$$4.1. \quad y'' - y' = 0; \quad y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x};$$

$$y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$4.2. \quad y'' - 3y' + 2y = 0; \quad y'' - 2y' + y = (2x + 5)e^{2x};$$

$$y'' + y = 2\cos 2x + 3\sin 2x, \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 2.$$

$$4.3. \quad y'' - 5y + 4y = (2x - 5)e^x; \quad y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x.$$

$$y'' - 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 1.$$

$$4.4. \quad y'' - 4y' + 4y = (x - 1)e^x; \quad y'' - 4y' + 8y = 5e^x \sin x.$$

$$y'' + 2y' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

$$4.5. \quad y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{2x}; \quad y'' + 2y' = 4e^x \cos x;$$

$$y'' - 7y' = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 2.$$

$$4.6. \quad y'' + 7y' + 6y = 0; \quad y'' - 2y' + y = (8x + 4)e^{-x};$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x, \quad y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

ЗАДАЧА 5

Знайти загальний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь вищих порядків

$$5.1. \quad \frac{d^3x}{dt^3} - 2\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2x = 0;$$

$$5.4. \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0;$$

$$5.2. \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 8\frac{dy}{dx} = 0;$$

$$5.5. \quad \frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 9\frac{dx}{dt} + 5x = 0;$$

$$5.3. \quad 2\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - x = 0;$$

$$5.6. \quad \frac{d^4y}{dx^4} - 8\frac{d^3y}{dx^3} = 0.$$

ЗАДАЧА 6

Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь:

$$6.1. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y; \\ \frac{dy}{dt} = -3x - 2y. \end{cases}$$

$$6.2. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y; \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y. \end{cases}$$

$$6.3. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x - 8y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y. \end{cases}$$

$$6.4. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -x + 3y. \end{cases}$$

$$6.5. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 6y; \\ \frac{dy}{dt} = -11x - 12y. \end{cases}$$

$$6.6. \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y; \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$$

5.5. Приклади тестових завдань

Змістовий модуль № 4

Звичайні диференціальні рівняння**Тестове завдання**

У завданнях 1 — 9 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. До якого типу належить рівняння $x^2 y' + x^2 y = x + 1$?

а	б	в	г
лінійне	Бернуллі	однорідне	з відокремлюваними змінними

2. Умова того, що рівняння $Pdx + Qdy = 0$ є рівнянням в повних диференціалах :

а	б	в	г
$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$	$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$	$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}$

3. Якою підстановкою раціонально понизити порядок рівняння $y^{(4)} + xy^{(5)} = 1$?

а	б	в	г
$y' = p(y)$	$y^{(5)} = p(x)$	$y = p(x) \cdot p'(x)$	$y^{(4)} = p(x)$

4. Скільки невизначених констант містить загальний розв'язок рівняння $y^{(6)} - y' = 2x$?

а	б	в	г
п'ять	шість	жодної	чотири

5. Вкажіть вид загального розв'язку ЛНДР n -го порядку:

а	б	в	г
$y = \sum_{j=1}^n C_j y_j$	$y = C_1 y_1 + C_n y_n$	$y = \sum_{k=1}^n C_k y_k + y_*$	$y = C_1 (y_1 + y_n)$

6. Знайти визначник Вронського для системи функцій $y_1 = \sin x$, $y_2 = x \cdot \sin x$.

а	б	в	г
$W = \cos^2 x$	$W = x$	$W = \sin^2 x$	$W = 1$

7. На підставі коренів $k_1 = 3, k_2 = 5$ характеристичного рівняння, написати загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$:

а	б	в	г
$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-5x}$	$y = C e^{3x}$	$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$	$y = C e^{8x}$

8. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' - 3y' + 2y = 0$.

а	б	в	г
$y = e^x (C_1 + C_2 x)$	$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$	$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$	$y = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$

9. Визначити вигляд частинного розв'язку ЛНДР 2-го порядку y_* , якщо відомі корені характеристичного рівняння та права частина диференціального рівняння: $k_1 = 0, k_2 = 3$; $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

а	б	в	г
$y_* = Q_2(x)$	$y_* = Q_2(x) \cdot e^{3x}$	$y_* = Q_3(x)$	$y_* = x \cdot Q_3(x)$

У завданнях 10,11 до кожного з рядків інформації, позначених цифрами, виберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (літери).

10. Для даних диференціальних рівнянь першого порядку (1– 4) встановити їх тип (А – Д).

Рівняння	Тип
1. $y' = y \cdot \operatorname{tg} x - y^2 \cos x$	А однорідне рівняння
2. $y' = \frac{\operatorname{arctg} x - y}{1 + x^2}$	Б рівняння Бернуллі
3. $(y^2 + x)dx + 2xydy = 0$	В рівняння з відокремлюваними змінними
4. $y' = \frac{1 - e^{y^2}}{2y}$	Г лінійне рівняння
	Д рівняння у повних диференціалах

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

11. Встановіть відповідність між функціями (1 – 4), які пов'язані з розв'язанням задачі Коші $y'' + 4y' + 3y = e^{2x}$; $y(0) = 2/15$; $y'(0) = -1/15$, та їх змістом для даної задачі (А – Д).

Функції	Зміст для задачі
1. e^{2x}	А права частина
2. $\frac{e^{-3x} + e^{2x}}{15}$	Б вронскіан
3. $2e^{-4x}$	В функція фундаментальної системи
4. e^{-x}	Г частинний розв'язок неоднорідного рівняння
	Д розв'язок задачі Коші

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Розв'язання задачі 12 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення до бланку відповідей.

12. Розв'язати задачу Коші для системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 8x - 5y \end{cases}; \quad x(0) = 3, y(0) = -4. \quad \text{У відповідь запишіть } \frac{x(1)}{y(1)} = ?$$

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **а**.

Розв'язання. Рівняння містить невідому функцію y та її першу похідну у першій степені, отже, воно є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: типи диференціальних рівнянь першого порядку).

Завдання 2. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: вибір методу розв'язку диференціального рівняння).

Завдання 3. Правильна відповідь: **г**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: вибір методу розв'язку диференціальних рівнянь вищих порядків).

Завдання 4. Правильна відповідь: **б**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: вид загального розв'язку диференціальних рівнянь вищих порядків).

Завдання 5. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: структура загального розв'язку диференціальних рівнянь n -го порядку).

Завдання 6. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання:

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & x \cdot \sin x \\ \cos x & \sin x + x \cdot \cos x \end{vmatrix} = \sin^2 x + x \sin x \cdot \cos x - x \sin x \cdot \cos x = \\ = \sin^2 x$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: визначник Вронського для системи розв'язків диференціального рівняння 2-го порядку).

Завдання 7. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння дійсні та різні, отже, загальний розв'язок ЛОДР другого порядку будемо шукати у наступному вигляді $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, а так як $k_1 = 3, k_2 = 5$, тоді $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: залежність виду загального розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами від коренів характеристичного рівняння).

Завдання 8. Правильна відповідь: **б**.

Розв'язання. На підставі коренів характеристичного рівняння

$$k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: знаходження загального розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами).

Завдання 9. Правильна відповідь: **г**.

Розв'язання. По-перше, права частина диференціального рівняння є поліномом третього порядку, по-друге, один з коренів характеристичного рівняння співпадає з перевіроючись числом $\alpha = 0$. Отже, $y^* = x \cdot Q_3(x)$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння з правою частиною спеціального виду).

Завдання 10. Правильна відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1					х
2		х			
3	х				
4			х		

Розв'язання.

Рівняння 1. $y' = y \cdot \operatorname{tg} x - y^2 \cos x$ є рівнянням Бернуллі: дійсно маємо $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = -\cos x \cdot y^2$. Тоді $p(x) = -\operatorname{tg} x$; $f(x) = -\cos x$; $n = 2$ і ми прийшли до стандартної форми рівняння Бернуллі.

Рівняння 2. $y' = \frac{\operatorname{arctg} x - y}{1 + x^2}$ є лінійним рівнянням: дійсно, $y' + \frac{y}{1 + x^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$.

Тоді $p(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$ і ми прийшли до стандартної форми лінійного рівняння.

Рівняння 3. $(y^2 + x)dx + 2xydy = 0$ є рівнянням у повних диференціалах: дійсно, $P(x; y) = y^2 + x$; $Q(x; y) = 2xy$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$.

Виконується умова рівняння у повних диференціалах.

Рівняння 4. $y' = \frac{1 - e^{y^2}}{2y}$ є рівнянням з відокремлюваними змінними: дійсно,

$\frac{2ydy}{1 - e^{y^2}} y' = dx$. Тоді змінні відокремлюються, тобто ми прийшли до стандартної форми рівняння.

Завдання 11. Правильна відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1					х
2			х		
3				х	
4		х			

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 3y = e^{2x}$ уявляє собою суму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного рівняння, тобто $y = y_0 + y_*$.

По-перше, знайдемо $y_0 : k^2 + 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -3 \\ k_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$.

Тоді маємо:

$$y_1 = e^{-3x}; y_2 = e^{-x}; W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-3x} & e^{-x} \\ -3e^{-3x} & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^{-4x} + 3e^{-4x} = 2e^{-4x}.$$

Права частина рівняння $f(x) = e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $y_* = A \cdot e^{2x}$. Підставляючи функцію y_* та її похідні у задане рівняння, дістаємо $4A \cdot e^{2x} + 8Ae^{2x} + 3Ae^{2x} = e^{2x}$. Звідси отримуємо $15A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{15}$; $y_* = \frac{1}{15} \cdot e^{2x}$. Отже, $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x} + 1/15 \cdot e^{2x}$, $y' = -3C_1 e^{-3x} - C_2 e^{-x} + 2/15 \cdot e^{2x}$. За допомогою початкових умов знаходимо значення C_1, C_2 :

$$\begin{cases} y(0) = 2/15 \\ y'(0) = -1/15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 + 1/15 = 2/15 \\ -3C_1 - C_2 + 2/15 = -1/15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1/15 \\ C_2 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язок задачі Коші має вигляд: $y = \frac{1}{15} e^{-3x} + \frac{1}{15} \cdot e^{2x}$.

Завдання 12.

Розв'язання. Виразимо з першого рівняння системи функцію $y = y(t)$ через $x(t)$ і $\frac{dx}{dt}$. Знайдемо першу похідну від функції $y(t)$ та підставимо отримані вирази у друге рівняння. Маємо $y = \frac{x' - 3x}{3}$; $y' = \frac{x'' - 3x'}{3}$. Тоді

$$\frac{dy}{dt} = 8x + 5y \Leftrightarrow \frac{x'' - 3x'}{3} = 8x + 5 \cdot \frac{x' - 3x}{3} \Leftrightarrow x'' - 8x' - 9x = 0.$$

Розв'язуючи отримане лінійне диференціальне рівняння дістаємо, що

$$k^2 - 8k - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{9t}.$$

Отже, ми можемо знайти функцію $y(t)$:

$$y = \frac{x' - 3x}{3} \Leftrightarrow y = \frac{-C_1 e^{-t} + 9C_2 e^{9t} - 3C_1 e^{-t} - 3C_2 e^{9t}}{3} = -\frac{4}{3} C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{9t}.$$

Отже, $x(0) = C_1 + C_2$; $y(0) = -\frac{4}{3} C_1 + 2C_2$. За допомогою початкових умов

обчислюємо $C_1 = 3$; $C_2 = -4$. Тоді $x = 3e^{-t}$; $y = -4e^{-t}$ — розв'язок задачі Коші.

Знаходимо $\frac{x(1)}{y(1)} = \frac{3e^{-1}}{-4e^{-1}} = -0,75$.

Відповідь: $-0,75$.

РОЗДІЛ ШОСТИЙ. РЯДИ

6.1. Числові ряди

6.1.1. Визначення

Числовим рядом називається нескінченна послідовність величин, сполучених знаками додавання: $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, u_n — загальний член ряду.

ду. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k = S_{n-1} + u_n$ — частинна сума ряду.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де $|S| < \infty$, тоді числовий ряд збігається і число S називається сумою ряду, якщо ж границя частинних сум не існує, або дорівнює нескінченності, то ряд розбігається.

6.1.2. Ознаки збіжності

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ — збіжний, тобто $\left| \sum_{n=1}^{\infty} u_n \right| < \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ (необхідна умова збіжності ряду).

Якщо ж $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то даний ряд напевно розбіжний — достатня умова розбіжності ряду.

Достатні умови збіжності знакододатних рядів.

Ознака Д'Аламбера: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1, & \text{ряд збігається} \\ l > 1, & \text{ряд розбігається} \\ l = 1, & \text{необхідно додаткові дослідження} \end{cases}$

Ознака Коші (радикальна):

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ $\begin{cases} l < 1, & \text{ряд збігається} \\ l > 1, & \text{ряд розбігається} \\ l = 1, & \text{необхідно додаткове дослідження} \end{cases}$.

Ознака Коші (інтегральна): збіжність (розбіжність) невластного інтегралу $\int_a^{\infty} u_n(n) dn$ свідчить про збіжність (розбіжність) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Ознаки порівняння. Нехай є два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $u_n, v_n \geq 0, n = 1, 2, \dots$

Перша ознака. Якщо починаючи з деякого номеру N виконується нерівність $u_N \leq v_N$, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} v_n < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$ і $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \infty$.

Друга ознака. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = M$ ($M \neq 0, M \neq \infty$), тоді обидва ряди одночасно збігаються або розбігаються.

6.1.3. Знакозмінні ряди

Числовий ряд $u_1 - u_2 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$, де $u_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots$) називається *знакопозначеним* рядом.

Достатні умови збіжності знакопозначеного ряду (ознака Лейбніца)

$$\begin{cases} u_1 > u_2 > \dots > u_n > \dots \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n \text{ — збігається.}$$

Знакозмінним рядом називається ряд, членами якого є як додатні так і від'ємні числа. Нехай $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — *знакозмінний* ряд. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ — збігається *абсолютно*; $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n| = \infty$, причому $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається за ознакою Лейбніца, тоді $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ збігається *умовно*.

6.2. Функціональні ряди

6.2.1. Визначення

Функціональним рядом називається ряд виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Сукупність всіх значень x для яких функціональний ряд збігається називається його *областю збіжності*. Якщо точка x знаходиться в області збіжності ряду, то функціональний ряд має суму $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Частинна сума ряду це —

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x).$$

Для довільної точки x з області збіжності ряду впливає, що існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x).$$

Якщо функціональний ряд збігається на деякій множині E і має суму $S(x)$, то різниця $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ називається *залишком ряду*. Для збіжного функціонального ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ (необхідна умова збіжності ряду).

Збіжний функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається *рівномірно збіжним* на

відрізьку $[a; b]$ якщо для будь-якого достатньо малого числа $\varepsilon > 0$ знайдеться число N таке, що для $\forall n > N$ і $\forall x \in [a; b]$ виконується нерівність $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Якщо функціональний ряд рівномірно збігається на відрізьку $[a; b]$ та його члени є неперервними функціями на цьому відрізьку, тоді цей ряд можна інтегрувати та диференціювати членами на відрізьку $[a; b]$.

6.2.2. Степеневі ряди

Окремим випадком функціональних рядів є *степеневі* ряди $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$,

де a деяка стала. Областю збіжності степеневого ряду є інтервал $(a-R; a+R)$, усередині якого степеневий ряд збігається абсолютно. Число R називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. Радіус збіжності можна обчислити, використовуючи безпосередньо ознаки Д'Аламбера та Коші, або ж за формулами:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Якщо функція $f(x)$ нескінченне число разів безперервно диференційована в околі точки $x = a$ і залишковий член у формулі Тейлора прямує до нуля при необмеженому зростанні n , то в околиці цієї точки функцію $f(x)$ можна розвинути в *ряд Тейлора*:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Зокрема, якщо у формулі Тейлора покласти $a = 0$, ми отримаємо окремий випадок ряду Тейлора, який носить назву ряду Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Наведемо розвинення в ряд Маклорена деяких основних елементарних функцій:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad x \in (-1; 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad x \in (-1; 1];$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots, \quad x \in (-1; 1].$$

6.3. Ряди Фур'є

Тригонометричним рядом називається функціональний ряд вигляду:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Нехай 2π – періодична функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Числа a_0 , a_k і b_k , які визначаються формулами

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k=1, 2, \dots)$$

називаються коефіцієнтами Фур'є функції.

Тригонометричний ряд, коефіцієнти якого є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, називають рядом Фур'є цієї функції і цей факт записують так:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Якщо функція $f(x)$ має властивість парності, то вид її ряду Фур'є значно спрощується. Так для парної функції маємо

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad \text{де } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx \quad \text{і } a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

а для непарної функції $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, де $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$.

Для $2l$ – періодичної функції $f(x)$ ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx; \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx; \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k=1,2,\dots$$

Комплексна форма ряду Фур'є

Нехай дано ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\text{де } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n=1,2,\dots$$

Після застосування формул Ейлера можна отримати

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx},$$

$$c_n = \frac{1}{2} \cdot (a_n - b_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2} \cdot (a_n + b_n).$$

Застосувавши формули коефіцієнтів Фур'є, дістанемо формули визначення комплексних коефіцієнтів

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad c_{-n} = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx.$$

Враховуючи ці формули ряд Фур'є можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad \text{де коефіцієнти } c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n=0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Отримали комплексну форму ряду Фур'є. Аналогічно знаходиться ком-

плексна форма ряду Фур'є $2l$ – періодичної функції $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\pi nx/l}$, де

$$\text{коефіцієнти } c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i\pi nx/l} dx, \quad n=0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Члени цього ряду $c_n e^{i\pi nx/l}$, $n=0; \pm 1; \pm 2; \dots$ називають гармоніками, коефіцієнти c_n — комплексними амплітудами гармонік, $\alpha_n = \pi \cdot n/l$ — хвильовими числами функції.

6.4. Завдання для самостійного розв'язування

ЗАДАЧА 1

Дослідити на збіжність ряд:

$$1.1. \quad 1 + \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \frac{1}{301} + \dots$$

$$1.2. \quad \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$$

$$1.3. \quad 1 + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{7\sqrt{7}} + \dots$$

$$1.4. \quad \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \dots$$

$$1.5. \quad \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots$$

$$1.6. \quad \frac{1}{1+1^3} + \frac{2}{1+2^3} + \frac{3}{1+3^3} + \dots$$

ЗАДАЧА 2

Дослідити на збіжність та абсолютну збіжність ряд:

$$2.1. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots;$$

$$2.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot (n+2)};$$

$$2.3. \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots;$$

$$2.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}};$$

$$2.5. \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots;$$

$$2.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^{n+1}.$$

ЗАДАЧА 3

Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду:

$$3.1. \quad x - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} + \frac{x^3}{4^2\sqrt{3}} - \dots;$$

$$3.2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!};$$

$$3.3. \quad 1 + \frac{x}{10} + \frac{x^2}{100} + \frac{x^3}{1000} + \dots;$$

$$3.4. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{n^2+1};$$

$$3.5. \quad 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots;$$

$$3.6. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+2)^n}{n};$$

ЗАДАЧА 4

Розвинути в ряд Маклорена функцію:

$$4.1. \quad \sin^2 x;$$

$$4.2. \quad x \cdot 2^x;$$

$$4.3. \quad x \ln(1-x^2);$$

$$4.4. \quad \sqrt[4]{16-8x};$$

$$4.5. \quad \cos^2 x;$$

$$4.6. \quad \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}.$$

ЗАДАЧА 5

Обчислити заданий інтеграл з точністю до $\varepsilon = 10^{-3}$:

$$5.1. \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx;$$

$$5.2. \int_0^{0,25} x \cos \sqrt{x} dx;$$

$$5.3. \int_0^1 \sin x^2 dx;$$

$$5.4. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx;$$

$$5.5. \int_0^{0,5} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx;$$

$$5.6. \int_0^1 \sin(x\sqrt{x}) dx;$$

ЗАДАЧА 6

Знайти три перших відмінних від нуля членів розкладу в степеневий ряд частинного розв'язку диференціального рівняння:

$$6.1. y' = 2y^2 + ye^x; y(0) = 1;$$

$$6.2. y' = 2e^y - xy, y(0) = 0;$$

$$6.3. y' = e^x + y; y(0) = 4;$$

$$6.4. y' = x^2 y^2 - 1, y(0) = 1;$$

$$6.5. y' = 3x^2 - 2x\sqrt{y}; y(0) = 1;$$

$$6.6. y' = 2e^y - xy, y(0) = 0;$$

ЗАДАЧА 7

Знайти ряд Фур'є функції $f(x)$ на заданому проміжку:

$$7.1. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, |x| < \pi;$$

$$7.2. f(x) = x^2 + 1, x \in (-1; 1);$$

$$7.3. f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \end{cases}, |x| < 2;$$

$$7.4. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (-\pi; \pi);$$

$$7.5. f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < 0 \\ 1,5, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, |x| < \pi;$$

$$7.6. f(x) = 4 - x^2, x \in (-1; 1);$$

6.5. Приклади тестових завдань*Змістовий модуль № 5***Ряди****Тестове завдання**

У завданнях 1 — 6 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Сума перших n членів числового ряду називається:

а	б	в	г
сумою ряду	n – ю частинною сумою ряду	ніяк не називається	залишком ряду

2. Вказати загальний член ряду $\frac{2}{1 \cdot 4} + \frac{4}{2 \cdot 5} + \frac{8}{3 \cdot 6} + \dots$

а	б	в	г
$u_n = \frac{3n-1}{n(2n+2)}$	$u_n = \frac{2n}{n(n+3)}$	$u_n = \frac{2^n}{n(n+3)}$	$u_n = \frac{n+1}{n(n+3)}$

3. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(2n)!}$ з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

а	б	в	г
-0,54	-0,96	1,28	0,84

4. Нехай функції $u_n(x)$ — диференційовані на відрізку $[a, b]$, а $S(x)$ — сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Яким повинен бути ряд щоб виконувалась рівність

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)?$$

а	б	в	г
збіжним	будь-яким	рівномірно збіжним	розбіжним

5. До якої функції збігається ряд $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$, $-1 \leq x \leq 1$?

а	б	в	г
$\arctg x$	$\sin x$	$\ln(x+1)$	$\operatorname{sh} x$

6. Функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ називаються ортогональними на відрізку $[a; b]$, якщо

$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0$. Функції $\cos nx$ і $\sin kx$ ($k, n \in N$) будуть ортогональними на періоді $[-\pi, \pi]$, якщо

а	б	в	г
$k = n$	$k \neq n$	$\forall k, n \in N$	$k + n = 0$

Розв'язання задач 7 - 10 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

7. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n}}$ на абсолютну або умовну збіжність.

8. Вказати область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$.

9. За допомогою ряду Маклорена функції $f(x) = x^2 \cos 2x$ знайти $f^{(6)}(0)$.

10. Знайти коефіцієнт a_4 розвинення в ряд Фур'є функції $f(x) = 1 - |x|$ на відрізок $[-\pi; \pi]$.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **б**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: числові ряди, основні поняття та означення).

Завдання 2. Правильна відповідь: **б**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: знаходження загального члена числового ряду).

Завдання 3. Правильна відповідь: **г**.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^n}{(2n)!} &= \frac{2}{2!} - \frac{2^2}{4!} + \frac{2^3}{6!} - \frac{2^4}{8!} + \dots = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{90} - \frac{1}{2520} + \dots \approx \\ &\approx 1 - 0,167 + 0,011 - 0,0004 \approx 1 - 0,167 + 0,011 \approx 0,84 \end{aligned}$$

Розглядуваний ряд є рядом Лейбніца, отже, похибка, яку ми отримуємо замінюючи суму лейбніцевого ряду на частинну суму ряду, не перевершує за абсолютним значенням першого члену ряду який ми відкидаємо. Так як $|u_4| = 1/2520 < 0,01$, тоді для знаходження суми ряду достатньо обмежитися

сумою перших трьох членів ряду.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: знакопочережні ряди, теорема Лейбніца, знаходження суми лейбніцевого ряду).

Завдання 4. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: рівномірна збіжність функціональних рядів, властивості рівномірно збіжних рядів).

Завдання 5. Правильна відповідь: **а**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: розкладання в ряд Маклорена основних елементарних функцій).

Завдання 6. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: ряди Фур'є, системи функцій, ортогональні на відрізку).

Завдання 7.

Розв'язання. Спочатку дослідимо ряд на абсолютну збіжність. Для цього складемо ряд з абсолютних величин членів ряду. Отримаємо такий ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n}}$. Для дослідження цього ряду на збіжність застосуємо першу ознаку

порівняння. Так як $\frac{1}{n\sqrt{2n}} < \frac{1}{n^{3/2}}$ ($n = 1, 2, \dots$) і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ збігається, як ряд

Дірихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ з показником степеня $p > 1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{2n}}$ буде також збі-

гатися. Отже, знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n}}$ збігається абсолютно.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Завдання 8.

Розв'язання. Введемо наступне позначення: $2x - 1 = t$ та розглянемо степенеий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\sqrt{n^2 + 2}}$. Обчислимо радіус збіжності цього ряду за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(n+1)^2 + 2}{n^2 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(1+1/n)^2 + 2/n^2}{1 + 2/n^2}} = 1.$$

Тоді інтервал збіжності даного ряду визначається нерівністю $|t| < 1$, отже, інтервал збіжності початкового ряду буде визначатися нерівністю

$$|2x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 2x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Дослідимо поведінку степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$ на кінцях інтервалу

$(0;1)$. Якщо $x=1$, дістаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}$. Застосуємо до цього

ряду інтегральну ознаку збіжності. Маємо,

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{\sqrt{n^2+1}} = \ln \left| n + \sqrt{n^2+1} \right| \Big|_1^{\infty} = \infty \text{ — інтеграл розбігається.}$$

Отже, розбігається і ряд. Нехай тепер $x=0$. Дістанемо знакозмінний ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+2}}$. Ми показали, що знакозмінний ряд не є абсолютно збіжним. До-

слідимо його на умовну збіжність за допомогою теореми Лейбніца. Тоді

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} = 0$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{6}} > \frac{1}{\sqrt{11}} > \dots$. Отже, ряд збігається умовно.

Відповідь: область збіжності степеневого ряду $[0;1)$.

Завдання 9.

Розв'язання. Запишемо розвинення функції в ряд Маклорена.

$$f(x) = x^2 \cos 2x = x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{4!} - \frac{x^8}{6!} + \dots$$

Отже, $f^{(6)}(0)/6! = 1/4! \Leftrightarrow f^{(6)}(0) = 30$.

Відповідь: $f^{(6)}(0) = 30$.

Завдання 10.

Розв'язання. Функція $f(x) = 1 - |x|$ — парна. Тоді

$$\begin{aligned} a_4 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos 4x dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1-x) \cos 4x dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \cos 4x dx - \int_0^{\pi} \underbrace{x \cos 4x dx}_{dv} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{4} \sin 4x \Big|_0^{\pi} - \frac{x}{4} \sin 4x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{4} \sin 4x dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{4} \cos 4x \Big|_0^{\pi} \right) = 0. \end{aligned}$$

Відповідь: $a_4 = 0$.

РОЗДІЛ СЬОМИЙ. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

7.1. Теорія ймовірностей. Основні визначення і формули

7.1.1. Основні формули комбінаторики

I. Комбінації (сполуки) з n елементів по k $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

II. Розміщення з n елементів по k $A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

III. Перестановки множини з n елементів $P_n = n!$.

Біном Ньютона

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Властивості біноміальних коефіцієнтів

$$C_n^m = C_n^{n-m}, m = 0, 1, \dots, n; \quad C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}; \quad C_n^0 = C_n^n = 1; \quad C_n^1 = n;$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n, \quad C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0$$

7.1.2. Ймовірність випадкової події

Визначення ймовірності події A ($0 \leq P(A) \leq 1$):

Класичне — $P(A) = \frac{m}{n}$, де m — число наслідків, що сприяють події A , n —

число всіх єдиноможливих і рівноможливих наслідків;

Статистичне — $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A)$, де $P^*(A)$ — відносна частота події

A в серії n випробувань;

Геометричне — $P(A) = \frac{mes(A)}{mes(\Omega)}$, де $mes(A)$, $mes(\Omega)$ — міри сприятли-

вих та всіх можливих наслідків події A ;

Аксіоматичне — для σ -алгебри випадкових подій F задано ймовірність P , якщо кожній випадковій події $A \in F$ відповідає число $P(A)$ та виконуються чотири аксіоми:

$$A1. 0 \leq P(A) \leq 1;$$

$$A2. P(D) = 1;$$

$$A3. P(A+B) = P(A) + P(B); \quad A4. P\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n P(A_n)$$

де A і B несумісні події, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ попарно несумісні події.

7.1.3. Теорема додавання та множення ймовірностей

- I. $P(A+B) = P(A) + P(B)$, якщо події несумісні.
- II. $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$, якщо події сумісні.
- III. $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, якщо A, \bar{A} — протилежні події.
- IV. $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1 A_2 \dots A_n})$, де $A_i (i=1 \dots n)$ сумісні події.
- V. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, якщо події незалежні.
- VI. $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$, якщо події залежні

Формула повної ймовірності —
$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)$$

Формула Бейєса —
$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) P_{B_i}(A)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)} \quad i=1 \dots n$$

$H_i (1 \leq i \leq n)$ — гіпотези (події), що утворюють повну групу.

7.2. Випадкові величини. Закони розподілу

7.2.1. Основні визначення

Випадкові величини (ВВ) бувають дискретними та неперервними.

Дискретною (ДВВ) називається випадкова величина, сукупність значень якої утворює дискретну (скінчену або злічену) множину.

Неперервною (НВВ) називається випадкова величина, можливі значення якої заповнюють деякий проміжок $\langle a, b \rangle$ числової осі, тобто утворюють неперервну множину.

Закон розподілу ДВВ — відповідність між можливими значеннями ВВ та їх ймовірностями — задається чотирма способами: табличним, графічним, аналітичним і програмним. Наприклад, при табличному завданні всі можливі значення ВВ X та відповідні їм ймовірності приводяться у вигляді таблиці 7.1., яка називається *рядом розподілу* ДВВ:

Таблиця 7.1.

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Для перевірки вірності укладення ряду розподілу застосовується формула

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

При графічному завданні закону розподілу ДВВ в прямокутній системі координат будується *многокутник розподілу* — ломана лінія з вузлами в точках (x_k, p_k) .

При аналітичному способі завдання закону розподілу приводиться формула, за допомогою якої можна обчислити ймовірність будь-якого можливого значення ВВ: $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Ця формула є математичною моделлю закону розподілу.

7.2.2 Функція розподілу

Найбільш загальним способом завдання закону розподілу для ДВВ і НВВ є використання функції розподілу $F(x)$ (*інтегральна функція розподілу*).

Функцією розподілу ВВ X називається функція $F(x)$, яка дорівнює ймовірності того, що ВВ набуває довільне можливе значення, менше узятого значення аргументу x , тобто $F(x) = P(-\infty < X < x)$ або $F(x) = P(X < x)$.

Властивості функції $F(x)$:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$;
3. функція $F(x)$ — неспадна функція;
4. якщо x_1 — найменше можливе значення ВВ X , а x_n — її найбільше можливе значення, то $\forall x \in (-\infty; x_1] F(x) \equiv 0$ й $\forall x \in (x_n; +\infty) F(x) \equiv 1$.

7.2.3. Щільність розподілу

НВВ можна також задати *щільністю* (*диференціальною функцією*) розподілу $f(x)$.

Щільністю розподілу НВВ X називається перша похідна від функції розподілу $F(x)$ цієї ВВ, тобто $f(x) = F'(x)$. Отже, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. Поняття щільності розподілу не має сенсу для дискретної випадкової величини.

Графік щільності розподілу називається *кривою розподілу* НВВ.

Властивості функції $f(x)$:

$$1. f(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; +\infty);$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ якщо всі можливі значення ВВ } X \text{ належать відрізку } [a; b],$$

$$\text{то } \int_a^b f(x) dx = 1;$$

$$3. P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

7.3. Числові характеристики випадкових величин

1. Мода M_0

Модю ДВВ називається її найбільш ймовірне можливе значення, тобто, значення, для якого виконується умова $P(X = M_0) > P(X \neq M_0)$. Отже, мода ДВВ — це таке значення ВВ $X = x_k$, для якого ймовірність p_k більше ніж для решти значень.

Модю НВВ називається те її можливе значення, при якому щільність розподілу найбільша. Отже, для знаходження моди НВВ використовується рівняння $f'(x)|_{x=M_0} = 0$.

2. Медиана Me

Медіаною ВВ називається те її можливе значення, для якого однаково ймовірно то, що ВВ набуває значення більше або менше ніж $X = Me$, тобто виконується умова $P(X > Me) = P(X < Me)$. Отже, для знаходження медіани використовується рівняння $F(x)|_{x=Me} = 0,5$.

3. Математичне сподівання $M(X)$ і його властивості

$$\text{ДВВ: } M(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

$$\text{НВВ: } M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Властивості математичного сподівання ВВ

$$1. M(C) = C, C - \text{const};$$

$$2. M(CX) = CM(X);$$

3. $M(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \dots \cdot M(X_n)$, де $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — взаємно незалежні випадкові величини;

$$4. M(X - Y) = M(X) - M(Y);$$

$$5. M\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n M(X_k);$$

$$6. \text{ Нехай } \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k. \text{ Тоді } M(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M(X_k).$$

$$7. \text{ Якщо } M(X_k) = a \ (k = \overline{1, n}), \text{ тоді } M(\bar{X}) = a;$$

$$8. M(X - M(X)) = 0.$$

Початковий момент k -го порядку ВВ $v_k = M(X^k)$, отже, $v_1 = M(X)$.

Центральний момент k -го порядку ВВ $\mu_k = M(X - M(X))^k$. Тоді $\mu_1 = 0$.

4. Дисперсія й середньоквадратичне відхилення

Дисперсією називається математичне сподівання квадрата відхилу випадкової величини від її центра розподілу $D(X) = M(X - M(X))^2 = \mu_2$.

Середньоквадратичне відхилення — $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Для обчислення дисперсії ВВ застосовуються формули:

$$\text{Для ДВВ } D(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - M(X))^2 \text{ або } D(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - M^2(X).$$

$$\text{Для НВВ } D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (x - M(X))^2 dx \text{ або } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - M^2(X).$$

Властивості дисперсії ВВ

$$1. D(C) = 0;$$

$$2. D(X) = M(X^2) - M^2(X) \text{ або } \mu_2 = v_2 - v_1^2;$$

$$3. D(X + Y) = D(X) + D(Y), \ X, Y \text{ — незалежні ВВ};$$

$$4. D(CX) = C^2 D(X);$$

$$5. D(X - Y) = D(X) + D(Y), \ X, Y \text{ — незалежні ВВ};$$

$$6. D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(X_k). \text{ Якщо } D(X_k) = d, \ X_k \ (k = \overline{1, n}) \text{ — незалежні випад-}$$

кові величин, тоді $D(\bar{X}) = d/n$ й $\sigma(\bar{X}) = \sigma/\sqrt{n}$.

7.4. Деякі закони розподілу ДВВ

Нехай виконується n незалежних випробувань, в кожному з яких подія A може відбутися з однаковою ймовірністю $p = P(A)$ або не відбутися з ймовір-

ністю $q = 1 - p$. Позначимо через X випадкову величину, яка описує кількість появ події A в n незалежних іспитах. Тоді ймовірність того, що подія A в серії з n незалежних випробувань з'явиться рівно k разів — $P_n(k)$ або те, що ВВ X прийме значення рівне k , обчислюється за формулою Бернуллі (математична модель біноміального закону).

1. Біноміальний закон розподілу (формула Я. Бернуллі)

$$P_n(X = k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad q = 1 - p, \quad (n \leq 30), \quad \sum_{k=0}^n P_n(k) = 1.$$

$$P_n(X < k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

$$P_n(X > k) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

$$P_n(X \leq k) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k);$$

$$P_n(X \geq k) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n) = 1 - P_n(0 \leq X < k)$$

Числові характеристики

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq},$$

$$np + p \in N \Rightarrow \exists Mo_1 = np + p, Mo_2 = np - q; \quad np + p \notin N \Rightarrow Mo = [np + p].$$

2. Розподіл Пуассона (асимптотична формула Пуассона)

$$P(X = k) \approx \frac{a^k}{k!} e^{-a} \quad (k = 0, 1, \dots), \quad a = np, \quad 0 < p < 0,1, \quad n - \text{достатньо велике,}$$

e — основа натуральних логарифмів, a — параметр закону Пуассона.

Формула Пуассона є асимптотичною, так як вона дає тим більше точний результат, чим більше число випробувань n .

Числові характеристики — $M(X) = a, \quad D(X) = a$.

Рівність математичного сподівання й дисперсії використовується для перевірки на практиці гіпотези про пуассонівський закон розподілу випадкової величини.

3. Локальна теорема Муавра-Лапласа

У випадку, коли число повторних випробувань n велике, а ймовірність p не прямує до нуля, доцільно використовувати асимптотичну формулу Муавра —

$$\text{Лапласа: } P_n(k) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Властивості функції $\varphi(x)$:

1. функція $\varphi(x)$ — табульована, її значення можна обчислити, наприклад, використовуючи інженерний калькулятор;

2. $\varphi(x)$ — парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;
3. $\varphi(x)$ — додатна, тобто $\varphi(x) > 0 \quad \forall x \in R$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$, тобто при зростання аргументу x значення функції $\varphi(x)$ швидко спадають від найбільшого значення $\varphi(0) \approx 0,3989$ до нуля, ось чому значення функції $\varphi(x)$ в таблицях приводяться для $x \in [0; 5]$.

4. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа

Ймовірність того, що при достатньо великому числі n повторних випробувань подія A відбудеться від k_1 до k_2 разів може бути наближено обчислена за

формулою $P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — нормована

функція Лапласа, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ й $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Властивості функції $\Phi(x)$:

1. $\Phi(x)$ — табульована;
2. $\Phi(x)$ — непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;
3. $\Phi(x) = 0,5$ для $x = 0$, ось чому в таблиці приводяться її значення тільки для $0 \leq x \leq 5$.

7.5. Деякі закони розподілу НВВ

1. Рівномірний розподіл

Рівномірний розподіл має місце у випадку, коли ймовірність потрапляння значень ВВ в заданий інтервал рівномірно розподілена усередині деякого відрізка $[a; b]$. Тоді щільність розподілу $f(x)$ ВВ і її функція розподілу $F(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & 0 < x < b \\ 0, & x \geq b \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & 0 < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$

Числові характеристики

$$Me = Mo = (a + b) / 2; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad \sigma(X) \approx 0,289(b-a).$$

Ймовірність потрапляння значень рівномірно розподіленої ВВ в інтервал $(c; d) \subset (a; b)$ обчислюється за формулою $P(c < X < d) = \frac{d-c}{b-a}$.

2. Показниковий розподіл

За показниковим розподілом, наприклад, розподілено час між двома викликами на диспетчерському пункті, час безвідмовної роботи агрегатів тощо.

Описується показниковий розподіл наступними співвідношеннями

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Числові характеристики

$$M_0 = 0, \quad M_e = \frac{\ln 2}{\lambda}, \quad M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ймовірність потрапляння значень ВВ X , що має показниковий розподіл, в інтервал $(\alpha; \beta)$ дорівнює $P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}$.

3. Нормальний розподіл

Математичною моделлю щільності нормального розподілу є функція

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in R. \quad \text{Графік щільності нормально розподіленої НВВ,}$$

називається *нормальною* або *гауссовою кривою*.

Нормальний розподіл повністю визначається своїми двома параметрами $M(X) = M_0 = M_e = a$ і $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sigma$. Параметр a є центром симетрії нормального розподілу. При змінюванні параметру a крива розподілу буде зсуватися вздовж осі абсцис, не змінюючи свою форму. Параметр σ характеризує форму нормальної кривої. Найбільша ордината нормальної кривої обернено пропорційна σ . Так як площа, обмежена гауссовою кривою і віссю абсцис завжди чисельно дорівнює одиниці, то при зростанні параметру σ крива стає більш плоскою і розтягується вздовж осі абсцис і навпаки, якщо параметр σ зменшується, нормальна крива витягується угору і стискується з обох сторін.

Ймовірність потрапляння нормально розподіленої ВВ X в заданий інтервал $(a; b)$ обчислюється за формулою $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, де

$\Phi(x)$ — наведена вище функція Лапласа. Безпосередньо можна переконатися в тому, що $P(|X - a| > 3\sigma) \approx 0,0027$, тобто малоімовірно, що можливі значення нормально розподіленої ВВ X будуть віддалені від її центра розподілу на величину більшу потрійного середньоквадратичного відхилення. Виконання правила «трьох сигм» є вагомим доводом на користь гіпотези про нормальний розподіл випадкової.

При вивченні різноманітних законів розподілу випадкових величин їх часто порівнюють з нормальним законом розподілу. С цією метою вводяться характеристики, які називаються *асиметрією* і *ексцесом*.

Асиметрією розподілу називається величина, яка визначається співвідношенням $A_S = \frac{M(X - M(X))^3}{\sqrt{D(X)^3}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Коефіцієнт асиметрії назначено для оцінки «скошеності» розподілу відносно центра розподілу.

Ексцесом розподілу називається характеристика, яка визначається рівністю $E_k = \frac{M(X - M(X))^4}{\sqrt{D(X)^4}} - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$. Ексцес розподілу служить для характеристики «крутості» нормальної кривої, тобто яким буде розподіл — «гостроверхим» ($E_k > 0$) або «плосковерхим» ($E_k < 0$). Для нормального розподілу $A_S = 0$ й $E_k = 0$.

4. Розподіл χ^2 «хі-квадрат»

За законом χ^2 розподілена сума n квадратів незалежних нормально розподілених величин, кожна з яких має математичне сподівання, яке дорівнює нулю і дисперсію рівну одиниці. Параметр n розподілу носить назву «число степенів свободи». Числові характеристики розподілу χ^2 такі: $M\chi^2 = n$ і $D\chi^2 = 2n$. При достатньо великих n розподіл «хі-квадрат» практично не відрізняється від нормального. Щільність розподілу «хі-квадрат» визначається співвідношенням

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2^{n/2}} \Gamma(n/2) \exp(-x/2) x^{n/2-1}, & x > 0 \end{cases}$$

де $\Gamma(n/2) = \int_0^{\infty} t^{n/2-1} e^{-t} dt$ — символ гамма-функції.

5. Розподіл Стьюдента (t – розподіл)

За законом Стьюдента розподілена наступна комбінація випадкових величин $T = \frac{Z\sqrt{n}}{V}$, де Z — ВВ, яка має нормальний закон розподілу з $M(Z) = 0$ і $D(Z) = 1$, а ВВ V розподілена за законом χ^2 з n степенями свободи. Отже, t – розподіл також має один параметр n . Щільність t – розподілу виражається

формулою $f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, t \in R$. Числові характеристики розпо-

ділу Стюдента такі: $M(T) = 0$, $D(T) = \infty, n = 1, 2$ і $D(T) = \frac{n}{n-2}, n > 2$. За формою t -розподіл нагадує нормальний розподіл, але більш повільно спадає з ростом $|t|$.

7.6. Закон великих чисел (ЗВЧ)

ЗВЧ у формі Я. Бернуллі. Нехай проводиться n повторних випробувань. Якщо ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює p , відносна частота події дорівнює $\frac{m}{n}$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$, тобто відносна частота події A збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події, тобто $W(A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} P(A)$.

ЗВЧ у формі П. Л. Чебишева. Нехай випадкові величини X_1, X_2, \dots, X_n незалежні і існує число $C > 0$ таке, що $D(X_i) < C, i = 1, 2, \dots, n$. Тоді для будь-якого

$\varepsilon > 0$ виконується співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1$, тобто

середнє арифметичне випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань.

7.7. Елементи математичної статистики

7.7.1. Основні визначення і поняття

Вибіркою називається сукупність випадково відібраних об'єктів. Вся сукупність, з якої здійснюється вибірка, називається *генеральною сукупністю*. *Об'ємом* сукупності (генеральної або вибіркової) називається кількість елементів цієї сукупності.

Вибірка називається *репрезентативною*, якщо вона має таку кількість і склад об'єктів, при яких інформація про генеральну сукупність, отримана на основі вивчення даної вибірки буде адекватною.

Якщо спостережені значення ознаки розташувати у порядку зростання, то отримаємо *варіаційний ряд* $(x_1, n_1 | x_2, n_2 | \dots | x_k, n_k)$, де n_i — кількість спосте-

режених значень ознаки, кожне з яких x_i , $i \in \overline{1, k}$, а $\sum_{i=1}^k n_i = n$ — об'єм вибірки.

При цьому значення x_i називають *варіантами*, n_i — їх *абсолютними частотами*, а $w_i = \frac{n_i}{n}$ — їх *відносними частотами* або статистичними ймовірностями. Для заданої вибірки статистичний ряд розподілу відносних частот записують у вигляді таблиці

Таблиця 7.2.

X	x_1	x_2	...	x_k
w	w_1	w_2	...	w_k

Записаний таким чином статистичний ряд доцільно використовувати для ДВВ, коли кількість спостережених значень не дуже велике. В протилежному випадку або у випадку НВВ вважають, що генеральною сукупністю є проміжок $[a; b)$, який поділяють на k проміжків $[x_{i-1}; x_i)$, $i \in \overline{1, k}$ однакової довжини $h = \frac{b-a}{k}$. Отже, $x_0 = a$, $x_k = b$, $x_i = a + ih$, $i \in \overline{1, k}$. Для визначення числа k часто використовують формулу Стерджесса $k = 1 + 3,322 \lg n$, де n — обсяг вибірки. Для кожного $i \in \overline{1, k}$ підраховують кількість n_i спостережених значень, які потрапили в проміжок $[x_{i-1}; x_i)$ та складають інтервальний статистичний ряд розподілу:

Таблиця 7.3.

X	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$...	$x_k - x_{k-1}$
n	n_1	n_2	...	n_k

Для графічного зображення варіаційних рядів використовують *полігон* і *гістограму*.

Дискретний варіаційний ряд ілюструють *полігоном частот*. Для його побудови в прямокутній системі координат наносять точки (x_i, n_i) або (x_i, w_i) , де x_i — варіанта, а n_i (w_i) — частота (відносна частота) і з'єднують відрізками прямих. Отримана лінія називається *полігоном частот вибірки*.

Для зображення інтервальних рядів використовують *діаграми*, які називаються *гістограмами*. Для побудови гістограми в системі координат на осі абсцис наносять точки x_1, x_2, \dots, x_k . Потім будують прямокутники з основами $(x_{i-1}; x_i)$ і висотами n_i (w_i). Побудована східчаста фігура називається *гістограмою частот* (відносних частот).

Емпіричною функцією розподілу вибірки називають функцію $F_n(x)$, значення якої дорівнюють відносній частоті події $X < x$, тобто $F_n(x) = \omega(x)/n$, де $\omega(x)$ — кількість тих варіант x_j , для яких виконуються нерівність $x_j < x$.

Властивості функції $F_n(x)$:

1. Значення функції $F_n(x)$ належать відрізку $[0;1]$.
2. $F_n(x)$ — неспадна функція, зростає в точках x_i , $i = \overline{1, k}$ з стрибками $\frac{n_i}{n}$.
3. $F_n(x)$ — невід'ємна, стала на кожному з проміжків і неперервна зліва функція.
4. Якщо x_1 — найменша, а x_k — найбільша варіанта, то $F_n(x) = 0$ при $x \leq x_1$ і $F_n(x) = 1$ при $x \geq x_k$.

Ламану лінію, яка зображає функцію $F_n(x)$, називають *кумулятою*. Для достатньо великих значень n функції $F_n(x)$ і $F(x)$ (теоретична функція розподілу) мало відрізняються друг від друга.

7.7.2. Статистичні оцінки розподілу

Оцінку θ^* називають *незміщеною*, якщо її математичне сподівання співпадає з оцінюваним параметром, тобто $M(\theta^*) = \theta$.

Ефективною називається статистична оцінка така, що при заданому об'ємі вибірки вона має найменшу можливу дисперсію.

Спроможною називається статистична оцінка така, що при необмеженому зростанні об'єму вибірки вона за ймовірністю прямує до оцінюваного параметру, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\theta_n - \theta| < \varepsilon) = 1$.

Статистичні оцінки бувають *точкові* і *інтервальні*.

Точковою називається статистична оцінка, яка визначається одним числом.

Інтервальною називається статистична оцінка, яка визначається двома числами — кінцями інтервалу, який покриває оцінюваний параметр.

Для вибірки, статистичний ряд розподілу якої задано таблицею

Таблиця 7.4.

X	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

числовими характеристиками є:

- спостережені значення — мінімальне x_{\min} й максимальне x_{\max} ;

- розмах вибірки $R = x_{\max} - x_{\min}$;

- мода M_o — варіанта з найбільшою частотою в статистичному ряді розподілу частот;

- медіана — точка $Me \in [x_{\min}, x_{\max}]$, для якої $P(X < Me) = P(X > Me)$, тобто медіана поділяє варіаційний ряд навпіл. Якщо варіаційний ряд містить непарне число варіант $n = 2m + 1$, то $Me = x_{m+1}$. Якщо число варіант парне і дорівнює $n = 2m$, то $Me = \frac{x_m + x_{m+1}}{2}$;

- вибіркове середнє (статистичне) спостережених значень $\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i n_i$;

- статистична дисперсія $D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - (\bar{x}_B)^2$;

- статистичне середньоквадратичне відхилення $\sigma_B = \sqrt{D_B}$;

- «виправлена» статистична дисперсія $S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^k x_i^2 n_i - n(\bar{x}_B)^2 \right)$;

- «виправлене» середньоквадратичне відхилення $s = \sqrt{S^2}$.

Інтервальні оцінки застосовуються для характеристики точності і надійності точкових оцінок.

Точність оцінки визначається з міркувань: якщо $|\theta - \theta^*| < \delta$, то чим менше додатне число δ , тим точніше статистична оцінка θ^* наближає оцінюваний параметр θ .

Ймовірність γ , з якою виконується нерівність $|\theta - \theta^*| < \delta$, називається довірчою ймовірністю або надійністю оцінки параметра θ за знайденим значенням θ^* .

Співвідношення $P(|\theta - \theta^*| < \delta) = \gamma$ означає, що інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ покриває оцінюваний параметр θ з ймовірністю γ . В цьому випадку інтервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$ називають довірчим (надійним) інтервалом, число γ — надійністю, а δ — точністю оцінки.

Наприклад, якщо досліджувана кількісна ознака X деякої генеральної сукупності має нормальний розподіл з відомим середньоквадратичним відхилом

σ , то невідоме математичне сподівання $M(X)$ можна оцінити за вибірковою середньою \bar{x}_B наступним чином:

$$\bar{x}_B - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M(X) < \bar{x}_B + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Тут значення параметра t визначається з співвідношення $2\Phi(t) = \gamma$.

Для надійного інтервалу, який покриває середньоквадратичне відхилення σ із заданою довірчою ймовірністю γ , вірно співвідношення

$$s(1 - q) < \sigma < s(1 + q),$$

де s — вибіркоче середньоквадратичне відхилення, а параметр q визначається із спеціальної таблиці в залежності від надійності γ і об'єму вибірки n .

7.8. Елементи теорії кореляції. Вибіркові рівняння регресії

Нехай при дослідженні потрібно встановити й оцінити кількісно залежність між випадковими величинами (ознаками) Y, X, \dots . Будь-які дві (або більше) ознаки можуть бути:

- зв'язані функціональною залежністю;
- зв'язані статистичною залежністю;
- незалежними.

Для експериментальних досліджень значний інтерес представляє встановлення статистичної залежності або незалежності ознак. При наявності статистичної залежності змінювання однієї з величин тягне за собою зміну розподілу другої. Зокрема, коли при зміні однієї з ознак змінюється середнє значення другої ознаки, залежність між ними називається кореляційною.

Нехай вивчається система кількісних ознак X і Y . В результаті випробувань отримані впорядковані пари чисел (x_i, y_j) . Статистичне дослідження проводиться для знаходження вибіркового рівняння лінії середньоквадратичної регресії.

В лінійному випадку треба знайти рівняння $y = a \cdot x + b$ лінійної регресії Y на X або $x = a_1 \cdot y + b_1$. Параметри a і b підбираються так, щоб сума квадратів відхилень $\sum \delta_i^2 = \sum (y_i - a \cdot x_i - b)^2$ була мінімальною, у відповідності до суті метода найменших квадратів (МНК). Так як одне й те саме значення ознаки x_i може зустрітися n_i разів, одне й те саме значення y_j — n_j разів, одна й та сама пара чисел (x_i, y_j) — n_{ij} разів, то всі згруповані дані записуються в кореляційну таблицю.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії Y на X має вигляд:

$$y - \bar{y} = r_g \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}),$$

де y — умовна середня (розрахункове значення Y);

\bar{y}, \bar{x} — вибіркові середні ознак Y і X ;

σ_y, σ_x — вибіркові середньоквадратичні відхилення;

r_g — вибірковий коефіцієнт кореляції.

За даними кореляційної таблиці $r_g = \frac{\sum n_{ij} x_i \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{n \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y}$.

Вибіркове рівняння прямої лінії регресії X на Y має вид:

$$x - \bar{x} = r_g \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y}).$$

При $r_g = 1$ між величинами X і Y існує лінійна функціональна залежність, при $r_g = 0$ лінійна залежність відсутня. Для оцінки тісноти лінійного кореляційного зв'язку використовують величину $|r_g|$, причому необхідно перевірити значущість цього коефіцієнта.

Якщо графік лінії регресії — крива лінія, тоді кореляцію називають криволінійною. Наприклад, при квадратичній кореляції вибіркове рівняння регресії Y на X має вид: $y = A \cdot x^2 + B \cdot x + C$. На підставі МНК дістають систему лінійних рівнянь відносно невідомих параметрів A, B, C .

Якщо змінювана ознака Y залежить від декількох випадкових величин X_1, X_2, \dots, X_n , тоді статистичний аналіз виконується методами множинної регресії. Вибіркове рівняння множинної регресії Y на X_1, X_2, \dots, X_n має вид:

$$y = A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \dots + A_0.$$

7.9. Завдання для самостійного розв'язування

ЗАДАЧА 1.

1.1. В урні 20 куль, серед яких 8 кольорових. Навмання дістають три кулі.

Знайти ймовірність таких подій: 1) вибрали всі кольорові кулі; 2) вибрали дві кольорові кулі; 3) вибрали хоча б одну кольорову кулю.

1.2. Із гральної колоди в 36 карт навмання вибирають 4 карти. Знайти ймовірність таких подій: 1) вибрали 3 карти чорної масті; 2) вибрали хоча б одну карту пікової карти; 3) вибрали 4 королі.

1.3. Для контролю якості вибрали для випробування 60 деталей, серед яких 50 стандартних. Знайти ймовірність того, що із двох навмання вибраних

деталей: 1) коча б одна буде бракованою; 2) усі деталі стандартні; 3) є одна стандартна і одна бракована деталі.

1.4. Кинуті дві гральні кістки. Яка ймовірність того, що сума очок буде не більше 4.

ЗАДАЧА 2.

2.1. Ймовірності того, що студент витримає перший, другий та третій іспити дорівнюють відповідно 0,7, 0,8 і 0,6. Знайти ймовірності таких подій: 1) студент витримає тільки два іспити; 2) студент витримає не менше одного іспиту.

2.2. Для сигналізацію про пожежу встановили два датчики, ймовірність спрацювання яких становить 0,9. для підвищення безпеки підключили третій датчик, ймовірність спрацювання якого дорівнює 0,95. Знайти ймовірності таких подій: 1) при пожежі сигналізація спрацює; 2) спрацюють тільки 2 датчики.

2.3. Над виготовленням швейного вибору працюють три швачки. Перша з них може припустити брак з ймовірністю 0,1, друга – 0,3, третя – 0,4. Знайти ймовірність виготовлення бракованого виробу.

2.4. Батарея з трьох гармат зробила залп по цілі. Для поразки цілі достатньо одного влучення. Знайти ймовірність поразки цілі, якщо ймовірність влучення в ціль першою, другою та третьою гарматою відповідно дорівнює 0,4; 0,3; 0,5.

ЗАДАЧА 3.

3.1. У ящику знаходиться 50 деталей, які виготовлені на першому верстаті, 25 деталей, виготовлених на другому і 75 деталей – на третьому верстатах. На першому верстаті виготовляється 90% стандартних деталей, на другому і третьому верстатах – відповідно 85 і 95%. Навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Яка ймовірність того, що вона виготовлена на другому верстаті.

3.2. У перше депо прибуло 8 тепловозів, у друге – 12 тепловозів, а в третє – 10 тепловозів. Ймовірність того, що тепловоз буде відремонтований бездоганно для першого депо дорівнює 0,85, для другого і третього – відповідно 0,95 і 0,9. Навмання перевірений тепловоз відремонтований бездоганно. Знайти ймовірність того, що його ремонтували в третьому депо.

3.3. На конвеєр надходить 20 деталей із першого, 30 деталей із другого і 50 деталей із третього цехів. Ймовірність виготовлення стандартної деталі першим цехом дорівнює 0,9; відповідно для другого і третього цехів ця величина становить 0,95 і 0,85. Знайти ймовірність того, що 1) навмання вибрана деталь буде стандартною; 2) навмання взята деталь виявилась бракованою. Знайти ймовірність того, що в першому пункті деталь виготовлена другим цехом.

3.4. У групі 25 студентів, з яких 5 чоловік знають 90% екзаменаційних білетів по кожному з трьох розділів курсу, 7 чоловік – 70% ; 9 чоловік – 60% і 4 чоловіки – 50%. На іспиті студент з цієї групи дав вірні відповіді на два запитання по двох розділах програми і відмовився відповідати на запитання по третьому розділу. Яка ймовірність того, що даний студент вивчив 90% програми?

ЗАДАЧА 4.

4.1. В університеті на першому курсі навчається 800 студентів. Після першої сесії усі іспити склали 75% студентів. Знайти ймовірність того, що: 1) навмання вибрана студентська група із 25 чоловік склала усі іспити; 2) склали всі іспити від 580 до 620 навмання вибраних студентів.

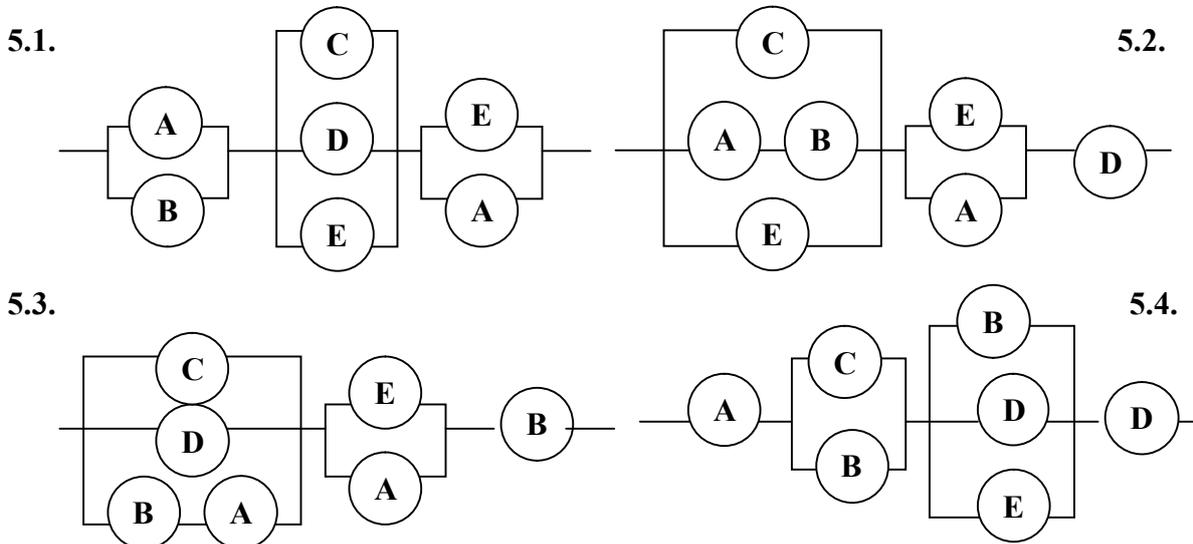
4.2. Із кожних п'яти студентів три отримують стипендію. Знайти ймовірність того, що із 960 студентів першого курсу: 1) не менш 600 студентів отримують стипендію; 2) 650 студентів отримують стипендію.

4.3. Гральний кубик підкидають 180 разів. Знайти ймовірність таких подій: 1) цифра 4 випаде 25 разів; 2) цифра 5 випаде не менш 40 разів; 3) цифра 3 випаде від 20 до 30 разів.

4.4. Ймовірність будь-якому абоненту подзвонити на комутатор на протязі години дорівнює 0,01. Телефонна станція обслуговує 300 абонентів. Яка ймовірність того, що на протязі години подзвонить: 1) 4 абоненти; 2) від 2 до 5 абонентів.

ЗАДАЧА 5.

Ділянка електричного ланцюга складається з елементів, кожен з яких працює незалежно від іншого. Елементи не виходять з ладу за певний проміжок часу з ймовірністю $P(A) = 0,9$; $P(B) = 0,8$; $P(C) = 0,7$; $P(D) = 0,6$; $P(E) = 0,5$. Знайти ймовірність безвідмовної роботи ділянки.



ЗАДАЧА 6.

Незалежні випадкові величини X і Y мають задані розподіли. Знайти закони розподілу, математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкових величин $X + Y$, $X \cdot Y$.

6.1.	X	- 3	1	2
	p	0,3	0,5	0,2
6.2.	X	4	- 2	3
	p	0,3	0,1	0,6
6.3.	X	- 3	2	3
	p	0,1	0,6	0,3
6.4.	X	- 2	3	8
	p	0,2	0,3	0,5

Y	- 4	6	5
	p	0,4	0,5
Y	- 1	4	5
	p	0,5	0,4
Y	3	- 3	2
	p	0,1	0,5
Y	- 2	3	5
	p	0,4	0,4

ЗАДАЧА 7.

Неперервна випадкова величина X задана функцією щільності розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ C \cdot \varphi(x), & a \leq x \leq b. \\ 0, & x > b \end{cases}$$

Потрібно знайти: 1) функцію $F(x)$ і побудувати її

графік; 2) значення сталого множника C ; 3) значення $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$,

M_0 , M_1 ; 4) ймовірність того, що при досліді X набуває значення із проміжку $(\alpha; \beta)$. Вид функції $\varphi(x)$ і межі інтервалів $[a; b]$ та $(\alpha; \beta)$ приведені в таблиці.

	$\varphi(x)$	a	b	α	β
7.1.	$-x^2 + 12x - 11$	1	10	2	8
7.2.	$-x^2 + 14x - 24$	5	12	4	9
7.3.	$-x^2 + 16x - 39$	3	12	6	10
7.4.	$-x^2 + 18x - 56$	6	14	5	10

ЗАДАЧА 8.

У відділі технічного контролю виміряли глибину пазів партії 100 плашок (генеральна сукупність), виготовленої одним автоматичним верстатом. У таблиці наведено вибіркові результати вимірювання (в мм). Знайти статистичний розподіл цієї вибіркової сукупності у вигляді таблиці частот вибірки. Знайти емпіричну функцію розподілу і її графік. Побудувати полігон та гістограму частот. Знайти вибіркове середнє, вибіркову дисперсію, вибіркове середнє квадратичне відхилення глибини пазу.

- 8.1. 2,4; 2,5; 2,7; 2,2; 2,6; 2,7; 2,8; 2,6; 2,3; 2,4; 2,7; 2,4; 2,5; 2,6; 2,6;
2,4; 2,4; 2,5; 2,4; 2,3; 2,5; 2,6; 2,4; 2,4; 2,2; 2,4; 2,4; 2,4; 2,5; 2,2.
- 8.2. 2,8; 2,9; 2,2; 2,4; 2,3; 2,4; 2,5; 2,5; 2,3; 2,4; 2,6; 2,7; 2,6; 2,5; 2,5;
2,6; 2,6; 2,5; 2,5; 2,6; 2,5; 2,1; 2,6; 2,4; 2,7; 2,4; 2,6; 2,7; 2,5; 2,3
- 8.3. 2,3; 2,4; 2,5; 2,2; 2,1; 2,5; 2,8; 2,7; 2,4; 2,3; 2,1; 2,6; 2,5; 2,6; 2,4;
2,7; 2,6; 2,4; 2,5; 2,3; 2,5; 2,4; 2,5; 2,5; 2,4; 2,5; 2,6; 2,4; 2,4; 2,6
- 8.4. 2,8; 2,6; 2,4; 2,5; 2,4; 2,2; 2,6; 2,3; 2,5; 2,4; 2,4; 2,5; 2,7; 2,2; 2,6;
2,7; 2,8; 2,6; 2,3; 2,4; 2,7; 2,4; 2,5; 2,6; 2,6; 2,4; 2,4; 2,5; 2,4; 2,3

ЗАДАЧА 9.

Генеральна сукупність ξ має нормальний закон розподілу. За вибіркою із неї об'єму n знайдено вибіркове середнє \bar{x} і „підправлене” вибіркове середнє квадратичне відхилення s . Знайти довірливий інтервал, який покриває математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення з надійністю γ .

	n	\bar{x}	s	γ
9.1.	100	40,2	1,12	0,95
9.2.	105	38,5	1,05	0,99
9.3.	110	40,1	0,125	0,999
9.4.	115	50,5	1,50	0,95

ЗАДАЧА 10.

Виконано статистичне дослідження зросту і ваги студентів групи. Зробити статистичний аналіз вибірки X (зріст) і Y (вага)

- 10.1 *зріст* 157 167 173 178 163 166 185 178 178 164 173 169 165
167 169 171 170 165 169 176 165 171 171 164 183
вага 48 52 84 70 51 83 72 68 83 69 69 63 56
77 80 73 71 57 64 77 59 66 73 76 82
- 10.2 *зріст* 171 181 176 178 167 178 172 173 173 162 170 166 163
156 168 174 179 177 173 169 175 161 163 185 173
вага 69 85 74 80 71 68 56 71 56 62 75 52 57 59
74 64 77 70 70 55 71 60 68 70 52
- 10.3 *зріст* 167 188 164 166 163 167 166 171 176 184 178 175 173
177 174 174 168 181 183 174 167 167 168 166 179

<i>вага</i>	72	97	62	55	63	55	65	69	67	79	71	62	60	60
	63	72	68	61	86	61	49	67	71	62	62			

10.4 <i>зріст</i>	182	163	179	177	188	165	178	180	168	178	175	170	177
	174	177	172	173	186	172	180	163	170	177	160	176	
<i>вага</i>	75	59	62	67	85	57	71	78	67	70	76	51	75
	77	67	52	83	52	69	60	69	69	46	62		

7.10. Приклади тестових завдань

Змістовий модуль № 6

Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

Тестове завдання

У завданнях 1 — 6 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Яка з рівностей завжди є вірною (A і B — довільні випадкові події)?

а	б	в	г
$P(A) = P(B)$	$P(A + B) = P(A) + P(B)$	$P(A) + P(\bar{A}) = 1$	$P(AB) = P(A)P(B)$

2. Двічі підкинуто монету. Г – випав герб, Ц – припала цифра. Описати подію C – припала цифра принаймні один раз.

а	б	в	г
$C = \{ЦЦ, ГГ\}$	$C = \{ГЦ, ГГ, ЦЦ\}$	$C = \{ЦГ, ГЦ\}$	$C = \{ЦЦ, ЦГ, ГЦ\}$

3. У ящику знаходиться 8 білих та 12 чорних кульок. Навмання беруть дві кульки. З якою ймовірністю хоча б одна з них буде білого кольору?

а	б	в	г
0,325	0,653	0,712	0,248

4. На площину круга кинуто точку. З якою ймовірністю вона буде віддалена від центра круга на відстань більше одиниці, якщо діаметр круга дорівнює п'яти.

а	б	в	г
0,84	0,65	0,16	0,35

5. У майстерні працюють три верстати. Перший верстат протягом зміни потребує налагодження з ймовірністю 0,12, другий — з ймовірністю 0,15, а для третього верстата ця ймовірність дорівнює 0,1. З якою ймовірністю жоден верстат не потребує налагодження?

а	б	в	г
0,84	0,58	0,673	0,359

6. У 2000 – 2008 роках кількість студентів N -ського університету, які отримали диплом з відзнакою становила: 30, 25, 28, 25, 20, 24, 20, 20, 15. Знайти 1) середнє значення вибірки, 2) моду і 3) медіану.

	а	б	в	г
Середнє значення	23	25	15	28
Мода	30	28	20	25
Медіана	20	24	25	30

Розв'язання задач 7-11 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

7. У змаганні брало участь 10 майстрів спорту, 5 кандидатів і 15 першорозрядників. Ймовірності виконати норму майстра для них дорівнюють відповідно 0,7; 0,5 і 0,2. Навмання вибраний учасник виконав норму. Яка ймовірність того, що це кандидат?

8. Ймовірність того, що виріб не витримає випробування дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що з 3000 виробів не витримає випробування від 5 до 7 виробів.

9. На склад магазину надійшли нові вироби, 80% яких вищого ґатунку. Навмання беруть три вироби. Написати біномний закон розподілу випадкової величини X – кількості виробів вищого ґатунку серед трьох узятих навмання. Знайти ймовірність того, що таких виробів буде або два, або три (подія A).

10. Протягом року кількість проданих принтерів Epson FX-870 змінювалась таким чином

Місяць	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Кількість проданих принтерів	7	8	9	10	7	8	7	8	11	9	10	8

Складіть частотну таблицю, побудуйте полігон та гістограму частот. Знайдіть середнє значення вибірки та виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення — $s(X)$. До бланку відповідей занесіть значення $s(X)$.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Тестове завдання

Завдання 1. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні теореми про ймовірність суми та добутку випадкових подій.)

Завдання 2. Правильна відповідь: **г**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: елементарні події, простір елементарних подій).

Завдання 3. Правильна відповідь: **б**.

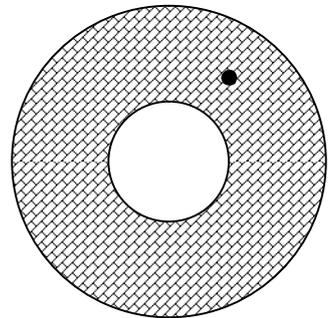
Розв'язання. Подія A — хоча б одна з двох навмання обраних кульок білого кольору. Тоді $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, де \bar{A} — протилежна подія, яка означає, що жодна з кульок не буде білого кольору, тобто обидві кульки будуть чорного кольору. За класичним означенням ймовірності дістаємо

$$P(A) = 1 - \frac{C_{12}^2}{C_{20}^2} = 1 - \frac{12!}{2! \cdot 10!} : \frac{20!}{2! \cdot 18!} = 1 - \frac{11 \cdot 12}{19 \cdot 20} \approx 0,653.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: комбінації (сполучення) з n елементів по k , класична ймовірність події, протилежні події).

Завдання 4. Правильна відповідь: **а**.

Розв'язання. Для того щоб точка була віддалена від центра круга на відстань, більше ніж одиниця, необхідно щоб вона опинилася за межами круга одиничного радіусу, центр якого співпадає з центром великого круга (див. рисунок). Якщо позначити через S площу великого круга, а через s — площу маленького круга, то за геометричним визначенням ймовірності шукана ймовірність дорівнює



$$P = \frac{S - s}{S} = 1 - \frac{s}{S} = 1 - \frac{\pi \cdot 1^2}{\pi(2,5)^2} = 1 - 0,16 = 0,84.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: геометричне тлумачення ймовірності події.)

Завдання 5. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. За теоремою ймовірності добутку незалежних подій шукана ймовірність дорівнює

$$P = (1 - 0,12) \cdot (1 - 0,15) \cdot (1 - 0,1) = 0,88 \cdot 0,85 \cdot 0,9 \approx 0,673.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: ймовірність протилежної події, ймовірність добутку незалежних подій.)

Завдання 6. Правильна відповідь: **(а; в; б)**.

Розв'язання. Складемо статистичний розподіл вибірки.

x_i	15	20	24	25	28	30
n_i	1	3	1	2	1	1

Об'єм вибірки $n = \sum_{i=1}^6 n_i = 9$. Знайдемо середнє значення вибірки за фор-

мулою

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i x_i}{n} = \frac{15 + 3 \cdot 20 + 24 + 2 \cdot 25 + 28 + 30}{9} = \frac{207}{9} = 23.$$

Мода — це варіанта з найбільшою частотою у статистичному розподілу частот. Отже, $Mo = 20$. Так як $n = 9 = 2m + 1$, то $Me = x_{m+1} = x_5 = 24$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: вибірка, частота варіанти, варіаційний ряд, середнє значення, мода та медіана вибірки.)

Завдання 7.

Розв'язання. Роздивимось гіпотези: навмання вибраний спортсмен є майстром спорту — гіпотеза B_1 , кандидатом в майстри спорту — гіпотеза B_2 , першорозрядником — гіпотеза B_3 . Подія A — навмання вибраний учасник виконав норму. Знайдемо ймовірності гіпотез

$$P(B_1) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}; P(B_2) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}; P(B_3) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}; \sum_{i=1}^3 P(B_i) = 1.$$

Знайдемо повну ймовірність події A за формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i)P_{B_i}(A) = 0,7 \cdot \frac{1}{3} + 0,5 \cdot \frac{1}{6} + 0,2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0,417.$$

На підставі формули Бейєса знаходимо ймовірність другої гіпотези, за умовою, що подія A здійснилася.

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_A(B_2)}{P(A)} = \frac{1/6 \cdot 0,5}{5/12} = 0,2.$$

Відповідь: 0,2.

Завдання 8.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка складається у тому що з 3000 виробів не витримає випробування від 5 до 7 виробів.

Маємо $p = 0,002$; $n = 3000$; $a = np = 6 < 9$. Отже, доцільно скористуватися формулою Пуассона. Тоді

$$P(A) = P_{3000}(5) + P_{3000}(6) + P_{3000}(7) \approx \frac{6^5}{5!} e^{-6} + \frac{6^6}{6!} e^{-6} + \frac{6^7}{7!} e^{-6} =$$

$$= \frac{6^5}{5!} e^{-6} \left(1 + 1 + \frac{6}{7} \right) \approx 0,459$$

Відповідь: 0,459.

Завдання 9.

Розв'язання. За умовою задачі ймовірність появи виробу вищого гатунку дорівнює $p = 0,8$. Тоді $q = 1 - p = 0,2$. Отже, формула Бернуллі матиме вигляд:

$$P_3(k) = C_3^k p^k q^{3-k}, k = 0, 1, 2, 3. \text{ Тоді шукана ймовірність дорівнює}$$

$$P(A) = P_3(2) + P_3(3) = C_3^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^1 + C_3^3 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2^0 = 3 \cdot 0,128 + 0,512 = 0,896.$$

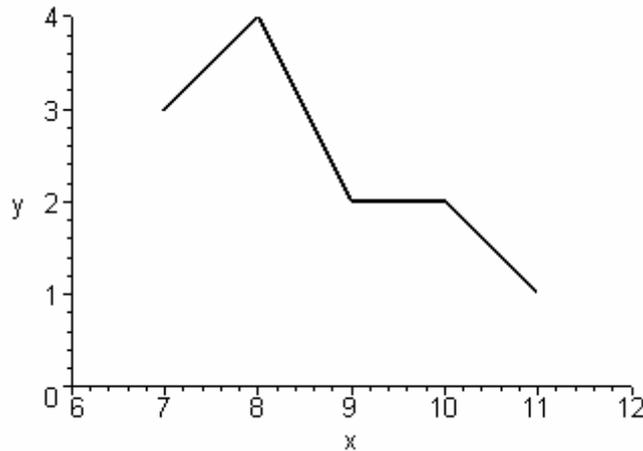
Відповідь: 0,896.

Завдання 10.

Розв'язання. Складемо статистичний розподіл вибірки

x_i	7	8	9	10	11
n_i	3	4	2	2	1

Полігон частот — це ломана лінія, що проходить через точки з координатами $A_i(x_i; n_i)$. Отже, полігон частот буде мати вигляд:

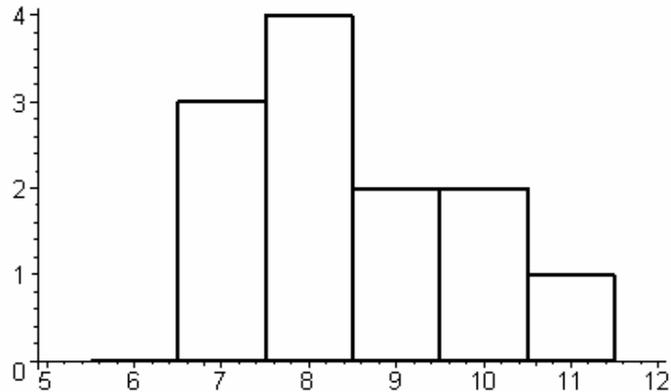


Для того щоб побудувати гістограму частот перетворимо дискретний ряд розподілу у інтервальний з довжиною інтервалу $h = 1$.

Роздивимося об'єднання інтервалів $(x_i - h/2; x_i + h/2)$, $i = 1, \dots, 6$. Тоді

x_i	(6,5;7,5)	(7,5;8,5)	(8,5;9,5)	(9,5;10,5)	(10,5;11,5)
n_i/h	3	4	2	2	1

Гістограма частот матиме вигляд



Знаходимо вибіркові значення за формулами:

Середнє вибіркове

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^5 \frac{n_i x_i}{n} = \frac{7 \cdot 3 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 1}{12} = \frac{102}{12} = 8,5.$$

Виправлену вибіркову дисперсію та виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^5 n_i x_i^2 - n \bar{x}^2 \right) = \frac{1}{11} \left(3 \cdot 7^2 + 4 \cdot 8^2 + 2 \cdot 9^2 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 11^2 - 12 \cdot 8,5^2 \right) =$$

$$= \frac{886 - 12 \cdot 72,25}{11} \approx 1,727; \quad s = \sqrt{S^2} \approx 1,314.$$

Відповідь: 1,314.

РОЗДІЛ ВОСЬМИЙ. КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

8.1. Комплексний аналіз. Основні визначення

ε -околом точки z_0 називається множина точок z комплексної площини C таких, що $|z - z_0| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ задане число.

Будемо позначати його як $\rho_\varepsilon(z_0)$. Зрозуміло, що ε -окіл $\rho_\varepsilon(z_0)$ є внутрішність круга радіуса ε з центром у точці z_0 .

Множину точок комплексної площини, які задовольняють умові $|z| > R > 0$ назвемо R -околом $\rho_R(\infty)$ нескінченно віддаленої точки. Нескінченно віддалену точку z будемо позначати символом ∞ .

Відмітимо, що означення функції комплексної змінної аналогічно відповідному означенню для функції дійсної змінної.

Нехай є дві площини Z і W комплексних чисел $z = x + iy$ та $w = u + iv$. Розглянемо деякі множини $D \subset Z$ і $E \subset W$ та їх відповідність.

Кажуть, що на множині $D \subset Z$ визначена функція $w = f(z)$, якщо кожній точці $z \in D$ за певним законом поставлені у відповідність одна або декілька точок $w \in E$.

У першому випадку функція — *однозначна*, а у другому — *многозначна* (*многолистка*). Множину D називають *множиною визначення* функції $f(z)$, а множину E — *множиною значень* цієї функції.

Для функції $w = f(z)$, як і для будь якої комплексної змінної залишаються чинними поняття модуля $|w|$ та аргументу $\text{Arg } w$ (відповідно $\arg w$).

Якщо зауважити, що $z = x + iy$ та $w = u + iv$, тоді стане зрозуміло, що для визначення функції w достатньо визначити дві функції дійсних змінних: $u = u(x, y)$ і $v = v(x, y)$. Отже,

$$w = f(z) \Leftrightarrow w = u(x, y) + i v(x, y),$$

тобто $v(x, y) = \text{Im } f(z)$, $u(x, y) = \text{Re } f(z)$.

Комплексне число $w_0 = u_0 + iv_0$ називається *границею* функції $w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ комплексної змінної $z = x + iy$ при $z \rightarrow z_0$, якщо для будь-якого як завгодно малого наперед заданого додатного числа ε можна вказати додатне число δ таке, що з нерівності $|z - z_0| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Цей факт записується так $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$.

З визначення випливає, якщо вказана границя існує, то існують і границі

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0 \quad \text{та} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Для функції комплексної змінної справедливі такі самі ж теореми про границі, як і для функції дійсної змінної. Зокрема, якщо існують границі функцій $f_1(z)$ та $f_2(z)$, коли $z \rightarrow z_0$, тоді

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (c_1 f_1(z) \pm c_2 f_2(z)) = c_1 \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \pm c_2 \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z),$$

де c_1 й c_2 — комплексні сталі,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot f_2(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)}, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z) \neq 0. \end{aligned}$$

Функція $f(z)$ називається *неперервною* в точці z_0 , якщо вона визначена в деякому околі цієї точки та $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Функція $f(z)$ неперервна в області D , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Неперервні функції комплексної змінної мають ті ж самі властивості, що й неперервні функції дійсної змінної.

Нехай в деякій області $D \subset C$ визначена однозначна функція $w = f(z)$, де $z \in D$. Нехай z та $z + \Delta z$ належать області D . Позначимо $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Функція $w = f(z)$ називається *диференційованою* в точці $z \in D$, якщо відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ має скінчену границю, коли Δz прямує до нуля довільним образом. Ця границя називається *похідною* функції $f(z)$ та позначається символом $f'(z)$, або w' , або $\frac{df}{dz}$ чи $\frac{dw}{dz}$. Отже, $w' = f'(z) = \frac{df}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$.

Функція $w = f(z)$ називається *аналітичною* в даній точці z області D , якщо вона диференційована як в самій точці z так і в деякому її околі.

Функція $f(z)$, яка диференційована в кожній точці області D та має в цій

області неперервну похідну $f'(z)$ називається *аналітичною в області D* .

Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була *аналітичною в області D* необхідно і достатньо щоб в цій області існували неперервні частинні похідні функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$, які задовольняють умовам Коші–Рімана (С.–R.):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Можна дати еквівалентне означення аналітичної функції: функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *аналітична в області D* , якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають в цій області неперервні перші частинні похідні та виконуються умови Коші – Рімана.

Функція $\omega(x, y)$ називається *гармонічною в області D* , якщо вона в цій області двічі неперервне диференційована та задовольняє диференціальному рівнянню Лапласа

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо функція $f(z) = u + iv$ аналітична в деякій області D , то її дійсна частина $u(x, y)$ і уявна частина $v(x, y)$ є гармонічними в цій області функціями. В цьому легко переконатися, якщо, наприклад, продиференціювати перше з рівнянь (С.-R.) по змінній y , а друге по змінній x .

Дві гармонічні функції, які задовольняють умовам (С.–R.) називають *спряженою парою гармонічних функцій*.

8.2. Типи функцій комплексної змінної

1. *Лінійна* $f(z) = az + b$.

2. *Степенева* $f(z) = z^n$, n – ціле число.

3. *Дрібно – лінійна* $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

4. *Загальна раціональна* $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$;

зокрема раціональною функцією є многочлен $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$.

5. *Функція e^z* . Показникову функцію $e^z = e^{x+iy}$ визначимо за допомогою рівності $e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$.

6. Логарифмічну функцію визначимо як обернену до показникової. Тобто натуральним логарифмом, який будемо позначати $\text{Ln } z$, комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ назовемо показник степеня w , у який треба піднести число e , щоб отримати число z , тобто $e^w = z$, $w = u + iv$.

Отже, $w = \text{Ln } z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \dots$

Вираз $\ln z = \ln|z| + i \cdot \arg z$, який ми отримуємо для $k = 0$ називається *головним значенням натурального логарифму числа z* . З формули видно, що функція $\text{Ln } z$ є *многозначною*, причому логарифм нуля не існує.

За допомогою логарифму можна визначити будь-який степінь комплексного числа. Якщо u і v два комплексних числа й $u \neq 0$, то покладемо $u^v = e^{v \text{Ln } u}$, причому для дійсних $u > 0$, будемо вважати, що $\text{Ln } u = \ln u$.

7. Тригонометричні функції $\sin z, \cos z, \text{tg } z, \text{ctg } z$ та гіперболічні функції $\text{sh } z, \text{ch } z, \text{th } z, \text{cth } z$ визначаються за допомогою рівностей

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \text{ctg } z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

$$\text{sh } z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \text{th } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z}, \quad \text{cth } z = \frac{\text{ch } z}{\text{sh } z}.$$

Для тригонометричних функції залишаються вірними всі формули тригонометрії.

8. Обернені тригонометричні функції

Обернені тригонометричні функції $\text{Arcsin } z, \text{Arccos } z, \text{Arctg } z$ визначаються як функції, обернені відповідно до функцій $\sin z, \cos z, \text{tg } z$. Наприклад, якщо $z = \sin w$, то w називається арксинусом числа z і позначається $w = \text{Arcsin } z$. Всі ці функції є *многозначними* та виражаються через логарифмічні функції.

$$\text{Arcsin } z = -i \text{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right); \quad \text{Arccos } z = -i \text{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{i - z}{i + z}, \quad z \neq \pm i.$$

Відображення, що здійснюються аналітичними функціями, називаються *конформними*. Говорити про властивості відображення функцією комплексної змінної можна, будуючи на площині Z деякі лінії $z(t) = x(t) + iy(t)$ та досліджуючи їхні образи в площині W .

8.3. Диференціювання та інтегрування функцій комплексної змінної

Нехай $f(z)$ — аналітична функція, яка здійснює відображення області $D \subset Z$ на область $E \subset W$. Припустимо тепер, що $f'(z_0) \neq 0$. Маємо

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = k \cdot e^{i\alpha},$$

де $k = |f'(z_0)| \neq 0$, $\alpha = \arg f'(z_0)$. Величина $\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|$ показує, в якому відношенні змінюється відстань між точками z_0 та $z_0 + \Delta z$ при їх відображенні у точки w_0 та $w_0 + \Delta w$. Ось чому величину k називають *коефіцієнтом розтягу* в точці z_0 . Докладніше: якщо $k > 1$ має місце розтяг, а при $k < 1$ — стискання.

Аргумент похідної $f'(z_0)$ геометрично дорівнює куту, на який потрібно повернути дотичну в точці z_0 до будь-якої гладкої кривої на площині Z , що проходить через точку z_0 , щоб отримати напрям дотичної в точці $w_0 = f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині W при відображенні $w = f(z)$.

Функція $f(z) = az + b$ буде визначена на всій комплексній площині і однозначна на ній. Обернена функція $z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a}$ має ті ж самі властивості. Для аналізу відображення запишемо z, a та w у показниковій формі:

$$z = |z|e^{i \arg z}, \quad a = |a|e^{i \arg a}, \quad w = |w|e^{i \arg w}.$$

Для зручності покладемо $\varphi = \arg z$, $\alpha = \arg a$, $\theta = \arg w$. Якщо $b = 0$, тоді $|w| = |z| \cdot |a|$ та $\theta = \varphi + \alpha$. Геометричний зміст перетворення очевидний: подібний розтяг площини Z в $|a|$ разів і поворот площини, як цілого, навколо точки $z = 0$ на кут α .

Якщо $b \neq 0$, тоді до цього відображення додається ще зсув точок площини на величину $|b|$ у напрямі вектора, що зображає комплексне число b . Таким чином, при $a \neq 0$, відображення за допомогою лінійної функції є взаємно однозначним і конформним.

Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — неперервна функція комплексної змінної $z = x + iy$; D — область визначення, $L \subset D$ — деяка кусково-гладка лінія. Припустимо, що крива L задана рівнянням $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $(\alpha \leq t \leq \beta)$ та її початок знаходиться у точці $A = z(\alpha)$, а кінець — у точці $B = z(\beta)$. Будемо також вважати, що додатному напрямку на кривій відповідає зміна параметру t

від α до β . Розіб'ємо проміжок $(\alpha; \beta)$ довільним образом на n частин $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ і позначимо $z_k = z(t_k)$ та $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$. Маємо відповідне розбиття кривої L точками z_k на часткові криві.

Складемо інтегральну суму $I_n = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k$, де ζ_k — точки на часткових кривих, розташовані між точками z_k та z_{k+1} ($k = 0, 1, \dots, n-1$) відповідно.

Якщо при ранзі розбиття $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k|$, $\lambda \rightarrow 0$ інтегральна сума має скінчену границю, яка не залежить ні від способу розбиття кривої L на часткові криві, ані від вибору точок ζ_k на цих часткових кривих, то ця границя називається *інтегралом* від функції $f(z)$ по кривій L та позначається через $\int_L f(z) dz$.

Отже,

$$\int_L f(z) dz = \int_{AB} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k.$$

Криву $L = AB$ називають *контуром інтегрування*, A — *початкова*, B — *кінцева* точки інтегрування. Інтеграл по замкненому контуру інтегрування L позначається так: $\oint_L f(z) dz$.

Якщо функція $f(z)$ неперервна (кусково-неперервна) на кривій L , тоді інтеграл функції комплексної змінної існує, причому має місце рівність

$$\int_L f(z) dz = \int_L u dx - v dy + i \cdot \int_L u dy + v dx.$$

Теорема Коші. Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , тоді $\int_L f(z) dz$ не залежить від форми кривої L , а залежить тільки від роз-

ташування кінцевих точок дуги.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в однозв'язній області D , що містить у собі точки z_0 та z_1 , то має місце формула Ньютона – Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z) \Big|_{z_0}^{z_1},$$

де $\Phi(z)$ — будь-яка первісна для функції $f(z)$ в області D .

З теореми Коші витікає наступне твердження:

В однозв'язній області інтеграл від аналітичної функції, узятий по довільному замкненому контуру дорівнює нулю.

Нехай D — однозв'язна область, обмежена кусково-гладким замкненим контуром Γ , $f(z)$ — функція, аналітична в замкненій області \bar{D} . Тоді матиме місце *інтегральна формула Коші*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

де z_0 — довільна точка усередині Γ , а інтегрування по контуру Γ здійснюється у додатному напрямі (тобто область D увесь час залишається ліворуч). Вираз

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0},$$

де $f(z)$ — функція, аналітична в замкненій області \bar{D} , межею якої виступає контур Γ , називається *інтегралом Коші*. Інтеграл Коші зображає функцію $f(z)$, аналітичну в \bar{D} , в кожній точці внутрішній до контуру Γ .

Нехай L — довільна кусково-гладка лінія, $g(z)$ — задана на L неперервна функція. Тоді можна визначити *інтеграл типу Коші*

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \notin L.$$

Для інтегралу типу Коші має місце наступна теорема (яку ми приймаємо без доведення)

Теорема. Функція $G(z)$, визначена формулою аналітична в усякій однозв'язній області D , яка не містить точок лінії L . Похідні функції $G(z)$ визначаються формулою

$$G^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}.$$

8.4. Ряди в комплексній області

Функціональним рядом називається вираз виду

$$w_1(z) + w_2(z) + \dots + w_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z),$$

де члени ряду є функції комплексної змінної $w_k(z)$, що визначені в деякій області $D \subset C$.

Кажуть, що функціональний ряд збіжний в точці $z_0 \in D$, якщо числовий

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} w_n(z_0)$ збіжний. Множина всіх точок z , в яких ряд є збіжним називається областю його збіжності.

Сума S збіжного на множині $D_1 \subset D$ функціонального ряду буде деякою функцією від комплексної змінної z , визначеною на множині D_1 , тобто

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(z).$$

Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться число $N = N(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n > N$ і для всіх $z \in D_1$ виконується нерівність $|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon$, $n > N$, то ряд називається *рівномірно збіжним*.

Степеневий ряд в комплексній області має вигляд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

де z — комплексна змінна, $z_0, a_k (k = 0, 1, 2, \dots)$ задані комплексні числа.

При $z_0 = 0$ дістанемо також степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

Можливе існування числа $R > 0$ такого, що для всіх z за умови $|z| < R$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ збіжний, а при $|z| > R$ ряд розбіжний. Число R називають *радіусом збіжності*.

Круг радіуса R ($0 < R < \infty$) всередині якого степеневий ряд абсолютно збіжний, називають *кругом збіжності* цього ряду.

Якщо ряд збіжний тільки в точці $z = 0$, то вважають $R = 0$, а якщо він збіжний на усій комплексній площині, то $R = +\infty$.

Наведемо деякі важливі властивості степеневих рядів.

I. Усередині круга збіжності ряд збігається до аналітичної функції.

II. Степеневий ряд усередині круга збіжності (подібно будь-якому рівномірно збіжному ряду) можна інтегрувати членами та диференціювати членами довільне число разів. При цьому радіус збіжності кожного одержаного ряду дорівнює радіусу збіжності початкового ряду, а над сумою ряду виконується та сама дія, що і над самим рядом.

III. Коефіцієнти c_k степеневого ряду можуть бути обчислені через значення суми ряду та її похідних, визначених у центрі круга збіжності за формулами $f(z_0) = c_0$, та $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

Функції $e^z, \sin z, \cos z$ є аналітичним продовженням на комплексну площину функцій дійсної змінної $e^x, \sin x, \cos x$ відповідно. Для цих продовжень збережені прийняті на дійсній осі назви та позначення:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}; \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}; \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Відомо, що $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$, причому цей ряд збігається при всіх

$x \in (0; 2)$. Отже, сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(z-1)^k}{k}$ є аналітичним продовженням функції $\ln x$ в область $|z-1| < 1$. Вона також має назву *логарифм* та позначення $\ln z$.

Подібно цьому будується аналітична у крузі $|z| < 1$ функція

$$\arcsin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!(2k+1)} \cdot z^{2k+1},$$

яка є аналітичним продовженням функції $\arcsin x$ дійсного аргументу при $|x| \leq 1$.

Зауважимо, що функції $\ln z$ і $\arcsin z$ не є цілими функціями, бо ряди, які їх визначають, збігаються не на всій комплексній площині, а лише у середині відповідних кругів одиничного радіусу.

Функція $f(z)$ аналітична усередині круга $|z - z_0| < M$, може бути представлена в цьому крузі збіжним степеневим рядом $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, причому коефіцієнти цього ряду однозначно обчислюються за формулами:

$$c_0 = f(z_0), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Зауважимо, що так як $f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$, тоді

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}},$$

де Γ — деякий довільний замкнений контур, усередині круга $|z - z_0| < M$, що містить у собі точку z_0 .

Розвинення аналітичної функції в крузі $|z - z_0| < M$ у збіжний степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ називається *розкладом Тейлора*, а відповідний ряд — *рядом Тейлора*.

Для функцій $\ln(1+z)$, $(1+z)^m$ мають місце наступні розвинення в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^n}{n} + \dots \quad (R=1), \\ (1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{m(m-1)\dots(m+n-1)}{n!} z^n + \dots \quad (R=1) \end{aligned}$$

Ряд виду $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, де n приймає всі цілі (додатні, від'ємні та ну-

льове) значення називається *рядом Лорана*.

Цей ряд розуміється як сума двох рядів

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

або

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Перша частина ряду Лорана (ряд, утворений з доданків, що мають від'ємні показники степеня) називається *головною частиною ряду Лорана*. Друга частина ряду Лорана (ряд, утворений з доданків, що мають невід'ємні показники степеня) називається *правильною частиною ряду Лорана*.

Областю збіжності ряду Лорана є загальна частина області збіжності його головної частини та правильної частини.

Функція $f(z)$, однозначна і аналітична у круговому кільці $r < |z - z_0| < R$, розкладається в цьому кільці в **ряд Лорана**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

де коефіцієнти c_n знаходяться за формулами

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тут Γ — довільне коло, що міститься усередині даного кільця.

8.5. Особливі точки функції. Лишок функції

Точку $z_0 \in D$ називають *правильною точкою функції* $f(z)$, якщо існує круг c_r досить малого радіусу $r > 0$ з центром в точці z_0 ($c_r: |z - z_0| < r$), в якому функція $f(z)$ аналітична.

Точки, які не є правильними, називаються *особливими точками функції* $f(z)$. Якщо існує окіл точки z_0 такий, що функція $f(z)$ визначена і диференційована в усіх точках цього околу за винятком точки z_0 , то особлива точка називається *ізолюваною*.

Визначення границі функції $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ дає можливість класифікувати ізо-

лювані особливі точки на *усувні*, *полюси* та *істотно особливі* точки.

Якщо існує скінчена границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a$, то маємо *усувну особливу*

точку.

Якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, то особлива точка — *полюс функції* $f(z)$. Нехай z_0

— полюс функції. Тоді його порядок визначає відмінна від нуля скінчена границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^k = c, c \neq \infty$. При цьому кажуть, що z_0 — полюс k -го

порядку функції $f(z)$.

Якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не існує, то z_0 — *істотно особлива* точка.

Нехай z_0 — ізолювана особлива точка функції $f(z)$, Γ — довільний замкнений контур, який містить усередині точку z_0 і де немає інших особливих точок.

Лишком функції $f(z)$ в точці z_0 називається число, яке позначається символом $\operatorname{res} f(z_0)$ та визначається рівністю

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

Інші позначення: $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$, $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$.

З визначення випливає, що лишок функції дорівнює коефіцієнту при мінус першому степені в лоранівському розвиненні функції $f(z)$ в околі точки $z = z_0$: $\operatorname{res} f(z_0) = c_{-1}$.

Лишок в усуній особливій точці дорівнює нулю.

Нехай z_0 — полюс кратності k функції $f(z)$. Тоді

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left((z - z_0)^k f(z) \right).$$

Розглянемо основну теорему про лишки.

Теорема. Якщо функція $f(z)$ однозначна і аналітична в замкненій області \bar{D} всюди, за винятком скінченного числа ізольованих особливих точок z_1, z_2, \dots, z_m , які лежать усередині області D , тоді

$$\oint_{\Gamma^+} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res} f(z_k),$$

де Γ^+ — повна межа області, яку обходять в додатному напрямі.

Лишком аналітичної функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій ізольованій особливій точці називається коефіцієнт ряду Лорана в околі цієї точки при z^{-1} , узятий з протилежним знаком, тобто

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^-} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma^+} f(z) dz,$$

де γ — коло з центром в початку координат та достатньо великого радіусу R (такого, що при $|z| > R$ немає інших особливих точок функції $f(z)$ крім нескінченно віддаленої точки), а інтегрування виконується при від'ємному обході, так як тільки при такому обході (за ходом годинникової стрілки) окіл нескінченно віддаленої точки завжди залишається ліворуч.

Лишки можна застосовувати до обчислення різних інтегралів.

8.6. Операційне числення. Основні визначення

Функцією-оригіналом за Лапласом називається будь-яка функція $f(t)$ дійсного аргументу t , яка задовольняє умови:

1) $f(t) \equiv 0$, коли $t < 0$;

2) на довільному обмеженому інтервалі функція кусково-неперервна і може мати скінчене число точок розриву 1-го роду;

3) $|f(t)|$ зростає не швидше експоненціальної функції, тобто $\exists M > 0$ і

$$s_0 \geq 0 : \forall t \geq 0 |f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

Перетворенням Лапласа оригіналу $f(t)$ називається дія інтегрального оператора Лапласа:

$$L\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt = F(p), \quad p = \alpha + i\beta.$$

Функція $F(p)$ називається **зображенням функції $f(t)$ за Лапласом**.

8.7. Основні теореми операційного числення

Наведені нижче теореми спрощують розв'язання задач методами операційного числення.

Теорема подібності: $L\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, де $a > 0$.

Теорема зміщення зображення: $L\{e^{at} f(t)\} = F(p - a)$.

Теорема запізнення: Нехай $f_{\tau}(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau; \\ f(t - \tau), & t \geq \tau, \end{cases}$ тоді

$$L\{f_{\tau}(t)\} = \int_0^{\infty} f_{\tau}(t) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} F(p).$$

Теорема про диференціювання оригінала:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(+0);$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - \dots - f^{(n-1)}(+0).$$

Теорема про диференціювання зображення:

$$F'(p) = -\int_0^{\infty} t f(t) e^{-pt} dt = L\{-t f(t)\}; \quad F^{(n)}(p) = L\{(-t)^n f(t)\}.$$

Теорема про інтегрування оригінала: $L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}.$

Теорема про інтегрування зображення: $\int_p^{\infty} F(u) du = \Phi(u) = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$

8.8. Згортка функцій. Теорема розкладу

Згортою функцій $f(t)$ і $g(t)$ ($0 \leq t < \infty$), яка позначається символом

$(f * g)$ називається інтеграл $\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$, причому $(f * g) = (g * f)$.

Теорема Бореля: $L\{f * g\} = F(p) \cdot G(p).$

Інтеграл Дюамеля:

$$\begin{aligned} L\left\{f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} &= L\left\{f(0)g(t) + \int_0^t g(\tau)f'(t-\tau)d\tau\right\} = \\ &= L\left\{g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau\right\} = L\left\{g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau\right\} = \\ &= pF(p)G(p). \end{aligned}$$

Перша теорема розкладу.

Якщо зображення $F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{p^{n+1}}$ ряд, збіжний при $|p| > 0$, тоді оригінал

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Друга теорема розкладу.

Якщо зображення – правильний раціональний дріб, знаменник якого має

тільки прості дійсні корені α_k , тоді $F(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = L\left\{\sum_{k=1}^n A_k e^{\alpha_k t}\right\}.$

8.9. Деякі застосування перетворення Лапласа

Розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t)$$

$$x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$$

за допомогою перетворення Лапласа приводить до зображення

$$X(p) = \frac{F(p) + Q_{n-1}(p)}{P_n(p)}.$$

Далі знаходимо оригінал $x(t) = L^{-1}\{X(p)\}$.

Розв'язки диференціальних рівнянь з нульовими початковими умовами можна знайти за допомогою $x_1(t)$ (розв'язок при $f(t) = 1$) та $f(t)$ (правої частини) за формулами Дюамеля.

Перша формула

$$x(t) = \int_0^t x_1'(\tau) f(t - \tau) d\tau.$$

Друга формула

$$x(t) = \int_0^t x_1'(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Третя формула

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t x_1(t - \tau) f'(\tau) d\tau.$$

Четверта формула

$$x(t) = f(0)x_1(t) + \int_0^t x_1(\tau) f'(t - \tau) d\tau.$$

8.10. Завдання для самостійного розв'язування**ЗАДАЧА 1**

Обчислити комплексне число:

1.1) $(\sqrt{3} - i)^{10}$

1.2) $(i\sqrt{3} - 1)^{12}$

1.3) $(2 - 2i)^8$

1.4) $(\sqrt{3} + 3i)^{12}$

1.5) $(\sqrt{3} - 3i)^8$

1.6) $(2\sqrt{3} - 6i)^6$

ЗАДАЧА 2

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ за відомою її дійсною $u = u(x, y)$ або уявною $v = v(x, y)$ частиною та значенням $f(z_0)$:

2.1) $u = (e^x + e^{-x}) \sin y,$
 $f(0) = 2;$

2.2) $v = e^x \sin y,$
 $f(0) = 1;$

2.3) $u = y - 2xy,$
 $f(0) = 0;$

2.4) $v = 2xy - 2y,$
 $f(0) = 1;$

2.5) $u = e^x \cos y,$
 $f(0) = 1;$

2.6) $v = (e^x - e^{-x}) \sin y,$
 $f(0) = 2;$

ЗАДАЧА 3

Обчислити інтеграл:

3.1) $\oint_{|z|=1} \frac{z}{4z^2 - 1} dz;$

3.2) $\oint_{|z|=2} z^3 e^{1/z} dz;$

3.3) $\oint_{|z|=2} \frac{\sin^2 z}{z \cos z} dz;$

3.4) $\oint_{|z|=1} \frac{(e^{iz} + 2)}{\sin 3iz} dz;$

3.5) $\oint_{|z|=1} z^2 \sin \frac{1}{z} dz;$

3.6) $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2(z^2 + 9)} dz;$

ЗАДАЧА 4

Розвинути в ряд Лорана функцію $f(z)$ в околі точки z_0 і вказати правильну і головну частину ряду:

4.1) $f(z) = (z+1)^3 e^{1/(z+1)},$
 $z_0 = -1;$

4.2) $f(z) = z^{-3} \operatorname{sh}(z^2),$
 $z_0 = 0;$

4.3) $f(z) = (z-1)^{-3} e^{(z-1)},$
 $z_0 = 1;$

4.4) $f(z) = z^3 \cos(1/z),$
 $z_0 = 0;$

4.5) $f(z) = 1/\left(z^2 - z\right),$
 $z_0 = 1;$

4.6) $f(z) = \cos^2(2/(z+1)),$
 $z_0 = -1;$

ЗАДАЧА 5

Знайти зображення функції:

$$4.1) f(t) = t \cdot 3^t; \quad 4.2) f(t) = t \cdot \cos 2t; \quad 4.3) f(t) = (4t + 3) \cdot \sin 3t;$$

$$4.4) f(t) = t \cdot \operatorname{sh} 4t; \quad 4.5) f(t) = (2t + 1) \cdot \operatorname{ch} 3t; \quad 4.6) f(t) = t \cdot \cos^2 2t;$$

ЗАДАЧА 6

Знайти оригінали за відомими зображеннями:

$$5.1) F(p) = \frac{5}{p^3 - 8}; \quad 5.2) F(p) = \frac{2p + 4}{p^3 + 1}; \quad 5.3) F(p) = \frac{2p - 1}{p^3 + 8};$$

$$5.4) F(p) = \frac{3p - 2}{p(p^2 + 1)}; \quad 5.5) F(p) = \frac{4}{p^3 + 64}; \quad 5.6) F(p) = \frac{2p + 5}{p^3 + 27};$$

ЗАДАЧА 7

Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$7.1) x'' - x' = e^t; \quad 7.2) x'' + 2x' = e^{-2t}; \quad 7.3) x'' + x' = \cos t;$$

$$x(0) = 0, x'(0) = 2. \quad x(0) = 0, x'(0) = -2. \quad x(0) = -2, x'(0) = 0.$$

$$7.4) x'' + 9x' = \sin 2t; \quad 7.5) x'' + x' = 2 \cos t; \quad 7.6) x'' + 2x' = t + \sin t;$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 0. \quad x(0) = 0, x'(0) = -1. \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$$

8.11. Приклади тестових завдань**Тестове завдання**

У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь.

1. Нехай $z = (1 - i)$. Тоді z^8 дорівнює

а	б	в	г
-16	$8i$	16	$-8i$

2. Знайти $\arg(-1 + i)$

а	б	в	г
0	$-\pi/4$	$\pi/4$	$3\pi/4$

3. Множину точок z комплексної площини, віддалених від точки $-i$ на відстань не більше 4 та не менше 2 одиниць, можна описати таким чином:

а	б	в	г
$2 \leq z+i \leq 4$	$2 \leq z-i \leq 4$	$2 < z+i < 4$	$2 > z+i > 4$

4. Вказати уявну частину функції $f(z) = (\bar{z} + z) \cdot z$

а	б	в	г
$x^2 + y^2$	$x^2 - y^2$	$2xy$	$-2xy$

5. Знайти головне значення $\text{Ln}(i^3)$

а	б	в	г
3	$\pi i/2$	$-\pi i/2$	-1

6. Знайти зображення за Лапласом оригіналу $f(t) = e^{-2t} \text{ch}5t$

а	б	в	г
$\frac{p-2}{(p-2)^2 - 25}$	$\frac{p+2}{(p+2)^2 + 25}$	$\frac{p+2}{(p+2)^2 + 5}$	$\frac{p+2}{(p+2)^2 - 25}$

7. Знайти оригінал за відомим зображенням $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p}$

а	б	в	г
3	$t-3$	$\sigma(t-3)$	$(t-3)\sigma(t-3)$

8. За даним рівнянням (1 – 4) визначить вид лінії (А – Д).

Рівняння	Вид лінії
1. $z = \frac{2}{\text{ch}4t} + i \cdot \text{th}4t$	А пряма
2. $z = 5e^{i2t}$	Б коло
3. $z = 2 \cos^2 3t + i(\sin 3t - 2)$	В еліпс
4. $z = t^2 - 2t + 3 + i(t^2 - 2t + 1)$	Г гіпербола
	Д парабола

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

9. Встановіть відповідність між інтегралами (1 – 4) від функції комплексної змінної та даними значеннями (А – Д).

Інтеграли	Значення
1. $\int_L z \cdot \bar{z} dz$, $L: z = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$	А -18
2. $\int_{a+3}^{a-3} (z-a)^2 dz$	Б $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{ z =1} \frac{1}{z(2-z)} dz$	В $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}i$
4. $\frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{ z =4} \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz$	Г $\frac{8}{15} + \frac{5}{6}i$
	Д 1

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

Розв'язання задач 10-12 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії, розрахунки та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань.

10. Побудувати аналітичну функцію $w = f(z)$ за відомою дійсною частиною $u(x, y) = 2(x^2 - y^2)$, $f(0) = 0$. У відповіді запишіть $f(1)$.

11. Функцію $\frac{z-i}{z+i}$ розвинути в степеневий ряд за степенями $z-i$ та визначити радіус збіжності ряду R . У відповіді запишіть R .

12. Операційним методом знайти розв'язок задачі Коші $y'' + y' - 2y = 7e^{2t}$, $y(0) = 1$; $y'(0) = 4$. У відповіді запишіть $y(1)$.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: **в**.

$$\text{Розв'язання. } (1-i)^8 = \left((1-i)^2\right)^4 = (-2i)^4 = 16.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: дії над комплексними числами в алгебраїчній формі)

Завдання 2. Правильна відповідь: **г**.

$$\text{Розв'язання. } \arg(-1+i) = \pi + \arctg(-1) = 3\pi/4.$$

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: тригонометрична форма комплексного числа).

Завдання 3. Правильна відповідь: **а**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: геометрична інтерпретація комплексних чисел).

Завдання 4. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. $f(z) = (\bar{z} + z) \cdot z = (x - iy + x + iy)(x + iy) = 2x^2 + i2xy$.

Завдання 5. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. $\text{Ln}(i^3) = \text{Ln}(-i) = \ln 1 + i\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}$.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: основні елементарні функції комплексної змінної).

Завдання 6. Правильна відповідь: **г**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: зображення за Лапласом основних елементарних функцій).

Завдання 7. Правильна відповідь: **в**.

(Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням: знаходження оригіналів за відомими зображеннями).

Завдання 8. Правильна відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1			×		
2		×			
3					×
4	×				

Розв'язання. Дійсно, якщо $z = \frac{2}{ch4t} + i \cdot th4t$, маємо $x = \frac{2}{ch4t}$; $y = th4t$. Зві-

дки $x^2 = \frac{4}{ch^2 4t}$; $y^2 = th^2 4t = 1 - \frac{1}{ch^2 4t}$. Знаходимо рівняння лінії $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

тобто маємо *еліпс*. Аналогічно визначаємо види інших ліній.

Заповнюємо таблицю.

Завдання 9. Правильна відповідь:

	А	Б	В	Г	Д
1				×	
2	×				
3		×			
4					×

Розв'язання. Обчислюємо інтеграл як криволінійний

$$\int_L z \cdot \bar{z} dz = \left\{ \begin{array}{l} z = t + it^2; \\ 0 \leq t \leq 1. \end{array} \right\} = \int_0^1 (t^2 + t^4) \cdot (dt + i2tdt) = \int_0^1 (t^2 + t^4 + i(2t^3 + 2t^5)) dt =$$

$$= \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 + i \cdot \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^6 \right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15} + i\frac{5}{6}.$$

Обчислюємо інтеграли та знаходимо

$$\int_{a-3}^{a+3} (z-a)^2 dz = -18; \quad \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z(2-z)} dz = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2\pi \cdot i} \int_{|z|=4} \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz = 1.$$

За результатами обчислень заповнюємо таблицю.

Завдання 10.

Розв'язання. Скористаємося умовами Коші – Рімана.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 4x \Rightarrow v(x, y) = \int 4x dy + \varphi(x) = 4xy + \varphi(x)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow -4y + \varphi'(x) = -4y \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C.$$

Тоді $v(x, y) = 4xy + C$, та

$$f(z) = 2x^2 - 2y^2 + i(4xy + C) = 2(x^2 + 2ixy - y^2) + iC = 2z^2 + iC.$$

За умовою задачі $f(0) = 0$, отже $0 = 0 + iC \Rightarrow C = 0$. $f(z) = 2z^2$.

Відповідь: $f(1) = 2$.

Завдання 11.

Розв'язання. Перетворюємо спочатку функцію

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{(z-i)}{2i+(z-i)} = -\frac{i}{2} \cdot \frac{(z-i)}{1-\frac{i}{2} \cdot (z-i)}$$

Для того, щоб розвинути функцію в степеневий ряд і знайти радіус збіжності цього ряду, розглядаємо $f(z)$ як суму нескінченно спадної геометричної

прогресії $S = \frac{a}{1-q}$, де $a = -\frac{i}{2} \cdot (z-i)$, $q = \frac{i}{2} \cdot (z-i)$. Умова збіжності $|q| < 1$. Тоді

$|z-i| < 2$ тобто радіус збіжності $R = 2$. У середині круга $|z-i| < 2$ має місце

розвинення $\frac{z-i}{z+i} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n$. Остаточно маємо $R = 2$.

Відповідь: 2.

Завдання 12.

Розв'язання. Перейдемо до зображень:

$$y(t) \doteq Y(p), \quad y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1,$$

$$y''(t) \doteq p^2Y(p) - p \cdot y(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p - 4$$

Дістанемо операторне рівняння

$$p^2Y(p) - p - 4 + pY(p) - 1 - 2Y(p) = \frac{7}{p-2}$$

$$Y(p)(p^2 + p - 2) = \frac{7}{p-2} + p + 5.$$

Отже,
$$Y(p) = \frac{p^2 + 3p - 3}{(p-2)(p-1)(p+2)}.$$

Ми отримали правильний нескоротний дріб, знаменник якого має тільки прості корені. Можна застосувати теорему розкладу.

Маємо $R(p) = p^2 + 3p - 3$, $Q'(p) = (p^3 - p^2 - 4p + 4)' = 3p^2 - 2p - 4$

	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 2$	$\alpha_2 = -2$
$R(\alpha_k) = p^2 + 3p - 3 \Big _{p=\alpha_k}$	1	7	-5
$Q'(\alpha_k) = 3p^2 - 2p - 4 \Big _{p=\alpha_k}$	-3	4	12
$A_k = \frac{R(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{12}$

Тоді за першою теоремою розкладу

$$y(t) = \sum_{k=1}^3 A_k e^{\alpha_k t} = -\frac{1}{3}e^t + \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{5}{12}e^{-2t}.$$

Відповідь: $y(t) = -\frac{1}{3}e^t + \frac{7}{4}e^{2t} - \frac{5}{12}e^{-2t}$. Тоді маємо $y(1) = 11,968$.

Оцінювання залишкових знань з вищої математики

Тестове завдання

У завданнях 1 — 8 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Знайти $|(A+B)^{-1}|$, якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

а	б	в	г
2	-3	-1	0,5

2. Знайти площу трикутника, який відтинає від першого координатного кута пряма $4x + 5y = 20$.

а	б	в	г
20	15	10	5

3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{2x} - 1}$.

а	б	в	г
1	2	∞	0

4. Махове колесо за t секунд повертається на кут $\varphi = 12t - 2t^2$. Через скільки секунд колесо зупиниться?

а	б	в	г
1	2	3	4

5. Знайдіть інтеграл $\int_{-4}^0 \frac{6}{\sqrt{4-3x}} dx$.

а	б	в	г
$\sqrt{7}$	0	$\sqrt{8}$	8

6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' + 81y = 0$.

а	б	в	г
$y = C_1 e^{-9x} + C_2 e^{9x}$	$y = C_1 \sin 9x + C_2$	$y = C_1 \cos 9x + C_2$	$y = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x$

7. Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{9^n \sqrt{n^2 + 1}}$ з точністю до $\varepsilon = 0,01$

а	б	в	г
0,07	-0,07	0,052	-0,624

8. В урні 15 куль із номерами від одного до 15. Яка ймовірність витягнути кулю з парним номером?

а	б	в	г
0,7	0,467	0,546	0,475

Розв'язання задач 9 – 11 повинно мати *обґрунтування*. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

9. За яким законом відбувається рух тіла, якщо воно рухається прямолінійно

зі швидкістю $v(t) = t^3 \cdot e^{t^2}$, причому $s(0) = 2,5$?

10. Ймовірність того, що під час сортування скляний виріб буде розбито, дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що з 1500 виробів, що пройшли сортування розбитих виробів буде від двох до чотирьох.

11. Розв'язати задачу Коші $y'' + 4y' + 3y = 24e^{3x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ та побудувати схематично графік інтегральної кривої.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Тестове завдання

Завдання 1. Правильна відповідь: **г**.

Розв'язання. Застосуємо формулу $|C^{-1}| = \frac{1}{|C|}$. Тоді

$$A + B = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A + B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right| = 2$$

$$\text{Отже, } |(A + B)^{-1}| = \frac{1}{|A + B|} = \frac{1}{2}.$$

Завдання 2. Правильна відповідь: **в**.

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої у відрізках на осях:

$$4x + 5y = 20 \Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1. \text{ Тоді } S = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \text{ (кв. од.)}.$$

Завдання 3. Правильна відповідь: **а**.

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{2x} - 1} \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \\ \sin 2x \approx 2x, \quad e^{2x} - 1 \approx 2x \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x} = 1.$$

Завдання 4. Правильна відповідь: **в**.

$$\text{Розв'язання. } \varphi'(t) = (12t - 2t^2)' = 12 - 4t; \quad \varphi'(t) = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ с.}$$

Завдання 5. Правильна відповідь: **г.**

Розв'язання.

$$\int_{-4}^0 \frac{6}{\sqrt{4-3x}} dx = 6 \int_{-4}^0 (4-3x)^{-1/2} dx = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \frac{(4-3x)^{1/2}}{1/2} \Big|_{-4}^0 = -4(2-4) = 8.$$

Завдання 6. Правильна відповідь: **г.**

Розв'язання На підставі коренів характеристичного рівняння:

$$k^2 + 81 = 0 \Rightarrow k = 0 \pm 9i \text{ дістаємо, що } y = C_1 \cos 9x + C_2 \sin 9x.$$

Завдання 7. Правильна відповідь: **а.**

Розв'язання

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{9^n \sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{9\sqrt{2}} - \frac{2}{81\sqrt{5}} + \frac{3}{729\sqrt{10}} - \dots = 0,079 - 0,011 + 0,0013 - \dots \approx 0,07.$$

Завдання 8. Правильна відповідь: **б.**

Розв'язання $P(A) = \frac{7}{15} \approx 0,467.$

Завдання 9.

Розв'язання. Знайдемо закон руху за формулою $s(t) = \int v(t) dt + C$. Тоді

$$s(t) = \int t^3 e^{t^2} dt = \int t^2 e^{t^2} t dt \left\{ \begin{array}{l} t^2 = x \\ t dt = \frac{1}{2} dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^x dx}_{dv} = \frac{1}{2} (x e^x - \int e^x dx) + C =$$

$$= \frac{1}{2} e^x (x-1) + C = \frac{1}{2} e^{t^2} (t^2 - 1) + C$$

Використовуючи початкову умову, дістаємо

$$s(0) = \frac{1}{2} e^0 (0-1) + C = \frac{5}{2} \Rightarrow C = 3. \text{ Отже, } s(t) = \frac{1}{2} e^{t^2} (t^2 - 1) + 3.$$

Відповідь: $s(t) = \frac{1}{2} e^{t^2} (t^2 - 1) + 3.$

Завдання 10.

Розв'язання. В цій задачі доцільно скористатися формулою Пуассона, бо $np = 1500 \cdot 0,002 = 3 < 9$. Тоді,

$$P_{1500}(2) + P_{1500}(3) + P_{1500}(4) \approx \frac{3^2}{2!} e^{-3} + \frac{3^3}{3!} e^{-3} + \frac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 0,224 + 0,224 + 0,168 =$$

$$= 0,616$$

Відповідь: $p = 0,616.$

Завдання 11.

Розв'язання. Будемо шукати загальний розв'язок ЛНДР другого порядку $y'' + 4y' + 3y = 24e^{3x}$ у вигляді $y = \bar{y} + y^*$, де \bar{y} — загальний розв'язок однорідного рівняння, а y^* — частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Складемо характеристичне рівняння

$$k^2 + 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = -3 \end{cases}$$

Отже, $\bar{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. Будемо тепер шукати частинний розв'язок y^* у вигляді $y^* = Ae^{3x}$. Після підстановки функції y^* та її першої і другої похідних в диференціальне рівняння дістанемо

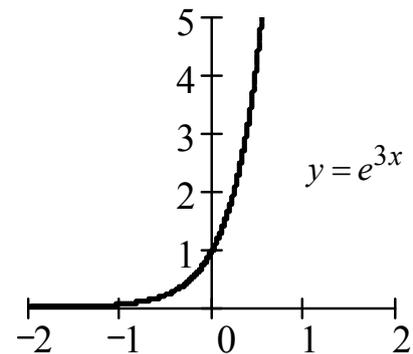
$$9Ae^{3x} + 12Ae^{3x} + 3Ae^{3x} = 24e^{3x} \Leftrightarrow A = 1.$$

Отже, $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}$. Для визначення констант C_1, C_2 застосуємо початкові умови $y(0) = 1, y'(0) = 3$. Тоді прийдемо до системи

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 1 \\ -C_1 - 3C_2 + 3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

Остаточно маємо $y = e^{3x}$.

Відповідь: $y = e^{3x}$.



Математичні позначення та їх читання

$a = b$	a дорівнює b	a равно b	a is equal to b
$a \neq b$	a не дорівнює b	a не равно b	a is not equal to b
$a \approx b$	a наближено дорівнює b	a приближенно равно b	a approximately equal b
$a > b$	a більше b	a больше b	a greater than b
$a < b$	a менше b	a меньше b	a less than b
$ a $	модуль a	модуль a	module a
$a \geq b$	a більше або дорівнює b	a больше или равно b	a equal or greater than b
$a \leq b$	a менше або дорівнює b	a меньше или равно b	a equal or less than b
$a + b$	a плюс b	a плюс b	a plus b
$a - b$	a мінус b	a минус b	a minus b
$a \cdot b$	a помножити на b	a умножить на b	a multiplied by b
$\frac{a}{b}$ або $a : b$	a поділити на b	a разделить на b	a divided by b
.	точка (в десятковому дробу)	точка (в десятичной дроби)	point
1%	відсоток, процент	процент	per cent
(...)	круглі дужки	круглые скобки	round brackets
[...]	квадратні дужки	квадратные скобки	square brackets
{...}	фігурні дужки	фигурные скобки	braces
a^n	a в n -му степені	a в n -ой степені	a to the n -th power
$\sqrt[n]{a}$	корінь n -го степеня з a	корень n -ой степені из a	the n -th root out of a
\sqrt{a}	квадратний корінь з a	квадратный корень из a	the square root of a
$\angle A = \alpha$	кут A	угол A	angle A
$\sin \alpha$	синус α	синус α	sine α
$\cos \alpha$	косинус α	косинус α	cosine α
$\operatorname{tg} \alpha$	тангенс α	тангенс α	tangent α
$\log_a b$	логарифм b за основою a	логарифм b по основанию a	logarithm b to the base a
$\lg a$	десятковий логарифм a	десятичный логарифм a	common logarithm a
$\ln a$	натуральний логарифм a	натуральный логарифм a	logarithm natural of a

	рифм a	рифм a	a
$\arcsin a$	арксинус a	арксинус a	arcsine a
$\arctan a$	арктангенс a	арктангенс a	arctangent a
e^x	експонента x	экспонента x	exponent x
$y = f(x)$	y є функція від x	y – функция от x	y function of x
$y = f^{-1}(x)$	обернена функція	обратная функция	inverse function
$const, C$	константа	константа	constant
$\sum_{k=0}^n a_n$	сума a_n -их від 0 до n	сумма a_n -ых от 0 до n	sum of a_n -th from 0 to n
∞	нескінченність	бесконечность	infinity
$n!$	n факторіал	n факториал	n factorial
P_n	число перестановок	число перестановок	permutation, rearrangement
A_n^m	розміщення	размещения	arrangement
C_n^m	число комбінацій з n по m	число сочетаний из n по m	combination of m out of n
$a \in A$	a належить множині A	a принадлежит множеству A	a belongs to set A
$[a, b]$	сегмент a, b	сегмент a, b	segment a, b
(a, b)	інтервал a, b	интервал a, b	interval a, b
$(a, b]$	півінтервал a, b	полуинтервал a, b	half-interval a, b
$\vec{a} \parallel \vec{b}$	вектор \vec{a} є колінеарним вектору \vec{b}	вектор \vec{a} коллинеарен вектору \vec{b}	vector \vec{a} is collinear to vector \vec{b}
$\vec{a} \perp \vec{b}$	вектор \vec{a} є перпендикулярним вектору \vec{b}	вектор \vec{a} перпендикулярен вектору \vec{b}	vector \vec{a} is perpendicular to vector \vec{b}
$\vec{a} \wedge \vec{b}$	кут між векторами \vec{a} і \vec{b}	угол между векторами \vec{a} и \vec{b}	the angle between the vectors \vec{a} and \vec{b}
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	границя послідовності a_n	предел последовательности a_n	limit of the sequence a_n
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	границя функції $f(x)$ при $x \rightarrow a$	предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$	limit of the function $f(x)$ $x \rightarrow a$
Δx	приріст x	приращение x	increment of x
Δy	приріст функції	приращение функции	increment of function

dx	диференціал x	дифференциал x	differential of x
$\frac{dy}{dx}, y'$	похідна y за x	производная y по x	derivative of y with the respect to x
$\frac{d^n y}{dx^n}, y^{(n)}$	n -а похідна y за x	n -ая производная y по x	n -th derivative of y with the respect to x
$\int f(x)dx$	невизначений інтеграл	неопределенный интеграл	indefinite integral, antiderivative
$\int_a^b f(x)dx$	визначений інтеграл	определенный интеграл	definite integral
$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$	перетворення Лапласа	преобразование Лапласа	Laplace transform

Таблиця значень функції $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right) dt$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,35	0,1368	0,70	0,2580	1,05	0,3531
0,01	0,0040	0,36	0,1406	0,71	0,2611	1,06	0,3554
0,02	0,0080	0,37	0,1443	0,72	0,2642	1,07	0,3577
0,03	0,0120	0,38	0,1480	0,73	0,2673	1,08	0,3599
0,04	0,0160	0,39	0,1517	0,74	0,2704	1,09	0,3621
0,05	0,0199	0,40	0,1554	0,75	0,2734	1,1	0,3643
0,06	0,0239	0,41	0,1591	0,76	0,2764	1,11	0,3665
0,07	0,0279	0,42	0,1628	0,77	0,2794	1,12	0,3686
0,08	0,0319	0,43	0,1664	0,78	0,2823	1,13	0,3708
0,09	0,0359	0,44	0,1700	0,79	0,2852	1,14	0,3729
0,10	0,0398	0,45	0,1736	0,80	0,2881	1,15	0,3749
0,11	0,0438	0,46	0,1772	0,81	0,2910	1,16	0,377
0,12	0,0478	0,47	0,1808	0,82	0,2939	1,17	0,379
0,13	0,0517	0,48	0,1844	0,83	0,2967	1,18	0,381
0,14	0,0557	0,49	0,1879	0,84	0,2995	1,19	0,383
0,15	0,0596	0,50	0,1915	0,85	0,3023	1,2	0,3849
0,16	0,0636	0,51	0,1950	0,86	0,3051	1,21	0,3869
0,17	0,0675	0,52	0,1985	0,87	0,3078	1,22	0,3888
0,18	0,0714	0,53	0,2019	0,88	0,3106	1,23	0,3907
0,19	0,0753	0,54	0,2054	0,89	0,3133	1,24	0,3925
0,20	0,0793	0,55	0,2088	0,90	0,3159	1,25	0,3944
0,21	0,0832	0,56	0,2123	0,91	0,3186	1,26	0,3962
0,22	0,0871	0,57	0,2157	0,92	0,3212	1,27	0,398
0,23	0,0910	0,58	0,2190	0,93	0,3238	1,28	0,3997
0,24	0,0948	0,59	0,2224	0,94	0,3264	1,29	0,4015
0,25	0,0987	0,60	0,2257	0,95	0,3289	1,3	0,4032
0,26	0,1026	0,61	0,2291	0,96	0,3315	1,31	0,4049
0,27	0,1064	0,62	0,2324	0,97	0,3340	1,32	0,4066
0,28	0,1103	0,63	0,2357	0,98	0,3365	1,33	0,4082
0,29	0,1141	0,64	0,2389	0,99	0,3389	1,34	0,4099
0,30	0,1179	0,65	0,2422	1,00	0,3413	1,35	0,4115
0,31	0,1217	0,66	0,2454	1,01	0,3438	1,36	0,4131
0,32	0,1255	0,67	0,2486	1,02	0,3461	1,37	0,4147
0,33	0,1293	0,68	0,2517	1,03	0,3485	1,38	0,4162
0,34	0,1331	0,69	0,2549	1,04	0,3508	1,39	0,4177

Продовження додатка 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,22	0,4868	2,64	0,495855
1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,23	0,4871	2,66	0,496093
1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,24	0,4875	2,68	0,496319
1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,25	0,4878	2,70	0,496533
1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,26	0,4881	2,72	0,496736
1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,27	0,4884	2,74	0,496928
1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,28	0,4887	2,76	0,497111
1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,29	0,4890	2,78	0,497282
1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,30	0,4893	2,80	0,497445
1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,31	0,4896	2,82	0,497599
1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,32	0,4898	2,84	0,497744
1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,33	0,4901	2,86	0,497882
1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,34	0,4904	2,88	0,49801
1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,35	0,4906	2,90	0,49813
1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,36	0,4909	2,92	0,49825
1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,37	0,4911	2,94	0,49836
1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,38	0,4913	2,96	0,49846
1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,39	0,4916	2,98	0,49856
1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,40	0,4918	3,00	0,49865
1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,41	0,4920	3,10	0,49903
1,60	0,4452	2,01	0,4778	2,42	0,4922	3,20	0,499313
1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,43	0,4925	3,30	0,499517
1,62	0,4474	2,03	0,4788	2,44	0,4927	3,40	0,4996631
1,63	0,4484	2,04	0,4793	2,45	0,4929	3,50	0,4997674
1,64	0,4495	2,05	0,4798	2,46	0,4931	3,60	0,4998409
1,65	0,4505	2,06	0,4803	2,47	0,4932	3,70	0,4998922
1,66	0,4515	2,07	0,4808	2,48	0,4934	3,80	0,4999277
1,67	0,4525	2,08	0,4812	2,49	0,4936	3,90	0,4999519
1,68	0,4535	2,09	0,4817	2,50	0,4938	4,00	0,4999683
1,69	0,4545	2,10	0,4821	2,51	0,4940	4,10	0,4999793
1,70	0,4554	2,11	0,4826	2,52	0,4941	4,20	0,4999867
1,71	0,4564	2,12	0,4830	2,53	0,4943	4,30	0,4999915
1,72	0,4573	2,13	0,4834	2,54	0,4945	4,40	0,4999946
1,73	0,4582	2,14	0,4838	2,55	0,4946	4,50	0,4999966
1,74	0,4591	2,15	0,4842	2,56	0,4948	4,60	0,4999979
1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,57	0,4949	4,70	0,4999987
1,76	0,4608	2,17	0,4850	2,58	0,4951	4,80	0,4999992
1,77	0,4616	2,18	0,4854	2,59	0,4952	4,90	0,4999995
1,78	0,4625	2,19	0,4857	2,60	0,4953	5,00	0,4999997
1,79	0,4633	2,20	0,4861	2,61	0,4955		
1,80	0,4641	2,21	0,4864	2,62	0,4956		

Додаток 4

Таблиця значень $t_\gamma = t(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Додаток 5

Таблиця значень $q = q(\gamma, n)$

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Критичні точки розподілу Стьюдента

Число	Рівень значущості α			Число	Рівень значущості α		
	0,10	0,05	0,01		0,10	0,05	0,01
1	6,31	12,71	63,66	16	1,75	2,12	2,92
2	2,92	4,30	9,93	17	1,74	2,11	2,90
3	2,35	3,18	5,84	18	1,73	2,10	2,88
4	2,13	2,78	4,60	19	1,73	2,09	2,86
5	2,01	2,57	4,03	20	1,73	2,09	2,85
6	1,94	2,45	3,71	22	1,72	2,07	2,82
7	1,89	2,37	3,50	24	1,71	2,06	2,80
8	1,86	2,31	3,36	26	1,71	2,06	2,78
9	1,83	2,26	3,25	28	1,70	2,05	2,76
10	1,81	2,23	3,17	30	1,70	2,04	2,75
11	1,80	2,20	3,11	40	1,68	2,02	2,70
12	1,78	2,18	3,06	60	1,67	2,00	2,66
13	1,77	2,16	3,01	120	1,66	1,98	2,62
14	1,76	2,14	2,98	∞	1,64	1,96	2,58
15	1,75	2,13	2,95				

Таблиця зображень за Лапласом

№	Оригінал	Зображення	№	Оригінал	Зображення
1	1	$\frac{1}{p}$	13	$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$	14	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
3	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	15	$t \operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$
4	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	16	$t \operatorname{sh} \omega t$	$\frac{2p\omega}{(p^2 - \omega^2)^2}$
5	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	17	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
6	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$	18	$f(t - t_0)$	$e^{-t_0 p} F(p)$
7	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	19	$e^{-p_0 t} f(t)$	$F(p + p_0)$
8	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$	20	$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) -$ $-\sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
9	$e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \beta t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 - \beta^2}$	21	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
10	$e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \beta t$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 - \beta^2}$	22	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{F(p)}{p}$
11	$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	23	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(q) dq$
12	$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$	24	$f_1 * f_2$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК – СЛОВНИК

А

абсциса, 22	абсцисса	abscissa
аналітичність, 148	аналитичность	analyticity
апліката, 22	аппликата	z-axis
аргумент, 39	аргумент	argument
асимптота, 48	асимптота	asymptote

Б

базис, 21	базис	base, basis
біном, 122	бином	binomial

В

вектор, 19	вектор	vector
відхилення, 126	отклонение	deviation
вибірка, 131	выборка	sample, sampling
визначник, 16	определитель	determinant
вихор (ротор), 53	вихрь	curl, rotor

Г

гамма-функція, 130	гамма-функция	gamma-function
гіпербола, 26	гипербола	hyperbola
гіперболоїд, 31	гиперболоид	hyperboloid
гістограма, 132	гистограмма	histogram, bar graph
градієнт, 52	градиент	gradient, grad
границя, 40	предел	limit

Д

детермінант, 16	детерминант	determinant
дивергенція, 54	дивергенция	divergence
директриса, 26	директриса	directrix
дисперсія, 126	дисперсия	variance
диференціал, 45	дифференциал	differential
добуток векторів, 22	произведение векторов	vector product
дотична, 45	касательная	tangent

Е

еквівалентність, 43	эквивалентность	equivalence
---------------------	-----------------	-------------

екстремум функції, 47	экстремум функции	extreme of function
ексцентриситет, 26	эксцентриситет	eccentricity
еліпс, 25	эллипс	ellipse
еліпсоїд, 30	эллипсоид	ellipsoid
З		
збіжність, 111	сходимость	convergence
згортка, 160	свертка	convolution
зображення оригіналу, 159	изображение оригинала	transform the original function
I		
інтеграл	интеграл	integral
— невизначений, 68	— неопределенный	— indefinite
— визначений, 73	— определенный	— definite
— невластний, 76	— несобственный	— improper
— криволінійний, 81	— криволинейный	— line
— кратний, 78	— кратный	— multiple
інтервал, 8	интервал	interval
істинний, 9	истинный	true
Й		
ймовірність, 122	вероятность	probability
К		
кільце, 157	кольцо	ring
колінеарний, 19	коллинеарный	collinear
коло, 25	окружность	circumference
комбінаторика, 122	комбинаторика	combinatorics
компланарний, 19	компланарный	coplanar
координати,	координаты	coordinates
— декартові, 21	— декартовы	— Cartesian
— полярні, 26	— полярные	— polar
— сферичні, 31	— сферические	— spherical
— циліндричні, 31	— цилиндрические	— cylindrical
конус, 30	конус	cone
кореляція, 135	корреляция	correlation
кут нахилу, 43	угол наклона	angle of inclination

Л

лишок, 158

логарифм, 150

М

максимум функції, 47

матриця, 15

— не вироджена, 18

— обернена, 18

медіана, 125

метод, 18

мінімум, 47

мінор, 16

мішаний добуток, 23

множина, 7

— числова, 81

мода, 125

монотонність функції, 40

Н

набла оператор, 53

нескінченність, 41

нормаль, 45

О

область, 30

ознака збіжності, 111

окіл точки, 8, 147

оператор, 159

опуклість, 47

ордината, 22

особлива точка, 157

оцінка, 133

П

парабола, 26

параболоїд, 31

первісна, 68

вычет

логарифм

максимум функции

матрица

— невырожденная

— обратная

медиа́на

метод

минимум

минор

смешанное произведение

множество

— числовое

мода

монотонность функции

набла оператор

бесконечность

нормаль

область

признак сходимости

окрестность точки

оператор

выпуклость

ордината

особая точка

оценка

парабола

параболоид

первообразная

residue

logarithm

maximum of function

matrix

— non-singular

— converse

median

method

minimum

minor

mixed product

set

number set

mode

monotonic function

nabla operator

infinity

normal

area (domain)

criterion of convergence

neighborhood

operator

convexity

ordinate

singular point

estimate

parabola

paraboloid

primitive

перетворення, 159	преобразование	transformation
площина, 27	плоскость	plane
подія, 122	событие	event
полігон, 132	полигон	polygon
полюс, 157	полюс	pole
послідовність, 40	последовательность	sequence
похідна, 43	производная	derivative
правило Лопіталя, 46	правило Лопиталя	L'Hopital's rule
предикат, 9	предикат	predicate
прискорення, 44	ускорение	acceleration
проекція, 20	проекция	projection
Р		
регресія, 135	регрессия	regression
рівняння,	уравнение	equation
— диференційне, 98	— дифференциальное	— differential
— — , розв'язок 98	— —, решение	— —, solution
розвинення функції в	разложение функции в	expansion a function into a
ряд, 113	ряд	series
розклад, 156, 160	разложение	decomposition
розподіл, 124	распределение	distribution
Ряд	ряд	series
— числовий, 111	— числовой	— number
— степеневий, 113	— степенной	— power
— функціональний, 112	— функциональный	— functional
— Лорана, 156	— Лорана	— Laurent
— Тейлора , 113,156	— Тейлора	— Taylor
— Фур'є , 114	— Фурье	— Fourier
С		
система лінійних	система линейных	system of linear equations
рівнянь, 18	уравнений	
сфера, 30	сфера	sphere
Т		
теорема,	теорема	theorem
— Коші, 152	— Коши	— Cauchy

— Муавра-Лапласа, 128	— Муавра-Лапласа	— Moivre-Laplace
— Ферма, 47	— Ферма	— Fermat's
У		
умови Коші-Рімана, 149	условия Коши-Римана	Cauchy-Riemann conditions
умовний, 112	условный	conditional
Ф		
фокус, 26	фокус	focus
функція, 39	функция	function
— елементарна, 39	— элементарная	— elementary
— розподілу, 124	— распределения	distribution function
Х		
хибний, 9	ложный	false
хі-квадрат, 130	хи-квадрат	chi-square
Ц		
циліндр, 30	цилиндр	cylinder
циркуляція, 84	циркуляция	circulation
Ч		
частота, 132	частота	frequency
частинний, 98	частный	partial
Ш		
швидкість, 43	скорость	speed
Щ		
щільність розподілу, 124	плотность распределения	density of distribution
Я		
якобіан, 79	якобиан	Jacobian

ПЕРЕЛІК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Васильченко І. П.* Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – 3-е вид., випр. і доп. – К. : Знання, 2007. – 454 с.
2. *Огурцов А. П.* Вища математика для підготовки бакалаврів з інженерії : навч. посіб. : у 3 ч. / А. П. Огурцов, Т. В. Наконечна, О. В. Нікулін; за заг. ред. А. П. Огурцова. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2008. – Ч. 1. – 428 с.; Ч. 2. – 340 с.; Ч. 3. – 320 с.
3. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 578 с.
4. *Герасимчук В. С.* Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі : навч. посіб. / В. С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – К. : Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
5. *Демчишин О. І.* Вища математика : навч. посіб. / О. І. Демчишин, Б. Г. Шелестовський. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2010. – 592 с.
6. *Дюженкова Л. І.* Вища математика: Приклади і задачі : навч. посіб. / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003. – 624 с.
7. *Зайцев Є. П.* Вища математика: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу : навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – Кременчук: Вид-во «Кременчук», 2011. – 570 с.
8. *Лозовий Б. Л.* Практикум з вищої математики : навч. посіб. / Б. Л. Лозовий, Я. С. Пушак, О. Є. Шабат. – 2-ге вид., доп. і перероб. – Львів : «Магнолія – 2006», 2007. – 285 с.
9. *Лунгу К. Н.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко. – 6-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2007. – 576 с.

10. *Міхайленко В. М.* Збірник прикладних задач з вищої математики : навч. посіб. / В. М. Міхайленко, Н. Д. Федоренко. – К.: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. – 121 с.
11. Сборник задач по высшей математике. 2 курс / К. Н. Лунгу, В. П. Норин, Д. Т. Письменный и др.; под ред. С. Н. Федина. – 4-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 592 с.

Навчальне видання

Нікулін Олександр Вікторович
Наконечна Тетяна Всеволодівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА:
факти і формули, задачі і тести

Навчальний посібник

Видання друкується в авторській редакції

Відповідальний редактор *Біла К. О.*
Оригінал-макет *Наконечна Т. В.*

Підп. до друку 21.05.15. Формат 60x84¹/₁₆. Спосіб друку – плоский.

Ум. др. арк. 15,27. Тираж 120 пр. Зам. № 0515-1.

Видавець та виготовлювач СПД Біла К. О.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 3618 від 06.11.09

Надруковано на поліграфічній базі видавця Білої К. О.
Україна, 49000, м. Дніпропетровськ, пр. К. Маркса, 111, офіс 17
Поштова адреса: Україна, 49087, м. Дніпропетровськ, п/в 87, а/с 4402

тел. +38 (067) 972-90-71

www.confcontact.com
e-mail: conf@confcontact.com