

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДНПРОДЗЕРЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

В.У. Ігнаткін, О.В. Рязанцев, О.М. С'янов, В.А. Литвиненко

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТІВ І ОБРОБКА ЇХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Під редакцією В.У. Ігнаткіна

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Навчальний посібник для студентів
вищих навчальних закладів

УДК 621.396/.397.001.4

Планування експериментів і обробка їх результатів. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів/ В.У. Ігнаткін, О.В. Рязанцев, О.М. С'янов, Литвиненко В.А.-Під редакцією В.У.Ігнаткіна – Дніпродзержинськ: «ДДТУ», 2010р. 102 с.

В навчальному посібнику викладені основні положення теорії фізичного та інженерного експерименту, планування експерименту, методи обробки результатів. В кожному розділі наведені приклади розв'язування відповідних задач. Посібник буде корисним студентам напрямів підготовки «Радіотехніка», «Метрологія та інформаційно-вимірвальні технології», а також інших напрямків

Рецензенти: **Губар В.І.** – доктор технічних наук, професор кафедри «Автоматизації експериментальних досліджень» Національний технічний університет України «КПІ» м.Київ;
Нізімов В.Б. – доктор технічних наук, професор кафедри «Електромеханіки» Дніпродзержинського державного технічного університету;

Рекомендовано вченою радою Дніпродзержинського державного технічного університету, протокол № 5 від 2010р.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист № 1/11-6308 від 12.07.10р.

ISBN _____
© В.У.Ігнаткін,
О.В. Рязанцев,
О.М. С'янов
В.А.Литвиненко
© ДДТУ, 2010

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4
Розділ 1. Загальні положення про експеримент.....	5
1.1. Експериментальні похибки.....	6
1.2. Аналіз випадкових помилок.....	8
1.3. Випадкова похибка розподілена за нормальним законом.....	13
1.4. Показники випадкової похибки.....	14
1.5. Похибка непрямих вимірювань.....	26
Розділ 2. Планування експерименту.....	35
2.1. Зменшення набору змінних.....	35
2.2. Вимірювальні системи.....	40
2.3. Планування експерименту.....	43
2.4. Графічний аналіз даних. Метод найменших квадратів(МНК).....	50
2.5. Точність обчислень.....	66
Розділ 3. Активний експеримент.....	79
3.1. Загальні положення.....	79
3.2. Фізичне моделювання.....	82
3.3. Експеримент в погано організованих системах. Лінійна кореляція.....	86
Розділ 4. Оптимізація параметрів якості технічних пристроїв і систем.....	91
4.1. Загальні відомості.....	91
4.2. Оптимізація параметрів напівпровідникового терморегулятора.....	92
4.3. Оптимізація параметрів формувача синхронізуючих імпульсів.....	96
4.4. Атестація турбінного витратоміра.....	98
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	102

ВСТУП

Ускладнення експериментальних установок викликало різке збільшення вартості експериментальних досліджень. Одна хвилина роботи на потужному прискорювачі або реакторі характеризується досить значними витратами. Тому роботу на таких установках необхідно заздалегідь продумувати й оцінювати.

Планування має сенс тоді, коли ясна кінцева мета дослідження. Навряд доцільне планування, якщо витрати на нього суттєво перевищать витрати на сам експеримент.

Основна мета навчального посібника – допомогти розібратися в виборі та застосуванні найбільш зручних і практичних методів та способів планування тих, чи інших експериментів, а також вміти вірно аналізувати і застосовувати їх результати.

Відповідно до цієї мети, в даному навчальному посібнику наведені приклади організації експериментів, обробки та аналізу результатів.

У першому розділі посібника в стислій формі викладені загальні відомості та положення про експеримент.

За основу взятий графічний аналіз та метод найменших квадратів (МНК). Їх опис та застосування, а також види вимірювальних систем, пояснення про точність – описані в розділі 2.

Питання пов'язані безпосередньо з активним експериментом, його загальні положення, пояснення фізичного моделювання, як одного з різновидів фізичного експерименту та особливості впливу на нього зовнішніх факторів описані в розділі, відображені в третьому розділі посібника.

У розділі 4, як узагальнення, приділено увагу оптимізації параметрів якості технічних пристроїв і систем. Більш детально розібрані оптимізація параметрів напівпровідникового терморегулятора та формувача синхронізуючих імпульсів.

Розділ 1

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ ПРО ЕКСПЕРИМЕНТ

Проведення експерименту передбачає створення відповідних, контрольованих, відтворюваних умов, наявність вимірюваних приладів, за допомогою яких реєструють дані. Експеримент потребує планування як в методологічному так і в інструментальному змісті. Наслідком експерименту є аналіз та інтерпретація даних, інакше він не має сенсу. Планування експерименту звичайно містить прості випробувальні досліди, що є дуже важливим, зважаючи на постійне зростання витрат на його проведення.

Комп'ютерна техніка надала нові можливості для проведення порівняно не коштовних чисельних експериментів. Звичайно їх проводять на базі вже існуючих теоретичних моделей, іноді – ні (методи типу Монте-Карло). В деяких випадках чисельні експерименти дають змогу побудувати теоретичну модель, як правило, алгоритмічного вигляду. Зазначимо, що такі комп'ютерні експерименти застосовують в таких випадках, коли натурні експерименти суттєво ускладнені, або взагалі неможливі, наприклад, в разі моделювання наслідків ядерних вибухів, соціальної революції, економіко-соціального прогнозування, тощо. Комп'ютерне моделювання та чисельний експеримент предмет для окремого обговорення і тут не викладається.

Експеримент звичайно закінчується звітом, що містить результати, висновки, рекомендації та ін. Результати мають вигляд формул, графіків, таблиць, номограм, описувальні форми. Кваліфікований вибір вимірюваних параметрів та обладнання, форма подання результатів - це є те, що дозволяє одержувати відповіді на питання, що їх людина ставить природі. Варто зазначити, що експеримент може бути пасивним, тобто збігається просто до спостережень, вимірювань та наступної обробки результатів. Найбільш типовим прикладом в цьому разі є астрофізика.

В експерименті використовують поняття :

- вимірювальні прилади: сприймаючі, реєструючі, зберігаючи відповідні вимірювані параметри;
- випробувальна апаратура: все що є необхідним для проведення експерименту, в т.ч. вимірювальні прилади;
- план експерименту: послідовність його проведення, алгоритм;
- реплікація: відтворення експерименту в тих самих умовах (не просто відтворення);
- змінні: залежні, незалежні, зовнішні (змінюються не досить контрольовано), звичайно прагнуть досягти максимальної контрольованості експерименту;
- вимірювання;
- похибки, невизначеності;
- серія випробувань, експериментальний відлік;
- дані, оброблені дані - після проведення експерименту отримують вибірку відліків.

1.1. Експериментальні похибки

В разі планування експерименту, вибору обладнання необхідно заздалегідь задавати допустиму величину похибки, невизначеності. Ця величина має бути достатньо малою для того, аби висновки мали цінність, але не настільки малою, аби вартість експерименту була невиправдано високою (принцип необхідності та достатності). Джерело помилок може бути таким:

- чутливий елемент невірно відображує вимірювану величину, що обумовлено вадами датчика або методики вимірювань;

- негаразди в роботі індикатора, він не відображує реакцію чутливого елемента.

- неуважність оператора

Вказані джерела призводять до систематичних, випадкових похибок та промахів.

Систематичні похибки обумовлені факторами, що діють однаковим чином за багатократного повторення вимірювань. Наприклад, у приладі "збитий нуль", хронометр або "поспішає", або "відстає", маса гирьки не відповідає напису на ній і т.інш. Систематичні похибки величин, характер та походження яких відомі, легко усунути введенням відповідних поправок. Наприклад, поправка на температурне видовження вимірювального інструмента, архимедову силу, тощо. Зрозуміло, що такі поправки слід вводити в тому разі, якщо вони сумірні з мінімальною величиною надійного відліку (ціна поділки шкали), або складають не менше відсотка від загальної похибки вимірювань.

Похибки відомого походження звичайно характеризують класом точності приладу - відносна похибка для певної границі вимірювань у відсотках. Наприклад, вольтметр для границі вимірювань 150 В має клас точності $0,5$. Це означає:

$$0,5 = \frac{\Delta U}{150\text{ В}} \cdot 100\% \Rightarrow \Delta U = 0,75\text{ В},$$

тобто похибка такого вимірювання не перевищує $0,75\text{ В}$. Зазвичай шкали приладів узгоджені з класом точності, вони мають ціну поділки, що приблизно дорівнює максимальній похибці вимірювань. В мультиметрах з цифровою індикацією така похибка відповідає останній значущій позиції, що висвітлює індикатор. Результати вимірювань з врахуванням цих помилок можна записати у вигляді $U = 105 \pm 0,75\text{ В}$ - приклад з вольтметром, що показує 105 В .

Більш небезпечні систематичні похибки, про які не мають підозри. Наприклад, в разі визначення густини речовини тіла, що має порожнину, про яку невідомо. Один з найбільш надійних методів виявлення таких похибок - вимірювання одного і того ж самого параметра різними способами та порівняння результатів.

Нарешті, систематичні похибки можуть бути обумовлені властивостями самого об'єкту. Наприклад, проводиться вимірювання діаметра прутка, що вважається круглим, а насправді дещо овальний. В цьому разі вимірюють різні діаметри, а результат усереднюють. Ця величина буде краще характеризувати пруток, тобто використання будь-якого окремого значення діаметру для розрахунку об'єму призведе до систематичної похибки.

Наведені приклади по суті збігаються до спроби переведення систематичної похибки у випадкову, а далі використовується середнє значення. Наприклад, можна проводити визначення ваги гирьками з різних комплектів. Похибка в цьому разі, за усереднення результату, зменшиться завдяки тому, що маса одних гирьок дещо більша за номінал, других - дещо менша і це частково компенсується.

Усунення систематичної похибки звичайно проводиться за допомогою калібровки вимірювальних систем, повірки, тощо.

Промахи - наслідок неувважності оператора при записуванні даних, відліку їх зі шкали приладу, і т.ін. Або, наприклад, початок шкали лінійки звичайно знаходиться приблизно на 1 см від її початку. Ігноруючи це, вимірювання виконують від самого початку лінійки і отримують результат, що зменшений на 1 см . Звичайно, зовні промах ідентифікують як результат, що різко відрізняється від інших даних виборки і просто відкидають його. Але до цього варто відноситись обережно. Справа в тому, що такий різкий "викид" може бути обумовлений об'єктивним ходом експерименту і відображує реальність. Точних рецептів тут немає. Явище, що обумовлює таке аномальне відхилення може бути взагалі одноразовим, тобто описувати його з точки зору теорії ймовірності взагалі неможливо і ймовірнісні критерії ідентифікації такого відхилення як промаху є сумнівними. Звичайно роблять перепроверку даних, змінюють оператора, обладнання та інш. Зрозуміло, що в разі виявлення причини "викиду" все дуже просто. Якщо ні, то звичайно, за відсутність кращого, роблять наступне. Якщо кількість спостережень (вимірювань) не більша за шість, то виявлення промаху за аномальним відхиленням від середнього взагалі не проводять. Якщо кількість вимірювань сягає сотні, то результат вимірювань ідентифікують як промах і вилучають з вибірки і в разі його відхилення від середнього перевищує "амплітуду" всієї вибірки в $1,3 - 1,5$ рази і більше. За ще більшої кількості вимірювань - якщо перевищення має величину більше, ніж у $1,5$ рази.

Випадкова похибка обумовлена факторами, дія яких неоднакова в кожному досліді і, як правило, не може бути врахована. Так, наприклад, навіть користуючись гирьками одного комплекту ми будемо отримувати дещо різні значення маси. Те ж саме буде відбуватись за вимірювання однієї і тієї ж самої величини різними операторами.

Природно, класифікація похибок умовна і всі вони можуть діяти разом. Наприклад, вимірюється величина x , відоме її дійсне значення μ_x . На осі значень x отримуємо:

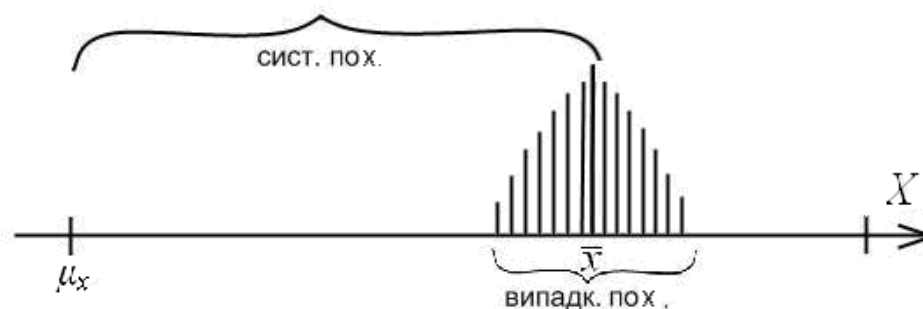


Рис. 1.1 Графічна ілюстрація похибок

\bar{x} - середнє значення величини x .

Тобто систематична похибка зміщує результат вимірювань у будь-який бік від дійсного значення, а випадкова похибка розсіює результати окремих вимірювань навколо середнього. Причому, як зазначалося, систематичні похибки та промахи в деяких випадках можуть бути зменшені інструментально або методично (налагодження обладнання, корекція методики або алгоритму експерименту). В деяких випадках похибки таких типів частково або майже повністю вилучаються за обробки даних - введення поправок, відкидання промахів та інш. Випадкова похибка, як правило, принципово неусувна і її можна лише аналізувати, враховувати, визначати, оцінювати в процесі обробки експериментальних даних.

1.2. Аналіз випадкових похибок

Зрозуміло, по-перше, що величину випадкової похибки, якщо відомо що вона існує, неможливо визначити за одного єдиного вимірювання. Їх має бути, принаймні, декілька. По-друге, якщо вважати результати окремих вимірювань незалежними, тобто похибка відповідає своїй назві, то для її аналізу можна користуватися теорією ймовірності. Почнемо з самих примітивних прийомів. Маємо вимірювання деякої величини X , причому, або це робиться багаторазово, або один раз, але цілим колективом операторів - будемо вважати, що це еквівалентно. В результаті отримуємо вибірку даних. Розіб'ємо весь діапазон вимірювань X на однакові інтервали, наприклад на 10 (з цього приводу також є певні рекомендації до чого ми ще звернемося), і визначимо кількість відліків в інтервалах ΔX . Далі побудуємо гистограму. Вона виявляє певну закономірність отримання даних в тому чи іншому інтервалі ΔX . Якщо цей інтервал зменшувати, то нарешті взагалі отримаємо плавну криву частоти розподілу величини X .

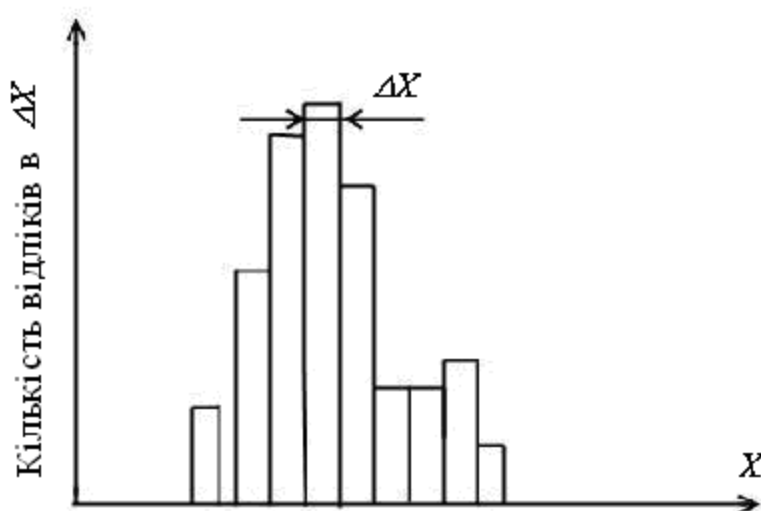


Рис. 1.2 Гістограма розподілу випадкової величини

Якщо розділити кількість відліків на кожному інтервалі ΔX на загальну кількість вимірів (об'єм виборки), то отримані величини (кожна з них менша за одиницю) характеризують ймовірність попадання величини X у відповідний інтервал. Але, із зменшенням ΔX кількість відліків, що в нього потрапили, також зменшується, тобто за умови $\Delta X \rightarrow 0$ вона теж сягає нуля. Ймовірність реалізації того чи іншого конкретного значення випадкової величини дорівнює нулю. Парадоксу тут немає. Наприклад, ми визначаємо ненульову скінчену масу тіла як суму нескінченно великої кількості нескінченно малих, по суті, нульових елементарних точкових мас $m = \int_V dm$. Так само ненульова ймовірність потрапляння величини до інтервалу – сума нескінченно великої кількості нульових ймовірностей окремих значень X (інтеграл) на даному інтервалі. Всі ці труднощі легко усунути за допомогою введення густини ймовірності по аналогії з густиною речовини – точка нульової маси та нульового об'єму (взагалі кажучи нескінченномалих) має нескінчену густину:

$$\rho = \frac{dm}{dV}; \quad m = \int_V \rho \cdot dV \quad (1.1)$$

Аналогічно розглядається не просто ймовірність dP потрапляння до інтервалу dX (це нескінченно мала величина), а густина ймовірності $\frac{dP}{dX}$, що має досить конкретні не нульові значення для кожного значення величини X . Відтак, ймовірність потрапляння величини в деякий інтервал визначиться інтегралом

$$P_{\Delta X} = \int_{\Delta X} \frac{dP}{dX} dX = \int_{\Delta X} f(X) dX, \quad (1.2)$$

де $f(X)$ – густина ймовірності.

Повернемо до гістограми. Будемо вважати, що для кожного інтервалу, перенумеруємо їх $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots, x_s$, існує ймовірність потрапляння до інтервалу $P_1, P_2, \dots, P_m, \dots, P_s$, що визначаються як:

$$\frac{n_1}{N}, \frac{n_2}{N}, \dots, \frac{n_m}{N}, \dots, \frac{n_s}{N}. \quad (1.3)$$

Очевидно, що

$$\frac{n_1 + n_2 + \dots + n_m + \dots + n_s}{N} = \frac{N}{N} = 1, \quad (1.4)$$

тобто $\sum P_m = 1$ - ймовірність потрапляння X у будь-який інтервал – цілковито вірогідне явище (правило складання ймовірностей). Як видно з гістограми, ймовірність потрапляння випадкової величини в центральну частину є максимальною. Це значення X називають математичним очікуванням (найбільш очікуване значення) або середнім арифметичним:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \dots + x_m \cdot n_m + \dots + x_s \cdot n_s}{N} = \\ &= x_1 \cdot P_1 + x_2 \cdot P_2 + \dots + x_m \cdot P_m + \dots + x_s \cdot P_s = \sum_1^s P_m \cdot x_m \end{aligned} \quad (1.5)$$

Зрозуміло, також, що це середнє не характеризує величину випадкової помилки. Наприклад, існують виборки: 8; 9; 10; 11; 12; та 9,8; 9,9; 10; 10,1; 10,2 .

Середні в них однакові $\bar{X} = 10$, але розсіювання навколо середнього різні. Очевидно, ймовірна похибка для першої виборки більша ніж для другої. Виникає питання, як характеризувати це розсіювання? Якщо підсумувати всі відхилення й взяти середнє, то одержимо нуль:

$$\overline{(x - \bar{X})} = \sum_{m=1}^s P_m (x_m - \bar{X}) = \sum_{m=1}^s P_m \cdot x_m - \bar{X} \cdot \sum_{m=1}^s P_m = \bar{X} - \bar{X} = \left\{ \sum_{m=1}^s P_m = 1 \right\} = 0 \quad (1.6)$$

Дійсно, у виборках маємо відхилення: $-2; -1; 0; 1; 2;$ або $-0,2; -0,1; 0; 0,1; 0,2$ - в сумі маємо нулі. Це виникає завдяки тому, що середнє-своєрідний центр симетрії і відхилення від нього мають різні знаки. Для усунення впливу знака розглядають квадрати відхилень – дисперсію. В цьому разі:

$$\begin{aligned} D &= \overline{(x - \bar{X})^2} = \sum_{m=1}^s P_m (x_m - \bar{X})^2 = \sum_{m=1}^s P_m (x_m^2 - 2x_m \cdot \bar{X} + \bar{X}^2) = \\ &= \sum_{m=1}^s P_m x_m^2 - 2\bar{X} \cdot \sum_{m=1}^s P_m \cdot x_m + \bar{X}^2 \cdot \sum_{m=1}^s P_m = \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2 + \bar{X}^2 = \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

тобто, як видно, середнє від квадрата і квадрат середнього зовсім не одне і теж. Відтак, ця відмінна від нуля величина, сама назва якої означає розсіювання, може характеризувати випадкову похибку.

Розглянемо тепер саму форму гістограми (рис.1.2). Як видно, вона нагадує відомі з теорії ймовірності розподіли. Будемо вважати, що ймовірність деякої події в кожному окремому випадку (вимірюванні)

дорівнює P . Відтак, ймовірність того, що ця подія не відбудеться $q = 1 - P$. Причому, ці ймовірності не залежать від наслідків попередніх та наступних вимірювань. Визначимо ймовірність того, що в серії, яка складається з n незалежних однакових вимірювань ця подія відбудеться m разів. В випадку з гістограмою – потрапить до певного інтервалу ΔX . Порядок окремих елементів виборки ніякої ролі не відіграє (порядок вимірювань), має значення тільки величина даних. За правилом множення ймовірностей ймовірність того, що подія відбудеться в m -вимірюваннях та невідбудеться в $n - m$ вимірюваннях, дорівнює $P^m \cdot q^{n-m}$. Але ці m вимірювань можуть бути розташовані у загальній кількості n довільним чином і за правилом складання ймовірностей добутки $P^m \cdot q^{n-m}$ треба помножити на кількість цих способів, тобто на кількість сполучень з n по m :

$$P_n(m) = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}, \quad (1.8)$$

$P_n(m)$ - ймовірність того, що за n - кратного повторення вимірювань випадкова подія (потрапляння m результатів вимірювань в певний інтервал) відбудеться m разів. Згадаємо, що

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \forall = 1. \quad (1.9)$$

Відтак, $P_n(m)$ співпадає із загальним доданком розкладання біному Ньютона $(p + q)^n$ для цілих n в зв'язку з чим отриманий розподіл $P_n(m)$ називають біноміальним. Тобто

$$(p + q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m} = \sum_{m=0}^n P_n(m), \quad (1.10)$$

але така сума має дорівнювати одиниці. Дійсно, враховуючи, що

$q = 1 - P \Rightarrow P + 1 - P = 1$, тобто $(P + q)^n = 1^n = 1 = \sum_{m=0}^n P_n(m)$, що відповідає змісту ситуації.

Задача 1.1. Розрахувати ймовірність отримання однакових результатів вимірювань при загальній їх кількості $n = 20$ та ймовірність отримання результату в окремому вимірюванні $P = 0,5$ ($q = 1 - 0,5 = 0,5$). Тобто ймовірність отримання 20 однакових результатів вимірювання з 20-ти; 19 однакових результатів з 20-ти; 18 - з 20-ти і т. д.

Відкладемо вздовж осі абсцис m , а вздовж ординат-ймовірність $P_{20}(m)$

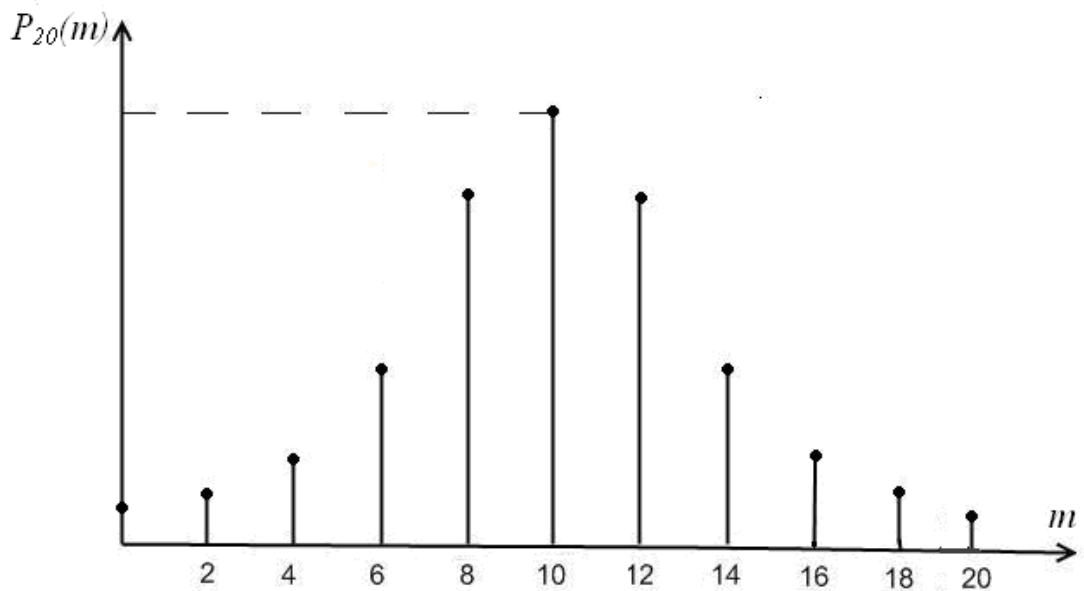


Рис 1.3 Розподіл ймовірності

Як видно, це дуже нагадує гістограму, тобто ймовірність реалізації, отримання певних елементів вибірки є максимальною. Осі ординат в обох випадках практично співпадають – кількість відліків лінійно пов'язана з ймовірністю (ймовірність відповідного відліку помножена на загальну кількість вимірювань, об'єм вибірки). Але вздовж осі абсцис в гістограмі відкладена вимірювана величина, а в цьому разі – кількість результатів, які отримані одночасно (кількість вимірювань, що попадають до інтервалу ΔX). Збіг отриманих розподілів свідчить про те, що результат вимірювання розсіюється навколо середнього значення випадковим чином (за критерії випадковості мова йтиме далі).

Використання біноміального розподілу (формула Бернуллі) для великих значень n ускладнене (розрахунки факторіалів), тому користуються граничним переходом $n \rightarrow \infty$, що має назву розподілу Лапласа-Гауса:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \cdot e^{-\frac{(m-\bar{m})^2}{2D}} \quad (1.11)$$

де можна вважати $\bar{m} = n \cdot P$; $D = n \cdot P \cdot q$ -дисперсія. Такий розподіл називають нормальним. За умови малих P ($P \ll 1$) та великих n біноміальний розподіл переходить до розподілу Пуасона:

$$P_n(m) = \frac{(n \cdot P)^m}{m!} \cdot e^{-nP} \text{ - закон рідкісних явищ,}$$

Варто зазначити, що в цьому випадку $P \ll 1$, а $q \approx 1$, відтак $\bar{m} \approx D$, тобто в розподілі Пуасона математичне очікування практично дорівнює дисперсії.

Зустрічаються ситуації, за яких нормальним чином розподілена не сама вимірювана величина, а її логарифм $\ln X$. В цьому разі математичне очікування, тобто найбільш вірогідне значення X виражається через логарифм:

$$\overline{\ln X} = \sum_{m=1}^S P_m(\ln x_m) = \sum_{m=1}^S \ln(x_m^{P_m}) \Rightarrow \bar{X} = \prod_{m=1}^S x_m^{P_m}, \quad (1.12)$$

тобто \bar{X} визначається вже не як середнє арифметичне, а як середнє геометричне. Існують і інші розподіли, ще більш суттєво відмінні від нормального, про що йтиме за необхідністю.

1.3. Випадкова похибка розподілена за нормальним законом

Припустимо, що густина ймовірності для вимірювання деякої величини X за дуже великої кількості вимірювань розподілена за нормальним законом, який в даному разі зручно записати у вигляді:

$$f(x) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2 \cdot x^2}, \quad (1.13)$$

де $\eta = \frac{1}{\sqrt{2D}}$ - модуль (показник) точності,

D - дисперсія; $\sqrt{D} = \sigma$ середнє квадратичне відхилення або стандарт.

Зазначимо, що для дискретних вимірювань саме середнє значення квадратів відхилень від середнього характеризує випадкову похибку. Якщо просто визначити суму квадратів відхилень $\sum_{m=1}^S (x_m - \bar{X})^2$, то, зрозуміло, така величина залежатиме від об'єму вибірки, тобто від кількості вимірювань - чим більше вимірювань, тим, за інших сталих обставин, ця сума є більшою. Тобто порівняння результатів з різною кількістю вимірювань взагалі стає неможливим. В найпростіший спосіб цієї вади позбавляються знаходячи середнє вибіркове:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N X_i; \quad (1.14)$$

абсолютні відхилення від середнього:

$$x_1 = X_1 - \bar{X}; \quad x_2 = X_2 - \bar{X}; \quad \dots \quad x_N = X_N - \bar{X}, \quad (1.15)$$

знаходять суму їх квадратів та ділять її на кількість вимірювань тобто отримують:

$$\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (1.16)$$

Зазначимо, що $N-1$ фігурує замість N , хоч для великих виборок це несуттєво. Пояснимо на прикладі для виборки: 8; 9; 10; 11; 12.

$$x_1 = 8 - 10 = -2; \quad x_2 = 9 - 10 = -1; \quad x_3 = 10 - 10 = 0;$$

$$x_4 = 11 - 10 = 1; \quad x_5 = 12 - 10 = 2.$$

Як видно, об'єм вибірки дорівнює п'яти, а відхилень - чотирьом, тобто на одиницю менше. Справа в тому, що саме середнє функції від елементів вибірки, що знижує кількість незалежних змінних в сумі на одиницю. Тобто один з елементів вибірки практично співпадає із середнім значенням. Для компенсування піднесення у квадрат (усунення залежності від знака) з отриманої величини добувають корінь

$$S_n = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (1.17)$$

Ця величина все достатньо універсальна і характеризує ступінь розсіювання результатів вимірювань навколо середнього, тобто може правити за характеристику випадкової помилки. Її називають середньо квадратичною помилкою. За формою запису це квадратний корінь від спрощеної дисперсії, тобто це вибірковий стандарт, що за умови $n \rightarrow \infty$ переходить у σ , тобто

$$S_n \Big|_{n \rightarrow \infty} \rightarrow \sigma, \text{ або } \sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \quad (1.18)$$

Виявляється, що на практиці ми майже завжди визначаємо саме S_n а не σ , що входить до нормального закону розподілу. До речі, самий закон отримують як граничний випадок за умови $n \rightarrow \infty$.

1.4. Показники випадкової похибки

Із змісту густини ймовірності $f(x) = \frac{dP}{dx}$, де під x розуміють, як і раніше, відхилення від середнього, слідує, що

$$P = \int_{-x}^x \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2 \cdot x^2} \cdot dx, \quad (1.19)$$

де P - ймовірність потрапляння результату вимірювання в діапазонах $\pm x$ відносно середнього, тобто до інтервалу $[\bar{X} - x, \bar{X} + x]$. Геометрично це відповідає площі під функцією густини $f(x)$ (рис.1.4).

Те ж саме можна записати через дисперсію D або стандарт σ , враховуючи, що $\eta = \frac{1}{\sqrt{2D}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sigma}$, тобто $\eta \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$.

Інтеграл ймовірності - спеціальна функція, що звичайно представлена у вигляді таблиці 1.1. В таблиці 1.1 фактично наведені значення ймовірності потрапляння результату вимірювання до діапазону $\pm \eta \cdot x$

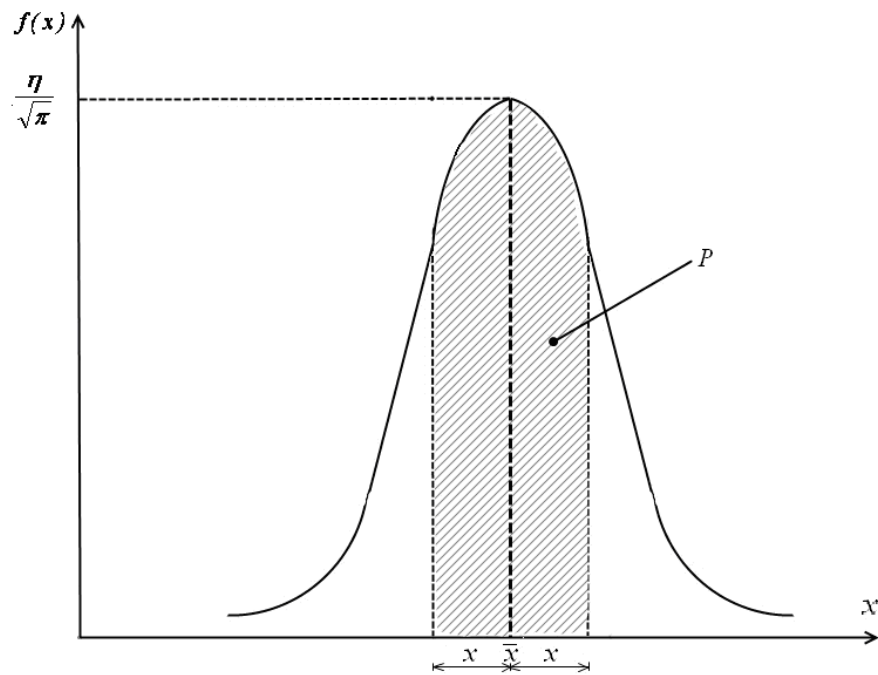


Рис 1.4 Графік нормального розподілу

Таблиця 1.1. Таблиця ймовірностей

$\eta \cdot x$	$P_{\eta x}$	$\eta \cdot x$	$P_{\eta x}$	$\eta \cdot x$	$P_{\eta x}$
0	0	0,5	0,521	1,00	0,843
0,1	0,113	0,6	0,604	1,1	0,88
0,2	0,223	0,7	0,678	1,2	0,91
0,3	0,329	0,8	0,742	1,4	0,962
0,4	0,428	0,9	0,797	2,0	0,995

Задача 1.2 Середнє значення показів тахометра $1000 \left(\frac{\text{об}}{\text{хв}} \right)$.

Покази розподілені відносно цієї величини за нормальним законом з показником точності $\eta = 0,04 \left(\frac{\text{об}}{\text{хв}} \right)^{-1}$. При деякому значенні частоти обертання виконується 20 вимірювань. Знайти кількість відліків, що потрапляють до інтервалу $990 - 1010 \left(\frac{\text{об}}{\text{хв}} \right)$.

В даному випадку $x = \pm 10 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$; $\eta \cdot x = 10 \cdot 0,04 = 0,4$.

За таблицею 1.1 знаходимо $P = 0,428$, відтак: $20 \cdot 0,428 = 8,56$, тобто 8...9 відліків опиняються в даному інтервалі. Зрозуміло, що 20 це далеко не ∞ і реальні значення можуть дещо відрізнятись від знайденої кількості відліків, але все одно можлива різниця має бути несуттєвою.

Часто користуються поняттям односигмового інтервалу, тобто $x = \sigma$. Враховуючи, що $\eta \cdot \sigma = 0,707$ ймовірність потрапляння до такого інтервалу становить 0,682 або, що те ж саме, 68,2% об'єму вибірки потрапляють до цього інтервалу. Для трьосигмового інтервалу ця ймовірність становить вже 0,997, тобто можна сказати, що до цього інтервалу потрапляє майже вся вибірка. На практиці так і вважають – до інтервалу $\pm 3\sigma$ потрапляють усі результати вимірювань.

Користуються ще й ймовірною помилкою Φ . Її величина визначається як відхилення, за якого до інтервалу $\pm \Phi$ потрапляє половина всієї вибірки. Для $P_{xx} = 0,5$ (таблиця 1.1 недостатньо докладна) маємо $x \cdot \eta = 0,477$, тобто $\eta \cdot \Phi = 0,477$ для $P_{\eta\Phi} = 0,5$. Цей вид помилки означає, що ймовірність відхилення більшого за Φ дорівнює ймовірності відхилень, менших за Φ - до інтервалу $\pm \Phi$ потрапляє половина вибірки, за межами цього інтервалу також знаходиться половина вибірки. Як видно, η та Φ пов'язані дуже простим співвідношенням і визначаються одне через друге.

Задача 1.3. Маємо тахометр з показником точності $0,04 \left(\frac{\text{об}}{\text{хв}} \right)^{-1}$. Знайти односигмовий інтервал, ймовірну помилку та максимально можливе відхилення від середнього ($1000 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$).

Знаходимо:

$$\sigma = \frac{0,707}{\eta} = \frac{0,707}{0,04} = 17,7 \frac{\text{об}}{\text{хв}},$$

тобто в інтервалі $\pm 17,7 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ відносно $1000 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ знаходиться 68,2% результатів вимірювань (багатократні вимірювання).

$$\Phi = \frac{0,477}{\eta} = \frac{0,477}{0,04} = 11,9 \frac{\text{об}}{\text{хв}},$$

тобто половина всіх відліків за багатократних вимірювань буде знаходитись всередині інтервалу $\pm 11,9 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$.

Вважаємо, що всередині 3-сигмового інтервалу знаходиться практично вся вибірка, тобто $3 \cdot \sigma = 3 \cdot 17,7 \approx 53 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$, тобто відхилення показів тахометра нижче $950 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ та вище $1050 \frac{\text{об}}{\text{хв}}$ практично неможливі

Часто виникає питання, а чи відповідає розподіл результатів вимірювань нормальному закону? Взагалі кажучи, це слід з'ясувати. Найбільш зручний практичний спосіб для цього - використання ймовірного графіка, тобто графіка, вздовж осі ординат якого відкладена ймовірність в лінійному відносно відхиленню масштабі (простір в якому функція лінеаризується). Наприклад, квадратична функція $y = x^2$ лінеаризується в

координатах $y - x^2$, тобто вздовж осі абсцис відкладають не x , а x^2 і отримують пряму, що проходить через початок координат. Приклад ймовірносних координат має вигляд зображений на рис.1.5.

Наведений графік побудовано для наступної конкретної задачі.

Задача 1.4. Визначається твердість зразка за Брінелем всього 31 вимірювання. Визначається діаметр лунки, що виникає внаслідок навантаження кулькою на поверхні зразка.

Отримані результати:

Відхилення	-0,2	-0,1	-0,05	0	+0,05	+0,1	+0,2
кількість	1	1	4	13	7	4	1

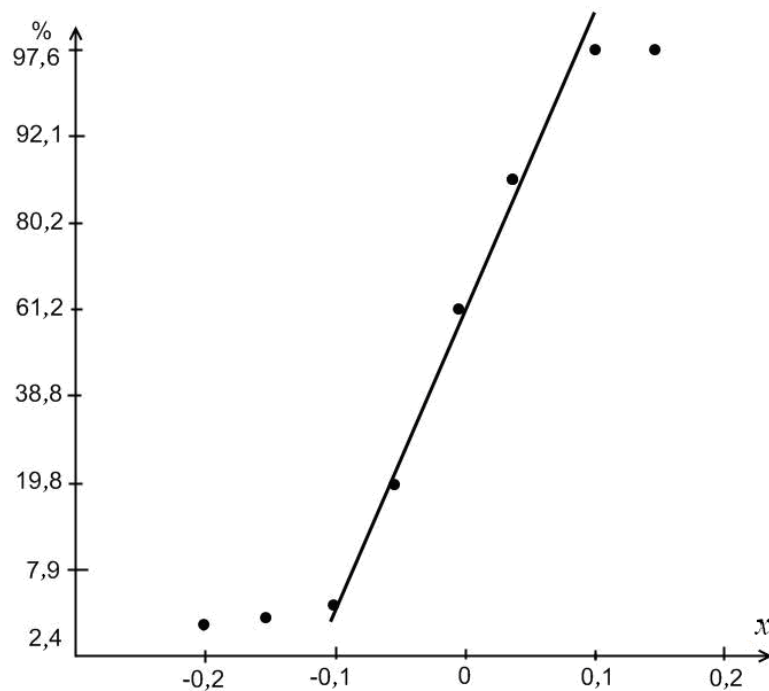


Рис. 1.5

Перепишемо дані, прийнявши за початок крайнє ліве відхилення, аби охопити всю вибірку.

Відхилення	-0,2	-0,15	-0,1	-0,05	0	0,05	0,1	0,15	0,2
Кількість відх., що не перев. даного	1	1	2	6	19	26	30	30	31
Відсотки	3,2	3,2	6,4	19,4	61,2	84	97	97	100

Ці дані наносимо на ймовірнісний графік. Його індивідуальність стосовно даної конкретної задачі полягає тільки в поділках осі абсцис. По осі

ординат завжди відкладають відсотки відхилень, що не перевищують даного. Одержаний графік підлягає аналізу. Симетрія розподілу перевіряється тим, наскільки близько проходить графік відносно точки з координатами $(0; 50)$. Чим ближче, тим розподіл більш симетричний. Розподіл може бути більш "гострим" за нормальний, або більш «розмитий». Відповідні ознаки легко визначити за тестовим трафаретом, вигляд якого наведено на рис. 1.6.

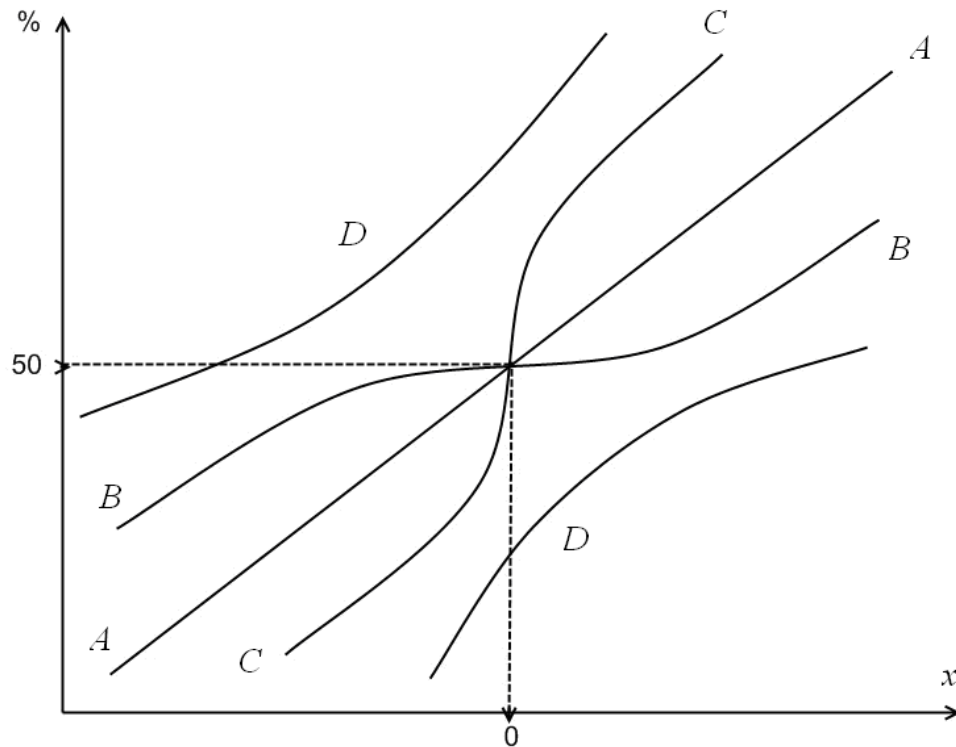


Рис. 1.6

A - нормальний розподіл; *B* - симетричний з розмитою верхівкою; *C* - симетричний з гострою верхівкою; *D* - асиметричний.

В результаті такого аналізу роблять висновки щодо застосування ймовірнісних методів. Крім того, суттєва асиметрія звичайно свідчить про несправність або неправильну експлуатацію приладів. Якщо розподіл симетричний, але дуже відрізняється від нормального, то звичайно це свідчить, що методика проведення вимірювань є хибною, та існують дуже вагомні підстави її переглянути.

Ймовірнісні графіки будують, звичайно, на відповідному ймовірнісному папері. Аналіз графіка на рис.1.5, вказує на те, що відповідний розподіл майже симетричний і майже нормальний (порівняння з тестовим трафаретом на рис.1.6), тобто для обробки відповідних експериментальних даних можна застосувати будь-які ймовірнісні методи.

Зазначимо ще одну важливу особливість. Для характеристики випадкової похибки треба задати два числа – величину самої помилки (довірчий інтервал) та величину довірчої ймовірності (надійності) ймовірності потрапляння результатів вимірювань у заданий довірчий

інтервал. За великої кількості вимірювань та нормального закону розподілу інтервал звичайно задають у долях σ

Задача 1.5. Отримано $\bar{X} = 1,27$; $\sigma = 0,032$. Знайти ймовірність того, що результат вимірювань потрапить до інтервалу $\pm 0,01$ навколо середнього, тобто до $[1,27 - 0,01; 1,27 + 0,01]$ або $1,26 \leq X \leq 1,28$.

$$\text{Знаходимо точність: } \eta \cdot \sigma = 0,7 \Rightarrow \eta = \frac{0,7}{\sigma} = \frac{0,7}{0,032} = 21,9;$$

$\eta \cdot x = 21,9 \cdot 0,01 = 0,219$. Відповідно, $P_{\eta x} \approx 0,23$ за табл. 1.1, тобто 23% результатів вимірювань мають потрапити до вказаного інтервалу за даної ступені розсіювання результатів навколо середнього, що визначається отриманим значення σ . Зрозуміло, що даний інтервал менший за односигмовий:

$$\frac{0,01}{0,032} \approx 0,31 - \text{тому надійність } 0,23 \text{ (23\%)} \text{ менша, ніж для односигмового,}$$

що становить 0,68 (68%). Можна поставити ще таке питання – який має бути інтервал, аби до нього потрапило 98% результатів вимірювань? Тобто надійність становила $\alpha = 0,98$, за табл. 1.1 знаходимо для $P_{\eta x} = 0,98$ значення $\eta \cdot x = 2$.

$$\text{Відтак: } x = \frac{2}{\eta} = \frac{2}{21,9} \approx 0,1, \text{ тобто цей інтервал становить } \pm 0,1, \text{ або інакше –}$$

98% результатів всіх вимірювань мають потрапляти до інтервалу $[1,27 - 0,1; 1,27 + 0,1]$, тобто $1,17 \leq x \leq 1,37$. В стандартному вигляді: $x = 1,27 \pm 0,1$; $\alpha = 0,98$.

Зрозуміло, що за відповідальних вимірювань інтервалах треба брати більше (в долях σ), тобто сама величина σ має бути якомога менше. Відповідно, надійність задають до 0,99, за менш відповідальних вимірювань можна обмежитися $\alpha = 0,7 \dots 0,8$.

Зазначимо, що користуватися наведеними вище параметрами та таблицею (за умови, що результат вимірювань розсіюється за нормальним законом навкруги середнього) доцільно, якщо об'єм вибірки дорівнює близько десяти. Звичайно вважають, що $n \geq 20$, тобто кількість вимірювань має бути ≈ 20 . Для виборок з малим об'ємом користуються статистикою Ст'юдента-Фішера. В найпростішому випадку знаходять фактор розсіювання.

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_i x_i^2}, \quad (1.20)$$

де x_i - відхилення від середнього, N - об'єм вибірки. Далі задають потрібну надійність і за таблицею знаходять коефіцієнт Ст'юдента $t_{\alpha N}$.

Таблиця 1.2. Таблиця коефіцієнтів Ст'юдента

$N \backslash \alpha$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
2	0,16	0,33	0,51	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	63,7
3	0,14	0,29	0,45	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	31,6
4	0,14	0,28	0,42	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	12,9
5	0,13	0,27	0,41	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	8,6
6	0,13	0,27	0,41	0,56	0,73	0,92	1,1	1,5	2,0	2,6	6,9
7	0,13	0,27	0,4	0,55	0,72	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	6,0
8	0,13	0,26	0,4	0,55	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,4	5,4
9	0,13	0,26	0,4	0,54	0,71	0,9	1,1	1,4	1,9	2,3	5,0
10	0,13	0,26	0,4	0,54	0,7	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	4,8

Фактор розсіювання $S_{\bar{X}}$ - множать на відповідний до умов експерименту $t_{\alpha N}$ і знаходять довірчий інтервал, що відповідає заданному значенню надійності α . Результат вимірювань, як і раніше, записують у вигляді

$$X = \bar{X} \pm S_{\bar{X}} \cdot t_{\alpha N} = \bar{X} \pm \Delta X \quad (1.21)$$

за умови заданого значення α .

Звичайно, обладнання для експерименту підбирають таким чином, аби інструментальна похибка відповідала поставленій задачі, а фактор розсіювання або довірний інтервал були сумірними (не більше) з цією інструментальною похибкою. У відповідності з цієї вимоги добирають і кількість вимірювань. Якщо випадкова похибка надто велика, або потребує завеликої кількості вимірювань для сумірності з інструментальною, то належить радикально переглянути методику вимірювань, експерименту взагалі. Існують норми, що дозволяють заздалегідь визначити кількість вимірювань (табл.1.3).

Таблиця 1.3. Таблиця для визначення оптимальної кількості вимірювань

$\frac{\Delta X}{S}$	α					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,99	0,999
1,0	2	3	5	7	11	17
0,5	3	6	13	18	31	50
0,4	4	8	19	27	46	74
0,3	6	13	32	46	78	130
0,2	13	29	70	100	170	280
0,1	47	110	270	390	700	1100
0,05	180	430	1100	1500	2700	4300

Наприклад, маємо відносну систематичну інструментальну похибку вимірювань $\approx 1\%$. Відтак, відносна випадкова похибка має бути, принаймні, не більша за систематичну, тобто складатиме 1% або менше.

$$\frac{\Delta X_{\text{інстр}}}{S} = \frac{\delta X_{\text{інстр}}}{\delta X} \approx 1 \dots 0,5$$

В даному разі надійність α розуміють як ймовірність того, що випадкова похибка не вплине на результат вимірювань, тобто не погіршить інструментальну похибку. Зрозуміло, що для всілякої впевненості маємо вибирати α близьку до одиниці, тобто $0,95 \dots 0,99$. В даному випадку для $\frac{\Delta X}{S} = 1$ отримуємо $7 \dots 11$ вимірювань, а для $\frac{\Delta X}{S} = 0,5$ отримуємо $18 \dots 31$ вимірювань. Зрозуміло, що кількість вимірювань за даних умов має бути, принаймні, не менша за десять. Взагалі, в таблиці $\Delta X_{\text{інстр}}$ розуміють як інструментальну похибку, а S - як фактор розсіювання. Видно, що надмірні вимоги, аби випадкова похибка практично не впливала на результат вимірювань, призводять до різкого зростання необхідної кількості вимірювань. До таких самих наслідків призводить зростання випадкової похибки порівняно з інструментальною (зменшення відношення $\frac{\Delta X}{S}$). Звичайно, навіть замість фактора розсіювання використовують S - середню квадратичну похибку:

$$S = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_i (x_i)^2}, \quad (1.22)$$

де x_i - відхилення від середнього, N - кількість вимірювань.

Наведемо, таблицю, що дозволяє оцінити ймовірність того, що відхилення є промахом, тобто дозволяє з відповідною ймовірністю відкидати надто відхилені результати:

Таблиця 1.4. Таблиця для визначення ймовірності промахів

N	β			
	$0,1$	$0,05$	$0,025$	$0,01$
3	1,41	1,41	1,41	1,41
4	1,65	1,69	1,71	1,72
5	1,79	1,87	1,92	1,96
6	1,89	2,00	2,07	2,13
7	1,97	2,09	2,18	2,27
8	2,04	2,17	2,27	2,37
9	2,10	2,24	2,35	2,46
10	2,15	2,29	2,41	2,54

Тут β - ймовірність того, що результат вимірювань належить до вибірки, (до трьохсигмового інтервалу), не є промахом. Зрозуміло, що менше 0,01 це вже практично дійсно промах (менші значення в таблиці 1.4 відсутні). В клітинках таблиці знаходяться наступні числа:

$$\frac{|\bar{X} - X_k|}{S},$$

де X_k - значення вимірюваної величини, що підозрюють на "промах"; S - середня квадратична похибка вимірювань.

Приклад. Середнє значення густини ртуті, що визначено з 10 дослідів дорівнює $13,59504 \text{ г/см}^3$, середня квадратична похибка вимірювань складає $5 \cdot 10^{-5} \text{ г/см}^3$. Ряд вимірювань містить результат 13,59518. Чи можна його відкинути?

Визначаємо:

$$\frac{13,59518 - 13,59504}{5 \cdot 10^{-5}} = 2,6.$$

Як бачимо, в рядку для 10 вимірювань величина 2,6 відповідає $\beta < 0,01$, тобто в разі відкидання цього результату ми робимо вірно з ймовірністю, що є більшою за 0,99 і помиляємося з ймовірністю, що є меншою за 0,01.

Після того, як розглянуто "найгірші" результати природно звернути увагу на "найкращі" результати. Досі вважалось, що істинна величина, що вимірюється є відомою, або розсіювання результатів вимірювання розглядалось відносно математичного очікування (арифметичного середнього). Наприклад, результати вимірювань будь-чого суттєво відрізняються один від одного, тобто випадкова похибка є великою. Поставимо наступні питання. Як отримати найкращу оцінку вимірювань за умови існування їх певної кількості? Скільки вимірювань треба виконати? На друге питання частково вже відповіли. Розглянемо n значень $X_1; X_2 \dots X_n$, що отримані внаслідок вимірювання однієї і тієї ж самої величини. Вони складають лише деяку частину нескінченної теоретично можливої сукупності з невідомим істинним значенням (звідти і назва – вибірка). Тобто величина взагалі розподілена із густиною

$$\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2 \cdot x^2} \quad (1.23)$$

і має істинне значення X . Відтак, ймовірність появи результату X_1 в деякій області ΔX визначається як

$$\Delta P_1 = \frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-\eta^2 (X_1 - X)^2} \cdot \Delta X \quad (1.24)$$

і так само для всіх X_i . Відтак, ймовірність отримання вибірки в цілому дорівнює добутку ймовірностей $\Delta P_1 \cdot \Delta P_2 \cdot \dots \Delta P_n = \Delta P$

$$\Delta P = \left(\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^n \cdot e^{-\eta^2 [X_1 - X_t]^2 + \dots + [X_n - X_t]^2} \cdot \langle \Delta X \rangle^n \quad (1.25)$$

Одне з фундаментальних припущень теорії ймовірностей стосовно даного випадка збігається до того, що ймовірність реалізації - такої виборки ΔP є максимальною (якщо з'явилася саме вона, а не інша, то сумніватися не варто). Звідси автоматично слідує, що

$$\langle X_1 - X_t \rangle^2 + \dots + \langle X_n - X_t \rangle^2 \rightarrow \min \quad (1.26)$$

сума квадратів відхилень результатів вимірювань відносно істинного, тобто найкращого значення, має бути мінімальною. Саме ця властивість покладена за основу методу найменших квадратів. Відтак, невідоме найкраще значення має відповідати умові:

$$\frac{\partial \langle \Delta P \rangle}{\partial x_t} = 0, \quad (1.27)$$

тобто умова екстремума:

$$\frac{\partial \langle \Delta P \rangle}{\partial x_t} = - \left(\frac{\eta}{\sqrt{\pi}} \right)^n \cdot \langle \Delta X \rangle^n \cdot e^{-\eta^2 [X_1 - X_t]^2 + \dots + [X_n - X_t]^2} \cdot 2\eta^2 \cdot [X_1 - X_t] + \dots + [X_n - X_t] = 0 \quad (1.28)$$

Очевидно: $X_1 - X_t + X_2 - X_t + \dots + X_n - X_t = 0$, або

$$X_1 + X_2 + \dots + X_n = n \cdot X_t \Rightarrow X_t = \frac{\sum X_i}{n}. \quad (1.29)$$

Відшукуване значення є не що інше, як середнє арифметичне, що використовувалося раніше без відповідних доказів. Одразу зазначимо, що це справедливо лише для, принаймні, симетричних розподілів (не кажучи вже про ступінь "нормальності"). В протилежному випадку підраховувати середнє арифметичне просто безглуздо, відтак немає від чого визначати відхилення і неможливо розрахувати σ або S . В цьому разі S розраховують без визначення середнього, користуючись поняттям дисперсії, за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{n \cdot \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i \right)^2}{n(n-1)}} \quad (1.30)$$

Взагалі треба зазначити, що ті прийоми, що використовують для нормальних розподілів, можна застосувати і до не зовсім нормальних, або до взагалі "ненормальних" розподілів. Це не призводить до суттєвих похибок при описуванні ситуації. Але, в деяких випадках, наприклад, рівномірного розподілу (рис.1.7) є корисним окремий аналіз.

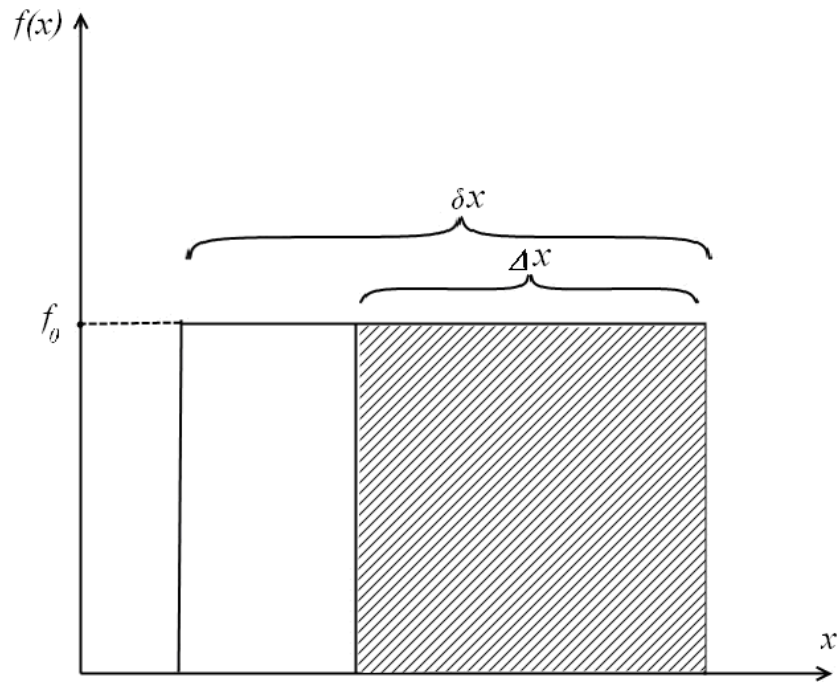


Рис. 1.7. Графік рівномірного розподілу

Рівномірним називають розподіл із сталою густиною ймовірності у всьому діапазоні значень. Найчастіше такі розподіли доводиться розглядати за однократних вимірювань. В цьому разі інтервал δX вважають за крок заокруглення, наприклад, мінімальну поділку шкали. Результат вимірювань може з однаковою ймовірністю опинитися в будь-якій точці цього інтервалу. За визначенням, маємо:

$$f_0 \cdot \delta X = 1 \quad (1.31)$$

Якщо завдати деякий довірчий інтервал ΔX всередині кроку заокруглення δX , то надійність становитиме

$$\alpha = \Delta X \cdot f_0, \text{ але } f_0 = \frac{1}{\delta X}, \quad (1.32)$$

$$\alpha = \frac{\Delta X}{\delta X}, \text{ або } \Delta X = \alpha \cdot \delta X \quad (1.33)$$

довірчий інтервал одноразового вимірювання можна визначати просто як добуток надійності на крок заокруглення. Зрозуміло, що в разі $\Delta X = \delta X \Rightarrow \alpha = 1$, що відповідає попередньому припущенню. Взагалі для одноразових вимірювань та достатньо великих значень надійності (0,7 і більше) довірчий інтервал можна просто вважати рівним кроку округлення або максимальній абсолютній інструментальній похибці, що визначається класом точності, ціною поділки, останнім значущим розрядом, тощо.

Задача 1.6. багаторазове вимірювання опору резистора номіналом 10 кОм показало, що половина всіх вимірювань знаходиться в інтервалі $9850 - 10150 \text{ Ом}$. Визначити показник точності, відносну помилку вимірювань.

З умови задачі вибігає, що ймовірна помилка $\Phi = 150 \text{ Ом}$. З відомого співвідношення $\Phi \cdot \eta = 0,477$ отримуємо $\eta = \frac{0,477}{150} = 3,17 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$ показник точності.

Як відомо, $\eta \cdot \sigma = 0,7 \Rightarrow \sigma = \frac{0,7}{\eta} = 0,22 \cdot 10^3 \text{ Ом}$, відтак

$$\delta \approx \frac{\sigma}{10^4} = \frac{220}{10^4} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ або } 2\%$$

Можна замість σ (це навіть краще) взяти 2Φ , тобто визначити

$$\delta = \frac{2}{10^4} = \frac{300}{10^4} = 0,03 \text{ або } 3\%$$

Задача 1.7. Яке зображення на ймовірному папері матиме рівномірний розподіл?

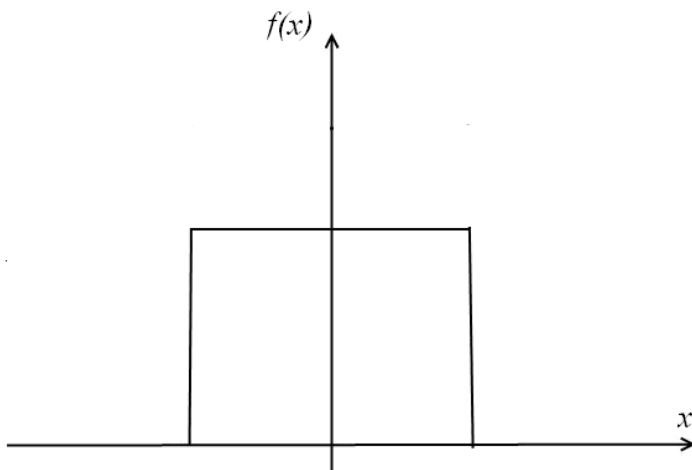


Рис. 1.8

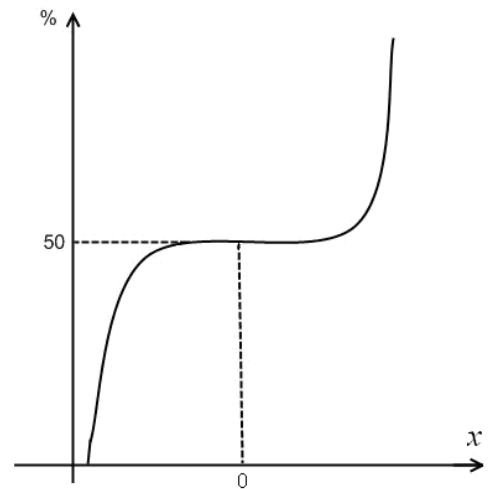


Рис. 1.9

1.5. Похибка непрямих вимірювань

Якщо та величина, що визначається в експериментальній задачі є деякою функцією безпосередньо вимірюваних величин, тобто визначається через них, то в даному випадку йдеться за непрямі опосередні вимірювання. Наприклад, безпосередньо вимірюється X , а визначається Y , причому $Y = AX + B$, де A та B відомі сталі. Очевидно $Y + \Delta Y = A \cdot (X + \Delta X) + B$, віднімання рівнянь дає $\Delta Y = A \cdot \Delta X$, тобто якщо ΔX - похибка вимірювань, то ΔY - похибка результату.

У більш складному випадку, наприклад, $R = k \cdot X \cdot Y$, де вимірюються X та Y , а R визначається, отримуємо наступне. Будемо вважати відомими \bar{X}, \bar{Y} , середні квадратичні відхилення S_x, S_y . Відхилення від середнього позначимо x та y , відтак

$$\bar{R} + r = k(\bar{X} + x)(\bar{Y} + y) = k(\bar{X} \cdot \bar{Y} + x \cdot \bar{Y} + \bar{X} \cdot y + x \cdot y), \quad (1.34)$$

де $x \cdot y \approx 0$, тобто:

$$\begin{cases} \bar{R} + r = k \cdot \bar{X} \bar{Y} + kx\bar{Y} + k\bar{X}y; \\ \bar{R} = k\bar{X}\bar{Y}; \end{cases} \quad (1.35)$$

Віднімаючи отримуємо $r = k(x\bar{Y} + y\bar{X})$. Аналогічні вирази можна записати для будь-яких інших пар відхилень x та y і відхилення результату r . За визначенням

$$S_r^2 = \frac{\sum_i r_i^2}{n}, \text{ але } \sum_i r_i^2 = k^2 \left(\bar{Y}^2 \cdot \sum_i x_i^2 + 2\bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot \sum_i x_i y_i + \bar{X}^2 \cdot \sum_i y_i^2 \right) \quad (1.36)$$

тобто n рівнянь для r піднесли у квадрат, а далі підсумували. Беручи уваги, що $\sum_i x_i \cdot y_i \approx 0$ тому, що відхилення x та y можуть мати різні знаки і для великих вибірок ця сума дійсно являється зневажливо малою. Відтак:

$$S_r^2 = k^2 \left(\bar{Y}^2 \frac{\sum_i x_i^2}{n} + \bar{X}^2 \frac{\sum_i y_i^2}{n} \right) = k^2 \cdot \bar{Y}^2 \cdot S_x^2 + k^2 \cdot \bar{X}^2 \cdot S_y^2 \quad (1.37)$$

$$\text{але } k^2 \bar{Y}^2 = \frac{\bar{R}^2}{\bar{X}^2}; \quad k^2 \bar{X}^2 = \frac{\bar{R}^2}{\bar{Y}^2}, \text{ тобто:} \quad (1.38)$$

$$\frac{S_r^2}{\bar{R}^2} = \frac{S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2}{\bar{Y}^2} \quad (1.39)$$

Аналогічно можна довести, що такі ж самі співвідношення отримуються і в інших випадках:

$$R = \frac{X}{Y} \cdot k; \quad R = \frac{X \cdot Y}{Z} \cdot k \text{ та ін.} \quad (1.40)$$

Зазначимо, що у випадку, наприклад:

$$R = \frac{\sin \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2}}, \quad (1.41)$$

де A та B вимірюються безпосередньо, не можна просто розглядати R , як функцію $\sin \frac{A+B}{2}$ та $\sin \frac{A}{2}$ тому, що вони не є незалежні. Для більш детального аналізу розглянемо загальний випадок:

$$\bar{R} + r = f(\bar{X} + x, \bar{Y} + y) \quad (1.42)$$

Розкладаючи цю функцію в ряд Тейлора та обмежуючись лінійним наближенням (великі ступені, як правило, зневажливо малі) отримуємо:

$$\bar{R} + r = f(\bar{X}, \bar{Y}) + \frac{\partial R}{\partial X} x + \frac{\partial R}{\partial Y} y, \quad (1.43)$$

тобто враховуючи, що $f(\bar{X}, \bar{Y}) = \bar{R}$, маємо:

$$r = \frac{\partial R}{\partial X} x + \frac{\partial R}{\partial Y} y \text{ для будь-яких } x \text{ та } y. \text{ Просумуємо квадрат } r \text{ для}$$

різних x та y і отримаємо:

$$\sum_i r_i^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^2 \sum_i x_i^2 + 2 \frac{\partial R}{\partial X} \cdot \frac{\partial R}{\partial Y} \cdot \sum_i x_i y_i + \left(\frac{\partial R}{\partial Y}\right)^2 \sum_i y_i^2, \quad (1.44)$$

враховуючи $\sum_i x_i y_i \approx 0$, поділимо на n і будемо мати:

$$S_r^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial X}\right)^2 \cdot S_x^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial Y}\right)^2 \cdot S_y^2. \quad (1.45)$$

Цей результат був помітний одразу, наприклад, для випадку $R = k \cdot X \cdot Y$, де отримали $r = k \cdot x \cdot \bar{Y} + k \cdot y \cdot \bar{X}$.

Зауважимо, що:

$$k \cdot \bar{Y} = \frac{\partial R}{\partial X}, \text{ а } k \cdot \bar{X} = \frac{\partial R}{\partial Y}. \quad (1.46)$$

Узагальнюючи вище зазначине можна записати формулу для підрахунків середнього квадратичного відхилення результату в загальному випадку:

$$S_r = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial X_1} \cdot S_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial X_2} \cdot S_{x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial X_n} \cdot S_{x_n}\right)^2}, \quad (1.47)$$

або аналогічно, для довірчого інтервалу у випадку статистики малих вибірок:

$$\Delta R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial X_1} \Delta X_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial X_2} \Delta X_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial R}{\partial X_n} \Delta X_n\right)^2}, \quad (1.48)$$

де ΔR довірчий інтервал результату; $\Delta X_1, \Delta X_2, \dots, \Delta X_n$ довірні інтервали безпосередніх вимірювань, що визначені для одного і того ж значення надійності α . Якщо задати, наприклад, величину $\alpha = 0,9$, то всі ΔX_i мають бути визначені саме для цього значення надійності і довірний

інтервал непрямого виміру ΔR , що підраховують таким чином, що виявляється визначеним також для цього значення надійності $\alpha = 0,9$.

Відносну похибку можна визначити як $\frac{\Delta R}{R}$, якщо внести $\frac{1}{R}$ під корінь в кожній дужці доданку будемо отримувати:

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{\partial R}{\partial X_i} \Delta X_i = \frac{\partial \ln R}{\partial X_i} \Delta X_i. \quad (1.49)$$

Інакше кажучи, відносну похибку можна визначити після підрахування довірнього інтервалу ΔR , поділивши його на \bar{R} , а можна одразу, для цього треба спочатку прологарифмувати функцію $R(X_1, X_2, \dots, X_n)$, далі взяти частинні похідні вже від $\ln R$, а відносну похибку визначити за формулою:

$$\frac{\Delta R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln R}{\partial X_1} \Delta X_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln R}{\partial X_n} \Delta X_n\right)^2} \quad (1.50)$$

Може виникнути питання з приводу визначення \bar{R} . Це можна зробити підставляючи у вираз для R середні значення \bar{X}_i і одразу обчислювати \bar{R} . Іншим чином це можна зробити якщо визначити окремо R_i для кожного набору X_i , а вже потім визначати \bar{R} . Практика показує, що обидва варіанти дають майже однакові результати, але перший спосіб набагато зручніший.

Задача 1.8. Маємо функцію $R = k \cdot X^b$, де k та b сталі.

Відоме середнє квадратичне відхилення для X , тобто S_x вимірюваної змінної X (або довірчий інтервал ΔX). Визначити S_R (або ΔR).

$$\frac{\partial R}{\partial X} = k \cdot b \cdot X^{b-1};$$

$$S_R = \sqrt{\left(\frac{dR}{dX} \cdot S_x\right)^2}; \quad \Delta R = \sqrt{\left(\frac{dR}{dX} \Delta X\right)^2};$$

$$S_R = k \cdot b \cdot X^{b-1} \cdot S_x;$$

Відносна похибка для R дорівнює:

$$\delta R = \frac{S_R}{R}, \text{ тобто } \delta R = \frac{k \cdot b \cdot X^{b-1}}{k \cdot X^b} \cdot S_x = b \cdot \frac{S_x}{X} \text{ де за } X \text{ звичайно вважають } \bar{X}.$$

Відповідно для довірнього інтервалу ΔR :

$$\Delta R = k \cdot b \cdot X^{b-1} \cdot \Delta X, \text{ де } \Delta X \text{ - довірний інтервал для } X;$$

$$\delta R = \frac{\Delta R}{R} = \frac{k \cdot b \cdot X^{b-1}}{k \cdot X^b} \cdot \Delta X = b \cdot \frac{\Delta X}{X}.$$

Для головних видів функцій можна побудувати наступну таблицю:

Таблиця 1.5. Таблиця довірних інтервалів

N	R	ΔR
1	$k \cdot X^b$	$b \cdot R \cdot \frac{\Delta X}{X}$
2	$k \cdot (X + Y)$	$k \sqrt{(\Delta X)^2 + (\Delta Y)^2}$
3	$k \cdot X \cdot Y$	$R \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2}$
4	$k \cdot \frac{X}{Y}$	$R \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Y}{Y}\right)^2}$
5	$k \cdot e^x$	$R \cdot \Delta X$
6	$k \cdot \ln X$	$\frac{k}{X} \cdot \Delta X$
7	$k \cdot \sin X$	$k \cdot \cos X \cdot \Delta X$

Зазначимо одразу, що похибка результату, тобто результату опосередованих вимірювань (наслідка визначення) виявляється в цьому разі вираженою через похибки прямих вимірювань адитивно. В цьому можна одразу оцінити внесок похибки кожного з вимірювань в похибку результату та зробити висновки відносно того, яке пряме вимірювання потребує модернізації в першу чергу. Зрозуміло, мається на увазі модернізація з метою поліпшення точності вимірювань в цілому.

Задача 1.9. Маємо пробу невідомої газової суміші. Її тиск вимірюється манометром зі шкалою $0 \dots 10$ атм. (половина найменшої поділки – крок заокруглення $0,1$ атм.); об'єм балона в якому знаходиться проба вважатимемо точно відомим $28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Похибка вимірювань температури проби при 4°C (277K) складає $\pm 7^\circ \text{C}$ (довірний інтервал, S_T). Значення питомого об'єму $V/m = 62,4 \text{ см}^3/\text{г}$. З якою точністю треба визначити вагу проби, аби у 19 випадках з 20 похибка вимірювання R/M не перевищувала 3%?

Перш за все запишемо:

$$PV = \frac{m}{M} RT \Rightarrow P \frac{V}{m} = PV = \frac{R}{M} T,$$

тобто $R/M = PV/T$, де безпосередньо вимірюється тиск, температура, а питомий об'єм визначається за допомогою зважування (об'єм балона відомий точно). Відтак, співставляючи формули 2 та 4 табл.1.5 маємо

$$\Delta\left(\frac{R}{M}\right) = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2} \cdot \frac{PV}{T} = 3 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{PV}{T};$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^{-4} - \left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 - \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 &= \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 = 9 \cdot 10^{-4} - \left(\frac{0.1}{10}\right)^2 - \left(\frac{7}{277}\right)^2 \approx \\ &\approx 9 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} - (2 \cdot 10^{-2})^2 = 9 \cdot 10^{-4} - 10^{-4} - 4 \cdot 10^{-4} = 4 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

$$\Delta V/V = 2 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta V = 2 \cdot 10^{-2} \cdot 62,4 = 1,248 \text{ см}^3/2.$$

Таким чином визначили прийнятну похибку для питомого об'єму, що в свою чергу обумовлена похибкою важення (об'єм вважаємо вимірюваним точно). За тією ж таблицею (формула 4) маємо:

$$v = \frac{V}{m};$$

$$\Delta v = \frac{V}{m} \cdot \frac{\Delta m}{m} = \frac{V \cdot \Delta m}{m^2} = \left\{ m = \frac{V}{v} \right\} = \frac{V \cdot \Delta m \cdot v^2}{V^2} = \frac{\Delta m \cdot v^2}{V};$$

$$\Delta m = \frac{V}{v^2} \Delta v = \frac{28 \cdot 10^3 \cdot 1.248}{3900} = 9 \text{ г}.$$

Тобто зважування балону має виконуватись з точністю до кількох грамів, що цілком прийнятне у звичайних лабораторних умовах.

Задача 1.10. Потік повітря несе в собі водяну пару невідомої концентрації C_0 . Для її визначення це повітря пропускають крізь вологопоглинач, який зважують через певні інтервали часу (він весь час приєднаний до зважувальної системи, але вага фіксується періодично). Маса води в поглиначі C описується таким чином:

$$C = k \cdot C_0 \cdot e^{-b/\tau},$$

де k - емпірична стала (можна вважати її за одиницю заради спрощення), b - стала, що залежить від властивостей поглинача, τ - час.

Зрозуміло, що $\tau=0 \Rightarrow C=0$; $\tau \rightarrow \infty \Rightarrow C \rightarrow C_0$, тобто ці умови виконуються, звідси: $C = C_0 \cdot e^{-b/\tau}$ ($b=3 \cdot C$ - стала поглинача). Задача полягає у визначенні C_0 в певний момент часу шляхом відповідних вимірювань C . Зрозуміло, τ також вимірюється. Припустимо, похибка вимірювань часу - $0,2c$, помилка зважування поглинача $\Delta C = 2g$. Очікуване значення $C \approx 20 \frac{g}{л}$. Треба спланувати послідовність вимірювань (експерименту) та визначити похибку для C_0 . Додатково визначити межу підвищення точності та частоти вимірювань.

По-перше запишемо: $C = C_0 e^{-b/\tau} \Rightarrow C_0 = C \cdot e^{b/\tau}$, тобто маємо функцію типу $R = X \cdot e^{b/Y}$, для якої

$$\Delta R = \sqrt{\left(e^{b/Y} \cdot \Delta X\right)^2 + \left(-X \cdot e^{b/Y} \cdot \frac{b}{Y^2} \Delta Y\right)^2} = X \cdot e^{b/Y} \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)^2 + \left(\frac{b}{Y^2} \Delta Y\right)^2},$$

$$\left(\frac{\Delta C_0}{C_0}\right)^2 = \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{b}{\tau^2} \Delta \tau\right)^2.$$

Спочатку визначимо як орієнтовано має змінюватись маса поглинача з часом:

τ	$\frac{3}{\tau}$	$e^{3/\tau}$	$\frac{20}{e^{3/\tau}}$
1	3	20	1
3	1	2,6	7,65
30	0,1	1,15	17,4
300	0,01	1,01	20

Отримані значення будемо підставляти послідовно:

$$\tau = 1c; \quad \frac{\Delta C_0}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 0,2}{1}\right)^2} = 2,09 \quad (209\%)$$

$$\tau = 3c; \quad \frac{\Delta C_0}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{2}{7,65}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 0,2}{9}\right)^2} = 0,268 \quad (26,8\%)$$

$$\tau = 30c; \quad \frac{\Delta C_0}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{2}{17,4}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 0,2}{900}\right)^2} = 0,115 \quad (11,5\%).$$

Відтак, при плануванні експерименту слід фіксувати вагу поглинача через 20...30с від початку продувки повітря крізь нього. Більш ранні вимірювання дадуть надто багату помилку, а зменшити її навіть при $\tau = 300c$ і більше суттєво не можна – все одно під коренем залишається

$$\left(\frac{2}{20}\right)^2 \Rightarrow \frac{\Delta c_0}{c_0} \rightarrow 0,1 \quad (10\%),$$

тобто зробити точність вищою не дає змоги похибка зважування поглинача,

Зазначимо, що залежності можуть бути задані не аналітично, а графічно. В цьому разі похідні $\partial R/\partial x_i$ також визначаються графічно, як відношення відповідних скінчених прирощень. Наприклад, реєстограма самописного приладу має вигляд (або можна вважати, що величина x вимірюється безпосередньо, а $R(x)$ завдається даною функцією), що зображено на рис.1.10. Відтак $\Delta R = \Delta x \cdot dR/dx$, де Δx - похибка (довірний інтервал, середня квадратична похибка) вимірювання величини x . В точці x_1 визначаємо $dR/dx \approx \Delta R/\Delta x$ (в околу x_1) та знаходимо відповідну похибку ΔR . Всі наведені формули та співвідношення добре описують похибки, що розподілені за будь-яким законом. Єдина умова полягає в тому, що інтервали для всіх змінних Δx_i (похибки) відповідали одному значенню надійності. В цьому разі для того ж самого значення надійності буде визначена похибка (довірчий інтервал) результату.

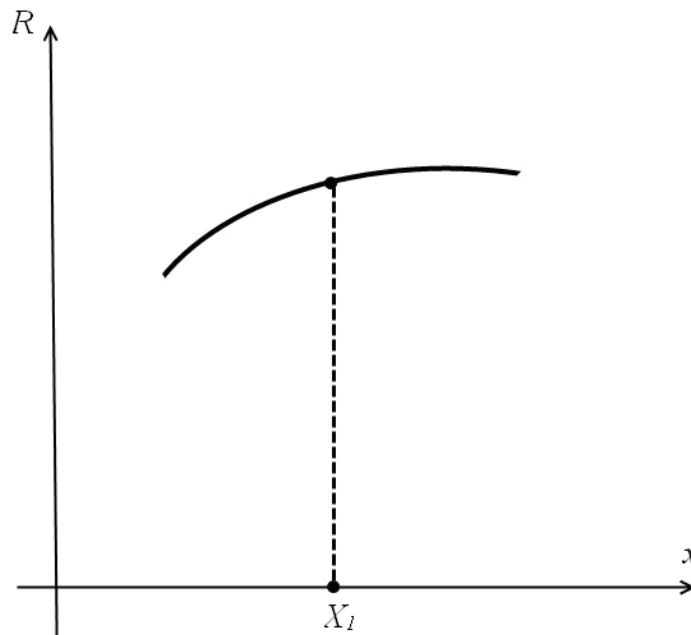


Рис. 1.10

Задача 1.11. Вимірюється показник заломлення n (непряме вимірювання). Безпосередньо вимірюють кути падіння та заломлення α та β з однаковою похибкою $0,2^\circ$. За яких значень β можна отримати найбільш точне значення n ? (очікуване $n \approx 1,5$).

Як відомо, $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ тобто:

$$\Delta n = \sqrt{\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \cdot \Delta \alpha\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2 \beta} \cdot \Delta \beta\right)^2} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} (\Delta \alpha)^2 + \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}{\sin^4 \beta} (\Delta \beta)^2} =$$

$$= \{ \Delta \alpha = \Delta \beta \} = \frac{\Delta \alpha}{\sin^2 \beta} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}.$$

Перепишемо вираз під коренем у вигляді:

$$(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \cdot n^2 (1 - \sin^2 \beta) = \{ \sin^2 \alpha = n^2 \sin^2 \beta \} =$$

$$= \sin^2 \beta - n^2 \sin^4 \beta + n^2 \sin^2 \beta - n^2 \sin^4 \beta = \sin^2 \beta (1 + n^2) - 2n^2 \cdot \sin^4 \beta,$$

тобто:

$$\Delta n = \frac{\Delta \alpha}{\sin^2 \beta} \sqrt{\sin^2 \beta (1 + n^2) - 2n^2 \sin^4 \beta}.$$

Можна, зрозуміло, взяти похідну по $\sin^2 \beta$, але тут виявляється простіше:

$$\Delta n = \Delta \alpha \cdot \sqrt{\frac{1 + n^2}{\sin^2 \beta} - 2n^2}.$$

Зрозуміло, що $\Delta n \rightarrow 0$ за умови $(1 + n^2) / \sin^2 \beta = 2n^2$, тобто: $\sin^2 \beta = \frac{1 + n^2}{2n^2}$;

$$\sin \beta = \sqrt{\frac{1 + n^2}{2n^2}} = \sqrt{\frac{1 + 2,25}{4,5}} = \sqrt{0,72} = 0,85, \quad \beta = 58^\circ \dots 59^\circ.$$

Контрольні запитання до розділу 1

1. Які бувають експериментальні похибки?
2. Як впливає систематична та випадкова похибка на результат вимірювання?
3. Поясніть зв'язок та відмінність між гистограмою та розділом густини ймовірності.
4. Як визначити ймовірність за допомогою відомого ймовірного розподілу?
5. Що таке ймовірнісний графік і в чому полягає його інформативність?
6. Поясніть зміст запису результату вимірювань у стандартизованому вигляді?
7. Яким чином можна визначити оптимальну кількість вимірювань?
8. Як визначити ймовірність промахів?
9. Як визначити довірний інтервал для однократних вимірювань?
10. Поясніть зміст поняття ймовірної помилки.
11. Яким чином пов'язані між собою ймовірна помилка та показник точності вимірювання?
12. Як визначити похибки не прямих вимірювань? Наведіть приклади.
13. Як пов'язані між собою похибки непрямих та прямих вимірювань?
14. Наведіть варіанти визначення відносної похибки непрямих вимірювань.
15. Яким чином пов'язані показник точності вимірювань з виглядом функції густини ймовірностей?

16. Що називають фактором розсіювання та яким чином він пов'язаний з довірним інтервалом?
17. Яке положення покладено в основу методу найменших квадратів?
Що означають поняття односигмовий, двохсигмовий, трьохсигмовий інтервал?

Розділ 2

ПЛАНУВАННЯ ЕКСПЕРИМЕНТУ

2.1. Зменшення набору змінних

Для оптимізації експерименту намагаються зменшити кількість змінних. Розрізняють фундаментальні змінні – величини, що впливають на перебіг явища і не залежать від інших величин (незалежні змінні). Вони, у свою чергу, розрізняються на регульовані та нерегульовані (прискорення вільного падіння, діелектрична проникність та ін.) Існує теорема Букінгема, що стосується розмірностей і полягає в наступному – однорідне відносно розмірностей рівняння можна перетворити у співвідношення, що містить набір комбінацій безрозмірних величин – критеріїв. Ця теорема незалежно пов'язана з теорією критеріїв подібності, що широко використовуються в механіці суцільних середовищ та теплопередачі. Розв'язки складних диференціальних рівнянь виражають в зазначених безрозмірних комплексах, що переважно мають певний фізичний зміст.

Поняття однорідності відносно розмірностей означає інваріантність рівнянь відносно вибору одиниць вимірювань. Більше того, неоднорідність відносно такого вибору означає, як правило, фізичну хибність відповідної моделі, її явну неповність. Такими звичайно є примітивні емпіричні закономірності. Безрозмірні критерії звичайно підбирають за методом Релея. Всі змінні спочатку виражають через основні одиниці: масу - M , час - θ , довжину - L .

Нехай, наприклад, деяке тіло рухається в рідині. Спробуємо описати силу лобового опору такому руху (D). Очевидно, D є функцією швидкості руху (v), характеристичного розміру (d), густини рідини (ρ) та в'язкості рідини (μ). Запишемо розмірності:

$$\mathbf{D}^- = H = \frac{\kappa \mathcal{L} \cdot M}{c^2} = M \cdot L \cdot \theta^{-2};$$

$$\mathbf{L}^- = \frac{M}{c} = L \cdot \theta^{-1};$$

$$\mathbf{V}^- = L; \quad \mathbf{P}^- = \frac{\kappa \mathcal{L}}{M^3} = M \cdot L^{-3};$$

$$\mathbf{\mu}^- = \left\{ F = \mu \cdot S \cdot \frac{v}{d}; \mu = \frac{F \cdot d}{S \cdot v} \right\} = \frac{H \cdot M \cdot c}{M^2 \cdot M} = \frac{\kappa \mathcal{L} \cdot M \cdot c}{c^2 \cdot M^2} = \frac{\kappa \mathcal{L}}{M \cdot c} = M \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-1}.$$

Відтак, за припущенням:

$D = \varphi(v^a; d^b; \rho^c; \mu^d)$, де a, b, c, d – деякі показники ступенів фундаментальних змінних.

Далі:

$$ML\theta^{-2} = \varphi[(L\theta^{-1})^a; L^b; (ML^{-3})^c; (ML^{-1}\theta^{-1})^d]. \quad (2.1)$$

Розмірності лівої та правої частини мають бути однаковими для того, аби рівняння було однорідне відносно розмірностей, не залежно від їхнього вибору. Звідти слідує:

$$\begin{aligned} \text{для } M: & \quad l=c+d; \\ L: & \quad l=a+b-3c-d; \\ \Theta: & \quad -2=-a-d; \end{aligned}$$

Виразимо, наприклад, всі показники ступенів через d , тому що маємо 3 рівняння та 4 невідомих:

$$c=1-d; \quad a=2-d; \quad l=2-d+b-3+3d-d \Rightarrow b=2-d.$$

Рівняння набуває вигляду: $D = \varphi(v^{2-d}; d^{2-d}; \rho^{1-d}; \mu^d)$;

Якщо припустити, $d=1$ першу змінну v розподіляємо

$$\text{так:} \quad \dots = v^{2-d} \Rightarrow \dots \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v} \dots$$

$$\text{другу:} \quad \dots = d^{2-d} \Rightarrow \dots \frac{1}{d^2} = \frac{1}{d} \dots$$

$$\text{третю:} \quad \dots = \rho^{1-d} \Rightarrow \dots \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \dots$$

$$\text{четверту} \quad \dots = \mu^d \Rightarrow \dots = \mu.$$

$$\text{В результаті маємо:} \quad \frac{D}{v^2 \cdot d^2 \cdot \rho} = \varphi\left(\frac{\mu}{v \cdot d \cdot \rho}\right). \quad (2.2)$$

Таким чином одразу знаходимо критерій Рейнольдса $R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu}$ - критерій гідродинамічної подібності, що має зміст відношення сил інерції до сил тертя в суцільних середовищах (течія в трубці, обтікання тіл різної форми та ін.). Критерії подібності – безрозмірні комплекси – згорнуті, укрупнені змінні – числа, що характеризують деякий аспект явища. Наприклад, критерій адекватності оптичних моделей $b^2/\lambda \cdot e$ вказує на можливість застосування моделі геометричної оптики, або на те, що має місце дифракція Френеля, або на те, що має місце дифракція Фраунгофера відповідно $b^2/\lambda \cdot e \gg 1$; $b^2/\lambda \cdot e \approx 1..10$; $b^2/\lambda \cdot e < 1$.

Причому, якщо відповідні критерії, що відносяться до різних явищ є однаковими, то аспекти цих явищ, що відповідають даним критеріям, є ідентичними. Ця властивість широко використовується в натуральному моделюванні явищ. Так, наприклад, в разі дослідження обтікання реального автомобіля, аероплана потоком повітря абсолютно недостатньо зробити їх маленьку копію та обдувати її повітрям відповідної швидкості. Отримані за таких умов дані не можна переносити на реальний об'єкт – автомобіль, аероплан і т. ін. Для того, аби між натурною моделлю мала місце хоч будь-яка відповідність, наприклад, в гідродинамічному (аеродинамічному) змісті, необхідно, аби критерії R_e в обох випадках (для моделі та для об'єкту) співпадали, тобто комплекси з величин ρ, v, d, μ були однаковими. Тобто, якщо ми зменшуємо d моделі порівняно з об'єктом, то маємо відповідно підвищити швидкість обтікання v , або густину середовища ρ тобто обдувати не обов'язково повітрям, зменшити в'язкість середовища μ і т. ін. Інакше

кажучи, необхідно маніпулювати цілим комплексом параметрів таким чином, аби величина цього комплексу лишалася незмінною, що і є основою натурного моделювання. Відповідно сформовано багато критеріїв, що відображають різні аспекти фізичних явищ: $Ne, Nu, Pr, Le, Ar, Gr, Fr, Pe$ та ін.

Повернемось до оптимізації вимірювань за допомогою безрозмірних комплексів (своєрідних інтегралів руху, інваріантів стосовно моделювання) і зазначимо, що, наприклад, в розглянутому прикладі обтікання тіла потоком рідини або газу можна або будувати досить велику кількість емпіричних залежностей D від v, d, μ, ρ окремо, або побудувати одну:

$$\frac{D}{\rho \cdot v^2 \cdot d^2} = \varphi' \left(\frac{\mu}{v \cdot \rho \cdot d} \right). \quad (2.3)$$

Зрозуміло, до критеріальних залежностей слід відноситись обережно. Вони не є універсальними тому, що в різних умовах явищ можуть додаватися або зникати певні фундаментальні змінні і вигляд цих критеріальних співвідношень має змінюватись. З теореми Букінгема (π -теорема) вибігає, що коли n фундаментальних змінних одночасно виражаються через k основних одиниць, то безрозмірних комбінацій має бути $n-k$. Дійсно, в наведеному прикладі змінних було 5, їх виразили через 3 основні одиниці і отримали $5-3=2$ безрозмірні комплекси.

Зазначений спосіб формування критеріїв не єдиний. Можна було б виразити всі ступені не через d , а через, наприклад, C . Було б отримано інші безрозмірні комплекси. Але одні з них широко використовуються, інші - практично ніколи. Справа в їхньому фізичному змісті, якщо він є - критерій охоче використовують, якщо ні - не використовують. Зазначимо, також, що в ролі параметрів процесу використовують не тільки регульовані, але й нерегульовані (неможливо уявити собі описування руху в гравітаційному полі без гравітаційної сталої, маси Землі, прискорення вільного падіння та ін. Хоч вплинути на ці величини ми не взмозі). За цих умов легко припуститися помилки.

Розглянемо, наприклад, просте обертання тіла на невагомому, недеформованому шнурі. Будемо вважати, що сила натягу шнура F залежить від маси тіла M , прискорення вільного падіння g , швидкості обертання v та довжини шнура R , тобто:

$$F = \varphi(M^a, g^b, v^c, R^d);$$

$$\mathbf{M}^- \equiv M; \quad \mathbf{g}^- \equiv \frac{M}{c^2} = L\theta^{-2}; \quad \mathbf{v}^- \equiv \frac{M}{c} = L\theta^{-1};$$

$$\mathbf{R}^- \equiv L; \quad \mathbf{F}^- \equiv \frac{K^2 \cdot M}{c^2} = M \cdot L \cdot \theta^{-2};$$

$$M \cdot L\theta^{-2} = \varphi \left[M^a; (L \cdot \theta^{-2})^b; (L \cdot \theta^{-1})^c; L^d \right];$$

$$\text{для: } M : 1 = a; \quad L : 1 = b + c + d;$$

$$\theta : -2 = -2b - c;$$

$$\text{Відтак: } a = 1; \quad c = 2 - 2b; \quad 1 = b + 2 - 2b + d \Rightarrow d = b - 1;$$

$$F = \varphi(M, g^b, v^{2-2b}, R^{b-1}),$$

для $b=1$ отримуємо:

$$M^1 : \dots = \dots$$

$$g^1 : \dots = g \dots$$

$$v^0 : \frac{\dots}{v^2} = \frac{\dots}{v^2}$$

$$R^0 : \dots R = R \dots$$

Нарешті:

$$\frac{F \cdot R}{M \cdot v^2} = \varphi \left(\frac{gR}{v^2} \right). \quad (2.4)$$

Якщо, наприклад проводити експерименти із тілами різної маси, що обертаються з різними швидкостями на шнурах різної довжини і т. і., то в результаті отримаємо залежність, що зображена на рис.2.1, тобто залежність відсутня. Дійсно, добре відомо, що в цьому разі сила натягу

$$F = \frac{M \cdot v^2}{R}, \text{ тобто } \frac{F \cdot R}{M \cdot v^2} = 1. \quad (2.5)$$

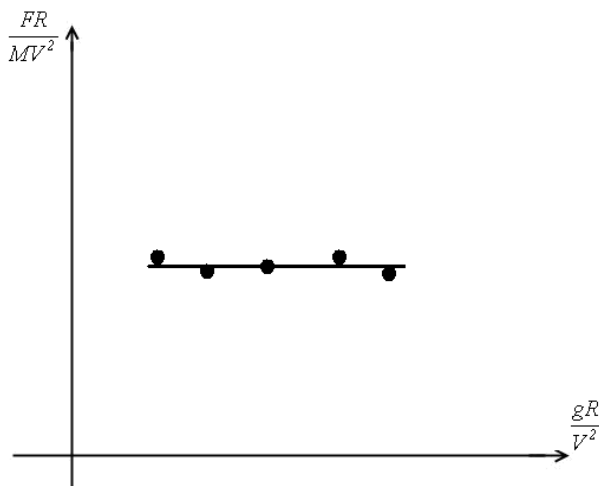


Рис.2.1. Критеріальний графік

Як бачимо, отриманий критерій в даному випадку взагалі є сталою величиною, хоч все зроблено, на перший погляд, вірно. Справа в тому, що було використано одну зайву змінну g . Від неї нічого не залежить. Середня сила натягу шнура при обертанні тіла на Землі, в космосі, на іншій планеті - однакова. Тобто, отримання залежності, схожої на зображену на рис.2.1 - є приводом для вилучення будь-якої змінної що не відіграє суттєвої ролі в умовах експеримента. Зазначимо також, що не обов'язково всі змінні виражати через масу, довжину та час. Так, наприклад, у випадку розрахунків течій, насосів і т. ін. швидкість також є основною одиницею, основною розмірністю. У випадку описування теплопередачі до набору основних розмірностей треба залучити температуру. В електротехніці, радіофізиці, тобто у випадках описування коливань очевидно треба залучити кут (зсув фаз, фаза) і не визначати вже його як частку від довжини дуги та радіусу

кривини. π - теорему можна узагальнити наступним чином. Безрозмірних комбінацій з n фундаментальних змінних має бути $n-k$, де k - набір змінних, що не утворюють безрозмірну комбінацію. Тобто, це не обов'язково M, L, θ , але будь-який набір, що не утворює критерій.

Розглянемо тепер приклад електромагнітного поля. Позначимо об'ємну густину енергії електричної та магнітної компонент відповідно як ω_e та ω_n , об'ємну густину енергії поля як ω відтак:

$$\omega = \varphi(E^a, H^b, \mu_0^c, c^d). \quad (2.6)$$

Згадаємо, що ε_0 та μ_0 пов'язані через швидкість світла (електромагнітні хвилі) наступним чином:

$$C = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}, \quad (2.7)$$

тобто залучити окремо ε_0 немає сенсу, якщо вже залучені μ_0 та C , через ε_0 можна виразити і все інше. Виберемо як основні розмірності $M, L, \theta, \varepsilon_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^- &= \frac{H \cdot M}{M^3} = \frac{\kappa\mathcal{Z} \cdot M \cdot M}{c^2 \cdot M^3} = \frac{\kappa\mathcal{Z}}{c^2 \cdot M} = M \cdot L^{-1} \cdot \theta^{-2}; \\ \mathbf{E}^- &= \frac{Дж}{M \cdot Кл} = \left\{ \frac{Дж}{Кл} = \frac{Кл}{\varepsilon_0 \cdot M}; Кл^2 = Дж \cdot \varepsilon_0^0 M; Кл = \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot Дж^{1/2} \right\} = \\ &= \frac{Дж}{M \cdot \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot Дж^{1/2}} = \frac{Дж^{1/2}}{M \cdot \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2}} = \left\{ Дж^{1/2} = H^{1/2} \cdot M^{1/2} = \frac{\kappa\mathcal{Z}^{1/2} \cdot M}{c} \right\} = \\ &= \frac{\kappa\mathcal{Z}^{1/2} \cdot M}{c \cdot M \cdot \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2}} = \varepsilon_0^{-1/2} \cdot \kappa\mathcal{Z}^{1/2} \cdot M^{-1/2} \cdot c^{-1} = \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot L^{-1/2} \cdot \theta^{-1}; \\ \mathbf{H}^- &= \frac{A}{M} = \left\{ \mu_0 \cdot H \sim \frac{F}{I \cdot l}; \right. \\ &\quad \left. \mu_0 \cdot \frac{A}{M} = \frac{H}{A \cdot M}; \right. \\ &\quad \left. A^2 = \frac{H}{\mu_0}; \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} = c\sqrt{\varepsilon_0}; \right. \\ A &= \left. \frac{\kappa\mathcal{Z}^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot M \cdot \varepsilon_0^{1/2}}{c \cdot c} \right\} = \kappa\mathcal{Z}^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot c^{-2} \cdot \varepsilon_0^{1/2} = \varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot \theta^{-2}. \\ \mathbf{\mu_0}^- &= \left\{ \frac{I}{c^2 \cdot \varepsilon_0} \right\} = \frac{c^2}{M^2 \cdot \varepsilon_0} = \varepsilon_0^{-1} \cdot \theta^2 \cdot L^{-2}; \\ \mathbf{c}^- &= L \cdot \theta^{-1}. \end{aligned}$$

В результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} M \cdot L^{-1} \theta^{-2} &= \varphi \left(\mu_0^{-1/2} \cdot M^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot \theta^{-1} \right)^a, \left(\varepsilon_0^{1/2} \cdot M^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot \theta^{-2} \right)^b, \left(\varepsilon_0^{-1} \cdot L^{-2} \cdot \theta^2 \right)^c, \left(L \cdot \theta^{-1} \right)^d, \\ M: \quad 1 &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b \Rightarrow 2 = a + b; \end{aligned}$$

$$L: \quad -1 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - 2c + d \Rightarrow -2 = b - a + 4c + 2d;$$

$$\theta: \quad -2 = -a - 2b + 2c - d;$$

$$\varepsilon_0: \quad 0 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - c \Rightarrow 0 = b - a - 2c;$$

$$\text{Знаходимо:} \quad c = d + 1; \quad b = d + 2; \quad a = -d;$$

$$\omega = \varphi(E^{-d}; H^{2+d}; \mu_0^{1+d}; c^d);$$

$$w = \varphi\left(\frac{H^3 \cdot \mu_0^2 \cdot c}{E}\right) \Rightarrow \frac{w \cdot c^2 \cdot \mu_0}{E^2} = \varphi\left(\frac{H^3 \cdot \mu_0^3 \cdot c^3}{E^3}\right) = \varphi\left(\frac{H \cdot \mu_0 \cdot c}{E}\right)^3 = \varphi\left(\frac{H \cdot \mu_0 \cdot c}{E}\right). \quad (2.8)$$

Як бачимо, одразу отримуємо знайомий вираз для об'ємної густини енергії, тобто $E^2 / \mu_0 \cdot c^2$.

2.2. Вимірювальні системи

Цей термін означає сам об'єкт вимірювань та вимірювальну апаратуру. Між ними, а також між апаратурою та людиною умовно виділяють межу розподілу - інтерфейс. Чим таких меж менше, тим менші спотворення інформації, що надходить від об'єкта. З цієї причини еталони та калібри мають мінімальну кількість таких посередників, хоч самі по собі, як правило, мають великі розміри, коштовні і експлуатуються епізодично в лабораторних умовах. Вимірювальна система звичайно представляє собою датчик, узгоджувальний пристрій - фідер та реєструючий пристрій. Сам об'єкт вимірювань може зазнавати вимірювальний вплив, або ні. Наприклад, вимірювання температури нагрітого тіла пірометром не передбачає ніякого впливу на сам об'єкт вимірювань - реєструється частина його випромінювання. Якщо вимірювання передбачає такий вплив, то враховують наступні моменти. Наприклад, треба вимірювати напругу на клеммах джерела струму (термопари, фотоелемента та ін). До того ж, саме джерело вже ввімкнене в деяке електричне коло. Зрозуміло, що в цьому разі вольтметр, підімкнений до джерела паралельно повинен мати якомога більший опір аби мінімально впливати на електричний режим кола. Взагалі цей вплив намагаються звести до мінімуму майже завжди. В електричних вимірюваннях для цього застосовують компенсаційні методи.

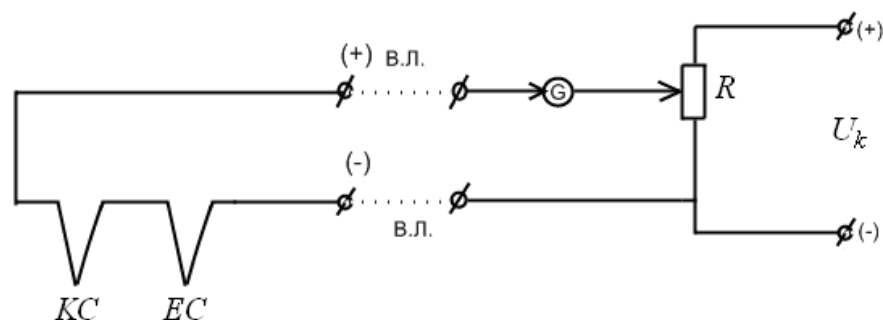


Рис. 2.2. Схема вимірювань компенсаційним методом.

КС - контрольний спай;

ЕС - еталонний спай.

На рис.2.2 наведена принципова схема вимірювання Е.Р.С. - диференціальної термопари за допомогою компенсаційного джерела струму U_k , що має точно відому стабілізовану напругу. Це джерело ввімкнене назустріч вимірюваній Е.Р.С. Напругу U_k можна плавно регулювати або вручну, або автоматично (підсилювач розбалансу - реверсивний електродвигун - реохорд - електромеханічний негативний зворотній зв'язок). Напругу на виході R змінюють доти, доки нуль - гальванометр G не покаже нуль. Тобто струм у вимірювальному колі взагалі не протікає, термопара немовби навантажена нескінченно великим зовнішнім опором, тобто працює в режимі холостого ходу (х.х.). Положення двигуна потенціометра можна відградувати у величинах напруги або одразу температуру. В цьому разі якість та довжина вимірювальної лінії (В.Л.) взагалі не відіграє ролі (майже), те ж саме стосується перехідних опорів контактів та ін. Для підвищення чутливості вимірювань в тому діапазоні, що цікавить, часто використовують мостові методи вимірювань. Наприклад, треба вимірювати великий опір (напівпровідник, діелектрик) з високою точністю. Складають схему, що зображена на рис.2.3. До однієї діагоналі цієї схеми ввімкнене малопотужне

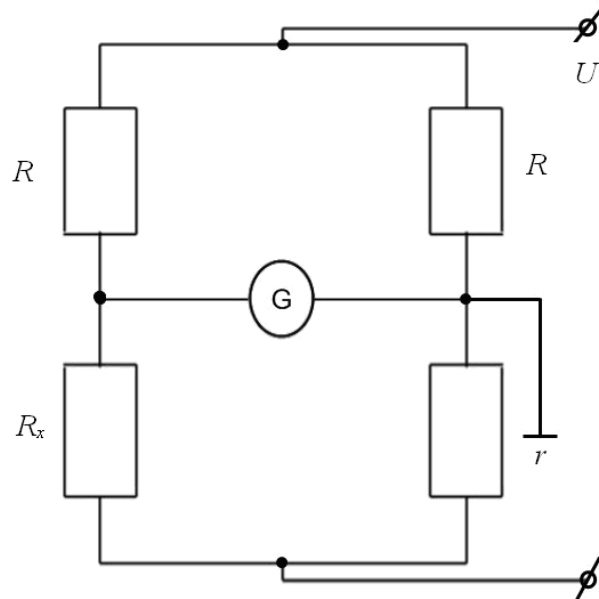


Рис.2.3. Схема мостових або диференційних вимірювань.

джерело струму U , до іншої - нуль-гальванометр. Змінюючи еталонний змінний опір r отримують нульовий показ гальванометра. За цих умов $R_x=r$. Подібні схеми використовують і при змінному струмі для визначення реактивних опорів, величин L, C та ін.

Щодо режимів вимірювань варте ще додати наступне. Якщо, наприклад, треба експериментально зареєструвати ВАХ напівпровідникового приладу, $V(H)$ для феромагнетику, то в цьому разі режим вимірювань бажано

запровадити якомога ближчим до режиму реальної експлуатації досліджуваного зразка (приладу). В даному випадку немає ніякого сенсу, навіть шкідливо, намагатися усунути вплив вимірювального режиму на поведінку зразка. Інша річ - вимірювальні прилади. Їхня наявність, дійсно, завжди повинна впливати на режим досліджень мінімальним чином.

Щодо з'єднувальних ліній варто зазначити таке. Наприклад, антена з'єднується з телевізором відповідним кабелем, хвильовий опір якого узгоджений із вхідним опором телевізора та антени, що забезпечує максимальну передачу енергії від антени до телевізора. Аналог при постійному струмі – узгодження джерела з навантаженням для отримання на ньому максимальної потужності:

$$P_{ex} = \frac{\varepsilon^2 \cdot R_{ex}}{(R_{ex} + r)^2}; \quad \frac{\partial P_{ex}}{\partial R_{ex}} = \frac{\varepsilon^2}{(R_{ex} + r)^2} - \frac{2\varepsilon^2 \cdot R_{ex}}{(R_{ex} + r)^3} = 0; \quad (2.9)$$

$$\frac{2R_{ex}}{R_{ex} + r} = 1; \quad 2R_{ex} = R_{ex} + r; R_{ex} = r \rightarrow \text{умова максимальної потужності на}$$

зовнішньому навантаженні.

При вимірюванні величин, що змінюються за часом завжди виникає питання динамічних властивостей вимірювальної системи - наскільки точно воно встигає "відслідковувати" змінювання вимірюваної величини. В деяких випадках це не потрібно, наприклад, в разі балістичних вимірювань, коли ударна дія настільки короткочасна, що за час цієї дії стан вимірювальної системи помітно не змінюється. Наприклад, імпульсний розряд конденсатора через балістичний гальванометр: енергія розряду $\frac{q^2}{2c}$ → енергія першого відхилення $kx_1^2 / 2$, тобто амплітуда $X_1 \sim$ заряду конденсатора q . Для цього період власних коливань гальванометра має бути набагато більшим часу розряду ($\tau_p \approx 3R \cdot C$, де R - опір гальванометра). Взагалі ж для відтворення динаміки вимірюваної величини використовують, навпаки, дуже мало інерційні системи - електронний промінь, світловий промінь і т. ін. В цьому разі мова йдеться про амплітудні, фазові, частотні, спектральні спотворення, похибки реєстрації, зміст яких вибігає із назви. В залежності від характеру, вимірювана величина відображується на шкалі приладу, цифровому індикаторі, стрічці самописця, стрічці з фотоемульсійним шаром (шлейфовий осцилограф використовує світловий промінь), екрані осцилографа, і т. ін. Існують осцилографи, електронно-променеві трубки яких мають властивість деякий час "пам'ятати" траєкторію електронного променя. Їх використовують для реєстрації дуже швидкоплинних явищ. Окремо виділяють кодування інформації та її запис в оперативній пам'яті комп'ютера. Отримувана від датчиків інформація звичайно підлягає різним функціональним перетворенням - складання, порівняння з опорним сигналом, множенням, диференціювання, інтегрування, піднесення у ступінь, логарифмування та ін. Ці операції виконуються або безпосередньо з сигналом в аналоговій формі, або з його цифровим зображенням за допомогою комп'ютера. Звичайно, вимірювальні системи певної спеціалізації

мають відповідні процесори. Такі перетворення також супроводжуються похибками, що вказуються в паспорті приладу. Останнім часом все більша перевага віддається цифровому кодуванню та перетворенню сигналів від датчика. Стандартна структура за таких умов має вигляд:



Рис.2.4. Загальна структура цифрових вимірювань.

2.3. Планування експерименту

Розглянемо деякі моменти, що пов'язані, по-перше, з визначенням інтервалів між експериментальними даними. Зрозуміло, що область значень кожної змінної визначається умовами експерименту і відома наперед (максимальні та мінімальні значення кожної величини).

Діапазон змінювання кожної фундаментальної незалежної змінної поділяють на інтервали, через які відбувається фіксація параметра (в разі, якщо не відбувається безперервний запис). Загальне правило щодо цього - в тій області значень, для якої похибка більша, вимірювання мають відбуватися частіше, з меншим інтервалом, і навпаки. Тобто поділення всього діапазону значень вимірюваної величини на однакові інтервали — неоптимальний варіант, хоча ним користуються в більшості випадків, з міркувань зручності. Розглянемо приклад. Деяка функціональна залежність має вигляд $y = kx^2$. Зазначимо, що в більшості ситуацій вигляд функції відомий досить точно. Якщо, як звичайно поділити діапазон по x на однакові інтервали Δx , то для різних значень X їм відповідатимуть різні за величиною інтервали Δy , тобто $\Delta y = 2kx \cdot \Delta x$. Як видно, із зростанням x величина Δy також зростає. Такий самий вираз має місце для залежності довірнього інтервалу по y від довірнього інтервалу по x , тобто за більших значень x похибка y зростає за умови, що помилка вимірювання x не змінюється. Це добре видно з графіка на рис.2.5 - із зростанням x найменші його змінювання призводять до суттєвих змінювань y . Виконаємо наступні дії - поділимо на однакові інтервали діапазон значень y . В даному випадку однаковим Δy будуть відповідати різні за величиною інтервали Δx , причому деякому значенню похибки по y відповідатиме зростання помилки по x при зменшенні x . Дійсно, маємо:

$$y = kx^2; \quad x = \sqrt{y/k}; \quad (2.10)$$

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} \cdot \Delta y, \quad (2.11)$$

тобто зменшення y призводять до зростання Δx за умови, що Δy не змінюється.

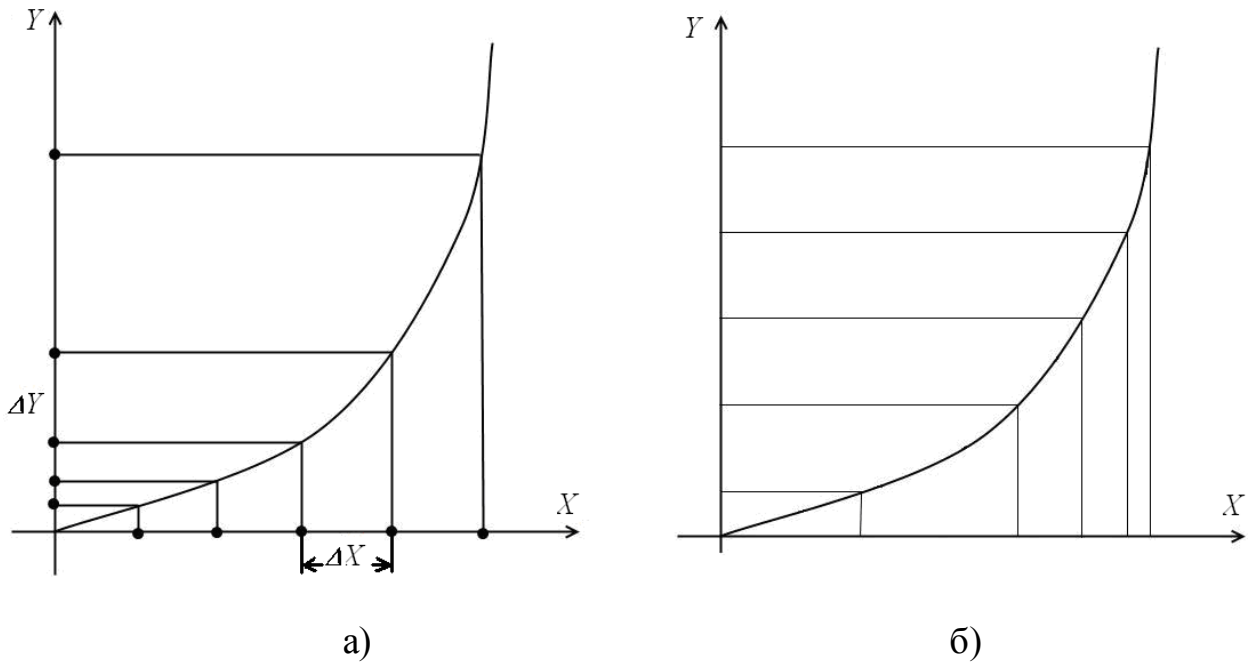


Рис.2.5. Графік функціональної залежності
 а) за рівномірними поділками вздовж осі x ;
 б) за рівномірними поділками вздовж осі y .

Відтак, в першому випадку похибка y збільшується із зростанням x ; у другому - зменшується. Тобто, в першому випадку виникає надлишок вимірювань в області малих значень x і нестача в області великих значень x . У другому - нестача вимірювань в області малих значень x та надлишок в області великих x . Зрозуміло, що зберігання однакової сталої "густини" по x та y за умови нелінійної залежності – задача, яка не вирішується, але ситуацію значно поліпшує рівномірний поділ самої залежності. В цьому разі не лінійність виникає і вздовж x і вздовж y , але значні "неоднорідності" вже майже виключені.

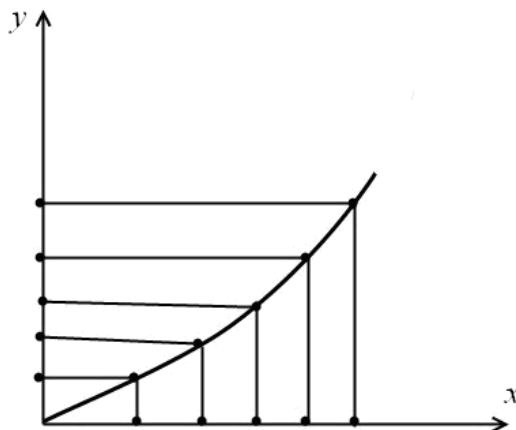


Рис.2.6. Функціональна залежність з рівномірними поділками.

Зауважимо, йдеться не за поділ самого графіка, а за точки реєстрації, тобто за визначення величин x для яких треба реєструвати y . Осі x та y поділяють лінійним чином на 5...6 поділок. Зрозуміло, рівномірність інтервалів вздовж дуги S потребує завчасного визначення величин x для яких потрібно реєструвати y . Це визначення збігається до наступного:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2; dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \cdot dx, \quad (2.12)$$

тобто:
$$\Delta S \approx \Delta x \sqrt{1 + y'_x{}^2}.$$

Відтак для області деякого значення x_1 маємо: $\Delta S_1 \approx \sqrt{1 + y'_{x_1}{}^2} \cdot \Delta x_1$. А для x_2 : $\Delta S_2 \approx \sqrt{1 + y'_{x_2}{}^2} \cdot \Delta x_2$ і т. д.

Враховуючи, що має бути: $\Delta S_1 = \Delta S_2 = \dots$ - отримуємо:

$$\sqrt{1 + y'_{x_1}{}^2} \cdot \Delta x_1 = \sqrt{1 + y'_{x_2}{}^2} \cdot \Delta x_2; \quad (2.13)$$

$$\Delta x_2 = \sqrt{\frac{1 + y'_{x_1}{}^2}{1 + y'_{x_2}{}^2}} \cdot \Delta x_1,$$
 тобто в нашому випадку

$$y = kx^2; \quad y'_x = 2kx$$

маємо:

$$\Delta x_2 = \sqrt{\frac{1 + 4k^2 \cdot x_1^2}{1 + 4k^2 \cdot x_2^2}} \cdot \Delta x_1, \text{ але } x_2 = x_1 + \Delta x_1$$

тобто:

$$\Delta x_2 = \sqrt{\frac{1 + 4k^2 \cdot x_1^2}{1 + 4k^2 (x_1 + \Delta x_1)^2}} \cdot \Delta x_1. \quad (2.14)$$

Відтак, задаємо один раз величину Δx_1 та x_1 визначаємо тим самим x_2 , далі за формулою Δx_2 , $x_3 = x_2 + \Delta x_2$, Δx_3 і т. д. За цього способу інтервали вимірювань вздовж кривої будуть однаковими. Як видно, таке планування послідовності вимірювань потребує попередніх розрахунків, але дозволяє уникати зайвих скупчень результатів в одних областях досліджуваної залежності, та відсутності даних - в других областях.

Дуже зручно переходити у простір змінних, в якому функція лінеаризується. Наприклад, якщо в нашому випадку $y = kx^2$ вздовж абсцис відкладати не x , а x^2 , то в цих змінних функція виявиться лінійною. Такий прийом дає подвійну користь. По-перше, він дозволяє одразу визначити ступінь вірності початкової гіпотези відносно функції $y(x)$.

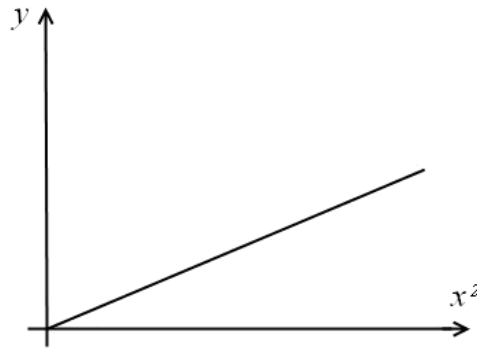


Рис.2.7. Графік лінеаризованої квадратичної функції.

Припустимо, що ми вважаємо ніби вона повинна мати вигляд $y = kx^2$. Якщо результати експерименту в координатах $y - x^2$ дадуть лінійну залежність (пряму лінію завжди легко відрізнити від кривої) то наша початкова гіпотеза є вірною. Зрозуміло, лишаються проблеми, що пов'язані з відхиленням від “нуля”, невірним, або некоректно с прогнозованим нахилом і т. ін. На рис.2.8 прямі 1,2,3,4 та 5 – варіанти слідств впливу систематичної похибки на поведінку залежності $y(x^2)$, тобто поява неврахованих величин a ($y = kx^2 + a$), спотворення k і т. д.

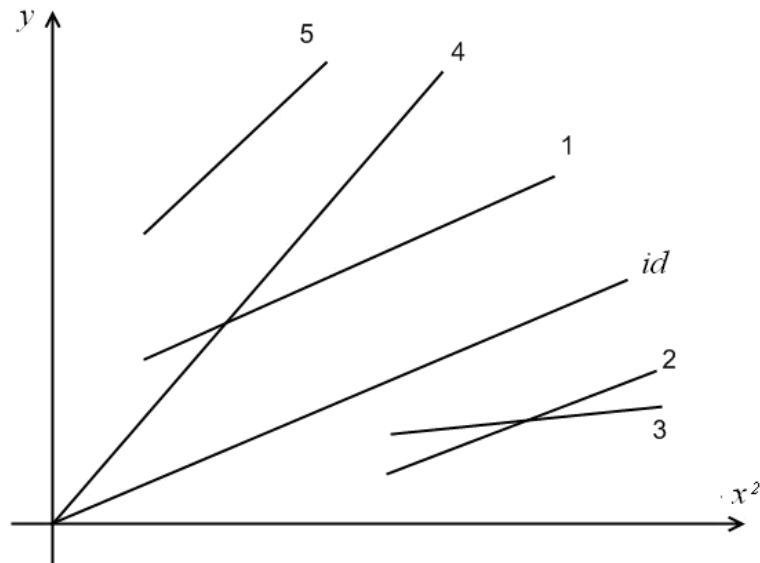


Рис.2.8. Приклади похибок.

Але лінійність в цілому однозначно свідчить, що, принаймні, це є функція виду:

$$y = kx^2 + a. \quad (2.15)$$

По-друге, однаковим інтервалам вздовж x^2 відповідатимуть однакові інтервали вздовж y , тобто рівномірність по x^2 забезпечує рівномірність по y . Аналогічно поводяться і з іншими функціями:

$$y = e^{kx} \rightarrow \ln y = kx \rightarrow (\ln y - x); \quad (2.16)$$

$$y = \frac{a}{x^2} \rightarrow (y - \frac{1}{x^2}); \quad (2.17)$$

$$y = a \cos x \rightarrow (y - \cos x). \quad (2.18)$$

Після обрання кроку вимірювань незалежної змінної (наприклад x) обирають характер її змінювання. Звичайно це т. з. послідовний план, тобто поступово змінюють x від її мінімального значення в заданому діапазоні до максимального, фіксуючи $y_i(x_i)$. В цьому разі існує ймовірність того, що значення y_i виявляться залежними від напряму змінювання x (гістерезисна залежність, гістере - запізнюватись, історія - наука про минуле). Наприклад, досліджується температурна залежність деякого параметру зразка. Для цього зразок кладуть у піч, а за температуру зразка вважають температуру повітря в печі, що вимірюється, наприклад, термопарою. При нагріванні температура повітря буде випереджати температуру зразка (він нагрівається завдяки конвекції та випромінюванню), а при охолодженні навпаки, температура зразка буде вищою, ніж вимірювана температура повітря. Тобто, якщо температуру збільшувати, то реальна температура зразка нижче уявної, вимірюваної, а при охолодженні температура зразка буде вище уявної, вимірюваної. Зрозуміло, що температурний хід досліджуваного параметру залежатиме від напряму змінювання температури. В цьому разі, при виявленні такої залежності можна спробувати змінювати температуру дуже повільно (для встановлення теплової рівноваги), або усереднити залежності "туди-назад". Але, в будь-якому-разі змінна x пробігає послідовно ряд значень від мінімального до максимального або навпаки. Такий послідовний план вимірювань принципово простий, але має недоліки. По-перше, неврахований фактор, що змінюється впродовж вимірювань систематично, може спричинити спотворене уявлення про залежність $y(x)$. По-друге, для функції багатьох змінних $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ потрібне послідовне сканування по кожній змінній при фіксованих останніх, що потребує великих експериментальних витрат, в т. ч. і часу. Для усунення (хоч часткового) цих недоліків застосовують рандомізований (хаотизований) план, що полягає в тому, що незалежна змінна змінюється не послідовно, а хаотично (x_i обираються за допомогою генератора випадкових чисел, кидання гральної кості та ін.), наприклад, для x в діапазоні від 1 до 10 величина x змінюється не в послідовності 1-2-3-4-5..., а 1-7-5-8-6-3.... В цьому разі дія неврахованого систематичного фактора суттєво знижується – він майже повністю перетворюється на випадковий – зростає розсіювання точок навколо середнього. Крім того, така стратегія дозволяє економити час.

Наприклад, план двохфакторного експерименту: зірки позначають комбінації змінних x_1 та x_2 . В даному випадку кожна з них приймає 5 значень, але фіксуються певні сполучення. Зазначимо, що факторні експерименти особливо ефективні для залежностей виду:

$$y = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \dots,$$

або:

$$y = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \dots,$$

що, взагалі, збігається до першої за логарифмування:

$$\ln y = \ln f_1(x_1) + \ln f_2(x_2) + \dots$$

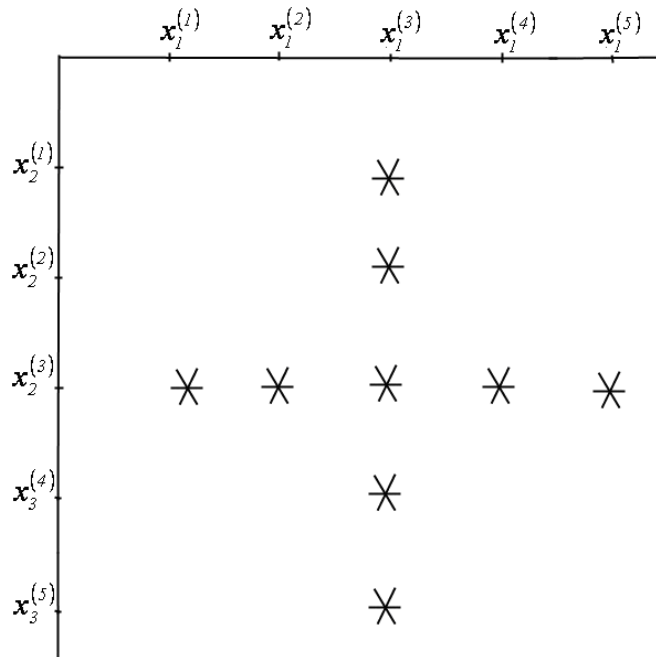


Рис.2.9. План двофакторного експерименту

Факторне планування здебільшого застосовують в інженерних експериментах (технологія, зносостійкість, продуктивність, старіння і т. ін.). В наукових експериментах, як правило, віддається перевага послідовному планові, хоч іноді, як зазначалося, саму послідовність завдання незалежної змінної роблять випадковою для усунення впливу систематичного фактора.

Систематичну похибку в деяких випадках можна виявити за допомогою обчислень. Наприклад, в експерименті вимірюються змінні A, B, x, y , що пов'язані мультиплікативно, тобто $A \cdot B = x \cdot y$. Припустимо, що для вимірювання A результат відхиляється від істинного значення на $f(A)$, тобто уявне значення $A + f(A)$, де f - деяка функція від A . До того ж, спотворення величини A відбувається кожного вимірювання, наприклад, дефект приладу. Відтак, відносна похибка вимірювань:

$$\frac{[A + f(A)] \cdot B - x \cdot y}{[A + f(A)] \cdot B \text{ (або } x \cdot y)} = R_1. \quad (2.19)$$

Якби помилки A не було, то R_1 дорівнювало нулю. Далі:

$$\frac{AB + f(A) \cdot B - x \cdot y}{x \cdot y} = \frac{f(A) \cdot B}{x \cdot y} = R_1. \quad (2.20)$$

Уявимо тепер, що в експерименті змінюються всі величини, окрім A , тобто $x \rightarrow m \cdot x$; $y \rightarrow n \cdot y$; $B \rightarrow m \cdot n \cdot B$.

В цьому разі:

$$\frac{[A + f(A)] \cdot m \cdot n \cdot B - m \cdot x \cdot n \cdot y}{m \cdot x \cdot n \cdot y} = \frac{m \cdot n \cdot B \cdot f(A)}{m \cdot x \cdot n \cdot y} = R_2, \quad (2.21)$$

тобто відносна помилка вимірювань за інших значень всіх змінних окрім A . Віднімаємо тепер R_1 :

$$R_2 - R_1 = \frac{m \cdot n \cdot B \cdot f(A)}{m \cdot n \cdot x \cdot y} - \frac{f(A) \cdot B}{x \cdot y} = 0, \quad (2.22)$$

тобто ані вигляд функції f , ані значення змінних x, y, B не вплинули на величину відносної помилки. Відтак, якщо в рівняннях виду $A \cdot B = x \cdot y$ одна із змінних має систематичну похибку типу суми, то цю “дефектну” змінну можна виявити фіксуючи по чергово одну із змінних та змінюючи останні. Та змінна, для якої за умови фіксування її значення відносна похибка змінюватись не буде і є “дефектною”, тобто ця змінна містить систематичну похибку. Дійсно, зафіксуємо, наприклад, B і змінюватимемо все останнє:

$$R_3 = \frac{[m \cdot n \cdot A + f(m \cdot n \cdot A)] \cdot B - m \cdot x \cdot n \cdot y}{m \cdot x \cdot n \cdot y} = \frac{B \cdot f(m \cdot n \cdot A)}{m \cdot n \cdot x \cdot y}; \quad (2.23)$$

$$R_3 - R_1 = \frac{B \cdot f(m \cdot n \cdot A)}{m \cdot n \cdot x \cdot y} - \frac{B \cdot f(A)}{x \cdot y} \dots \quad (2.24)$$

Як видно, ця різниця виявляється рівною до нуля тільки в єдиному випадку $f(m \cdot n \cdot A) = m \cdot n \cdot f(A)$, або $f(A)$ має вигляд $f(A) = k \cdot A$. Звичайно $A = A_{icm} \pm \Delta A_{icm}$. Аналогічного результату можна отримати і за умови фіксування x ($R_4 \neq R_1$). Відтак, за певного набору параметрів визначаємо відносну помилку балансу рівняння. Далі визначаємо ту ж саму помилку за других значень всіх змінних крім однієї. Якщо нова відносна помилка балансу не відрізнятиметься від першої, то зафіксована змінна вимірюється із систематичною помилкою типу суми. Якщо ж помилка балансу виявляється іншою – фіксують наступну змінну, а для всіх останніх беруть інші значення і знову визначають відносну помилку балансу і т. д.

Якщо помилка має мультиплікативний вигляд, що відбувається рідше, то маємо:

$$R_1 = \frac{f(A) \cdot A \cdot B - x \cdot y}{x \cdot y}. \quad (2.25)$$

Якщо зафіксувати A , а останні змінні взяти при інших значеннях, то отримаємо:

$$R_2 = \frac{f(A) \cdot A \cdot m \cdot n \cdot B - m \cdot x \cdot n \cdot y}{m \cdot x \cdot n \cdot y}; \quad (2.26)$$

Як бачимо, $R_2 - R_1 = 0$ незалежно від $f(A), m, n$. Для фіксованої B :

$$R_3 = \frac{f(m \cdot n \cdot A) \cdot m \cdot n \cdot A \cdot B - m \cdot x \cdot n \cdot y}{m \cdot x \cdot n \cdot y}; \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} R_3 - R_1 &= \frac{f(m \cdot n \cdot A) \cdot m \cdot n \cdot A \cdot B - n \cdot m \cdot x \cdot y}{x \cdot y \cdot n \cdot m} - \frac{f(A) \cdot A \cdot B - x \cdot y}{x \cdot y} = \\ &= \frac{f(m \cdot n \cdot A) \cdot m \cdot n \cdot A \cdot B - m \cdot n \cdot x \cdot y - m \cdot n \cdot f(A) \cdot A \cdot B + m \cdot n \cdot x \cdot y}{m \cdot n \cdot x \cdot y} = \\ &= \frac{f(m \cdot n \cdot A) \cdot A \cdot B - f(A) \cdot A \cdot B}{x \cdot y} \end{aligned} \quad (2.28)$$

дорівнює нулю лише в разі $f(m \cdot n \cdot A) = f(A)$, тобто, наприклад, $f(A) \cdot A = K \cdot A$. На жаль саме цей вид похибки, що проявляється мультиплікативно, зустрічається дуже часто. Те ж саме можна зробити з рівняннями виду $A \cdot B = x$; $A \cdot B \cdot C = x \cdot y \cdot z$; $A/B = x/y$ і т. д.

Розглянемо рівняння виду $A + B = x + y$. Уявне значення для A : $A + f(A)$, відтак:

$$R_1 = \frac{A + f(A) + B - x - y}{x + y} = \frac{f(A)}{x + y}; \quad (2.29)$$

$$R_2 = \frac{A + f(A) + B + \Delta x + \Delta y - x - \Delta x - y - \Delta y}{x + \Delta x + y + \Delta y} = \frac{f(A)}{x + \Delta x + y + \Delta y}, \quad (2.30)$$

тобто якщо значення x та y збільшувати, то відносна помилка балансу має зменшуватись. Якщо B зафіксувати, то:

$$R_3 = \frac{A + \Delta A + f(A + \Delta A) + B - x - \Delta x - y - \Delta y}{x + \Delta x + y + \Delta y} = \{ \Delta A = \Delta x + \Delta y \} = \frac{f(A + \Delta A)}{x + \Delta x + y + \Delta y}, \quad (2.31)$$

тобто в залежності від виду $f(A)$ відносна похибка може в цьому разі і не дуже змінюватись, тобто взагалі, кожний випадок має аналізуватись окремо, а наведені вище можуть розглядатись як приклади такого аналізу. Зазначимо лише, що систематична похибка може мати вигляд похибки "старіння", тобто маємо ситуацію, за якої параметри "повзуть" з плином часу. В цьому разі дані бажано знімати серіями, причому, кожну серію проводити якомога скоріше. В межах кожної серії можлива рандомізація. Між серіями - ні. Крім того, не слід забувати за грубі похибки, що звичайно спричиняються:

1. Незадовільний контроль - параметр що різко відхиляється співпадає в часі з моментом різкого стрибку напруги живильної мережі. Подібні явища підлягають усуненню.

2. Очевидна несправність приладу.

3. Порушення балансу більше за норму.

4. Порушення статистичного критерію.

На практиці часто користуються критерієм Шовене – в n -мірній виборці дане відкидають в тому разі, якщо ймовірність його появи менша за $1/2n$. При цьому можна користуватись простою таблицею:

Таблиця 2.1. Таблиця Шовене.

Кільк. даних	4	5	6	10	15	25	50	100	300
x/S	1,54	1,65	1,73	1,96	2,13	2,33	2,57	2,81	3,14

Відкидати дане можна лише один раз.

2.4. Графічний аналіз даних. Метод найменших квадратів(МНК)

Звичайно експеримент завершується побудуванням графіків для більшої наглядності та графічного усереднення. Графіки звичайно будують керуючись двома міркуваннями - результатами проведеного експерименту та

теоретичними. Справа в тому, що, як правило, завжди має місце теоретичний прогноз і, відповідно, характер залежності. Тобто можна відшукувати простір очікуваної лінеаризації, перевіряти функцію на проходження через початок координат або на відхилення від цього початку і т. ін. Як зазначалося, найкращій формі кореляції відповідає залежність, що побудована за методом МНК.

Якщо, наприклад, треба найкращим чином побудувати залежність $Y(x)$, що задана у вигляді таблиці, причому заздалегідь відоме, що вона є лінійна, тобто $Y_T = ax + b$, де Y_T - "точне", найкраще значення Y за даного значення x , то вдаються до наступного.

Відшукувана залежність $Y_T = ax + b$, тобто задача полягає у знаходженні a та b по відомим експериментальним значенням X_i та Y_i . Визначимо суму квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - Y_i)^2, \text{ тобто } \sum_{i=1}^n (Y_{T_i} - Y_i)^2 \quad (2.32)$$

та вимагатимемо, аби ця сума була мінімальною, тобто, якщо вважати:

$$\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 = U(a, b), \quad (2.33)$$

то:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - Y_i) \cdot x_i = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial b} = \sum_{i=1}^n 2(ax_i + b - Y_i) = 0; \end{cases} \quad (2.34)$$

Тобто маємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i Y_i = b \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2; \\ \sum_{i=1}^n Y_i = n \cdot b + a \sum_{i=1}^n x_i; \end{cases}, \quad (2.35)$$

звідки:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}; \quad (2.36)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i Y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (2.37)$$

Якщо заздалегідь відомо, що пряма проходить через центр координат, то $b=0$ і для a маємо дуже спрощений вираз:

$$a = \left(\sum_{i=1}^n x_i Y_i \right) / \sum_{i=1}^n x_i^2; \quad (2.38)$$

Як видно, МНК достатньо складний для обчислень. Його можна застосовувати і для нелінійних залежностей. Наприклад, заздалегідь, згідно теоретичним міркуванням відомо, що залежність має один перегин, найчастіше це куполоподібна функція. Відтак, треба застосовувати поліном 2-го ступеню $Y_i = a + bx + cx^2$.

Будуємо функцію:

$$f(a, b, c) = \sum_i (Y_i - Y_T)^2 = \sum_i (Y_i - a - bx_i - cx_i^2)^2 - \min, \quad (2.39)$$

тобто:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial c} = 0; \quad (2.40)$$

$$\begin{cases} \sum_i (Y_i - a - bx_i - cx_i^2) = 0; \\ \sum_i (Y_i - a - bx_i - cx_i^2) \cdot x_i = 0; \\ \sum_i (Y_i - a - bx_i - cx_i^2) \cdot x_i^2 = 0; \end{cases} \quad (2.41)$$

або:

$$\begin{cases} \sum_i Y_i = n \cdot a + b \cdot \sum_i x_i + c \cdot \sum_i x_i^2; \\ \sum_i x_i Y_i = a \cdot \sum_i x_i + b \cdot \sum_i x_i^2 + c \cdot \sum_i x_i^3; \\ \sum_i x_i^2 \cdot y_i = a \cdot \sum_i x_i^2 + b \cdot \sum_i x_i^3 + c \cdot \sum_i x_i^4. \end{cases} \quad (2.42)$$

Маємо три рівняння з трьома невідомими. Взагалі, простіше винайти всі суми спочатку та підставити їх у вигляді чисел в систему, а далі вже розв'язувати просту систему та знаходити a, b, c . За аналогією можна будувати МНК і для поліномів більших степенів, але краще скористуватися лінеаризацією, наприклад, якщо:

$$Y = A \cdot e^{ax} \Rightarrow \ln Y = \ln A + a \cdot x; \\ z = \alpha + a \cdot x;$$

В нових змінних це вже пряма і маємо мінімальні витрати часу на обчислення. Варто розрізняти графічну обробку даних за допомогою МНК та інтерполяції дискретно заданої функції (наприклад поліномами). Поліноми точно співпадають із статичними значеннями у вузлах, тобто з Y_i для x_i , в той час як МНК відображує статистичні характеристики розподілу і тісно пов'язаний з поняттям кореляції (співвідношення, зв'язок). Справа в тому, що використання МНК є коректним в разі виконання умов: всі випадкові помилки сконцентровані в Y ; їх розподіл не змінюється із змінюванням Y . Зрозуміло, що виконання цих умов, як правило, заздалегідь не відоме, але практика вказує, що з достатньою точністю можна користуватися наведеними вище формулами, тому що більш суворий підхід призводить до надто складних обчислень.

Наведемо рекомендації щодо завдання вимірювальних інтервалів. Звичайно, оптимальною вважається величина:

$$K = \frac{X_{max} - X_{min}}{I + 3,2 \cdot \lg n}, \quad (2.43)$$

де X_{max} та X_{min} - максимальне та мінімальне значення величини вибірки, n - кількість вимірювань (об'єм вибірки). Наприклад, діапазон значень сили струму $20A$, кількість вимірювань (значень сили струму) дорівнює 10 . Відтак:

$K = \frac{20}{4,2} \approx 5A$, тобто, якщо, наприклад, $I_{min} = 100A$, то отримуємо на осі струмів точки: $100A$; $105A$; $110A$; $115A$; $120A$. Таке ж саме співвідношення можна рекомендувати і при побудові гістограм.

Ще одна стандартна рекомендація з цього приводу є така. Мінімальна поділка шкали має приблизно відповідати ймовірній помилці вимірювань. Наприклад, ймовірна помилка (відхилення Φ , в межах $\pm \Phi$, знаходиться половина всієї вибірки, ймовірність потрапляння до $\pm \Phi$ є 50% , $\alpha = 0,5$) має значення $10^{-2} m$. Відтак, шкалу розбивають наступним чином:

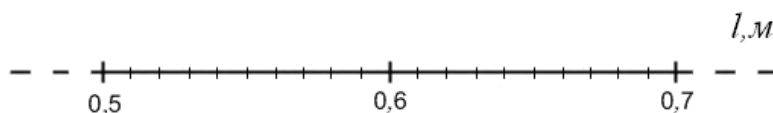


Рис.2.11. Приклад розбивки шкали.

Мінімальна поділка відповідає Φ (або довірному інтервалу), вісь розбивають на десятки таких мінімальних значень - поділок і роблять розмітку. Якщо ціну поділки дуже зменшити, то залежність можна не встановити завдяки великому розкиду даних, якщо ціна поділки є зависока, те ж саме ускладнюється завдяки надмірному згладжуванню залежності.

Дія випадкової помилки - невраховувані фактори діють на Y адитивно-мультиплікативно незалежно (схема АМН) - вимагає говорити просто про кореляцію між x та Y . В найпростішому випадку будуюмо поля кореляції за кореляційною таблицею, наприклад:

Таблиця 2.2. Приклад кореляційної таблиці.

	$x_2 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x_4 - x_3$
$Y_2 - Y_1$		1	3
$Y_3 - Y_2$	2	4	5
$Y_4 - Y_3$	2	5	7

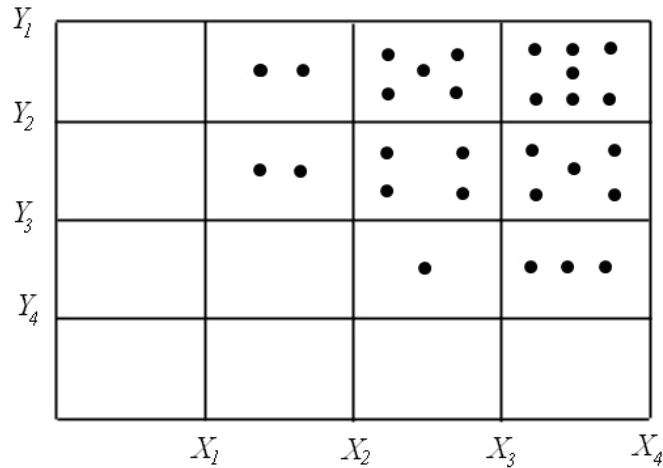


Рис. 2.12 Приклад поля кореляції

Тут Δx та ΔY - незмінні ($x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots$). Говорять, що Y кореляційно залежить від, якщо кожному значенню x відповідає розподіл Y (ряд розподілів), а також, із змінюванням x ці ряди закономірно змінюють своє положення. Тобто це не просто функціональна залежність - тут виявляються ймовірнісні, статистичні властивості. Якщо за змінювання x ряди не змінюють своє положення взагалі, або змінюють випадковим чином, то говорять про відсутність кореляційної залежності між Y та x .

Зазначимо що, знаходження найкращої залежності за МНК існує в різних варіантах. Одні варіанти використовують приведення початкової точки залежності до центру координат, це дещо спрощує розрахунки. Другі використовують чисто графічні побудови (метод Асковіца). Але теоретично вихідний варіант надійніший, крім того, він дає можливість побіжно визначити середнє квадратичне відхилення. Тобто, наприклад, для лінійного наближення, по отриманим a та b визначаємо Y_T для кожного x_i , далі знаходимо:

$$\sum_{i=1}^n (Y_T - Y_i)^2$$

і, нарешті:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i1} - Y_i)^2}{(n-1)}}, \quad (2.44)$$

тобто по суті можна визначити будь-які параметри випадкової помилки вже після і внаслідок застосування МНК, а для його реалізації треба знати тільки x_i та Y_i , прогнозований вигляд функції. Ще раз зазначимо, що оптимальним варіантом є лінеаризація функції.

До графічного аналізу даних можна віднести також задачі інтер- та екстраполяції і взагалі побудову функції за дискретними даними - т. з. вирівнювання ряду розподілів. Найбільш популярний метод наближення поліномами.

Поліном Лагранжа:

$$P_n(x) = a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) + a_1(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Нагадаємо загальне правило – поліном S -го ступеню відтворює функцію із $(S-1)$ перегинами. Відтак, a_0, a_1, \dots, a_n – невизначені; x міститься всередині інтервалу від x_0 до x_n – задача інтерполяції. Необхідно, аби відбувалося $Y_0 = Y(x_0) = P_n(x_0)$ тобто:

$$\begin{aligned} Y(x_0) &= a_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n); \\ Y(x_1) &= P_n(x_1) = a_1(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n); \\ &\dots\dots\dots \\ Y(x_n) &= P_n(x_n) = a_n(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1}). \end{aligned}$$

Звідси:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{Y(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}; \\ a_1 &= \frac{Y(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}; \\ &\dots\dots\dots \\ a_n &= \frac{Y(x_n)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}, \end{aligned}$$

тобто, якщо розташовувати x_0, x_1, \dots, x_n та відповідно Y_0, Y_1, \dots, Y_n , або $Y(x_0), Y(x_1), \dots, Y(x_n)$ можна, по-перше, інтерполювати цю залежність неперервною функцією знаходячи a_0, a_1, \dots, a_n та підставляючи їх у загальний вираз поліному, тобто отримуючи:

$$\begin{aligned} Y(x) &= \frac{Y(x_0) \cdot (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + \frac{Y(x_1) \cdot (x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots \\ &\dots + \frac{Y(x_n) \cdot (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}. \end{aligned}$$

Для не надто великого інтервалу екстраполяції така формула також придатна (x знаходиться за межами інтервалу $[x_0, x_n]$, принаймні це краще, ніж екстраполяція „навмання”). Відтак, по точкам будується функція, тобто точки $(x_0, Y_0), (x_1, Y_1), \dots, (x_n, Y_n)$ переходять в $Y(x)$. По-перше, за допомогою такого метода можна одержати точки, яких бракує, і що лежать всередині інтервалу $[x_0, x_n]$, або не дуже далеко зовні. Метод достатньо точний, але за добавлення хоч одного нового значення всі розрахунки треба починати спочатку (або за виникнення потреби коректування будь-якого старого значення). Більш зручний в цьому плані поліном Ньютона:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Як і в попередньому випадку:

$$\begin{aligned} Y(x_0) &= P_n(x_0) = a_0; \\ Y(x_1) &= P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1-x_0); \\ Y(x_2) &= P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_0) + a_2(x_2-x_0) \cdot (x_2-x_1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 Y(x_n) &= P_n(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + a_2(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) + \dots \\
 & + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

відтак:

$$a_0 = Y(x_0); a_1 = \frac{Y(x_1) - Y(x_0)}{x_1 - x_0},$$

але загальний вигляд виразу для a_2 вже стає надто складним. Все різко спрощується, якщо інтервал по x взяти однаковим:

$$x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$$

відтак:

$$\begin{aligned}
 Y(x_2) &= Y(x_0) + \frac{Y(x_1) - Y(x_0)}{\Delta x} \cdot 2(\Delta x) + a_2 \cdot 2(\Delta x)^2 = 2 \cdot Y(x_1) - Y(x_0) + a_2 \cdot 2(\Delta x)^2 \Rightarrow \\
 a_2 &= \frac{Y(x_2) - 2 \cdot Y(x_1) + Y(x_0)}{2(\Delta x)^2} = \frac{[Y(x_2) - Y(x_1)] - [Y(x_1) - Y(x_0)]}{2(\Delta x)^2}
 \end{aligned}$$

вираз у чисельнику, тобто “різниця мінус різниця” називається другою різницею (різниця другого порядку), позначається вона $\Delta^2(Y(x_0))$ або $\delta^2(Y(x_0))$, таким чином:

$$a_2 = \frac{\Delta^2(Y(x_0))}{2(\Delta x)^2},$$

далі за аналогією:

$$\begin{aligned}
 & \dots\dots\dots \\
 a_n &= \frac{\Delta^n(Y(x_0))}{n!(\Delta x)^n}.
 \end{aligned}$$

Як видно, додавання нового вузла не зачіпає попередні розрахунки. Підставляючи коефіцієнти отримуємо:

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= Y(x_0) + \frac{\Delta(Y(x_0))}{1! \cdot \Delta x} (x - x_0) + \frac{\Delta^2(Y(x_0))}{2! \cdot (\Delta x)^2} (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots \\
 & \dots + \frac{\Delta^n(Y(x_0))}{n!(\Delta x)^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})
 \end{aligned}$$

як бачимо, лінійне наближення взагалі є аналогічним розкладанню функції в ряд.

Дещо про різниці. Очевидно, якщо функція лінійна, то $Y(x_1) - Y(x_0) = Y(x_2) - Y(x_1)$ за умови $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$. Будемо, як і раніше, вважати, що ця умова виконується. В цьому разі друга різниця та, відповідно, a_2 обернеться на нуль. Квадратичний по x член та всі наступні зникнуть лишиться тільки лінійна частина поліному. Звідси можна зробити висновок. Чим менш нелінійна функція, чим ближча вона до лінійної, тим менші в неї другі, а тим паче треті різниці. Якщо різниця високих порядків, починаючи з другого, мало змінюються, то це свідчить за плавність змінювання, плавність ходу функції, відсутність різких стрибків і т. і. (йдеться за співвідношення, наприклад, між другими різницями $\Delta^2(Y(x_0)); \Delta^2(Y(x_2)); \Delta^2(Y(x_4))$ і т. д.). У більшості випадків порядок поліномів вищий за третій не використовують, бо немає потреби – достатньо лінійного, квадратичного, нарешті кубічного

наближення. Зазначимо, що інтерполяція можлива тільки на інтервалах, що не містять особливі точки, наприклад, за дослідження фазових перетворень необхідно окремо інтерполювати функції для кожної фази, а потім „зрощувати” їх на межі переходу. Взагалі наближеннями залежностей у вигляді поліномів найчастіше користуються в тих випадках, коли невідомий механізм явища, або його з’ясування не уявляє собою задачу (модель „чорного ящика”). В фізичному експерименті віддають перевагу перевірці фізичної гіпотези, тобто інтер – або екстраполюють залежності функціями певного вигляду, що відображають фізичний зміст явища. Тобто стандартними є процедури лінеаризації, перевірки гіпотези, тощо.

Окремий вид аналізу функцій уявляє собою т. з. перетворення Фур’є. Уявімо собі результат суперпозиції одна на одну гармонік (гармонійних функцій) з різними амплітудами та частотами, наприклад, складання різноманітних кольорів спектру.

$$f(t) = \sum_k a_k \cdot e^{i\omega_k t}. \quad (2.45)$$

Тобто, по суті, можна говорити про уявлення деякої функції $f(t)$ у вигляді дискретного спектру гармонік. Зрозуміло, що клас $f(t)$ можна значно розповсюдити, якщо перейти до неперервного спектру

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.46)$$

В цьому разі, на малий інтервал $[\omega, \omega + d\omega]$, припадає елементарний доданок $F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega = [F(\omega) d\omega] \cdot e^{i\omega t}$, тобто порівнюючи із дискретним спектром, помічаємо, що $F(\omega) d\omega = a_k$, тобто це є амплітуда гармоніки даної частоти ω . Відтак, $F(\omega)$ - спектральна густина амплітуди (амплітуда, пронормована за частотою, відносна амплітуда). Якщо $f(t)$, як це буває найчастіше у фізичних задачах, дійсна функція, наприклад, залежність діючої зовнішньої сили від часу, то умова дійсності запишеться як:

$$f(t) = f^*(t); \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.47)$$

де вважаємо, що ω є дійсна величина. Тобто для будь-якого значення частоти ω_0 має відбуватися:

$$F(\omega_0) e^{i\omega_0 t} = F^*(\omega) e^{-i\omega t}; \quad \omega = \omega_0;$$

$$F(\omega_0) = F^*(-\omega_0),$$

так, для будь-якої частоти $F(\omega) = F^*(-\omega)$.

Це, в свою чергу, означає: $A(\omega) + iB(\omega) = A(-\omega) - iB(-\omega)$, тобто: $A(\omega) = A(-\omega)$ - дійсна частина $F(\omega)$ має бути парною, а уявна – непарною, тобто $B(-\omega) = -B(\omega)$.

Саме уявлення $f(t)$ в такому разі можна записати так:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) + i \cdot B(\omega)] \cdot [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega. \quad (2.48)$$

Якщо $f(t)$, як вище домовилися, є дійсна, то враховуючи тільки дійсну частину виразу під інтегралом отримуємо:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.49)$$

В обох інтегралах підінтегральні вирази є симетричні. В першому – добуток симетричної на симетричну функцію $A(\omega) = A(-\omega)$; $\cos(\omega t) = \cos(-\omega t)$. У другому – добуток антисиметричної функцію на антисиметричну:

$$B(-\omega) = -B(\omega); \quad \sin(-\omega t) = -\sin(\omega t),$$

т. ч. обидва підінтегральні добутки є симетричні. В цьому разі

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 2 \int_0^{\infty},$$

тобто:

$$f(t) = 2 \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega t d\omega - 2 \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.50)$$

Отже, дійсна $f(t)$ має презентацію тільки у вигляді дійсних косинусоїд та синусоїд (гармонік) з дійсною спектральною густиною $A(\omega)$ та $B(\omega)$, та позитивною частотою ω . Таке можна було б стверджувати від самого початку міркувань.

Варто уваги те, що у вигляді інтегралу по гармонікам (або суми), можна представити практично будь-яку функцію $f(t)$ і це досить легко змоделювати для електричного імпульсу. Деяка напруга складної форми подається на систему електричних осциляторів, що настроєні на різні частоти. Відтак, амплітуди напруг на них відповідатимуть a_k для дискретного уявлення, або $F(\omega)d\omega$ - для неперервного. Т. ч., гармонічний аналіз функції $f(t)$, можливість її уявлення у вигляді суми гармонік, розкладання на ці гармоніки, можна реально „відчути”. Аналогічні явища відбуваються у всіх акустичних резонансних інструментах. Це є системи настроювання резонаторів в органах, перестроюванні резонатори духових інструментів, тощо. Джерелом скрізь править абсолютно „не музикальне” зовнішнє коливання – шипіння мембрани кларнета або саксофона, вібрація губ музиканта-трубача, торкання струни (спробуйте пограти на скрипці або гітарі без резонатора та адаптера). Резонатори відфільтровують потрібні гармонічні компоненти, що добре сприймаються. Ще більш безпосереднє відношення до фізичного експерименту має, в цьому сенсі, розкладання складного світла в спектр (спектральний аналіз) за допомогою, наприклад, призм з великою дисперсією, дифракційних ґраток та ін. В цьому разі $F(\omega)$ набуває взагалі реального змісту – суцільні спектри, лінійчаті, смугасті. Сам характер спектру, амплітуди спектральних ліній широко використовуються для кількісного та якісного аналізу.

Розглянемо ретельніше особливості уявлення функцій у вигляді спектру. Визначимо спочатку, якій функції відповідає рівномірна одинична спектральна густина $F(\omega) = 1$. Інакше кажучи, що станеться, аби скласти

нескінчену кількість гармонік з нескінченно мало відрізняючимися частотами всього спектрального набору $(-\infty, \infty)$, що мають однакові амплітуди, рівні 1. Відтак, йдеться про інтеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega;$$

цей інтеграл представимо як ліміт інтеграла по скінченному інтервалу (цей інтервал взагалі є розбіжний)

$$\int_{-N}^N e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{itN} - e^{-itN}}{it} = \frac{2 \sin tN}{t} \quad (2.51)$$

частоти беремо і негативні, тобто вважаємо, що час може приймати і негативні значення. Запишемо тепер це у вигляді:

$$\frac{2 \sin tN}{t} = 2\pi N \frac{\sin tN}{\pi tN} = \{ F_1(t) = \frac{\sin t}{\pi t} \} = 2\pi N \cdot F_1(tN). \quad (2.52)$$

Комплекс $NF_1(tN)$ нагадує δ -функцію, якщо спрямувати $N \rightarrow \infty$. В цьому разі отримуємо нескінченне стискання з боків та відповідне витягування догори. Крім цього (можна довести, але надто довго), як відомо,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi; \quad \int_{-\infty}^{\infty} F_1(t) dt = \frac{\pi}{\pi} = 1, \quad \text{тобто ця властивість } \delta\text{-функції виконується}$$

(одинична площа під функцією). Відтак схоже, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega = 2\pi \delta(t); \quad (2.53)$$

Обмовимося, що зазначена функція не зовсім „справжня”.

Дійсно,

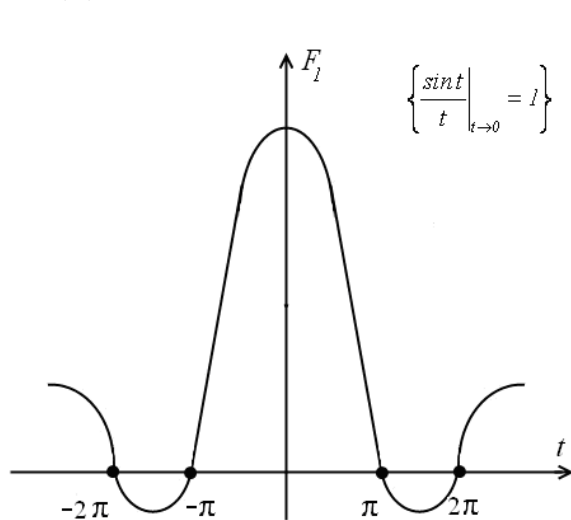


Рис.2.13 Графік функції F_1

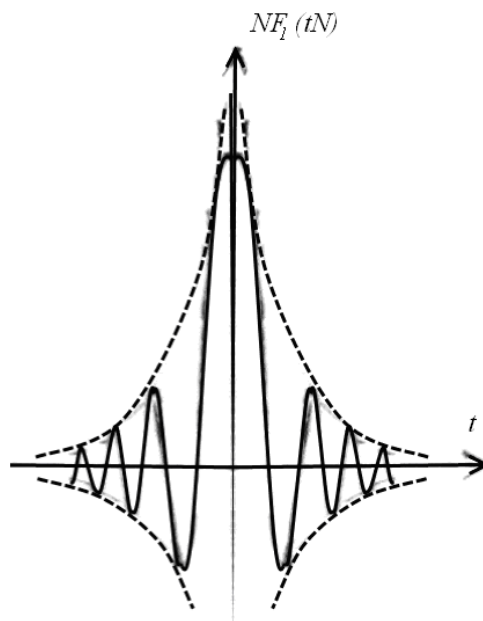


Рис.2.14 Графік δ -подібної функції

тобто, границя $NF_1(tN)$ дає нуль навколо точки $t=0$ тільки „в середньому”, за рахунок періодичності функції, а не за рахунок того, що вона дійсно обертається на нуль. Т. ч., якщо взяти $|\sin t|$, то умова δ -функції вже не

виконуватиметься – модуль не заходить у негативну напівплощину. Відтак, δ - подібність $NF_i(tN)$ за умови $N \rightarrow \infty$ забезпечується не її швидким зменшенням, а частими коливаннями, але в разі інтегрування це не має значення. Якщо скласти дуже велику кількість різночастотних коливань, то тільки на початковий, момент часу (момент складання) матимемо різкий сплеск (δ -функція), що практично миттєво „розмиється” з плином часу з причини наступного повного розузгодження фаз. На векторній діаграмі це відповідає великій кількості стартуючи одночасово з одного положення векторів (в цей момент їхні амплітуди складаються, а всі вони є однакові та дорівнюють 1), але обертання з різними кутовими швидкостями призводить до того, що майже миттєво площина обертання перетвориться на суцільний круг, що заповнений векторами (одичними), що обертається з різними швидкостями. Цей плоский векторний пучок у будь-який момент часу, крім початкового, дорівнюватиме нулю.

За допомогою наведених співвідношень можна вирішити і зворотну задачу - за вигляду функції $f(t)$ визначити спектральну густину $F(\omega)$ для будь-якої гармоніки. Дійсно, якщо, наприклад, взяти $F(\omega)$ у вигляді:

$$F(\omega) = A \cdot e^{-i\omega t},$$

то

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A \cdot e^{-i\omega t} \cdot e^{i\omega \tau} d\omega = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\pi A \delta(t-\tau); \quad (2.54)$$

зрозуміло, якщо $F(\omega)$ взяти у вигляді:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t}, \text{ то } f(t) = \delta(t-\tau). \quad (2.55)$$

Пригадаємо, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = 2\pi \cdot \delta(t)$, помножимо цей вираз на $\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t}$ та проінтегруємо по t :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot 2\pi \cdot \delta(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \delta(t) dt = e^{-i\omega t}. \quad (2.56)$$

За визначенням:

$$\int l \cdot G(x, \xi) d\xi = G(x, \xi), \quad (2.57)$$

тобто за одиничного впливу функція Гріна переходить сама у себе, отримуємо, що в нашому випадку функція Гріна це є:

$$\frac{1}{2\pi} e^{-i\omega t}, \text{ тобто } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Тобто отримали відгук $F(\omega)$ на δ -функцію. Як відомо інтеграл від цього відгуку – це вже відгук на одиничний вплив – функція Гріна ($\int \delta(t-\tau) dt = 1$). Відтак, по загальному правилу, для будь-якої функції $f(t)$ маємо:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt - \quad (2.58)$$

за цією формулою знаючи вигляд $f(t)$ можна визначити спектральну густину будь-якої її гармонічної складової $F(\omega)$.

Для функцій, що мають чітко виражену періодичність, спектральний аналіз (розкладання по гармонічним складовим) спрощується. В цьому разі $f(t+T) = f(t)$, тобто значення функції однозначно відтворюється через період T . Відтак, в розкладанні цієї функції братимуть участь ті гармоніки, що мають таку ж саму періодичність:

$$e^{i\omega(t+T)} \equiv e^{i\omega t}; e^{i\omega t} \cdot e^{i\omega T} = e^{i\omega t} \Rightarrow e^{i\omega T} = 1;$$

$$\cos \omega \cdot T + i \sin \omega \cdot T = 1 \Rightarrow \omega T = 2k\pi,$$

тобто частоти гармонічних компонент такої функції можуть приймати значення

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}, \quad (2.59)$$

де k може приймати значення цілих чисел. Звідси, маємо

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot e^{i \frac{2k\pi}{T} t}. \quad (2.60)$$

Отож, маємо задачу знаходження амплітуд a_k відповідних гармонік. Як видно, доданок, що відповідає $k=0$, дорівнює просто a_0 ($e^0 = 1$) і не є періодичним – це постійна складова. Її можна визначити, взявши середнє за період від лівої частини рівняння:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = a_0 - \text{середнє значення } a_0 - \text{це і є } a_0, \text{ а середні за період}$$

значення всіх останніх, гармонічно змінюваних складових, дорівнює нулю. Помітно, що домножуючи праву частину розкладання на

$$e^{-i \frac{2k\pi}{T} t}$$

для деякого фіксованого значення k отримаємо для цього k відповідне a_k без гармонічного множника, тобто за усереднення по часу правої частини всі доданки обернуться на нуль, окрім цього a_k . В лівій частині утворюється

$$\langle f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} \rangle,$$

$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{T} t} dt$ - таким чином знаходять всі останні коефіцієнти

розкладання в ряд Фур'є. В більшості випадків у практиці фізичного експерименту доводиться мати справу з дійсною функцією $f(t)$. Для описування цього об'єднаємо в розкладанні симетричні за $k(\pm k)$ члени:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{i \frac{2k\pi}{T} t} + a_k e^{-i \frac{2k\pi}{T} t}) =$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k + a_{-k}) \cos \frac{2k\pi}{T} t + i(a_k - a_{-k}) \sin \frac{2k\pi}{T} t \right] =, \quad (2.61)$$

$$= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \frac{2k\pi}{T} t + B_k \sin \frac{2k\pi}{T} t)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt; A_k = a_k + a_{-k} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (e^{-i\frac{2k\pi}{T}t} + e^{i\frac{2k\pi}{T}t}) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos \frac{2k\pi}{T} \cdot t dt; \quad (k = 1, 2, 3, \dots);$$

$$B_k = i(a_k - a_{-k}) = \frac{i}{T} \int_0^T f(t) (e^{-i\frac{2k\pi}{T}t} - e^{i\frac{2k\pi}{T}t}) dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \frac{2k\pi}{T} t dt; \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (2.63)$$

Розглянемо як приклад наступну задачу.

Задача 2.1. Розкласти в ряд Фур'є однополярну послідовність П-імпульсів:

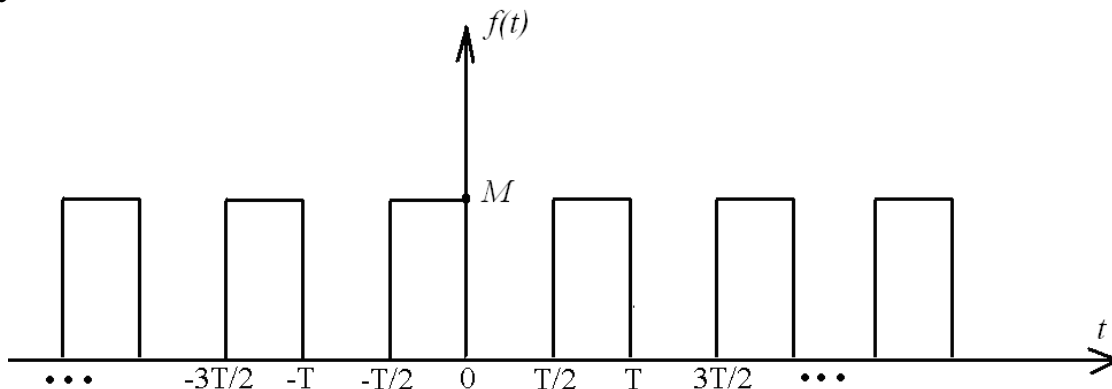


Рис.2.15

Середнє значення $f(t)$ за період очевидно $M/2$, тобто $a_0 = M/2$;

$$A_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{T/2}^T M \cdot \cos \frac{2\pi \cdot k}{T} \cdot t dt = \frac{2M}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot k} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot k}{T} \cdot t \Big|_{T/2}^T = 0.$$

Тут інтегруємо не від нуля до T , а від $T/2$ до T тому, що в інтервалі від 0 до $T/2$ вираз під інтегралом обертається на нуль - $f(t)=0$.

$$B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{T/2}^T M \cdot \sin \frac{2\pi \cdot k}{T} \cdot t dt = \frac{2M}{T} \cdot \frac{T}{2\pi \cdot k} \cdot \left(-\cos \frac{2\pi \cdot k}{T} \cdot t \right) \Big|_{T/2}^T = \frac{M}{k \cdot \pi} \cdot \langle 1 + \cos k\pi \rangle,$$

тобто:

$$B_1 = -\frac{2M}{\pi}; \quad B_2 = 0; \quad B_3 = -\frac{2M}{3\pi}; \quad B_4 = 0; \quad B_5 = -\frac{2M}{5\pi} \dots$$

Відтак, розкладання наведеної функції по гармонікам матиме вигляд:

$$f(t) = \frac{M}{2} - \frac{2M}{\pi} \cdot \sin \frac{2\pi \cdot t}{T} - \frac{2M}{3\pi} \cdot \sin \frac{6\pi \cdot t}{T} - \frac{2M}{5\pi} \cdot \sin \frac{10\pi \cdot t}{T} - \dots$$

Маємо постійну складову, головну гармоніку з основною частотою повторення П-імпульсів $2\pi/T = \omega$; бічні гармоніки із частотами $6\pi/T = 3\omega$; $10\pi/T = 5\omega \dots$ – тобто в спектрі присутні тільки непарні гармоніки, причому, чим вища частота гармоніки, тим менша його амплітуда – вони «підправляють» головну до вигляду розкладеної функції $f(t)$.

Задача 2.2. Отримані результати вимірювань:

Таблиця 2.2

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,66	1,58	1,50	1,44	1,37	1,30	1,22	1,17

Відомо, що $x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0$; $y(0)$ має скінченне значення. Перевірити гіпотези:

$$y = \frac{1}{B + C \cdot x}; \quad y = A \cdot e^{-k \cdot x}.$$

Зрозуміло, що перед перевіркою гіпотез, їх треба висунути, а для цього необхідно будувати графік $y(x)$, перевірити аналітично Δ^1 , Δ^2 – зробити висновки відносно уявного вигляду $y(x)$, тобто сформулювати задачу.

Представимо $y(x)$ у вигляді $\frac{1}{y} = C \cdot x + B$, тобто в координатах $x - \frac{1}{y}$ функція має лінеаризуватися. Будуємо графік, позначаючи $\frac{1}{y} = z$.

Таблиця 2.3

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
z	0,6	0,63	0,666	0,695	0,73	0,77	0,82	0,855

Отримуємо майже пряму лінію, що означає підтвердження висунутої гіпотези.

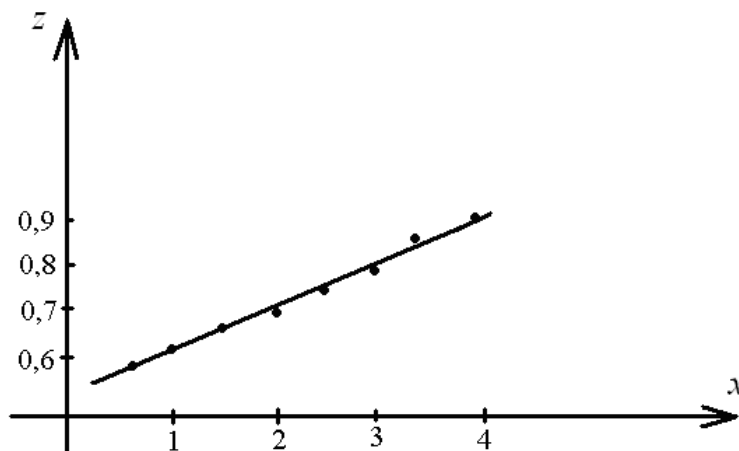


Рис.2.16

Побудуємо тепер залежність $z(x)$ за лінійного наближення МНК:

$$\begin{cases} \sum x_i \cdot y_i = b \cdot \sum x_i + a \cdot \sum x_i^2 ; \\ \sum y_i = n \cdot b + a \cdot \sum x_i . \end{cases}$$

В нашому випадку $y_i = z_i$.

$$\sum x_i \cdot z_i = 0,3 + 0,63 + 1 + 1,39 + 1,83 + 2,31 + 2,86 + 3,41 = 13,73 ;$$

$$\sum x_i = 0,5 + 1,0 + 1,5 + 2,0 + 2,5 + 3,0 + 3,5 + 4,0 = 18 ;$$

$$\sum x_i^2 = 0,25 + 1,0 + 2,25 + 4,0 + 6,25 + 9,0 + 12,25 + 16,0 = 51 ;$$

$$\sum z_i = 0,6 + 0,63 + 0,666 + 0,695 + 0,73 + 0,77 + 0,82 + 0,855 = 5,766 ;$$

$$n = 8.$$

Отримуємо систему:

$$\left. \begin{aligned} 13,73 &= 18 \cdot b + 51 \cdot a \\ 5,766 &= 8 \cdot b + 18 \cdot a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 0,763 &= b + 2,83 \cdot a \\ 0,72 &= b + 2,25 \cdot a \end{aligned} \right\};$$

$$0,043 = 0,58 \cdot a \Rightarrow a = 0,074 = C ;$$

$$5,766 = 8 \cdot b + 1,33 \Rightarrow b = 0,555 = B ;$$

$$z = 0,074 \cdot x + 0,555.$$

Будуємо порівняльну таблицю, для чого спочатку визначаємо Z_{T_i}

$$z_{T_1} = 0,592; \quad z_{T_2} = 0,629; \quad z_{T_3} = 0,666; \quad z_{T_4} = 0,703;$$

$$z_{T_5} = 0,74; \quad z_{T_6} = 0,777; \quad z_{T_7} = 0,814; \quad z_{T_8} = 0,851.$$

Таблиця 2.4

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
z	0,6	0,63	0,666	0,695	0,73	0,77	0,82	0,855
z_T	0,592	0,629	0,666	0,703	0,74	0,777	0,814	0,851

Переходимо тепер від z_{T_i} до y_{T_i} :

$$y_{T_1} = 1,689; \quad y_{T_2} = 1,589; \quad y_{T_3} = 1,5; \quad y_{T_4} = 1,422;$$

$$y_{T_5} = 1,35; \quad y_{T_6} = 1,287; \quad y_{T_7} = 1,228; \quad y_{T_8} = 1,175.$$

Знову будуємо порівняльну таблицю для $x - y$:

Таблиця 2.5

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,66	1,58	1,50	1,44	1,37	1,30	1,22	1,17
y_T	1,689	1,589	1,5	1,422	1,35	1,287	1,228	1,175

Знаходимо середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{\sum \Delta y^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{19 \cdot 10^{-4}}{7}} = 1,65 \cdot 10^{-2},$$

де:

$$\sum \Delta y^2 = 8,4 \cdot 10^{-4} + 0,81 \cdot 10^{-4} + 0 + 3,24 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-4} +$$

$$+ 1,69 \cdot 10^{-4} + 0,64 \cdot 10^{-4} + 0,25 \cdot 10^{-4} = 19 \cdot 10^{-4}.$$

Можна визначити відносну випадкову похибку:

$$\delta y = \frac{S}{\bar{y}_T}.$$

Тепер розглянемо другу гіпотезу. Для цього представимо функцію y у вигляді:

$$\ln y = \ln A - k \cdot x, \text{ або } e^{kx} = \frac{A}{y}; \quad z = \frac{1}{y}; \quad e^{kx} = A \cdot z \Rightarrow k \cdot x = \ln A + \ln z, \text{ тобто:}$$

$$\ln z = k \cdot x - \ln A \rightarrow y = a \cdot x + b, \text{ де } y = \ln z; \quad a = k; \quad b = -\ln A.$$

Але враховуючи, що y – малі числа (<1), матимемо від'ємні логарифми, то краще повернутися до уявлення:

$$\ln y = -k \cdot x + \ln A; \quad y = -a \cdot x + b;$$

$$y_1 = 0,5; \quad y_2 = 0,457; \quad y_3 = 0,405; \quad y_4 = 0,365;$$

$$y_5 = 0,315; \quad y_6 = 0,262; \quad y_7 = 0,199; \quad y_8 = 0,157.$$

Будуємо орієнтовний графік для перевірки лінійності.

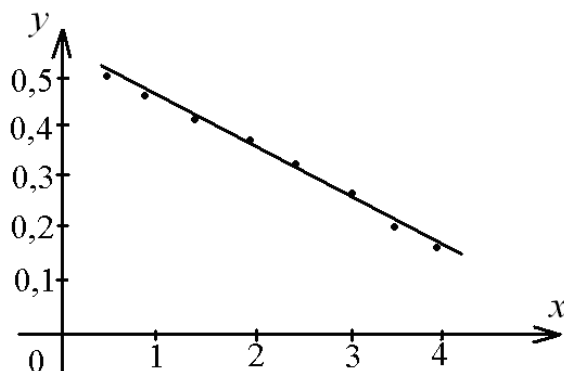


Рис.2.17

Використаємо ще один метод – перевіримо різниці:

$$\Delta_{12} = 4,3 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{23} = 5,2 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{34} = 4 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{45} = 5 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta_{56} = 5,3 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{67} = 6,3 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_{78} = 4,2 \cdot 10^{-2}.$$

Другі різниці:

$$\Delta_1^2 = 0,9 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_2^2 = -1,2 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_3^2 = 1 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_4^2 = 0,3 \cdot 10^{-2}; \quad \Delta_5^2 = 1 \cdot 10^{-2};$$

$\Delta_6^2 = -2,1 \cdot 10^{-2}$ - другі різниці менші за перші, змінюють знак, тобто робимо висновок, що залежність досить лінійна. Застосуємо МНК для цього лінійного простору:

$$\begin{cases} \sum x_i y_i = b \cdot \sum x_i - a \cdot \sum x_i^2; \\ \sum y_i = n \cdot b - a \cdot \sum x_i; \end{cases}$$

$$\sum x_i y_i = 0,25 + 0,457 + 0,607 + 0,73 + 0,787 + 0,786 + 0,696 + 0,628 = 4,94;$$

$$\sum x_i = 18; \quad \sum x_i^2 = 51; \quad \sum y_i = 2,66.$$

$$\begin{cases} 4,94 = 18 \cdot b - 51 \cdot a \quad | * 4; \\ 2,66 = 8 \cdot b - 18 \cdot a \quad | * 9; \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} 19,76 = 72 \cdot b - 204 \cdot a \\ 23,94 = 72 \cdot b - 162 \cdot a \end{array} \right\} \Rightarrow 4,18 = 42 \cdot a;$$

$$a = 9,95 \cdot 10^{-2}; \quad 23,94 = 72 \cdot b - 16,12; \quad b = 0,556; \quad y = -9,95 \cdot 10^{-2} \cdot x + 0,556.$$

Знаходимо y_T :

$$y_{T_1} = 0,506; \quad y_{T_2} = 0,457; \quad y_{T_3} = 0,407; \quad y_{T_4} = 0,357;$$

$$y_{T_5} = 0,307; \quad y_{T_6} = 0,256; \quad y_{T_7} = 0,208; \quad y_{T_8} = 0,158;$$

Повернемося до вихідного значення y , підправленого МНК:

$$y_1 = 1,658; \quad y_2 = 1,579; \quad y_3 = 1,502; \quad y_4 = 1,429; \quad y_5 = 1,37; \quad y_6 = 1,291; \quad y_7 = 1,231; \quad y_8 = 1,17;$$

Будуємо порівняльну таблицю: (для x - y)

Таблиця 2.6

x	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,66	1,58	1,50	1,44	1,37	1,30	1,22	1,17
y_T	1,658	1,579	1,502	1,429	1,37	1,291	1,231	1,17

Знаходимо середнє квадратичне відхилення:

$$\sum (\Delta y)^2 = 4 \cdot 10^{-6} + 1 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-6} + 1,21 \cdot 10^{-4} + 0 + 81 \cdot 10^{-6} + 1,21 \cdot 10^{-4} + 0 = 3,32 \cdot 10^{-4};$$

$$S = \sqrt{\frac{3,32 \cdot 10^{-4}}{7}} = 0,69 \cdot 10^{-2}.$$

Можна також обчислити відносну випадкову похибку $\delta y = \frac{S}{\bar{y}_T}$ порівняти з результатом для попередньої гіпотези.

Як бачимо, для гіпотези гіперболічного наближення отримали, S приблизно у два рази більше, тобто гіпотеза зворотньоекспоненціального наближення виглядає кращою, хоча вони обидві досить адекватні вибірці. Треба взагалі мати на увазі, що обидві функції поведуться доволі східно, тому в залежності від обставин можна користуватись чи тією, чи іншою (наприклад, гіперболічне наближення ймовірності тунелювання). Варто порівняти δy для обох гіпотез та зробити висновки.

2.5. Точність обчислень

Точність обробки даних експерименту має бути узгоджена з точністю вимірювань. Розрахунки, що дають результати з великою кількістю знаків після коми дають несправжнє враження (ілюзію) великої точності результату. Зрозуміло, що не слід вдаватися до іншої крайності – свідомо, закруглювати результати вимірювань. Наприклад, якщо точність вимірювань складає величину, близько 1%, то для розрахунків (обчислень) можна користуватись логарифмічною лінійкою - гірше не буде, тобто в цьому разі надійно визначаються три значущі цифри. Звичайно практикують правило - похибка обчислень має бути на порядок меншою за похибку вимірювань. За цієї умови похибка обчислень практично не спотворює результат, а витрати праці на обчислення є мінімальні.

Приклад. Вимірюється електричний опір зразка. Сила струму, що протікає в ньому дорівнює $27,3 \text{ mA}$, а напруга на зразку - $6,45 \text{ V}$. Прилади, що використовуються для вимірювань, гарантують відносну помилку не більшу за 1%.

Відтак,

$$R = \frac{U}{I} = \frac{6,45}{27,3 \cdot 10^{-3}} = 236,2637 \text{ Ом}.$$

Самі вимірювання мають точність до 1%, тому для R має сенс визначення з точністю до одиниць Ом, або, до десятих Ома, тобто $R \approx 236,3 \text{ Ом}$. В цьому прикладі кожний з множників вимірюється з точністю до 1%, результат має меншу точність, але не гірше за 2% відтак, $R = 236 \pm 4 \text{ Ом}$.

Приклад. Опір однорідного лінійного зразка (металевий дріт) вимірюють визначаючи його довжину та діаметр. Питомий опір вважається відомим з точністю, набагато більшою за точність вимірювань (довідникові дані). Проведено 10 вимірювань довжини та діаметра.

Отримано: $l=25,323 \text{ мм}$; $S_l=0,12 \text{ мм}$; $d=1,54 \text{ мм}$; $S_d=0,21 \text{ мм}$.

Як добре відомо:

$$\frac{S_R^2}{R^2} = \frac{S_d^2}{d^2} + \frac{S_l^2}{l^2}, \text{ але враховуючи, що } S_{d^2} = 2S_d \Rightarrow \frac{S_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{2S_d}{d^2}\right)^2 + \frac{S_l^2}{l^2}}.$$

Взагалі, краще робити конкретніший аналіз:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{\pi d^2 / 4} \approx \frac{l}{d^2};$$

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial d} \cdot \Delta d\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2l}{d^3} \cdot S_d\right)^2 + \left(\frac{1}{d^2} \cdot S_l\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{4l^2}{d^6} \cdot S_d^2 + \frac{1}{d^4} \cdot S_l^2} = \frac{l}{d^2} \cdot \sqrt{\frac{4S_d^2}{d^2} + \frac{S_l^2}{l^2}} \\ &\Rightarrow \frac{S_R}{R} \cdot \sqrt{\frac{4S_d^2}{d^2} + \frac{S_l^2}{l^2}}. \end{aligned}$$

Найкраще робити все точно:

$$R = \rho \cdot \frac{4l}{\pi \cdot d^2}; \quad \frac{\partial R}{\partial l} = \frac{4\rho}{\pi \cdot d^2}; \quad \frac{\partial R}{\partial d} = -\frac{8\rho \cdot l}{\pi \cdot d^3};$$

$$S_R = \sqrt{\left(\frac{4\rho}{\pi \cdot d^2} \cdot S_l\right)^2 + \left(\frac{8\rho \cdot l}{\pi \cdot d^3} \cdot S_d\right)^2} = \sqrt{\frac{16\rho^2}{\pi^2 \cdot d^4} \cdot S_l^2 + \frac{64\rho^2 \cdot l^2}{\pi^2 \cdot d^6} \cdot S_d^2} = \rho \cdot \frac{4l}{\pi \cdot d^2} \cdot \sqrt{\frac{S_l^2}{l^2} + \frac{4S_d^2}{d^2}},$$

тобто:

$$\frac{S_R}{R} = \sqrt{\frac{S_l^2}{l^2} + \frac{4S_d^2}{d^2}} = \sqrt{\frac{1,44 \cdot 10^{-2}}{641,25} + \frac{1,76 \cdot 10^{-1}}{2,37}} = \sqrt{2,2 \cdot 10^{-5} + 7,42 \cdot 10^{-2}} \quad - \text{ як бачимо,}$$

похибкою вимірювання довжини можна знехтувати порівняно з похибкою вимірювання діаметра:

$\frac{S_R}{R} = 0,27$, або 20%...30%, тобто десятки відсотків і до уваги можна брати тільки дві значущі цифри:

$$R = 1,78 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4l}{\pi \cdot d^2} = 1,78 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{4 \cdot 25,323}{3,14 \cdot 2,37} = 2,42 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}, \text{ тобто } R \approx 2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}.$$

Для підвищеній точності визначення (непрямого вимірювання) R в першу чергу необхідно підвищити точність вимірювань діаметра d (зменшити розсіювання, тобто S_d).

Задача 2.3 Реєструється залежність анодного струму магнетрона від індукції зовнішнього магнітного поля. Магнетрон виглядає як вакуумний діод з ниткоподібним катодом та циліндричним анодом. Цей магнетрон розташовують всередині соленоїда (система з аксіальною симетрією).

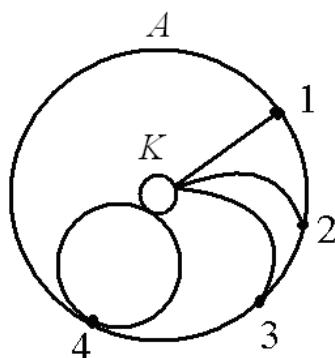


Рис. 2.18

Напруга на аноді та режим катода підтримуються сталими, змінюють струм соленоїда і, відповідно, індукцію магнітного поля, силові лінії якого перпендикулярні до площини руху електронів в діоді: 1 - траєкторія електронів у відсутність магнітного поля 2 - індукція B має невелике значення; 3 - значення B велике; 4 - значення B є критичне (наближення рівномірного руху); K – катод; A – анод. Реальна залежність $I_a(I_c)$ має вигляд:

Таблиця 2.7

I_a, mA	32	28	24	19	15	10	7	5	4	3,5
I_c, A	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0

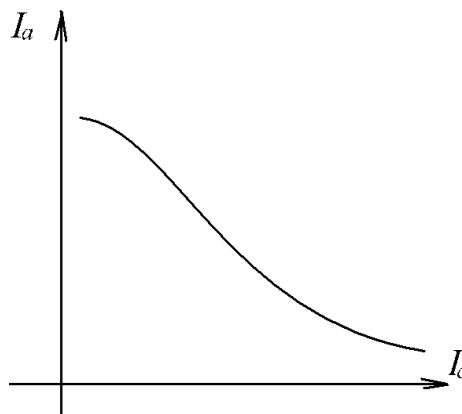


Рис. 2.19

В той же час, прості розрахунки руху, що ґрунтуються на припущенні його рівномірності (змінювання швидкості не дуже велике аби принципово впливати на характер руху) і, відповідно, усталеності радіуса кривизни траєкторії, дає, що анодний струм діода має бути практично незмінюваним аж поки струм соленоїда не сягне деякого критичного значення $I_{ск}$ що визначається як

$$I_{ск} = \sqrt{\frac{8 \cdot m \cdot U}{q}} \cdot \frac{e}{\mu_0 \cdot R_a \cdot N},$$

де m та q , - маса та заряд електрона; U - Напруга на аноді; R_a - радіус анода; l та N - довжина та кількість витків соленоїда; μ_0 - магнітна стала. Якщо струм соленоїда досягає I_{ck} анодний струм стрибкоподібно спадає майже до нуля, що відповідає досягненню радіуса кривини траєкторії електронів значення $0,5R_a$ (див. коло 4 на рис.2.18). В цих умовах, як припускається, електрони майже одночасно перестають досягати анода і анодний струм практично зникає. Але, реально отримуємо залежність $I_a(I_c)$, що приведена в таблиці і на графіку. Анодний струм дійсно зменшується із зростанням струму соленоїда (індукції магнітного поля), але дуже повільно і не спадає до нуля, не кажучи вже про стрибкоподібне змінювання.

Більш ретельний аналіз, що враховує неоднорідність електричного поля між анодом і катодом, по суті, нерівномірність руху електронів, дозволяє отримати радіальну залежність їхньої швидкості у вигляді:

$$V(r) = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m} \cdot \left(1 - \frac{\ln\left(\frac{R_a}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_a}{R_k}\right)} \right)}$$

Якщо вважати, що анодна напруга U становить $100B$; радіус анода $R_a=1cm$; радіус катода $R_k=1mm$, отримуємо:

Таблиця 2.8

$V, 10^6 m/c$	2,7	3,3	3,8	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,15	5,3	5,4	5,5
r, mm	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0

Поставимо задачу проаналізувати характер траєкторії електронів, та співставити з експериментальними даними результат аналізу.

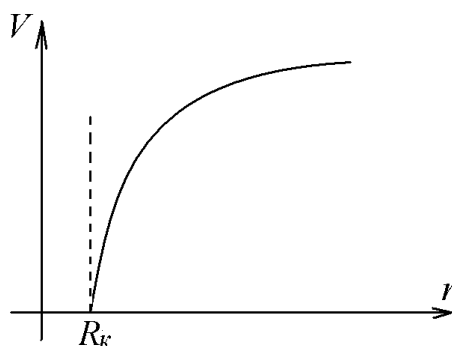


Рис. 2.20

Розглянемо, по-перше, радіальний розподіл прискорення, для чого скористуємося записом:

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot V_r$$

де V_r – радіальна компонента швидкості. У відсутності магнітного поля, коли траєкторія прямолінійна (траєкторія 1 на рис. 2.18), V_r та V є тотожні. Відтак,

за відомим видом функції $V(r)$ можна побудувати $a(r)$ в кусочно лінійному наближенні. В цьому разі $a_i(r)$ матиме вигляд:

$$a_i(r) = \left(\frac{\Delta V}{\Delta r} \right)_i$$

$V_i(r)$ – підсумування по i не проводиться

Δr – радіальний крок

Будуємо відповідну таблицю:

Таблиця 2.9

$r, \text{мм}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
$\Delta V/\Delta r 10^9 \text{с}^{-1}$	1,2	1,0	1,8	0,4	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,2	0,2
$a, 10^{15} \text{м/с}^2$	3,24	3,3	3,02	1,7	1,77	1,84	1,9	1,5	1,55	1,06	1,08

Графік функції $a(r)$ матиме вигляд:

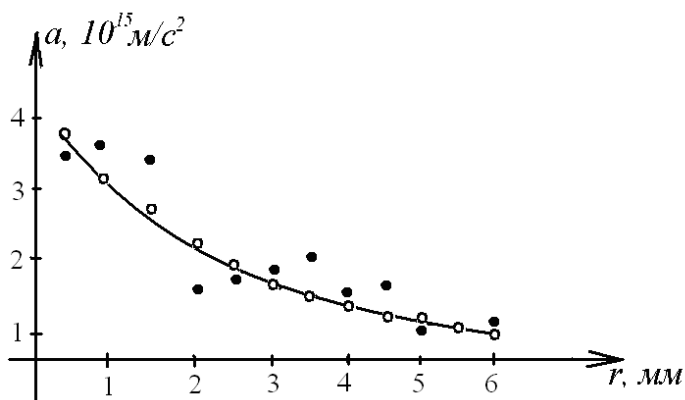


Рис.2.21

Як бачимо, рух не тільки не рівномірний але навіть не рівнозмінний - більш складний рух (змінний). Визначимо вигляд функції $a(r)$ з фізичних міркувань (висування гіпотези). В коаксіальній - системі електродів напруженість електричного поля, а значить і сила, пропорційні $1/r$. Вважатимемо, наближено, що $a \sim 1/r$ тобто будемо шукати вигляд функції прискорення від радіальної змінної як

$$a(r) = \frac{I}{A + B \cdot r} \Rightarrow \frac{I}{a} = B \cdot r + A = y;$$

$$B = a_k; r = x; A = b; \frac{I}{a} = y.$$

Знову використаємо лінійне наближення МНК:

$$\begin{cases} \sum x_i \cdot y_i = b \sum x_i + a_k \sum x_i^2; \\ \sum y_i = n \cdot b + a_k \sum x_i; \end{cases}$$

$$\sum x_i \cdot y_i = 22,376; \quad \sum x_i = 33; \quad n = 11;$$

$$\sum x_i^2 = 0,25 + 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 + 12,25 + 16 + 20,25 + 30,25 = 126,5;$$

$$\sum y_i = 6,346;$$

$$\left. \begin{aligned} 22,376 &= b \cdot 33 + a_k \cdot 126,5 \\ 6,346 &= b \cdot 11 + a_k \cdot 33 \end{aligned} \right\} |_{x(-3)}$$

$$3,36 = 27,5 \cdot a_k; \quad b = 0,1213; \quad A = 0,213;$$

Відтак, функція $a(r)$ матиме вигляд:

$$a(r) = \frac{1}{0,213 + 0,1213 \cdot r};$$

відповідна таблиця:

Таблиця 2.10

r	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
a	3,65	2,99	2,53	2,19	1,94	1,73	1,57	1,43	1,32	1,22	1,136	1,06

Будуємо графік цієї функції на полі даних $a(r)$, знаходимо середнє квадратичне відхилення:

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum a_i^2}{n-1}};$$

$$\Delta a: 0,41; 0,31; 0,49; 0,49; 0,17; 0,11; 0,33; 0,07; 0,23; 0,16; 0,056.$$

$$(\Delta a)^2: 1,68 \cdot 10^{-1}; 9,61 \cdot 10^{-2}; 2,4 \cdot 10^{-1}; 5,76 \cdot 10^{-2}; 2,83 \cdot 10^{-2}; 1,2 \cdot 10^{-2}; 1,09 \cdot 10^{-1}; 4,9 \cdot 10^{-3}; 5,29 \cdot 10^{-2}; 2,56 \cdot 10^{-2}; 3,1 \cdot 10^{-3}.$$

$$\sum a_i^2 = 0,798.$$

$$S_a = \sqrt{\frac{0,798}{10}} = 0,282.$$

Зауважимо, що S_a обумовлене не похибками вимірювань, - функція $V(r)$, що є вихідною, це теоретична залежність; S_a обумовлене похибками кусковолінійної апроксимації даної залежності для побудови $a(r)$. Визначимо середню відносну похибку, що виникла внаслідок такої апроксимації:

$$\delta a(r) = \frac{S_a}{\bar{a}} = \frac{0,282}{\sum a_i} \cdot n = \frac{0,282}{21,96} \cdot 11 = 0,14, \text{ тобто } 14\%.$$

Як видно, похибка є невеликою, тобто вихідну гіпотезу вважатимемо за вірну. Тому знову повертаємось до залежності $V(r)$, що отримана аналітичним шляхом без врахування впливу магнітного поля на рух електронів.

Її можна використати наступним чином. Відомо, що $\vec{B} \perp \vec{V}$, силові лінії перпендикулярні до площини руху, тож запишемо:

$$\frac{m \cdot V^2}{R} = q \cdot V \cdot B \Rightarrow \frac{V}{R} = \omega = \frac{q \cdot B}{m} \quad - \text{ кутова швидкість обертання вектора}$$

швидкості (миттєва).

Як видно, ω залежить тільки від індукції B та питомого заряду електрона, тобто можна вважати:

$$\omega = C_B, \text{ але } \omega \approx \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}, \quad a \approx \frac{\Delta r}{V_r},$$

де під Δr , як і раніше, вважаємо крок в радіальному напрямі, а V_r - радіальна компонента швидкості на даному кроці. Враховуємо також, що наявність

магнітного поля не впливає на модуль V , тобто залежність $V(r)$ можна атоматично інтегрувати як залежність модуля $V(r)$ – еквіпотенціальні поверхні електричного поля в циліндричному асиметричному конденсаторі – аксіальні циліндричні поверхні, тобто потенціал φ – функція тільки від r . Інакше кажучи, зберігаючи свій модуль у відповідності з наведеним графіком $V(r)$, за наявності магнітного поля вектор швидкості електрона буде провертатися під час руху від катода до анода, тобто радіальна компонента швидкості буде, очевидно, менша за V , а ця різниця між V_r та V зростатиме по мірі наближення електрона до аноду. Опишемо цю ситуацію наближено, у вигляді крокової процедури, використовуючи інтервали Δr – кроки вздовж радіуса. Вважатимемо швидкість електрона в межах кожного інтервалу сталою та запишемо:

$$\Delta\varphi = \frac{C_B \cdot \Delta r}{V_r} \text{ - нульовий крок;}$$

$$\Delta\varphi_1 = \frac{C_B \cdot \Delta r}{V_1} \text{ - перший крок;}$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{C_B \cdot \Delta r}{V_2 \cdot \cos \Delta\varphi_1} \text{ - другий крок;}$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{C_B \cdot \Delta r}{V_3 \cdot \cos(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2)} \text{ - третій крок;}$$

$$\Delta\varphi_n = \frac{C_B \cdot \Delta r}{V_n \cdot \cos \sum_1^{n-1} \Delta\varphi_i} .$$

Таким чином, визначаючи суму всіх $\Delta\varphi_i$ для деякого значення C_B можна знайти кінцевий кут відхилення вектора \vec{V} перед потраплянням електрона на анод від радіального напрямку. Вектор V_n на останньому кроці можна розкласти на нормальну та тангенціальну компоненти, причому:

$$V_n = V_R = V_n \cdot \cos \sum \Delta\varphi_i ;$$

$$V_\tau = V_n \cdot \sin \sum \Delta\varphi_i .$$

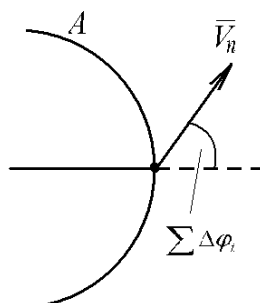


Рис. 2.22

Вважатимемо, що анодний струм визначається саме радіальною компонентою V_R , а V_τ відносить електрони вбік (суто обертовий рух).

Зрозуміло, насправді в цьому разі відбувалось би постійне накопичення в між електродному просторі цих "віднесених" електронів, що мало призвести до створення об'ємного заряду спотворення розподілу напруженості, потенціалу в радіальному напрямі і розв'язання задачі за врахування цього значне ускладнилось б (в ідеальному варіанті саме так і варто було б зробити). Ми будемо ігнорувати реальне накопичення об'ємного заряду та обумовлене цим накопиченням спотворення радіального розподілу електричного поля, та будемо просто вважати, що магнітне поле немовби зменшує радіальну компоненту швидкості електронів, що призводить до зменшення анодного струму $I_a = q \cdot n \cdot \vec{V} \cdot \vec{S}$, де S , завжди дорівнює $\vec{S} = S \cdot \vec{n}_S$, тобто:

$$\vec{V} \cdot \vec{n}_S = V_n = V_R, \text{ або } I_a = q \cdot n \cdot S \cdot V_R \quad (S - \text{площа поверхні анода}).$$

Зробимо оцінку некоректності такого припущення, хоч теоретично. Проведемо оцінку концентрації електронів в міжелектродному просторі (в середньому):

$$n \approx \frac{I_a}{q \cdot S \cdot V} \approx \frac{10 \cdot 10^{-3}}{10^{-19} \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} \approx 10^{15} \text{ м}^{-3} \approx (10^9 \text{ см}^{-3}),$$

тобто відстань між електронами:

$$l = \left(\frac{1}{n} \right)^{1/3} \approx 10^{-5} \text{ м} (10^{-3} \text{ см}).$$

Визначимо, чи можна вважати такий газ ідеальним. Знайдемо енергію взаємодії:

$$U = \frac{q^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot l} \approx \frac{10^{-38}}{10 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-5}} \approx 10^{-23} \text{ Дж}.$$

$$E_k = \frac{m \cdot V^2}{2} \approx 10^{-30} \cdot 10^{12} \approx 10^{-18} \text{ Дж}.$$

Таким чином енергія руху на 5 порядків вища за потенціальну, значить наше припущення можна вважати за прийнятне.

Т. ч. для розрахунків $\Delta\varphi_n$ потрібні точні значення V_i . Визначимо їх спочатку точно за розрахунковою формулою (таблиця, що наведена на початку задачі має дещо свідомо спотворені дані):

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m} \cdot \left(1 - \frac{\ln\left(\frac{R_a}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_a}{R_k}\right)} \right)}.$$

Вважатимемо:

$$\ln \frac{R_a}{R_k} = \ln \frac{10 \text{ мм}}{1 \text{ мм}} = \ln 10 = 2,3; \quad U = 100 \text{ В};$$

$$\sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot U}{m}} = 5,93 \cdot 10^6 \text{ м/с}; \quad r' - \text{відстань від катода}.$$

Таблиця 2.11

$r, \text{мм}$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$r', \text{мм}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$V10^6 \text{м/с}$	2,48	3,25	3,74	4,1	4,37	4,6	4,79	4,96

$r, \text{мм}$	5,5	6,0	6,5	7,0	8,0	9,0	10,0
$r', \text{мм}$	4,5	5,0	5,5	6,0	7,0	8,0	9,0
$V10^6 \text{м/с}$	5,1	5,23	5,35	5,45	5,64	5,79	5,93

Визначимо тепер B_i :

Таблиця 2.12

$I_c, \text{А}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2
$B_i, 10^{-3} \text{Тл}$	3,74	7,48	11,2	14,96	18,7	22,44	26,18	29,82	33,66	37,4

де

$$B_i = \mu_0 \frac{N}{l} I_i ;$$

$$\mu_0 \frac{N}{l} I_i = 4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{2,5 \cdot 10^3}{16,8 \cdot 10^{-2}} = 1,87 \cdot 10^{-2} .$$

Зробимо тепер розрахунок траєкторії для:

$$C_{B_i} = \frac{q}{m} \cdot B_i = 3,74 \cdot 10^{-3} \cdot 1,76 \cdot 10^{11} = 6,58 \cdot 10^8 .$$

Для спрощення візьмемо крок l_{mm} і будемо відраховувати r від катода:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{6,58 \cdot 10^8 \cdot 10^{-3}}{3,25 \cdot 10^6} = 0,2 ;$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{4,6 \cdot 0,94} = 0,15 ;$$

$$\Delta\varphi_2 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{4,1 \cdot 0,98} = 0,16 ;$$

$$\Delta\varphi_4 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{4,96 \cdot 0,87} = 0,15 ;$$

$$\Delta\varphi_5 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,23 \cdot 0,79} = 0,16 ;$$

$$\Delta\varphi_6 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,45 \cdot 0,68} = 0,17 ;$$

$$\Delta\varphi_7 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,64 \cdot 0,55} = 0,21 ;$$

$$\Delta\varphi_8 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,79 \cdot 0,363} = 0,3 ;$$

$$\Delta\varphi_9 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,93 \cdot 0,07} = 1,5 .$$

Очевидно, що навіть при початковому значенні струму $0,2\text{А}$, величина $\sum_1^8 \Delta\varphi_i \approx 1,5 \text{рад} \approx 85^\circ$, тобто на останніх кроках така модель вже не адекватна,

хоч взагалі вона і не дуже погана – можна відкинути два-три останні кроки та від слідкувати залежність V_{R6} або V_{R7} від B (B лінійно залежить від I) та співставити з вихідним графіком $I_a(I_c)$. З іншого боку, видно, що поблизу катода кути повороту невеликі, обертова компонента, відповідно, відносно мала – рух має головним чином радіальний характер. З наближенням до аноду утворюється вихрове ущільнення з електронів, що обертаються, їх концентрація зростає, відповідно, об'ємний заряд суттєво спотворює радіальний розподіл електричного поля і, відповідно, біляанодний "хвіст" $V(r)$, що розраховується за наведеною формулою. Цей шар об'ємного заряду

екранує поле анода і дещо підторможує електрони на інтервалі "катод - шар" та прискорює в інтервалі "шар - анод". Т.ч. $V(r)$ реально є, очевидно, більш лінійною, тобто менш інтенсивно зростає на початку і більш інтенсивно, ніж розрахункова, зростає наприкінці, поблизу анода. Більш за те, змінювання B призводить до змінювання об'ємного заряду, а воно, в свою чергу, змінює нахил $V(r)$, що майже усуває очікуваний ефект зникнення анодного струму.

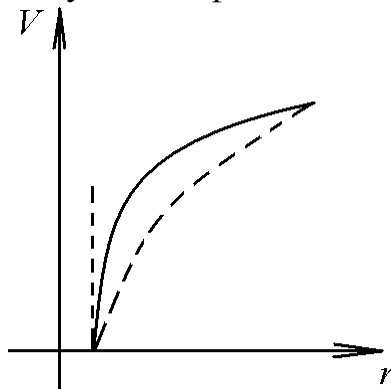


Рис.2.23

Відтак, обмежимося, наприклад, $\Delta\varphi_6$ та відслідкуємо як на цьому кроці, який і будемо вважати за останній, змінюватиметься V_{R6} за змінюванням B . Знайдемо C_{B_2} :

$$C_{B_2} = 7,48 \cdot 10^{-3} \cdot 1,76 \cdot 10^{11} = 13,16 \cdot 10^8,$$

відтак:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{13,16 \cdot 10^8 \cdot 1 \cdot 10^{-3}}{3,25 \cdot 10^6} = 0,4; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{13,16 \cdot 10^{-1}}{4,1 \cdot 0,92} = 0,34;$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{13,16 \cdot 10^{-1}}{4,6 \cdot 0,74} = 0,38; \quad \Delta\varphi_4 = \frac{13,16 \cdot 10^{-1}}{4,96 \cdot 0,44} = 0,6$$

$\sum_1^4 \Delta\varphi_i$ вже сягає 90° , тобто для B_2 швидкість V_R обертається на нуль.

Очевидно, такий найпростіший чисельний експеримент дозволяє стверджувати наступне. За відсутності магнітного поля траєкторії електронів суто радіальні. За малих значень B об'ємний заряд виникає в прианодній області і поступово розповсюджується до катода при збільшенні магнітного поля B . Наявність цього заряду суттєво спотворює радіальний розподіл швидкості і потребує врахування у використовуваних моделях. Крім того, очевидно, що такої розбіжності з експериментом, що спостерігається, модель дати не може, тому що фізичний механізм досить коректний, а наявність об'ємного заряду не може, за оцінками, привести до такої розбіжності між моделлю та експериментом. Зрозуміло, що скоріше за все має місце неточність у вихідних даних, причому похибки у вимірюванні струмів, довжині соленоїда та т. і., до такої розбіжності призвести не можуть. Похибка може полягати в значеннях величин R_a та R_k – вони взяті досить наближено – електроди знаходяться в середині вакуумного балона і для достатньо точних вимірювань, його треба розбити, що не завжди можливо. З цієї причини

проведемо ще один чисельний експеримент з метою визначення впливу цих розмірів на кінцевий результат. Припустимо, наприклад, що $R_k=1\text{мм}$; $R_a=5\text{мм}$ (в інструкції, наприклад, зробили помилку і замість радіуса вказали діаметр).

Знайдемо радіальний розподіл швидкості за відомою формулою:

Таблиця 2.13.

$r, \text{мм}$	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$r', \text{мм}$	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
$V, 10^6 \text{м/с}$	2,96	3,88	4,46	4,89	5,23	5,5	5,73	5,93

Візьмемо те, що і раніше значення $C_{B1}=6,58 \cdot 10^8$ і для радіального кроку $0,5\text{мм}$ отримаємо:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{2,96} = 0,11; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{3,88 \cdot 0,994} = 0,085;$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{4,46 \cdot 0,98} = 0,075; \quad \Delta\varphi_4 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{4,89 \cdot 0,964} = 0,069;$$

$$\Delta\varphi_5 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{5,23 \cdot 0,943} = 0,066; \quad \Delta\varphi_6 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{5,5 \cdot 0,92} = 0,065;$$

$$\Delta\varphi_7 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{5,73 \cdot 0,891} = 0,064; \quad \Delta\varphi_8 = \frac{3,29 \cdot 10^{-1}}{5,93 \cdot 0,86} = 0,064;$$

$\Sigma\Delta\varphi_i=34^0$; $\cos\Sigma\Delta\varphi_i=0,83$ – результуюче відхилення траєкторії електронів від радіального напрямку невелике – 34^0 . Це дещо краще збігається з результатами вимірювань.

Візьмемо тепер $C_{B2}=13,16 \cdot 10^8$, відтак:

$$\Delta\varphi_1 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{2,96} = 0,22; \quad \Delta\varphi_2 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{3,88 \cdot 0,976} = 0,17;$$

$$\Delta\varphi_3 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{4,46 \cdot 0,925} = 0,16; \quad \Delta\varphi_4 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{4,89 \cdot 0,853} = 0,157;$$

$$\Delta\varphi_5 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,23 \cdot 0,765} = 0,16; \quad \Delta\varphi_6 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,5 \cdot 0,725} = 0,16;$$

$$\Delta\varphi_7 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,73 \cdot 0,52} = 0,22; \quad \Delta\varphi_8 = \frac{6,58 \cdot 10^{-1}}{5,93 \cdot 0,32} = 0,36;$$

$\Sigma\Delta\varphi_i$ вже складає 90^0 , тобто має відбуватися зникнення анодного струму що насправді не спостерігається. Звідси висновки - розміри електродів дійсно значно впливають на результати розрахунків. Чисельній варіації піддали R_a , але у величині R_k помилитись набагато легше, наприклад R_k дорівнює не 1мм , а $0,5\text{мм}$. Розрахунок дає, що в цьому разі на відстані $0,5\text{мм}$ від катода швидкість електронів буде вже не $2,96 \cdot 10^6 \text{м/с}$, а $3,25 \cdot 10^6 \text{м/с}$, тобто всі останні значення теж зміняться. Відтак, для повного з'ясування ситуації, необхідно знати принаймні точні розміри та конфігурацію електродів магнетрона. Але, мабуть, не варто очікувати будь-яких принципово інших результатів – все одно модель дає надто велику розбіжність з експериментом.

Звичайно, аналізуючи результати експериментів намагаються висунути кілька гіпотез. В іншому разі існує велика ймовірність помилитися. Наприклад, в даній ситуації можна говорити, що уточнення розмірів та конфігурації електродів навряд-чи принципово змінить результати розрахунків, більше того, попередні чисельні експерименти доводять, що анодний струм із збільшенням B спадає дуже різко (для B_1 він майже максимальний, а для B_2 практично дорівнює нулю), тобто діапазон повного зниження I_a від максимального значення до нуля відповідає змінюванні сили струму у соленоїді від $0,2A$ до $0,4A$, в той час, як це відбувається в інтервалі $0,2A \dots 2,0A$. З іншого боку, лишилося відкритим питання, куди подіти “закручені” електрони. Недоцільно вважати, немов би вони постійно накопичуються в між електродному просторі. В стаціонарному режимі потік електронів від катоду має дорівнювати потоку електронів на анод при даному об’ємі на конфігурації утвореного об’ємного заряду. Т. ч. можна припустити, що об’ємний заряд виникає спочатку в біляанодній області за невеликих значень B розповсюджується до катода із збільшенням B . Ефективне значення анодної напруги U за цих умов зменшується - анод все менше впливає на катод (електричне екранування об’ємним зарядом). Анодний струм лампи зменшується у відповідності з її анодною характеристикою $I_a(U_a)$, тобто можна говорити, що закручування електронів магнітним полем – лише проміжний етап, що призводить до створення B – залежного об’ємного заряду, а той, а свою чергу впливає на анодний струм лампи. З’ясовується, що треба знати анодну характеристику лампи, але приблизно можна вважати, що у ламп такого типу, анодний струм майже лінійно зменшується із зменшенням анодної напруги. Дійсно, $I_a(I_c)$ майже лінійна, і ми доходимо дещо несподіваного висновку, що механізм спадання I_a зовсім не такий, як це вважалось спочатку. Об’єднаємо тепер обидві гіпотези. Чисельний експеримент добре показав початок утворення об’ємного заряду (циліндричного шару) та характер його просування до катоду при збільшенні магнітної індукції. При великих значеннях r , тобто в межах шару об’ємного заряду модель вже не працює. Можна припустити, те що в дійсності електрони до аноду постачаються, головним чином, з цього шару, тобто виникає немовби розщеплення на два етапи. Перший, дошаровий – наведена розрахункова модель працює. Другий, шаровий – напруга між шаром і анодом велика і сприяє збільшенню радіальної швидкості електронів, завбаченої моделлю, тобто шар створює радіальний розподіл потенціала таким чином, що поблизу анода радіальна швидкість електронів змінюється повільно і сягає нуля лише асимптотично, тому що не потрапляння електронів на анод автоматично призводить до накопичення зарядів шару, збільшення напруги між шаром та анодом і, як наслідок, збільшення радіальної швидкості електронів. Т. ч. начебто простий і принципово зрозумілий ефект обертання електронів в магнітному полі та відповідне зникнення струму за т. з. $B_{кр}$. виявляється насправді повністю ускладненим. Можна взагалі казати, що цей ефект дуже уповільнюється накопиченням об’ємного заряду з електронів, який виникає внаслідок самого ефекту.

Відтак, коректне розв'язання задачі, як показав аналіз результатів експерименту, збігається до спільного розв'язання рівнянь динаміки та рівняння Пуассона (диф. рівняння II-го порядку, що описує розподіл потенціалу у просторі з розподіленим зарядом), а також рівняння ВАХ застосованої електронної лампи. Зрозуміло подібну задачу доцільно розв'язувати алгоритмічними методами.

Контрольні запитання до розділу 2

1. Що таке критеріальні залежності? Наведіть приклади.
2. Яким чином будуються критеріальні комплекси?
3. Із чого звичайно складається вимірювальна система (аналоговий та цифровий варіанти)
4. Яким чином можна планувати інтервали між експериментальними даними?
5. Які існують методи перевірки вихідної гіпотези, що стосуються результату непрямих вимірювань?
6. Наведіть прості приклади перевірки початкової гіпотези за допомогою методу лінеаризації ?
7. Які плани вимірювань існують?
8. В чому полягає план двофакторного експерименту?
9. Яким чином розрізняються відносні похибки при адитивному та мультиплікативному зв'язку вимірювальних величин?
10. Яким чином будується графік експериментальної залежності за допомогою МНК в лінійному наближенні?
11. Як пов'язані між собою ступінь полінома та вигляд експериментальної функції, при застосуванні МНК?
12. Що таке Кореляційний зв'язок, таблиця кореляції, поле кореляції?
13. Чим принципово відрізняються побудови експериментального графіку за допомогою МНК та апроксимації поліномами?
14. Чим відрізняються між собою методи апроксимації функцій за допомогою поліномів Лагранжа та Ньютона?
15. В чому полягає зміст перетворення Фур'є (пряме та зворотне).
16. В чому полягає подібність та відмінність δ -функції та δ -подібної функції?
17. Поясніть зміст поняття спектральна густина в перетворенні Фур'є?
18. Яким чином оптимізувати точність обчислення?

Проаналізуйте процес формування фізичної моделі явища за допомогою обробки експериментальних даних на прикладі задачі про магнетрон.

Розділ 3

АКТИВНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

3.1. Загальні положення

Досі, по замовченню, розглядався т. з. пасивний експеримент, за якого отримують готове поле або таблицю кореляції, на основі яких можна більш-менш точно встановити зв'язок між цікавлячими величинами. Припустимо, що такого поля ще не існує і його треба одержати, причому оптимальним чином. Вважатимемо, що на цікавлячу нас величину впливає багато факторів, їхні зв'язки з цією величиною маловідомі. Для з'ясування цих зв'язків буде потрібна велика кількість експериментів:

$$N = \prod_{i=1}^q (P_i), \quad (3.1)$$

де: q – кількість факторів, P_i – кількість значень, що може приймати i -ий фактор (кількість вимірювань для i -го фактора). Причому це без врахування дублювання, повторення вимірювань. З другого боку, проблема взагалі може і не полягатиме у визначенні зв'язків. Наприклад, треба підібрати таке сполучення значень факторів, аби цікавляча нас величина отримала оптимальне (мінімальне, максимальне) значення, тобто маємо задачу на екстремум. Прямий перебір всіх варіантів є коштовним, тривалим і не завжди можливим. В цьому разі вдаються до оптимального планування експерименту. Його суть - в проведенні невеликого експерименту – малої серії вимірювань, побудуванні на базі цих даних лінійної моделі, визначенні подальших дій. Далі планується наступний крок, задається нова невелика серія вимірювань. Якщо параметр оптимізації дійсно змінюється в потрібний нам бік, значить ми на вірному шляху. Все повторюється доки таке крокування призводить до змінювання параметра в бік оптимізації. Проілюструємо ситуацію графічно, будемо вважати, що $z=f(x,y)$ - цікавлячий нас параметр оптимізації. Зобразимо лінії рівня $z=const$.

Для того, аби "зійти" на верхівку K , найкоротшим шляхом, очевидно, треба просуватися вздовж градієнта $\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \vec{n}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \vec{n}_y$, тобто вектора, що знаходиться в площині XOY та орієнтованого по нормалі до ліній рівня. Інтенсивність змінювання z вздовж будь-якого іншого напрямку буде менша. Наприклад, вздовж ізоповерхні (в нашому випадку ізолінії) вона дорівнюватиме нулю за умовою $z=const$, а вздовж будь-якого іншого напрямку \vec{e} .

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \vec{e} \cdot \text{grad } z - \text{проекція градієнта на напрям } \vec{e}.$$

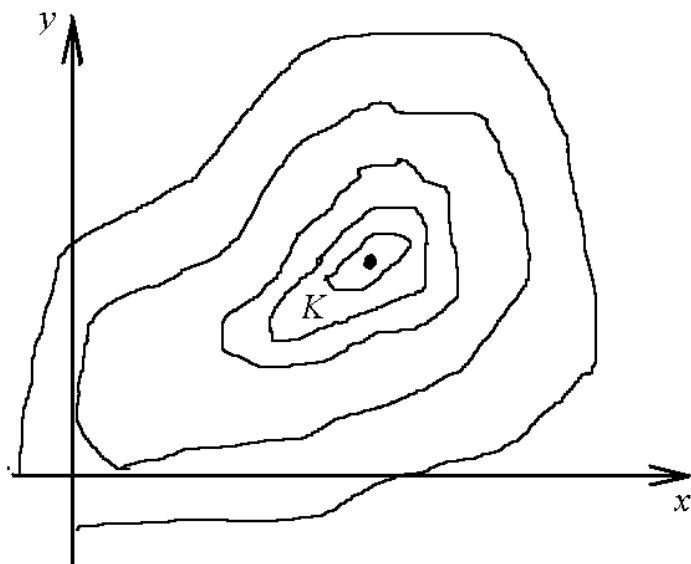


Рис.3.1 Графік ізолій Z-рівня

Реально можна собі уявити варіацію x при фіксованому y_0 , вихід на частинний максимум і фіксація цього значення x_1 . Далі варіація y при цьому значення x_1 та знаходження y_1 також для частинного, але вже більшого максимуму. Як видно, $f(x_1, y_1)$ вже досить близька до точки K - «верхівки». Це і є метод Гауса. Він дуже чутливий до вибору вихідної точки (y_0) і взагалі малопридатний в тому разі, якщо ізолії дуже відрізняються від плавних кривих кола, еліпса, тощо (наявність багатьох локальних екстремумів).

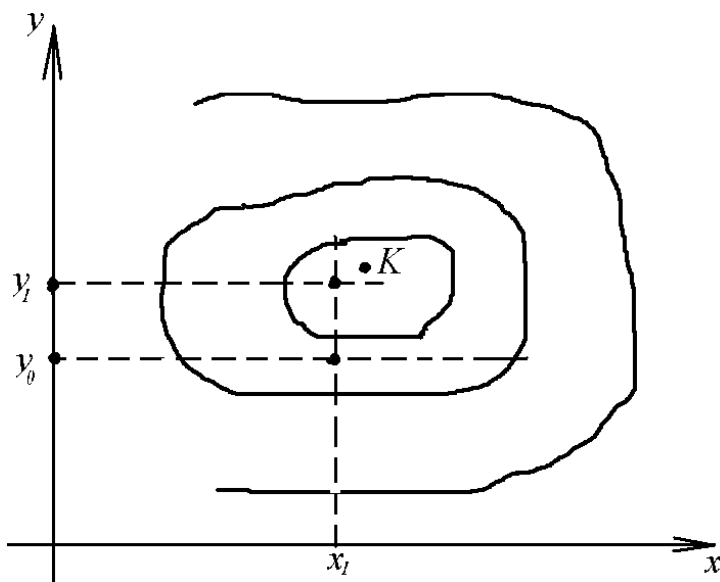


Рис.3.2 Ілюстрація методу Гауса

Інколи ситуація ускладнюється тим, що x та y неможливо змінювати незалежно одне від одного, тобто вони, наприклад, пов'язані залежністю $F(x, y) = h$, тобто "рухатися" ми маємо тільки вздовж лінії (L).

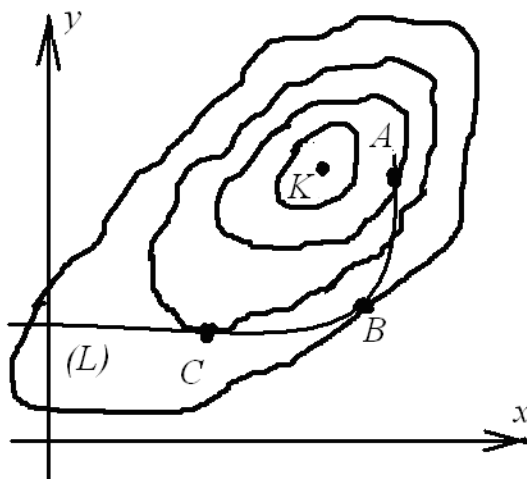


Рис.3.3 Ускладнений метод Гауса

Як видно, в точці B маємо умовний мінімум а в точці A - умовний максимум. Згадаємо, що задачі на умовний екстремум збігаються до розв'язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x + \lambda \cdot F'_x = 0 \\ f'_y + \lambda \cdot F'_y = 0, \\ F(x, y) = h \end{cases} \quad (3.2)$$

де: x, y, λ - невідомі; λ - множник Лагранжа, що має зміст швидкості змінювання значення умовного екстремуму за змінюванням h , тобто $\frac{\partial z_{ext}}{\partial h} = -\lambda$, тобто вказує на скільки залежне екстремальне значення z_{ext} від умови зв'язку («крутизна схилу» в області точки A).

3.2. Фізичне моделювання

Особистий різновид фізичного експерименту, як вже зазначалося раніше, є фізичне натурне моделювання, тобто проведення експерименту та отримання результатів на моделі, інтерпретація цих результатів для об'єкта. Цей тип експерименту безпосередньо використовує π - теорему. Сформуємо її у загальному вигляді. Будемо вважати, що деяка функція, що описує фізичне явище є:

$$Q = F(Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots, Q_n), \quad (3.3)$$

причому, вигляд F не залежить від вибору одиниць вимірювання; $Q_1 \dots Q_k$ - незалежні розмірності; $Q_{k+1} \dots Q_n$ можна виразити через розмірності перших k аргументів. Формули розмірностей мають вигляд поліномів:

Наприклад, обидва рівняння описують течії різних середовищ в трубах різного діаметру. Параметри середовищ є різні, швидкості також різні і т.д., але в обох випадках описуються саме течії. Зрозуміло, що і друге рівняння можна привести до вигляду:

$$\pi' = F \left(\pi'_1 \dots \pi'_{n-k} \right) \quad (3.6)$$

Очевидно, якщо $\pi_i = \pi'_i$, то $\pi = \pi'$, тобто рівність чисельних значень баз є умовою фізичної подібності явищ. В цьому разі компоненти баз називають критеріями подібності. Коефіцієнти подібності тоді визначаються як:

$$K = \frac{Q'}{Q}; \quad K_{k+1} = \frac{Q'_{k+1}}{Q_{k+1}} \dots K_{n-k} = \frac{Q'_n}{Q_n}, \quad (3.7)$$

але

$$\left. \begin{aligned} Q &= \pi \cdot Q_1^{a_1} \cdot Q_2^{a_2} \dots Q_k^{a_k} \\ Q' &= \pi' \cdot Q_1^{a_1} \cdot Q_2^{a_2} \dots Q_k^{a_k} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \pi = \pi' \xrightarrow{K} \frac{Q'}{Q} = K_1^{a_1} \cdot K_2^{a_2} \dots K_k^{a_k}. \quad (3.8)$$

Відношення з індексами від 1 до K за визначенням дорівнюють одиниці, далі:

$$\frac{Q'_{k+1}}{Q_{k+1}} = K_1^{b_1} \cdot K_2^{b_2} \dots K_k^{b_k};$$

.....

$$K_{n-k} = K_1^{c_1} \cdot K_2^{c_2} \dots K_k^{c_k}.$$

Таким чином, якщо відомі коефіцієнти подібності для визначальних k - параметрів, то можна визначити, також, коефіцієнти для всіх останніх $n-k$ змінних.

Задача 3.1. Необхідно оцінити на моделі опір, що виникає при течії мастильної рідини вздовж довгого горизонтального каналу з круглим перерізом. Для цього вимірюють перепад тиску на одинці довжини каналу $\Delta P/l$. Визначальними параметрами є такі: діаметр кола, середня за витратою швидкості рідини V , густина рідини ρ , її в'язкість μ .

$$\left[\frac{\Delta P}{l} \right] = L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2}; \quad [V] = L; \quad [\rho] = L^{-3} \cdot M; \quad [\mu] = L \cdot T^{-1}; \quad [\mu] = L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} - \text{тут,}$$

як і завжди: L – розмірність довжини; M – маси; T – часу. Відтак, $\kappa=3$; $n=4$. Тобто в рівнянні спочатку має бути 5 розмірних величин ($\Delta P/l$ виражається через 4 параметри). У відповідності із π – теоремою ця залежність може бути записаною у вигляді: $\pi = F \left(\pi_1 \right)$, $n-k=4-3=1$.

$$\left\{ \text{Вихідне рівняння } \frac{\Delta P}{l} = F \left(\rho, \mu, V \right) \right\}$$

Виберемо d , ρ , V як Q_1 , Q_2 , Q_3 ; μ – як Q_4 , відтак:

$$\pi = \frac{\Delta P}{l \cdot d^{a_1} \cdot \rho^{a_2} \cdot V^{a_3}} - \text{безрозмірна величина,}$$

тобто:

$$\left[\frac{\Delta P}{l} \right] = [V]^{a_1} \cdot [\rho]^{a_2} \cdot [V]^{a_3};$$

$$L^{-2} \cdot M \cdot T^{-2} = L^{a_1} \cdot L^{-3a_2} \cdot M^{a_2} \cdot L^{a_3} \cdot T^{-a_3};$$

по

$$L: -2 = a_1 - 3a_2 + a_3;$$

$$M: 1 = a_2;$$

$$T: -2 = -a_3;$$

$$-2 = a_1 - 3 + 2 \Rightarrow a_1 = -1, \text{ тобто, } \pi = \frac{\Delta P \cdot d}{l \cdot \rho \cdot V^2};$$

$$\pi = \frac{\mu}{d^{b_1} \cdot \rho^{b_2} \cdot V^{b_3}} \Rightarrow \mu \bar{=} l^{-b_1} \cdot \rho^{b_2} \cdot V^{b_3};$$

$$L^{-1} \cdot M \cdot T^{-1} = L^{b_1} \cdot L^{-3b_2} \cdot M^{b_2} \cdot L^{b_3} \cdot T^{-b_3};$$

$$L: -1 = b_1 - 3b_2 + b_3;$$

$$M: 1 = b_2;$$

$$T: -1 = -b_3;$$

$$-1 = b_1 - 3 + 1 \Rightarrow b_1 = 1, \text{ тобто, } \pi = \frac{\mu}{\rho \cdot V \cdot d};$$

або

$$\pi_1 = \frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}.$$

Нарешті визначили:

$$\frac{\Delta P \cdot d}{l \cdot \rho \cdot V^2} = F\left(\frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}\right).$$

Умова подібності набуває вигляду:

$$\frac{\Delta P \cdot d}{l \cdot \rho \cdot V^2} = \frac{\Delta P' \cdot d'}{l' \cdot \rho' \cdot V'^2}; \quad \frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu} = \frac{\rho' \cdot V' \cdot d'}{\mu'}.$$

Коефіцієнт подібності:

$$K = \frac{\frac{\Delta P'}{l'}}{\frac{\Delta P}{l}} = K_d^{-1} \cdot K_\rho^1 \cdot K_V^2, \quad K_\mu = K_d \cdot K_\rho \cdot K_V.$$

В даному разі коефіцієнт подібності K дає відношення величини опору на моделі до величини опору на реальному об'єкті (натурі).

$$K_d^{-1} = \left(\frac{d'}{d}\right)^{-1}; \quad K_\rho^1 = \left(\frac{\rho'}{\rho}\right); \quad K_V^2 = \left(\frac{V'}{V}\right)^2; \quad \text{і т. ін.}$$

Припустимо, що замість мастильної рідини на моделі зручніше використовувати звичайну воду:

$$K_\mu = \frac{\mu_{H_2O}|_{t=20^\circ}}{\mu_{m.p.}|_{t=60^\circ}} = 0,079; \quad K_\rho = \frac{\rho_{H_2O}|_{t=20^\circ}}{\rho_{m.p.}|_{t=60^\circ}} = 1,15.$$

Тепер можна визначити:

$$K_d \cdot K_V = \frac{K_\mu}{K_\rho} = 0,0687.$$

Припустимо, що на моделі діаметр каналу d' в 5 разів менший, ніж на об'єкті, тобто:

$$K_d = \left(\frac{d'}{d} \right) = 0,2$$

Відтак, для додержання швидкості води на моделі має відповідати:

$$K_v = \frac{V'}{V} = \frac{0,0687}{0,2} = 0,344, \text{ тобто швидкість води має бути приблизно в три рази}$$

менша, ніж швидкість мастильної рідини в умовах об'єкта. Відтак, K_d ; K_p ; K_v – відомі. Лишається виміряти на моделі перепад тиску $\Delta P'/l'$ та визначити прогноз з приводу $\Delta P/l$:

$$\frac{\Delta P}{l} = \frac{\Delta P'/l'}{K_d^{-1} \cdot K_p \cdot K_v^2} = 1,47 \cdot \frac{\Delta P'}{l'}, \text{ тобто питомий перепад тиску на моделі треба}$$

просто помножити на 1,47 аби отримати перепад тиску на натурному об'єкті. Звичайно, модель роблять виходячи з міркувань простоти та економії. Насправді, за даних умов (головним чином за рахунок зменшення діаметра каналу в 5 разів) масова витрата води на моделі набагато менша за витрату мастила на натурному об'єкті:

$$\frac{m'}{m} = \frac{\rho' \cdot d'^2 \cdot V'}{\rho \cdot d^2 \cdot V} = \left\{ \frac{\pi}{4} - \text{скорочеться} \right\} = K_d^2 \cdot K_p \cdot K_v = 0,0158, \text{ тобто більше ніж у 60}$$

разів.

Зазначимо, що далі у разі додержання подібності за всіма критеріями у відповідності з π – теоремою, моделювання називають повним. Це вдається не завжди за різних обставин. Наприклад, в наведеній вище задачі варто було б піддати моделюванню жорсткість стінок каналів. Інколи вимоги щодо збереження K_d K_v за малих значень d призводять до надто великих значень швидкості і т. ін. часто на практиці додержуються подібності тільки за найбільш вагомими критеріями – тобто застосовують часткове моделювання. Закони, що описують ті чи інші фізичні явища також часто записують у критеріальному вигляді (через критерії подібності), що набагато спрощує моделювання відповідних явищ. В наведеній задачі критеріальний запис має вигляд: $\frac{\Delta P \cdot d}{l \cdot \rho \cdot V^2} = F\left(\frac{\rho \cdot V \cdot d}{\mu}\right)$ - лишається тільки конкретизувати вид функції F , наприклад $F = \sqrt{\quad}$, або дещо в цьому роді.

3.3. Експеримент в погано організованих системах. Лінійна кореляція

Найбільш простим видом зв'язку між величинами є функціональна залежність, тобто закон відображення однієї множини на другу, наприклад, зв'язок між P та V за умови $T = const$. Якщо ж змінюються всі три параметри, то користуються функцією декількох змінних. Але існують зв'язки між фізичними величинами, що їх не можна віднести до типу функціональних, наприклад, зв'язок між опадами та врожаєм, інтерпретування результатів такого, здавалося б, досконало дослідженого явища, як емісійний спектральний аналіз, і т. ін. Як правило, подібні ситуації виникають при експериментальних дослідженнях дифузних систем, - погано організованих

систем (ПОС), в таких системах неможливо встановити "непроникні перегородки", що розмежують дію факторів різної фізичної природи - не працює принцип суперпозиції "у великому". В цьому разі описування базується звичайно на багатовимірній математичній статистиці і дослідник свідомо відмовляється від чіткого розмежування всіх складним чином переплутаних фізичних, хімічних та ін. процесів - природа сама такого розмежування не робить взагалі. За цих умов поняття закону узагальнюється в поняття моделі. Формально, кожному значенню однієї величини відповідає не одна, а деяка множина значень іншої величини. Розсіювання цих можливих значень пояснюється впливом великої кількості додаткових факторів, які дослідник свідомо ігнорує, аби визначити зв'язок між двома (або більше) цікавлячими величинами. Найчастіше обмежуються досліджуванням змінювання середніх параметрів однієї величини за змінюванням іншої. Тобто можна стверджувати наступне. Кожному значенню x_i відповідає певне середнє значення \bar{y}_i і такий зв'язок вже є певною мірою функціональним. Одразу зазначимо, що міркувати можна і в зворотному порядку, тобто, кожному y_i спів ставляти \bar{x}_i і отримувати вже не $\bar{y}_i(x_i)$, а $\bar{x}_i(y_i)$. Можна показати на прикладі, що ці квазіфункціональні залежності, в загальному випадку, не одне й те ж саме.

Описування подібних ситуацій призводить до поняття кореляції: дві випадкові величини ζ та η знаходяться в кореляційному зв'язку, якщо кожному значенню будь-якої з цих величин відповідає певний розподіл ймовірностей другої величини. Зазначені розподіли ймовірностей є умовними.

Стосовно аналізу результатів та планування самого експерименту в ПОС розглянемо найбільш поширений і простий алгоритм операцій. Для аналізу лінійної кореляції між двома величинами ζ та η виконують ряд незалежних вимірювань, результатом кожного з яких є пара значень $\langle \zeta_i; y_i \rangle$. Отримані пари $\langle \zeta_1; y_1 \rangle, \langle \zeta_2; y_2 \rangle, \dots, \langle \zeta_n; y_n \rangle$ розглядаються як випадкова вибірка з усіх можливих значень величини (ζ, η) . Використовують наступні наближені формули:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n}; \quad (3.9)$$

$$S_1^2 = \frac{\sum \langle x - \bar{x} \rangle^2}{n-1}; \quad S_2^2 = \frac{\sum \langle y - \bar{y} \rangle^2}{n-1}; \quad (3.10)$$

$$\overline{\langle x - \bar{x} \rangle \langle y - \bar{y} \rangle} = \frac{\sum \langle x - \bar{x} \rangle \langle y - \bar{y} \rangle}{n-1}; \quad (3.11)$$

$$r_n = \frac{\sum \langle x - \bar{x} \rangle \langle y - \bar{y} \rangle}{(n-1) \cdot S_1 \cdot S_2} - \text{вибірковий коефіцієнт кореляції}; \quad (3.12)$$

$$y - \bar{y} = r_n \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \langle x - \bar{x} \rangle - \text{вибіркова пряма регресії } \eta \text{ на } \zeta; \quad (3.13)$$

$$x - \bar{x} = r_n \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdot \langle y - \bar{y} \rangle - \text{вибіркова пряма регресії } \zeta \text{ на } \eta; \quad (3.14)$$

$$r_n \cdot \frac{S_2}{S_1} \text{ та } r_n \cdot \frac{S_1}{S_2} - \text{вибіркові коефіцієнти регресії.} \quad (3.15)$$

Можна показати, що побудовані за таким методом вибіркові прямі регресії мають властивість мінімальності суми квадратів відхилень значень y_i від прямої регресії, або x_i від зворотної. За наведеними формулами можна проводити обробку результатів безпосередньо, якщо підрахувати відповідні суми. Але звичайно, для спрощення розрахунків виконують попереднє лінійне перетворення x та y відбираючи зручний початок відліку x_0 та y_0 і масштабні коефіцієнти h_1 та h_2 ($h_1, h_2 > 0$).

Відтак:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{x - x_0}{h_1} \Rightarrow x = x_0 + h_1 \cdot u \\ v &= \frac{y - y_0}{h_2} \Rightarrow y = y_0 + h_2 \cdot v \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

u та v – нові змінні

$$\bar{x} = x_0 + h_1 \cdot \bar{u}, \text{ де } \bar{u} = \frac{\sum u}{n}; \quad (3.17)$$

$$\bar{y} = y_0 + h_2 \cdot \bar{v}, \text{ де } \bar{v} = \frac{\sum v}{n}; \quad (3.18)$$

$$S_1 = h_1 \cdot \sqrt{\frac{\sum u^2 - n \bar{u}^2}{n-1}}; \quad S_2 = h_2 \cdot \sqrt{\frac{\sum v^2 - n \bar{v}^2}{n-1}}; \quad (3.19)$$

$$r_n = \frac{\sum u_i \cdot v_i - n \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}}{\sqrt{\sum u^2 - n \bar{u}^2} \cdot \sqrt{\sum v^2 - n \bar{v}^2}}$$

Задача 3.2 Виконати розрахунок кореляції в лінійному наближенні по даним експерименту:

Таблиця 3.1

x	23,0	24,0	24,5	24,5	25,0	25,5	26,0
y	0,48	0,50	0,49	0,50	0,51	0,52	0,49
Частота m	2	4	3	2	1	1	2

x	26,0	26,0	26,5	26,5	27,0	27,0	28,0
y	0,51	0,53	0,5	0,52	0,54	0,52	0,53
Частота m	1	2	1	1	2	1	3

$\sum m_i = n = 26$ вимірювань (пар x та y)

Виберемо $x_0=26$; $h_1=0,5$; $y_0=0,5$; $h_2=0,01$.

Міркування вибору – звичайно x_0 та y_0 вибирають поблизу центрів симетрії вибірок, масштабні коефіцієнти балансують відповідні міркування – змінювання x на 0,5 відповідає змінюванню y на 0,01. В цьому разі:

$$u = \frac{x - 26,0}{0,5}; \quad v = \frac{y - 0,5}{0,01}.$$

Складаємо таблицю для Σu ; Σu^2 ; Σv ; Σv^2 ; $\Sigma u \cdot v$, причому, кожний доданок в сумах враховуємо стільки разів, скільки він зустрічається у виборці (доданок помножуємо на відповідне значення m).

Таблиця 3.2

x	y	m	u	$u \cdot m$	$u^2 \cdot m$	v	$v \cdot m$	$v^2 \cdot m$	$u \cdot v \cdot m$
23,0	0,48	2	-6	-12	72	-2	-4	8	24
24,0	0,50	4	-4	-16	64	0	0	0	0
24,5	0,49	3	-3	-9	27	-1	-3	3	9
24,5	0,50	2	-3	-6	18	0	0	0	0
25,0	0,51	1	-2	-2	4	1	1	1	-2
25,5	0,52	1	-1	-1	1	2	2	4	-2
26,0	0,49	2	0	0	0	-1	-2	2	0
26,0	0,51	1	0	0	0	1	1	1	0
26,0	0,53	2	0	0	0	3	6	18	0
26,5	0,5	1	1	1	1	0	0	0	0
26,5	0,52	1	1	1	1	2	2	4	2
27,0	0,54	2	2	4	8	4	8	32	16
27,0	0,52	1	2	2	4	2	2	4	4
28,0	0,53	3	4	12	48	3	9	27	36
		$\Sigma m = 26$		$\Sigma u \cdot m = -26$	$\Sigma u^2 \cdot m = 248$		$\Sigma v \cdot m = 22$	$\Sigma v^2 \cdot m = 104$	$\Sigma u \cdot v \cdot m = 87$

Далі розрахуємо:

$$\bar{u} = \frac{-26}{26} = -1; \quad \bar{x} = 26,0 + 0,5(-1) = 25,5$$

$$S_1 = 0,5 \cdot \sqrt{\frac{248 - 26 \cdot (-1)^2}{25}} = 1,49;$$

$$\bar{v} = \frac{22}{26} = 0,846; \quad \bar{y} = 0,50 + 0,01 \cdot 0,846 = 0,50846;$$

$$S_2 = 0,01 \cdot \sqrt{\frac{104 - 26 \cdot (0,846)^2}{25}} = 0,0185;$$

$$r_n = \frac{87 - 26(-1) \cdot 0,846}{\sqrt{248 - 26} \cdot \sqrt{104 - 18,6}} = \frac{109,0}{14,90 \cdot 9,24} = 0,793.$$

Відтак, рівняння прямих регресії:

$$y - 0,508 = 0,793 \cdot \frac{0,0185}{1,49} (x - 25,5) = 0,098 \cdot (x - 25,5);$$

$$x - 25,5 = 0,793 \cdot \frac{1,49}{0,0185} \cdot (y - 0,508) = 64 \cdot (y - 0,508).$$

Будуємо тепер відповідний графік:

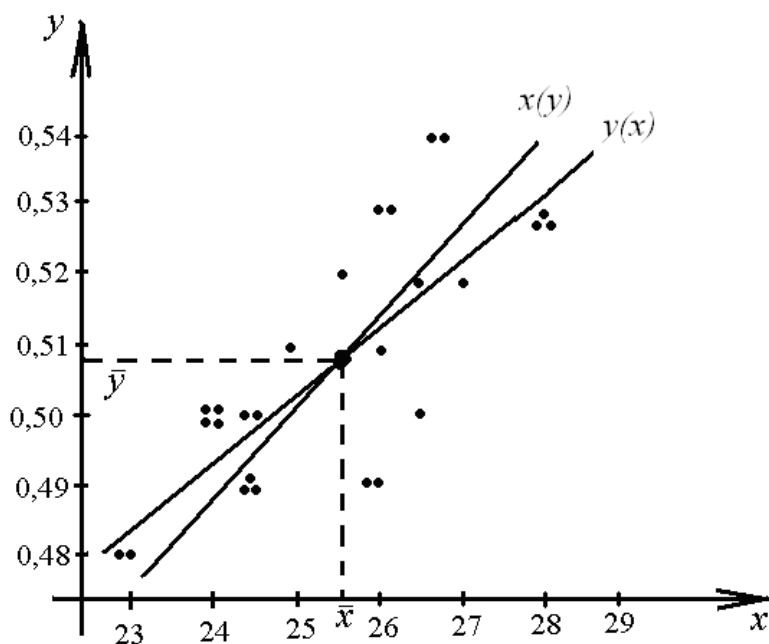


Рис. 3.4

Для проведення прямих достатньо знайти по одній точці для кожної, друга точка для обох – це є $\bar{x}; \bar{y}$. Для $y(x)$, наприклад, знаходимо $(23; 0,483)$; для $x(y)$ – $(23; 0,469)$.

Дуже корисною є таблиця для оцінки надійності кореляційного зв'язку:

Таблиця 3.3.

n	10	12	14	16	18	20	30	40	50	70	100
$\rho=0,99$	2,29	2,35	2,39	2,41	2,43	2,45	2,49	2,51	2,53	2,541	2,553
$\rho=0,999$	2,62	2,73	2,81	2,87	2,92	2,96	3,07	3,13	3,16	3,198	3,226

В цій таблиці наведені значення $\sqrt{n-1} \cdot |r_n|$ для вказаних надійностей (довірочних ймовірностей) P .

Наприклад, для розглядової задачі визначаємо:

$$n = 26; \quad r_n = 0,793 \Rightarrow \sqrt{n-1} \cdot |r_n| = 3,96.$$

Знаходимо в таблиці число на перетині $n=30$ та $\rho=0,999$. Воно дорівнює 3,07. Можемо стверджувати, що надійність кореляційного зв'язку в нашому випадку перевищує 0,999 ($3,96 > 3,07$).

Зазначимо, також, що пряма регресії η на ξ , тобто $y(x)$ завжди має менший кут нахилу до осі x , ніж пряма регресії ξ на η , тобто $x(y)$. Причому, чим більший $|r_n|$ до одиниці, тим різниця в кутах нахилу менша і вони з'єднуються за умови $|r_n|=1$ – чисто функціональна залежність. Якщо кореляція відсутня, то $r_n=0$, а прямі регресії описуються рівняннями: $y = \bar{y}$; $x = \bar{x}$, тобто виявляються взаємно перпендикулярними. Звичайно умова $r_n=0$ ще не свідчить за незалежність величин ξ та η . Їх в цьому разі називають

некорельованими. Зворотнє твердження є вїрним – коефіцієнт кореляції двох незалежних випадкових величин дорівнює нулю.

Контрольні запитання до розділу 3

1. В чому полягає суть методу Гауса?
2. Яким чином будується графік ізоліній рівня в методі Гауса?
3. Яким чином реалізується метод Гауса у практиці вимірювань?
4. В чому полягає ускладнення методі Гауса?
5. Сформулюйте π -теорему.
6. В чому полягає сутність фізичного моделювання?
7. Назвіть умови подібності при фізичному моделюванні.
8. В чому полягає зміст поняття «погано організованих систем»?
9. Яким чином розраховується кореляція в лінійному наближенні ?
10. Як розташовані пряма та зворотня лінії регресії ?
Що означає випадок, коли пряма та зворотня лінія регресії майже збігаються, взаємо перпендикулярні?

Розділ 4

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕНТІВ ЯКОСТІ ТЕХНІЧНИХ ПРИБОРІВ ТА СИСТЕМ

4.1. Загальні відомості

Більшість експериментальних задач в техніці технології формують як задачі екстремальні: визначення оптимальних умов процесу, оптимального складу композиції і т. ін., завдяки оптимальному розташуванню точок на факторному просторі і лінійному перетворенню координат вдається подолати недоліки класичного регресійного аналізу, зокрема, кореляцію між коефіцієнтами регресії.

Процес дослідження звичайно розбивається на окремі етапи. Інформація, одержана після кожного етапу, визначає стратегію експерименту. Таким чином виникає можливість оптимального керування експериментом. При плануванні по схемі повного факторного експерименту (ПФЕ) реалізуються всі можливі комбінації факторів на всіх вибраних для дослідження рівнях. ПФЕ дозволяє одержувати кількісні оцінки основних ефектів і ефектів взаємодії. Ефекти, що цікавлять, визначаються з меншою похибкою, ніж при традиційних методах дослідження. Застосування ПФЕ значно підвищує ефективність експерименту.

Мета експерименту – відшукування оптимальних режимів функціонування багатфакторних об'єктів. Проведення таких експериментів полягає в реалізації деякої обчислювальної схеми визначення екстремумів невідомої функції відгуку на заданій множині точок факторного простору.

У загальному випадку функція відгуку є багатоекстремальною. У ній розглядаються процеси, залежні від багатьох чинників, в умовах, коли механізм цих процесів невідомий. У такому разі природно вдатися до представлення результатів спостережень поліноміальною моделлю. Щоб уникнути необхідності використання поліномів високого порядку, розробили кроковий метод вивчення поверхні відгуку, що нагадує ітераційний метод розв'язання задач обчислювальної математики. Дослідник спочатку ставить невелику серію дробових факторних експериментів (ДФЕ) для локального опису малої ділянки поверхні відгуку поліномом першого ступеня. Потім, використовуючи рівняння першого ступеня, знаходять напрям для руху по поверхні відгуку в самому “крутому” напрямі – напрямі градієнта лінійного наближення. Якщо одного лінійного наближення виявляється недосить, то ставлять нову серію дослідів і знаходять новий напрям для руху по поверхні відгуку. Такий кроковий процес продовжується доти поки дослідник не визначить майже стаціонарну область, в якій лінійне наближення виявляється вже неможливим, так, що поверхня відгуку описується поліномом другого, а іноді третього порядку. При такому підході до розв'язання задач оптимізації досягається висока концентрація дослідів в тій частині поверхні відгуків, яка переважно цікавить дослідника.

Якщо математична модель не адекватна даним експерименту, то необхідно перейти до складнішої форми рівняння регресії або зменшити інтервал варіювання факторів в експерименті. Наприклад, якщо неадекватна лінійна модель, то слід лінійний поліном доповнити, ввівши в нього члени, відповідні ефектам взаємодії. Проте при цьому потрібна реалізація декількох дослідів усередині області планування для перевірки гіпотези про адекватність. Якщо модель другого порядку також не адекватна, то доводиться застосовувати ротатабельне планування третього порядку, яке тут не розглядається унаслідок його зайвої громіздкості. Ротатабельне планування третього порядку вимагає проведення порівняно великого числа дослідів, а аналіз відповідної поверхні досить складний. Тому в тих випадках, коли виникає питання про необхідність отримання моделі третього порядку, рекомендується вивчити можливість зниження порядку полінома шляхом перетворення незалежних змінних або параметрів оптимізації.

4.2. Оптимізація параметрів напівпровідникового терморегулятора

Дослідження пристрою у разі застосування методів планування експерименту здійснюється по добре відпрацьованій схемі (плану). На вхід пристрою (“чорного ящика”) подають збудливі вхідні сигнали, що імітують досліджувані режими роботи пристрою, а на виході пристрою реєструють сигнали відгуків, як його реакцію на збудливі вхідні сигнали. Дослідник управляє експериментом по наперед відомому плану, задає і контролює рівні вхідних сигналів, здійснює контроль вихідних сигналів, проводить аналіз результатів експерименту і уточнює його план.

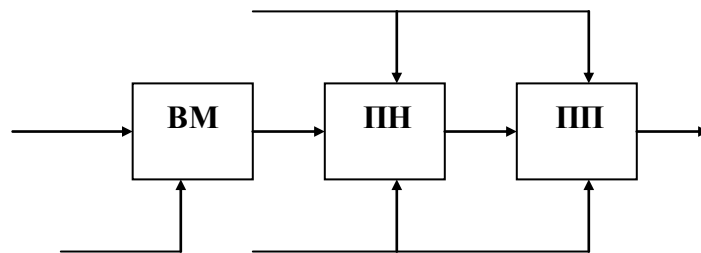


Рис.4.1 Структурна схема терморегулятора

Для роботи технічних систем часто доводиться підтримувати температуру в заданих межах. Пристрої, які виконують ці функції, називаються терморегуляторами. Принцип роботи напівпровідникового терморегулятора полягає в наступному. При рівності температури в зоні розташування датчика температури з опорною (контрольною) температурою вимірювальний міст ВМ збалансований, і напруга на виході моста і терморегулятора рівна нулю ($U_{вих}=0$) (рис.4.1). При відхиленні температури повітряного середовища в зоні розташування датчика температури від встановленої (опорної) настає розбалансування вимірювального моста. Напруга розбалансу, пропорційна різниці температур між опорною і

вимірюваною, поступає на вхід підсилювача напруги ПН, потім на крайовий підсилювач потужності ПП, навантаження якого є виконавчий пристрій – регулятор температури.

Як незалежні змінні, що впливають на роботу терморегулятора, взяті узагальнені параметри: напруга живлення вимірювального моста U_m ; напруга живлення терморегулятора U_n ; температура повітряного середовища в зоні датчика температури t і опір навантаження терморегулятора R_n . Як параметр оптимізації вибрана напруга на виході терморегулятора $U_{вих}$.

Мета експерименту, що проводиться, – відшукування оптимальних параметрів терморегулятора і режимів його роботи, при яких забезпечується висока чутливість до розбалансу ВМ при високих рівнях зовнішніх перешкод.

Для побудови залежностей $U_{вих}=f(U_m, U_n, t, R_n)$ і $y=f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ використано планування типу 2₄. Рівні і інтервали варіювання змінних приведені в табл.4.1, а матриця планування і результати експерименту – в табл.4.2 (досліди 1 – 16).

Таблиця 4.1

Незалежні змінні	Рівні варіювання			Інтервали варіювання ΔU_i
	-1	0	+1	
U_m, B	1	3,5	6	2,5
U_n, B	10	13	16	3
$t, ^\circ C$	20	25	30	5
$R_n, кОм$	1,1	3,1	5,1	2

Примітка. У таблиці прийняті наступні позначення: 0 – основний рівень; +1 – верхній рівень; -1 – нижній рівень.

Таблиця 4.2

Номер досліду	x_1	x_2	x_3	x_4	- y	\hat{y}	Номер досліду	x_1	x_2	x_3	x_4	- y	\hat{y}
1	-1	-1	-1	-1	3,88	4,18	17	-2	0	0	0	4,94	5,28
2	+1	-1	-1	-1	6,14	6,15	18	+2	0	0	0	8,08	7,83
3	-1	+1	-1	-1	7,37	7,27	19	0	0	0	0	3,06	3,59
4	+1	+1	-1	-1	7,88	7,96	20	0	-2	0	0	8,02	7,65
5	-1	-1	+1	-1	5,53	5,43	21	0	+2	-2	0	6,23	6,50
6	+1	-1	+1	-1	7,30	7,29	22	0	0	+2	0	7,96	8,07
7	-1	+1	+1	-1	7,87	7,87	23	0	0	0	-2	7,65	7,61
8	+1	+1	+1	-1	7,93	8,06	24	0	0	0	0	7,87	7,93
9	-1	-1	-1	+1	4,32	4,13	25	0	0	0	+2	7,74	7,77
10	+1	-1	-1	+1	6,55	6,50	26	0	0	0	0	7,79	7,77
11	-1	+1	-1	+1	7,48	7,41	27	0	0	0	0	7,80	7,77
12	+1	+1	-1	+1	8,03	8,10	28	0	0	0	0	7,77	7,77
13	-1	-1	+1	+1	5,77	5,61	29	0	0	0	0	7,72	7,77
14	+1	-1	+1	+1	7,39	7,46	30	0	0	0	0	7,71	7,77
15	-1	+1	+1	+1	7,88	7,84	31	0	0	0	0	7,73	7,77
16	+1	+1	+1	+1	7,97	8,02							

В результаті проведення експерименту і обробки експериментальної інформації [1–3], одержане наступне рівняння:

$$\bar{y} = 6,537 + 1,547x_1 + 0,123x_2 + 1,746x_3 + 0,066x_4 - 0,926x_1x_2 - 0,982x_1x_3 - 0,112x_2x_3 - 0,037x_3x_4, \quad (4.1)$$

де $x_1 = (U_m - 3,5)/2,5$; $x_2 = (U_n - 13)/3$; $x_3 = (t - 2,5)/5$; $x_4 = (R_n - 3)/2$.

Оцінка значущості коефіцієнтів показала, що всі коефіцієнти при невідомих різні, тобто значно відрізняються їх значення. Це свідчить про те, що центр експерименту вибраний невірно. Цю версію підтверджує розв'язок рівнянь (4.2) по змінним x_i :

$$\begin{aligned} 1,547 - 0,926x_2 - 0,982x_3 &= 0; \\ 0,123 - 0,926x_1 - 0,112x_3 &= 0; \\ 1,746 - 0,982x_1 - 0,112x_2 - 0,037x_4 &= 0; \\ 0,066 - 0,037x_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де розв'язок системи $x_{15} = 0,077$; $x_{25} = -0,164$; $x_{35} = 1,73$; $x_{45} = 4,97$.

Координати центру експерименту мають великий розкид (дуже далекі від точки з координатами $(0;0)$). Тому після уточнення центру експерименту (уточнення основних рівнів для змінних) і зміни інтервалу варіювання змінних проведена друга серія дослідів з використанням центрального композиційного ротатбельного планування (ЦКРП) другого порядку.

Рівні і інтервали варіювання незалежних змінних в новій серії дослідів приведені в табл.3, а матриця планування і результати експерименту – в табл.4.2 (досліди 17–31).

Таблиця 4.3

Незалежні змінні	Рівні варіювання					Інтервали варіювання ΔU_i
	-2	-1	0	+1	+2	
U_m, B	1	2	3	4	5	1
U_n, B	14	12	10	8	6	2
$t, ^\circ C$	17	18	19	20	21	1
$R_n, кОм$	1	2	3	4	5	1

Примітка. У таблиці 4.2 прийняті наступні позначення: 0 – основний рівень; +1 – верхній рівень; -1 – нижній рівень; +2 – максимальне значення незалежної змінної; -2 – мінімальне значення незалежної змінної.

Після обробки експериментальної інформації і розрахунків коефіцієнтів регресій [1–3] одержана математична модель терморегулятора наступного виду:

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 7,7664 + 0,6375x_1 + 1,0117x_2 + 0,3925x_3 + 0,0796x_4 - 0,4188x_1x_2 - \\ & - 0,1275x_1x_3 - 0,0088x_1x_4 - 0,2613x_2x_3 - 0,0525x_2x_4 - 0,0438x_3x_4 - \\ & - 0,3020x_1^2 - 0,5387x_2^2 - 0,1255x_3^2 - 0,0174x_4^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Обчислення помилки у визначенні коефіцієнтів регресії [1-3] показала, що всі коефіцієнти в рівнянні (4.3), крім b_{14} і b_{44} значущі. Тому одержуємо математичну модель терморегулятора в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{y} = & 7,7664 + 0,6375x_1 + 1,0117x_2 + 0,3825x_3 + 0,0796x_4 - 0,4188x_1x_2 - \\ & - 0,1275x_1x_3 - 0,2613x_2x_3 - 0,0525x_2x_4 - 0,0438x_3x_4 - \\ & - 0,302x_1^2 - 0,0538x_2^2 - 0,1255x_3^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Перевірка [1-3] показала, що $F_{on}=2,47$; $F_{0,95}=4,22$ ($F_{on} < F_{0,95}$), тобто рівняння (4.4) адекватно моделі другого порядку.

Рівняння (4.4) служить основою для аналізу функціонування терморегулятора і оптимізації його параметрів. Покажемо рішення цієї задачі детальніше. Після диференціювання рівняння (4.4) по x_i одержимо:

$$\begin{aligned} & 0,6395 - 0,4188x_2 - 0,1275x_3 - 0,604x_1 = 0; \\ & 1,0117 - 0,4188x_1 - 0,2613x_3 - 0,0525x_4 - 1,0774x_2 = 0; \\ & 0,3925 - 0,1275x_1 - 0,2613x_2 - 0,0438x_4 - 0,241x_3 = 0; \\ & 0,0796 - 0,0525x_2 - 0,043x_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Вирішимо систему рівнянь (4.5) для центру експерименту: $x_{15}=0,5690$; $x_{25}=0,5306$; $x_{35}=0,5616$; $x_{45}=1,0477$; $y_5=8,3822$, або в іменованій формі [1-3]: $U_M=2,437B$; $U_n=8,939B$; $t=18,438^\circ C$; $R_n=1,952k\Omega$. Із аналізу рівняння (4.4) видно, що найбільший вплив на вихідний параметр терморегулятора надає параметр x_2 , а найменше – параметр x_4 , оскільки коефіцієнт регресії при ньому найменший. Для детальнішого дослідження впливу кожної із змінних x_i на вихідний параметр y_i побудуємо залежність $y_i=f(x_i)$ при фіксованих значеннях решти змінних x_{i+1} в центрі експерименту (рис. 4.2). Одержані криві для y_1, y_2, y_3 є набір парабол типу $y_i=B_0+B_2 \cdot x_i^2+B_1 \cdot x_i$ з вершинами в точці центру експерименту, а для y_4 - пряму, що проходить через цей центр експерименту:

$$\begin{aligned} y_1 &= 7,7664 + 0,6375x_1 - 0,3020x_1^2 & (\text{при } x_2=x_3=x_4=0) \\ y_2 &= 7,7664 + 1,0117x_2 - 0,5387x_2^2 & (\text{при } x_1=x_3=x_4=0) \\ y_3 &= 7,7664 + 0,3825x_3 - 0,1255x_3^2 & (\text{при } x_1=x_2=x_4=0) \\ y_4 &= 7,7664 + 0,0796x_4 & (\text{при } x_1=x_2=x_3=0). \end{aligned}$$

Задавши величину y , по графіках можна визначити оптимальні значення незалежних змінних i , навпаки, задаючись значеннями x_i можна визначити оптимальну величину y_{opt} . Крім того, по графіках можна встановити робочий діапазон терморегулятора, визначити параметри вимірювального моста, знайти чутливість підсилювача напруги і вихідну потужність підсилювача.

При розв'язку рівняння і визначенні для побудови графіків залежностей $y_i=f(x_i)$ рівняння (4.4) по черзі вводилися в пам'ять ЕОМ, задавалися значення змінних x_i і кроки визначення точок графіка. Машина видавала значення

вихідного параметра при різних значеннях змінних, починаючи з $x_i=0$, через встановлений інтервал (крок).

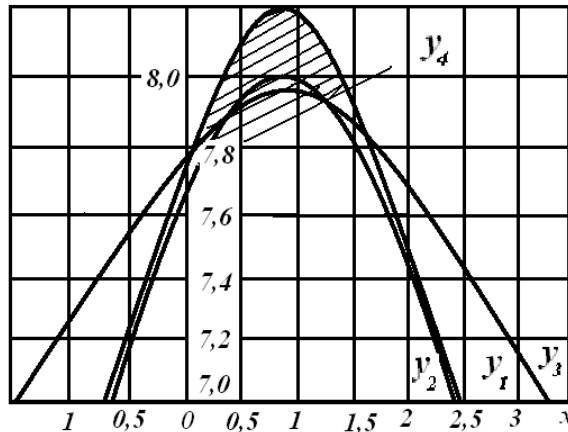


Рис. 4.2 Графік функції $y_i=f(x_i)$ для вибору зони стійкої роботи терморегулятора

Оптимальні значення параметрів y_i і x_i знаходяться всередині заштрихованої області (рис.4.2): $x_1=0...1,8$; $x_2=0...1,8$; $x_3=0...1,6$; $x_4=0...1,8$; $y=7,8...8,2$, або в натуральній (іменованій) формі: $U_m=3...4,8B$; $U_n=6,4...10B$; $t=19...20,8$; $R_n=3...4,8кОм$.

4.3. Оптимізація параметрів формувача синхронізуючих імпульсів.

Формувач імпульсів включає наступні елементи (рис.4.3):

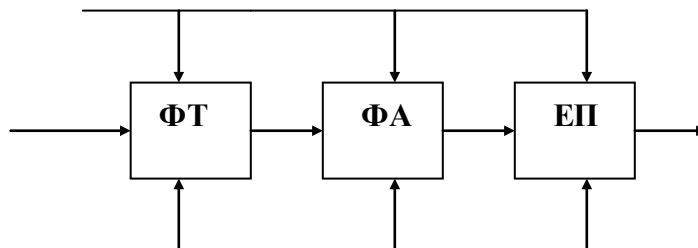


Рис.4.3 Структурна схема формувача синхронізуючих імпульсів.

формував імпульсів по тривалості ФТ, формував імпульсів по амплітуді ФА і еміттерний повторювач ЕП. Як незалежні змінні вибрані U_1 – напруга живлення колекторних ланцюгів; U_2 - напруга зсуву і U_3 – вхідний сигнал (синхронізуючі імпульси, а як функція y – вихідна напруга пристрою). Задача полягає в тому, щоб одержати максимальну амплітуду вихідного сигналу з мінімальними спотвореннями, а також вибрати найкращі режими роботи пристрою.

Поставлену задачу доцільно вирішити в два етапи: на першому – провести досліди з метою отримання математичної моделі досліджуваного

пристрою; на другому – здійснити пошуки оптимальних значень його параметрів.

На першому етапі спочатку застосовується планування типу 2^3 (ПФЕ для трьох чинників). Після реалізації матриці планування, розрахунок коефіцієнта регресії [1–3] і оцінки їх значущості [1–3] одержано рівняння регресії у вигляді наступного полінома:

$$\bar{y} = 19,13 + 0,0116x_1 + 0,007x_2 + 0,004x_3 + 0,0074x_1x_2 - 0,006x_1x_3, \quad (4.6)$$

де $x_1 = (U_1 - 35)/1,5$; $x_2 = (U_2 + 5)/0,8$; $x_3 = (U_3 + 6)/0,6$.

Проте проведена перевірка показала, що це рівняння не є адекватним. Подальший його аналіз дозволив зробити висновок, що невірно були вибрані центр експерименту (нормальні значення параметрів) і рівні варіювання незалежних змінних. Тому була поставлена нова серія дослідів в плані ЦКРП другого порядку з метою отримання нового рівняння. Значення незалежних змінних, їх рівні і інтервали варіювання приведені в табл.4.4.

Таблиця 4.4

Незалежні змінні	Рівні варіювання					Інтервали варіювання ΔU_i
	-1,68	-1	0	1	+1,68	
U_1, B	33	34	35,5	37	38,47	1,5
U_2, B	-3,65	-4,2	-5	-5,8	-6,35	0,8
U_3, B	5	5,4	6	6,6	7	0,6

Примітка. У таблиці прийняті наступні позначення: 0 – основний рівень; +1 – нижній рівень; +1,68 – максимальне значення незалежної змінної; -1,68 – мінімальне значення незалежної змінної.

Розрахунок коефіцієнтів регресії [1–3] дав наступні результати:

$$b_0 = 19,136; \quad b_1 = 0,084; \quad b_2 = -0,0179; \quad b_3 = 0,0325; \quad b_{12} = 0,1036; \\ b_{23} = 0,00325; \quad b_{13} = -0,0803; \quad b_{11} = -0,05; \quad b_{22} = -0,0329; \quad b_{33} = 0,00659.$$

Довірчі інтервали для коефіцієнтів регресії з 95%-ною вірогідністю, $\Delta b_0 = t_S\{b_0\} = 0,037$; $\Delta b_i = t_S\{b_i\} = 0,0312$; $\Delta b_{ij} = t_S\{b_{ij}\} = 0,08$; $\Delta b_{ii} = t_S\{b_{ii}\} = 0,0606$.

Рівняння регресії пристрою приймає вид:

$$y = 19,13 + 0,084x_1 + 0,0325x_3 + 0,1036x_1x_2 - 0,0803x_1x_3 - 0,0829x_2^2, \quad (4.7)$$

перевірка адекватності одержаної моделі показала, що $F_{on} = 4,2$; $F \cdot 0,95 = 5,05$ ($F_{on} < F \cdot 0,95$) у зв'язку з тим, що $F \cdot 0,95 = 5,05$, гіпотезу про адекватність рівняння (4.7) можна вважати вірною з 95%-ою вірогідністю.

Щоб одержати уявлення про геометричний образ отриманого рівняння і знайти оптимальні значення параметрів (другий етап задачі), доцільно провести канонічне перетворення рівняння. Для цього після диференціювання рівняння (4.7) по змінним x_i і розв'язку системи рівнянь:

$$\begin{aligned} 0,084+0,1036x_2-0,0803x_3=0; \\ 0,1036x_1-0,1638x_2=0; \\ 0,0325-0,0803x_1=0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Знайдемо координати нового центру: $x_{15}=0,8065$; $x_{25}=0,2519$; $x_{35}=1,3658$. Після перенесення початку координат в новий центр і повороту вісей на кут $y=76^\circ 45'$ одержимо наступне канонічне рівняння:

$$\bar{y} \ 19,1751 = -0,0381x_1^2 + 0,0269x_2^2 - 0,0225x^2. \quad (4.9)$$

Досліджувана поверхня відгуку відноситься до типу мінімакса: при русі у напрямі осі X_2 вихідна напруга збільшується, а у напрямі вісей X_1 і X_3 - зменшується. Координати точки з як найкращим значенням вихідного параметра $y=(19,24 \pm 0,61)B$.

В наступні: $x_{01}=1,587$; $x_{02}=1,368$; $x_{03}=0,252$. Цим координатам відповідають значення незалежних змінних $U_1=36,28B$; $U_2=-4,59B$; $U_3=6,18B$. При проведенні дослідження всі розрахунки виконувалися на ЕОМ. Проведені обчислення коефіцієнтів регресії, оцінка їх значущості, перевірка одержаних рівнянь на адекватність, а також знаходження оптимальних значень параметрів пристрою.

4.4. Атестація турбінного витратоміра

Відповідно до плану першого порядку була проведена атестація турбінного витратоміра з метою оцінки одночасного впливу на його систематичну похибку температури навколишнього середовища $T^\circ C$, кута "закручування" потоку вимірюваної рідини φ і кінематичної в'язкості вимірюваної рідини ν .

По технічній документації на витратомір, виходячи з необхідних умов вимірювань, були вибрані наступні діапазони значень впливаючих величин:

T від $-40^\circ C$ до $+40^\circ C$;

φ від 0 до $\frac{\pi}{2}$;

ν від $1 \cdot 10^{-6}$ до $1 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Отже, центри і інтервали варіювання впливаючих величин в процесі експериментів були рівні:

$$C_T = \frac{40 + (-40)}{2} = 0^\circ C; \lambda = \frac{40 - (-40)}{2} = 40^\circ C;$$

$$C_\varphi = \frac{\pi}{4}; \lambda_\varphi = \frac{\pi}{4}; C_\nu = 5,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; \lambda_\nu = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

і кодовані одиниці відповідних величин:

$$Z_T = Z_1 = \frac{T}{40}; Z_\varphi = Z_2 = \frac{a - \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}};$$

$$Z_v = Z_3 = \frac{v - 5,5 \cdot 10^{-6}}{4,5 \cdot 10^{-6}}.$$

Результати експериментів, проведених відповідно до плану і рекомендацій, викладених вище (щодо числа повторних дослідів, рандомізації дослідів і т.ін.), приведені в таблиці 4.5.

Таблиця 4.5

Номер дослідів	Z_1	Z_2	z_3	$z_1 z_2$	$Z_1 Z_3$	$Z_2 Z_3$	$Z_1 Z_2 Z_3$	$\Delta_{y_i}, \%$	$\bar{\Delta}_{y_i}, \%$
1	—	+	+	—	—	+	—	-10; -12; -11	-11,0
2	—	—	—	+	+	+	—	-18; -18; -17	-18,0
3	+	+	—	+	—	—	—	14; 13; 16	14,0
4	—	+	—	—	+	—	+	8,6; 9,1; 9,3	9,0
5	+	—	+	—	+	+	—	-16; -18; -16	-17,0
6	+	+	+	+	+	+	+	-6,2; -6,4; -6,4	-6,4
7	—	—	+	+	—	—	+	-22; -24; -20	-22,0
8	+	—	—	—	—	+	+	8,0; 7,5; 8,5	8,0

Обробляємо результати експериментів по приведеній вище схемі.

1. Визначимо дисперсію дослідів по [1-3]:

$$\delta^2 \mathbf{A}_s \frac{-1}{8 \cdot 2} = [(1+1+0)+(0+0+1)+(0+1+4)+(0,16+0,01+0,09)+ \\ + (1+1+1)+(0,04+0+0)+(0+4+4)+(0+0,25+0,25)] = \frac{19,8}{16} = 1,2$$

(додатки в круглих дужках відповідають відрядковим дисперсіям - дисперсіям кожного досліді, повторені 3 рази).

2. Розраховуємо значення коефіцієнтів інтерполяційної формули [1-3].

Відповідно до [1-3]:

$$g_0 \frac{1}{8} (-11-18+14+9-17-6,4-22+8) = -5,4$$

(додатки в круглих дужках відповідають значенням $\bar{\Delta}_{y_i}$, взятим з останньої граfi таблиці 1);

$$g_1 = [(-1) \cdot (-11) + (-1) \cdot (-18) + (+1) \cdot (+14) + (-1) \cdot (+9) \\ + (+1) \cdot (-17) + (+1) \cdot (-6,4) + (-1) \cdot (-22) + (+1) \cdot (+8)] = 5,8$$

(доданки в квадратних дужках відповідають значенням Δ_{y_i} , в кожному досліді, помноженим на відповідну цьому досліді Z_3);

Аналогічно:

$$g_2 = 6,8; \quad g_3 = -9,7; \quad g_{12} = -2,8; \\ g_{13} = -2,7; \quad g_{23} = -1,4; \quad g_{123} = 2,6.$$

3. Перевіримо значущість коефіцієнтів. По таблиці квантілей розподілу Ст'юдента для числа ступенів свободи $f = N \cdot (n-1) = 8 \cdot 2 = 16$ і вірогідності $P = 0,95$ знайдемо табличний коефіцієнт Ст'юдента $t_T = 2,12$.

Емпіричне відношення $t_0 = \frac{|g_0|}{\delta \bar{A}_s}$ для коефіцієнта g_0 рівне:

$$t_0 = \frac{5,4}{1,1} \approx 5.$$

Оскільки $t_0=5 > t_T=2,12$, коефіцієнт g_0 приймаємо значущим.

Аналогічна перевірка решти коефіцієнтів дає:

g_1 - значим; g_2 - значим; g_3 - значим;
 g_{12} - значим; g_{13} - значим; g_{23} - незначим;
 g_{123} - значим.

Отже, шукана інтерполяційна формула в кодових значеннях впливаючих величин (із значущими коефіцієнтами) має вигляд:

$\Delta_s = -5,4 + 5,8 \cdot Z_1 + 6,8 \cdot Z_2 - 9,7 \cdot Z_3 - 2,8 \cdot Z_1 \cdot Z_2 - 2,7 \cdot Z_1 \cdot Z_3 + 2,6 \cdot Z_1 \cdot Z_2 \cdot Z_3$. Перевіримо адекватність цієї формули одержаним експериментальним даним. Підрахунок значень Δ_{s_i} по інтерполяційній формулі для різних (відповідних приведеним в таблиці 5) значень Z_1, Z_2, Z_3 дає наступні результати (послідовність результатів відповідає послідовності дослідів): -11,2; -17,4; 14,2; 8,0; -17,6; -5,4; -23; 8,6.

Отже, дисперсія відхилення результатів розрахунку (по інтерполяційній формулі) від експериментальних даних рівна:

$$\delta_0^2 = \frac{1}{8-7} [2,2^2 + 0,6^2 + 0,2^2 + 1^2 + 0,6^2 + 1^2 + 1^2 + 0,6^2] = 4,2$$

(додатки в квадратних дужках відповідають $(A_{s_i} - \bar{A}_s)^2$ для кожного i -го дослідів) і дисперсійне відношення:

$$F = \frac{4,2}{1,2} = 3,5$$

Табличне значення критерію Фішера F_T для числа ступенів свободи $f_1=1$; $f_2=16$ і ймовірності $P=0,95$ ($q=0,05$) дорівнює 4,5.

Оскільки $F=3,5 < F_T=4,5$, то прийmemo, що одержана інтерполяційна формула адекватна експериментальним даним.

Використовуючи співвідношення [3] переходимо від інтерполяційної формули в кодованих одиницях до моделі в натуральних значеннях впливаючих величин:

$$\Delta_s = -0.350 + 0.375T + 6.8 \frac{\varphi}{\pi/4} - 2.160 \cdot 10^6 \nu - 0.150T \frac{\varphi}{\pi/4} - 0.030T \nu + 0.014T \frac{\varphi}{\pi/4} \nu.$$

Одержана модель систематичної похибки дозволяє:

- оцінювати характеристики похибки s при випадковій зміні значень впливаючих величин;
- розраховувати поправки до показу приладу при відомих значеннях впливаючих величин;
- визначати такі області значень впливаючих величин, де похибка Δ_s мінімальна внаслідок ефектів взаємодії її складових.

Контрольні запитання до розділу 4

1. Що називають екваторіальним експериментом, повним факторним експериментом?
2. Яким чином визначається неадекватність моделі та об'єкту?
3. В чому полягає метод «чорного ящика»?
4. Яким чином визначають незалежні змінні (приклад терморегулятора)?
5. Що таке центр експерименту, і яким чином він визначається, про що свідчить приклад терморегулятора)?
6. Як використовуються рівняння лінії регресії для аналізу роботи приладу? Яким чином можна оптимізувати рівняння регресії?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зайдель А. Н. Ошибки измерения физических величин. – Л.: «Наука», 1974. – 106 с.
2. Налимов В. В. Теория инженерного эксперимента. – М.: «Наука», 1971. – 200 с.
3. Шенк Х. Теория эксперимента. – М.: «Наука», 1972. – 381 стр.
4. Румшицкий Л. З. Элементы теорий вероятностей. – М.: «Наука», 1966. – 155 с.
5. Румшицкий Л. З. Математическая обработка результатов. – М.: «Наука», 1971. – 192 стр.
6. Налимов В. В. Статические методы планирования экспериментальных экспериментов /Налимов В. В., Чернова Н. А. – М.: «Наука», 1965. – 340 с.
7. Адлер Ю. П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. – М.: «Наука», 1976. – 254 стр.
8. Зедгенидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем / Зедгенидзе И. Г. – М.: «Наука», 1976. – 390 с.
9. Бранд З. Статистические методы анализа наблюдений: пер. с англ. / Бранд З. – М.: «Мир», 1975. – 312 с.
10. Віткін Л. М., Ігнаткін В. У., Литвиненко В. А. Оптимізація параметрів якості технічних пристроїв і систем. Системи озброєння і військова техніка., 2008, №4 (16). 97-102 с.