МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ДНІПРОДЗЕРЖИНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Є. В. Дерець

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

З дисципліни «Вища математика»

Розділ «Комплексні числа»

Для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка»,

денної форми навчання

Затверджено

редакційно-видавничою секцією

науково-методичної ради ДДТУ

___________, протокол №____

/дата/

Дніпродзержинськ

2012

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Розділ «Комплексні числа». Для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка», денної форми навчання / Укладач Є. В. Дерець – Дніпродзержинськ, ДДТУ, 2012. - _____ с.

Укладач:
Є. В. Дерець, доцент, к.ф.м.н.

Відповідальний за випуск:
П. О. Стеблянко, професор, д.ф.м.н.

Рецензент:
О. М. Давидчик, доцент, к.ф.м.н.

Затверджено на засіданні кафедри ВМ
Протокол №___ від «___» ________ 2012

Коротка анотація видання. У конспекті лекцій розглянуто розділ “Комплексні числа” з дисципліни “Вища математика” для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка», денної форми навчання. Наведено основні теоретичні відомості, приклади розв’язання задач та контрольні питання.

§ 1. Комплексні числа та дії над ними

Комплексним числом називають вираз виду $a+bi$, де a та b - дійсні числа, i - уявна одиниця, яка визначається рівністю $i^2=-1$. Комплексні числа часто позначають однією літерою: $z=a+bi$. Число a при цьому називають *дійсною частиною*, а число b - *уявною частиною* комплексного числа $z=a+bi$. Символічно їх позначають так:

$$a=\operatorname{Re} z, \quad b=\operatorname{Im} z.$$

Будь-яке дійсне число можна розглядати як комплексне число, в якого уявна частина дорівнює 0: $a=a+0\cdot i$.

Комплексне число $z=yi$, в якому $\operatorname{Re} z=0$ називають *суто уявним* числом.

Два комплексні числа $z_1=a_1+b_1i$ і $z_2=a_2+b_2i$ називають *рівними* тоді і тільки тоді, коли $a_1=a_2$ та $b_1=b_2$, тобто

$$a_1+b_1i=a_2+b_2i \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=a_2, \\ b_1=b_2. \end{cases}$$

Операції додавання та множення комплексних чисел визначають за наступними формулами:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$,

$(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

Таким чином, дії над комплексними числами виконуються за тими ж правилами, що і дії над двочленами.

Розглянемо кілька прикладів.

1. $(2+i)+(4-3i)=(2+4)+(1-3)i=6-2i$.

2. $3i+(2-i)=(0+2)+(3-1)i=2+2i$.

3. $(-4+2i)\cdot(7+3i)=-4\cdot7+2\cdot7i-4\cdot3i+2\cdot3i^2=-28+14i-12i-6=-34+2i$

4. $i^1=i$

   $i^2=-1$,

   $i^3=i^2\cdot i=-i$,

   $i^4=i^3\cdot i=1$

$$i^5 = i^4 \cdot i = i.$$

Ми бачимо, що величина i^n, де n - деяке натуральне число, може приймати лише чотири значення: i, -1, $-i$ та 1. Для того, щоб обчислити величину i^n, треба представити число n у вигляді $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ або $n = 4k + 3$, де k - натуральне число (інакше кажучи, треба поділити n на 4 з остачею)

$$i^{4k} = \left(i^4\right)^k = 1^k = 1,$$

$$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1,$$

$$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i.$$

Наприклад,

$$i^{191} = i^{4 \cdot 47 + 3} = i^3 = -i;$$

$$i^{100} = i^{4 \cdot 25} = 1.$$

Число $a - bi$ називають *спряженим* до комплексного числа $z = a + bi$ і позначають $\bar{z} = a - bi$. Оскільки $\bar{\bar{z}} = z$, то числа z та $\bar{z}$ називають спряженими одне одного. Сума та добуток спряжених комплексних чисел завжди є дійсним числом. Дійсно, для будь-якого числа $z = a + bi$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a;$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 + (ab - ab)i = a^2 + b^2.$$

Властивості множення та додавання.

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ - комутативність додавання
2. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ - комутативність множення
3. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ - асоціативність додавання
4. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ - асоціативність множення
5. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ - дистрибутивність.

Рівності 1-5 мають місце для довільних комплексних чисел z_1, z_2, z_3.

Означення. *Різницею* чисел z_1 та z_2 називають число z, для якого $z_1 = z + z_2$. При цьому позначають $z = z_1 - z_2$.

Нехай $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, $z = x + yi$, тоді

$a + bi = (x + yi) + (c + di) = (x + c) + (y + d)i$ звідки згідно з означенням рівності двох комплексних чисел одержуємо систему

$$\begin{cases} a = x + c; \\ b = y + d; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - c; \\ y = b - d. \end{cases}$$

Таким чином,

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

Наприклад,

$(7 - 2i) - (5 + i) = (7 - 5) + (-2 - 1)i = 2 - 3i$.

Означення. *Часткою* двох комплексних чисел z_1 та z_2 $(z_2 \neq 0)$ називають комплексне число z, яке задовольняє рівняння $z_1 = z \cdot z_2$. При цьому позначають

$z = \frac{z_1}{z_2}$.

Нехай $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, тоді

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \qquad (1)$$

Формула (1) дозволяє відразу обчислити частку двох комплексних чисел, але користуватись нею досить незручно. При розв'язанні прикладів, як правило, домножують чисельник та знаменник дробу на число, спряжене до знаменника.

Приклад 1.1. Обчислити задані вирази

1. $$\frac{2 - i}{3 + 5i} = \frac{(2 - i)(3 - 5i)}{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \frac{2 \cdot 3 - 1 \cdot 3i - 2 \cdot 5i + 5i^2}{3^2 - (5i)^2} = \frac{(6 - 5) + (-3 - 10)i}{9 + 25} =$$

$$= \frac{1}{34} - \frac{13}{34} i;$$

2. $\frac{1}{i-2}=\frac{1}{-2+i}=\frac{(-2-i)\cdot 1}{(-2+i)(-2-i)}=\frac{-2-i}{4-i^2}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$;

3. $\frac{1}{2+i}-\frac{1}{i-1}=\frac{(i-1)-(2+i)}{(2+i)(i-1)}=\frac{i-1-2-i}{2i+i^2-2-i}=\frac{-3}{-3+i}=\frac{-3(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=$

$=\frac{9+3i}{10}=\frac{9}{10}+\frac{3}{10}i$.

§ 2. Тригонометрична форма комплексного числа.

Виберемо на площині прямокутнику декартову систему координат. Якщо кожному комплексному числу $z=x+yi$ поставити у відповідність точку (x,y) площини xOy, то між множиною всіх комплексних чисел і множиною всіх точок площини буде встановлено взаємно однозначну відповідність. Дійсні числа при цьому зображуються точками осі Ox, а суто уявні числа – точками осі Oy. Тому вісь Ox називають дійсною, а вісь Oy - уявною. Числу $z=0$ відповідає точка $O(0,0)$.

Приклад 2.1. Зобразити на комплексній площині числа $z_1=2+3i$, $z_2=4i$, $z_3=2$, $z_4=-1-2i$.

Розв'язання. Задані числа зображені на рис. 1.

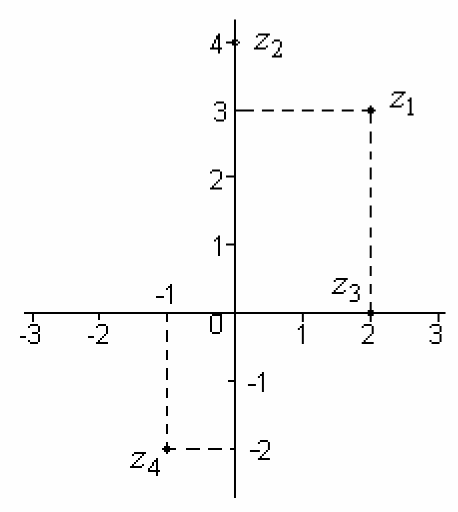

Рисунок 1.

Комплексне число $z = x + yi$ можна також зображати вектором, початок якого знаходиться у точці $(0,0)$, а кінець – в точці (x, y). Такий вектор називають *радіус-вектором* точки (x, y). Довжину радіус-вектора називають *модулем* комплексного числа і позначають $|z|$, або r. Кут φ, який утворює радіус-вектор точки z з додатним напрямком осі Ox, називають *аргументом* комплексного числа і позначають $Arg\, z$: $\varphi = Arg\, z$.

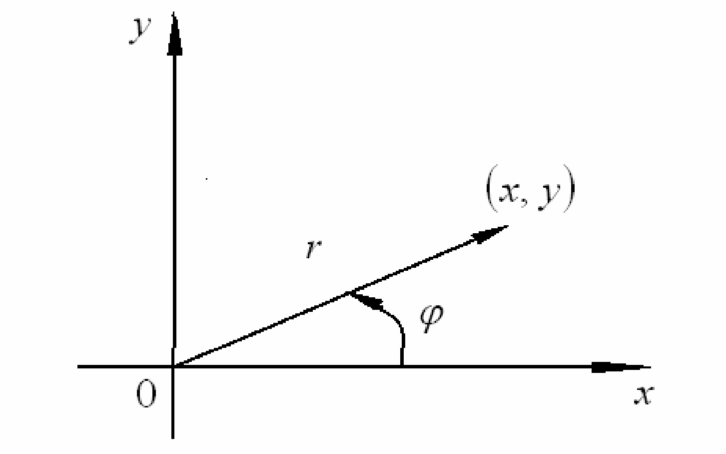

Рисунок 2.

При цьому $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тому $z = x + yi = r\cos\varphi + r\sin\varphi \cdot i$,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Це так звана *тригонометрична форма комплексного числа*. Кожне комплексне число має модуль, причому $0 \le |z| < +\infty$, $|z| = 0$, тоді і тільки тоді, коли $z = 0$. Аргумент числа $z = 0$ невизначений, а для всіх інших комплексних чисел аргумент визначається не однозначно, а з точністю до сталого доданку виду $2\pi k$, де $k \in Z$ (Z - множина цілих чисел). Наприклад, якщо $z = 1 + i$, то аргументом z може бути будь-яке із чисел $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4} \pm 2\pi$, $\frac{\pi}{4} \pm 4\pi, \ldots$, тобто, $Arg(1+i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in Z$.

Головним значенням аргументу вважають те значення кута φ, яке задовольняє нерівності $-\pi < \varphi \le \pi$. Це значення позначають через $\arg z$.

$$Arg\, z = \arg z + 2k\pi, \quad k \in Z.$$

Для обчислення $|z|$ та $\arg z$ комплексного числа $z = x + yi$ користуються наступними формулами:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\arg(x + yi) = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{якщо} \quad x > 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{якщо} \quad x < 0,\ y \ge 0; \\ arctg\,\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{якщо} \quad x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

$$\arg(yi) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо} \quad y < 0. \end{cases}$$

$\arg 0$ - невизначений.

Приклад 2.2. Представити комплексні числа у тригонометричній формі.

1) $z = 2 + 2i$

$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{2}{2} = \dfrac{\pi}{4}$,

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

2) $z = -1 - \sqrt{3}i$

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, $\varphi = \arg z = arctg\,\dfrac{-\sqrt{3}}{-1} - \pi = -\dfrac{2\pi}{3}$,

$z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

3) $z = 0$. Це число не можна представити у тригонометричній формі, тому що його аргумент не визначений.

4) $z = 5i$

$|z| = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$, $\varphi = \arg z = \dfrac{\pi}{2}$,

$z = 5\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

5) $z = -3i$

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3,\ \varphi = \arg z = -\frac{\pi}{2},$$

$$z = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

6) $z = 4$

$$|z| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4,\ \varphi = \arg z = arctg\frac{0}{4} = 0,$$

$$z = 4(\cos 0 + i\sin 0).$$

7) $z = -16$

$$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} = 16,\ \varphi = \arg z = arctg\frac{0}{-16} + \pi = \pi,$$

$$z = 16(\cos\pi + i\sin\pi).$$

8) $z = 2 - 5i$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29},\ \varphi = arctg = \frac{-5}{2} \approx -68{,}2^\circ,$$

$$z \approx \sqrt{29}(\cos(-68{,}2^\circ) + i\sin(-68{,}2^\circ)).$$

Приклад 2.3. Зобразити на комплексній площині множину точок z, які задовольняють заданим умовам

1) $1 < \operatorname{Re} z \le 5$

Розв'язання. Нехай $z = x + yi$, тоді $1 < \operatorname{Re} z \le 5 \Leftrightarrow 1 < x \le 5$ (рис. 3)

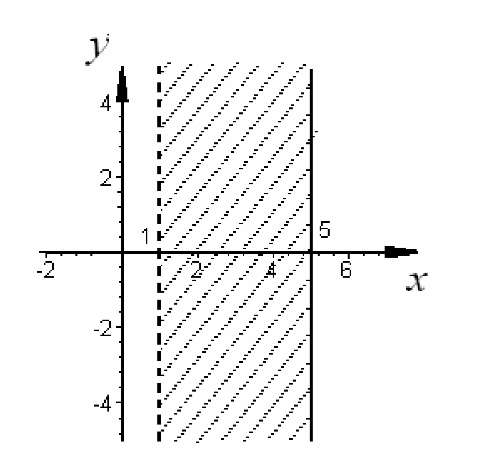

Рисунок 3

2) $|z| \le 2$

Розв'язання. Нехай $z = x + yi$, $|z|$ - це відстань від точки (x, y) до початку координат, тому множина точок z, для яких $|z| \le 2$ - це круг з центром у початку координат і радіусом 2 (рис. 4).

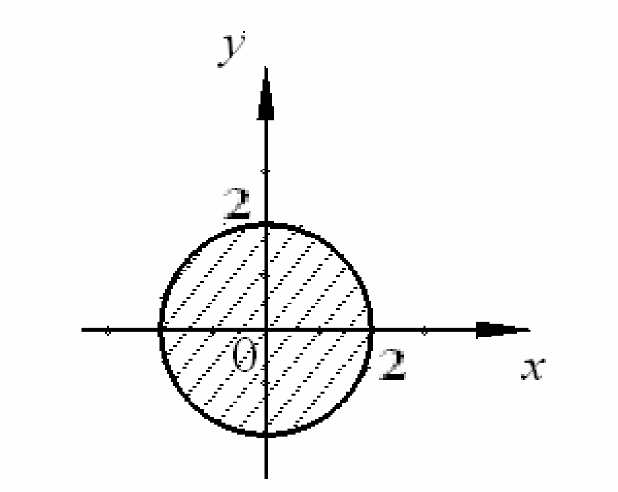

Рисунок 4

3) $\frac{\pi}{6} < \arg z \le \frac{2\pi}{3}$

Розв'язання.

$$\frac{\pi}{6} < \arg z \le \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{точка } (x, y) \text{ знаходиться між} \\ \text{променями } \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ та } \varphi = \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad \text{(рис. 5).}$$

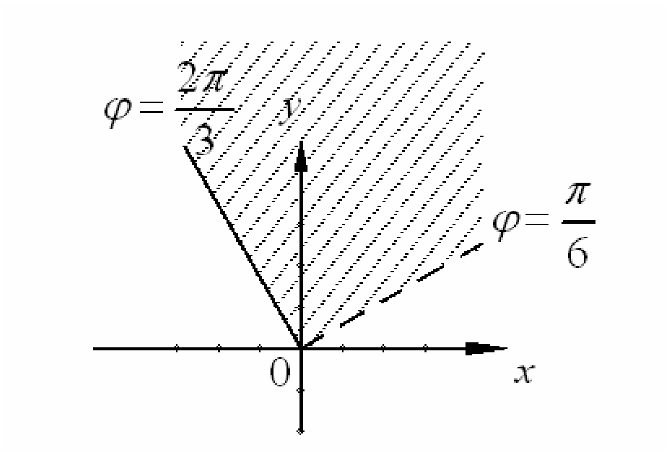

Рисунок 5

§ 3. Дії над комплексними числами у тригонометричній формі

Теорема 1. Нехай комплексні числа z_1 та z_2 записані у тригонометричній формі:

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \qquad z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (z_2 \neq 0).$$

Доведення.

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot \left(\underbrace{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\left(\underbrace{\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)} \right)\right) =$$

$$= |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{|z_2| \cdot (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot (\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \left(\underbrace{\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2}_{\cos(\varphi_1-\varphi_2)} + i\left(\underbrace{\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1}_{\sin(\varphi_1-\varphi_2)} \right)\right) =$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \text{ якщо } z_2 \neq 0.$$

Методом математичної індукції можна довести наступне твердження.

Теорема 2. Нехай $z_k = |z_k|(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, тоді

$$z_1 z_2 ... z_k = |z_1| \cdot |z_2| \cdot ... \cdot |z_k|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_k)).$$

У випадку, коли $z_1 = z_2 = ...z_n = z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, формула приймає наступний вигляд

$$\left(|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

При $|z| = 1$ з рівності (1) одержуємо формулу

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi \tag{2}$$

Формулу (1) називають *формулою Муавра*. Ми одержали цю формулу у випадку, коли n є цілим додатним числом, але можна довести, що рівності (1) та (2) мають місце при будь-якому цілому n.

Приклад 3.1. Обчислити $w = \dfrac{(2-i)^3 \cdot (-4+3i)^2}{(-7-i)^4}$

Розв'язання.

$z_1 = 2 - i$, $|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$,

$\varphi_1 = \arg z_1 = artg\dfrac{-1}{2} \approx -0{,}464$ (радіан),

$z_2 = -4 + 3i$, $|z_2| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$,

$\varphi_2 = \arg z_2 = artg\dfrac{3}{-4} + \pi \approx 2{,}498$ (радіан),

$z_3 = -7 - i$, $|z_3| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$,

$\varphi_3 = \arg z_3 = artg\dfrac{-1}{-7} - \pi \approx -3{,}000$ (радіан).

Нехай $w = R(\cos\Phi + i\sin\Phi)$, тоді

$$R = \frac{|z_1|^3 \cdot |z_2|^2}{|z_3|^4} = \frac{(\sqrt{5})^3 \cdot 5^2}{(\sqrt{50})^4} \approx 0{,}11,$$

$$\Phi = 3\varphi_1 + 2\varphi_2 - 4\varphi_3 \approx 15{,}604 \text{ (радіан)},$$

$$w \approx 0{,}11 \cdot (\cos(15{,}604) + i\sin(15{,}604)) \approx -0{,}109 + 0{,}011i.$$

§ 4. Добування кореня n-го степеня із комплексного числа

Означення. *Коренем n-го степеня із комплексного числа z* називають комплексне число w, яке при піднесенні до степеня n дає z, тобто

$$w = \sqrt[n]{z} \Leftrightarrow w^n = z$$

Якщо $z = 0$, то $\sqrt[n]{z} = 0$ для будь-якого n. Нехай $z \neq 0$.

Теорема . Існує рівно n значень кореня n-го степеня із комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(z \neq 0)$. Ці значення визначаються формулою

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Доведення. Представимо число z у тригонометричній формі:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Число $w = \sqrt[n]{z}$ також будемо шукати у тригонометричній формі

$$w = R(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Згідно з формулою Муавра

$$w^n = R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

Таким чином, $w^n = z$, отже,

$$R^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Два комплексні числа, записані у тригонометричній формі, є рівними, якщо вони мають однакові модулі, а їх аргументи відрізняються на доданок, який кратний 2π, тобто

$R^n = r \;\Rightarrow\; R = \sqrt[n]{r},$

$n\theta = \varphi + 2k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$ (k - будь-яке ціле число).

Таким чином,

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \tag{1}$$

У формулі (1) $\sqrt[n]{r}$ - арифметичне значення кореня з дійсного числа, n - стала величина, а k може приймати будь-які цілі значення. Позначимо через w_0, w_1,

..., w_{n-1} числа, одержані за формулою (1) при $k = 0, 1, ..., n-1$. Усі ці числа мають однаковий модуль $\sqrt[n]{r}$, аргумент числа w_0 дорівнює $\frac{\varphi}{n}$, а аргументи інших чисел $w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ визначаються послідовним додаванням числа $\frac{2\pi}{n}$. Геометрично це означає, що на площині точки $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ розташовані у вершинах правильного n-кутника, який вписано в коло радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку координат. Отже, всі числа $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ відмінні один від одного. Залишається довести, що при будь-якому цілому n формула (1) дає одне з чисел $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$. Нехай k - будь-яке ціле число. Поділимо k на n з остачею: $k = m \cdot n + l$, де m, n - цілі числа, $l \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ (l - остача). Тоді

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2 \cdot (m \cdot n + l)\pi}{n}\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n} + 2m\pi\right) = \cos\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right),$$

аналогічно $\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right)$. Отже,

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) = w_l,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 4.1. Обчислити $\sqrt[3]{\sqrt{3} - i}$. Зобразити на комплексній площині усі корені та підкореневе комплексне число.

Розв'язання. Нехай $z = \sqrt{3} - i$. Представимо число z у тригонометричній формі:

$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = 2$, $\quad \varphi = \arg z = artg\frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$,

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Згідно з формулою (1)

$$w = \sqrt[3]{\sqrt{3} - i} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}\right), \quad \text{де } k = 0;\ 1;\ 2.$$

$$w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+0\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+0\cdot 2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{18}\right)\right) \approx 1{,}24 - 0{,}22i\,,$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+1\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+1\cdot 2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{18}\right)\right) \approx -0{,}43 + 1{,}18i\,,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\cdot 2\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{18}\right)\right) \approx -0{,}81 - 0{,}97i\,.$$

Зображуємо числа z, w_0, w_1, w_2 на комплексній площині (рис. 6).

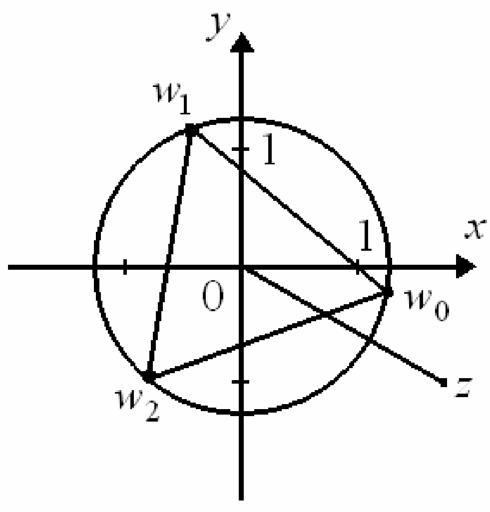

Рисунок 6

Зауваження. З приведеної вище теореми випливає наступний геометричний спосіб побудови коренів n-го степеня із заданого комплексного числа. Спочатку знаходимо $\sqrt[n]{|z|}$ і будуємо на комплексній площині коло з центром у початку координат і радіусом $\sqrt[n]{|z|}$ та саме число z. Радіус-вектор точки z та додатний напрямок осі Ox перетинають коло відповідно у точках A та B. Точки A та B поділяють коло на дві дуги. Виберемо меншу дугу і поділимо її на n рівних частин (якщо дуги однакові, то вибираємо верхню). Найближча до B точка поділу і буде числом w_0. Далі будуємо правильний n-кутник, вписаний у коло, так, щоб точка w_0 була однією із його вершин. Для цього відкладемо від точки w_0 проти годинникової стрілки кут рівний $\frac{2\pi}{n}$ - це буде число w_1. Далі від точки w_1 відкладемо у такому ж напрямку кут $\frac{2\pi}{n}$ - одержуємо точку w_2, і так далі. На рисунку 7 приведено приклади такої побудови при $n=5$.

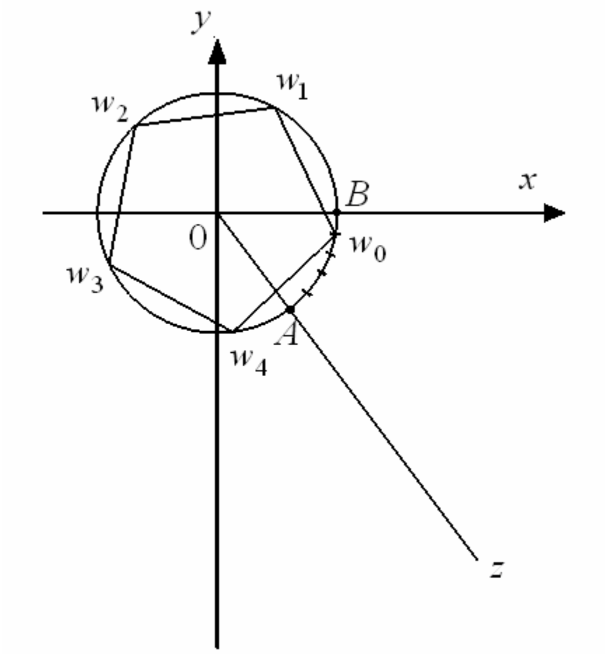

Рисунок 7

§ 5. Показникова форма комплексного числа

Показникова функція комплексної змінної визначається рівністю

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Наприклад,

якщо $z=1+\frac{\pi}{4}i$, то $e^{z}=e^{1+\frac{\pi}{4}i}=e\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=e\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

якщо $z=-\frac{\pi}{2}i$, то $e^{z}=e^{0-\frac{\pi}{2}i}=e^{0}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=-i$,

якщо $z=a$ (a - дійсне число), то $e^{z}=e^{a}=e^{a+0\cdot i}=e^{a}(\cos 0+i\sin 0)=e^{a}$, таким чином, при дійсному z функція e^{z} - це звичайна показникова функція.

Властивості показникової функції.

1. $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$.

2. $e^{z_1-z_2}=\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$.

3. Якщо m - ціле число, то $(e^{z})^{m}=e^{mz}$.

4. $e^{z+2\pi i}=e^{z}$.

Якщо число z є суто уявним числом, тобто $z=iy$, де y - дійсне число, то отримуємо формулу

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y \tag{1}$$

Формулу (1) називають ***формулою Ейлера***. Замінимо у формулі Ейлера y на $-y$:

$$e^{-iy}=\cos(-y)+i\sin(-y)$$

$$e^{-iy}=\cos y-i\sin y \tag{2}$$

Складемо рівності (1) та (2) почленно, отримуємо $e^{iy}+e^{-iy}=2\cos y$, отже,

$$\cos y=\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}.$$

Для того, щоб виразити $\sin y$, віднімемо почленно рівності (1) і (2):

$e^{iy}-e^{-iy}=\cos y+i\sin y-\cos y+i\sin y$, $\quad e^{iy}-e^{-iy}=2i\sin y$,

$$\sin y=\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.$$

Представимо довільне число $z\neq 0$ у тригонометричній формі:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Згідно з формулою Ейлера $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$, отже,

$z = re^{i\varphi}$ - ***показникова форма комплексного числа***.

Приклад 5.1. Представити число $z = -1 + i$ в показниковій формі.

Розв'язання.

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z = arctg\frac{1}{-1} + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$, отже,

$z = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}i}$.

§ 6. Питання для самоконтролю

1. Дайте означення комплексного числа.
2. Які комплексні числа називають суто уявними?
3. Які комплексні числа називають рівними?
4. Як відбувається віднімання та додавання комплексних чисел у алгебраїчній формі?
5. Як обчислювати i^n, де n - деяке натуральне число ?
6. Які комплексні числа називають спряженими? Чому дорівнює сума та добуток спряжених комплексних чисел?
7. Сформулюйте властивості множення та додавання.
8. Як обчислювати частку комплексних чисел у алгебраїчній формі?
9. Як знаходити модуль та аргумент комплексного числа? У чому полягає геометричний зміст модуля та аргумента?
10. Що називають головним значенням аргумента?
11. Яке число не можна представити у тригонометричній формі?
12. Як відбувається множення та ділення комплексних чисел у тригонометричній формі?
13. Запишіть формулу Муавра.

14. Що називають коренем n-го степеня із комплексного числа? За якою формулою знаходять корінь? Як розташовані на площині корені n-го степеня із комплексного числа?

15. Опишіть геометричний спосіб побудови коренів n-го степеня із заданого комплексного числа.

16. Як визначається показникова функція комплексної змінної?

17. Сформулюйте властивості показникової функції.

18. Запишіть формулу Ейлера.

19. Як записуються комплексні числа у показниковій формі?

Література.

1. Дубовик В. П. , Юрик І. І. Вища математика: Навч. посібник. – К.: Видавництво А. С. К., 2003. – 648 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М: Наука, 1987 г. – т. 1,2.
3. Сборник задач по курсу высшей математики. Под редакцией Кручковича Г. И. – Изд. 3, перераб. – Учебное пособие для втузов. – М., “Высшая школа”, 1973.
4. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов втузов. В 2-х ч.– 4-е изд., испр. и доп. – М., “Высшая школа”, 1986.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика». Розділ «Комплексні числа». Для студентів напряму 6.050901 «Радіотехніка», денної форми навчання / Укладач Є. В. Дерець – Дніпродзержинськ, ДДТУ, 2012. - _____ с.

Укладач: Дерець Євгенія Вікторівна

Підписано до друку ___________ 2012 р.

Формат __________ Обсяг________арк.

Тираж __________ прим. Замовл. ______

51918 м. Дніпродзержинськ

вул. Дніпробудівська, 2