

А.А.Лигун    А.А.Шумейко    С.В.Тимченко

ОПИСАНИЕ ВЫПУКЛЫХ  
КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Днепродзержинск  
ДГТУ  
2014

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ**

**Днепродзержинский государственный технический университет  
(ДГТУ)**

**А.А.ЛИГУН, А.А.ШУМЕЙКО, С.В.ТИМЧЕНКО**

**ОПИСАНИЕ ВЫПУКЛЫХ  
КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ**

**Монография**

**Днепродзержинск  
ДГТУ  
2014**

УДК 517:514.172.2

ББК 22.161:22.135

Л 67

Рецензенты:

**В.Ф.Бабенко** – профессор кафедры математического анализа и теории функций Днепропетровского национального университета им. О.Гончара, доктор физико-математических наук, профессор;

**В.М.Корчинский** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электронных средств телекоммуникаций Днепропетровского национального университета им. О.Гончара;

Рекомендовано к печати Ученым советом Днепродзержинского государственного технического университета (протокол № от )

**Лигун А.А.**

Описание выпуклых кривых и поверхностей: монография / А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко. – Днепродзержинск: ДГТУ, 2014. – 221 с.

ISBN 978-966-175-105-6

Монография посвящена вопросам исследования одного из представлений поверхностей в пространстве  $\mathbf{R}_n$ , основой которого является параметризация выпуклой поверхности по нормальному вектору. В монографии исследуются свойства выпуклых кривых и поверхностей, связанные с теми или иными особенностями опорной функции. Особое внимание уделяется задачам исследования различных кулачковых механизмов с использованием опорных функций.

Данная работа будет полезна научным и инженерно-техническим сотрудникам, преподавателям, аспирантам и студентам.

© А.А.Лигун, А.А.Шумейко, С.В.Тимченко, 2014

© ДГТУ, 2014

© Обложка и оформление К.А.Шумейко

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ПРЕДИСЛОВИЕ</b> .....	7
<b>ОПИСАНИЕ ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ</b> .....	8
<b>1.1. Представление выпуклых кривых через опорную функцию</b> ...	8
<b>1.2. Тригонометрические и квазитригонометрические сплайны</b>	29
1.2.1. Эрмитовые тригонометрические сплайны.....	29
1.2.2. Тригонометрические интерполяционные сплайны минимального дефекта .....	34
1.2.3. Квазитригонометрические В – сплайны и их линейные комбинации .....	48
1.2.4. Тригонометрические В-сплайны и их линейные комбинации	57
<b>1.3. Восстановление кривых кусочно-окружностными линиями</b> ...	61
1.3.1. Дуговые эрмитовые сплайны.....	61
1.3.2. Дуговые сплайны минимального дефекта .....	66
1.3.3. Дуговые сплайны, порожденные линейной комбинацией тригонометрических В-сплайнов .....	72
<b>1.4. Восстановление кривых логарифмическими спиралями</b> .....	73
<b>1.5. Замечательные выпуклые кривые</b> .....	81
1.5.1. Тангенциальная кривая .....	89
1.5.3. Обобщенная гипоциклоида.....	104
1.5.4. Тангенциальная кривая и обобщенная циклоида дуговых сплайнов .....	108
<b>1.6. Проектирование кулачковых механизмов с использованием опорных функций</b> .....	113
1.6.1. Проектирование кулачковых механизмов с плоским толкателем .....	113
1.6.2. Решение задач анализа и синтеза для центральных кулачковых механизмов с роликовым толкателем .....	131
1.6.3. Проектирование кулачковых механизмов рамочного типа ...	142
<b>ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ</b> .....	152
<b>2.1. Поверхности в географических координатах</b> .....	153
2.1.1. Поверхности равной ширины .....	164
<b>2.2. Выпуклые поверхности в пространстве <math>R_n</math></b> .....	169

<b>2.3. Основные квадратичные формы поверхности .....</b>	<b>181</b>
<b>2.4. Приложение гармонического анализа к характеристикам выпуклых поверхностей.....</b>	<b>192</b>
<b>2.5. Параметризация выпуклых кривых и поверхностей по нормальному вектору единичной сферы .....</b>	<b>202</b>
<b>2.6. Некоторые свойства выпуклых поверхностей .....</b>	<b>207</b>
2.6.1. Проекция выпуклой поверхности на плоскость .....	210
2.6.2. Поверхности равной ширины .....	213
2.6.3. Дельта – поверхности.....	216
<b>2.6.4. Некоторые свойства выпуклой поверхности, связанные со свойствами опорной функции этой поверхности .....</b>	<b>222</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>229</b>

## ПРЕДИСЛОВИЕ

*Светлой памяти*

*Лигуна Анатолия Александровича*

Понятие выпуклости известно с античных времен. Еще в сочинениях Архимеда «О шаре и цилиндре», есть такие слова: «Я называю выпуклыми в одну и ту же сторону такие поверхности, для которых отрезки, соединяющие две точки, будут... находиться по одну сторону от поверхности». В XIX веке, благодаря работам О.Коши, Я.Штейнера, Г.Минковского и др., сформировалась геометрия выпуклых кривых и поверхностей, как отдельная ветвь геометрии. В XX веке происходит настоящий «выпуклый бум», связанный с рождением нового направления, получившего название линейного программирования. Его родоначальником был Леонид Витальевич Канторович, удостоенный за свой вклад в теорию линейного программирования и экономику, Нобелевской премии. В последнее время понятие выпуклости получило широкое распространение не только в математике, но и в самых разнообразных прикладных областях. Появились «выпуклый анализ» и «выпуклое программирование», результаты которых облегчают поиск решений многих важных практических задач экономики, управления и других областей. Большой вклад в современную теорию выпуклых поверхностей был сделан академиком А.Д.Александровым и его школой. Александр Данилович Александров является основателем современной геометрии выпуклых поверхностей в "целом". Им построена, при самых общих предположениях, внутренняя геометрия выпуклых поверхностей и получен целый ряд замечательных фактов о выпуклых поверхностях (теорема о склеива-

нии, изгибаемость выпуклой поверхности с границей и т. д.). При этом нельзя не отметить вклад О. Коши (A. Cauchy), им доказана неизгибаемость замкнутого выпуклого многогранника. Г. Либман (H. Liebmann) и В. Бляшке (W. Blaschke) доказали жесткость замкнутых выпуклых поверхностей. Г. Минковский (H. Minkowski) - существование замкнутой выпуклой поверхности с данной гауссовой кривизной, Г. Вейль (H. Weyl) наметил решение проблемы существования замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой. Это решение было завершено Г. Леви (H. Lewy). С. Кон-Фоссен (S. Cohn-Vossen) доказал однозначную определенность регулярных замкнутых выпуклых поверхностей и т.д.

Говоря о технических приложениях выпуклых кривых, нельзя не отметить такой важный раздел как теория машин и механизмов. Одним из основоположников теории механизмов и машин является Пафнутий Львович Чебышев (1812-1894), который во второй половине XIX века опубликовал серию важнейших работ, посвящённых анализу и синтезу механизмов. Большой вклад в исследования выпуклых кривых и их приложений в кинематической геометрии механизмов внесли Ф. Савари, М. Шаль, Р. Виллис, А. Борины. Основателем современной теории машин и механизмов является академик Артоболевский Иван Иванович, который разработал классификацию пространственных механизмов и дал методы их кинематического анализа, в частности, он создал методы кинематического анализа сложных многозвенных механизмов и кулачковых механизмов в том числе.

Одним из самых интересных разделов геометрической теории выпуклых фигур является теория кривых постоянной ширины. Так называют кривую, ограничивающую такую выпук-

лую фигуру на плоскости, для которой расстояние между каждой парой параллельных опорных прямых равно одному и тому же постоянному числу. Эта идея впервые пришла в голову французскому инженеру Францу Релло в XIX веке, с тех пор она используется в самих различных сферах — от формы британских пенсов и канализационных люков до городской планировки и техники. Треугольник Релло находит применение во многих механических устройствах, так особенностью роторно-поршневого двигателя Ванкеля является тот факт, что его ротор, имеющий профиль треугольника Релло вращается внутри профиля, поверхность которого описывается эпитрохой, или, например, инструмент для просверливания квадратных отверстий имеет сечение в виде треугольника Релло.

В 1998 году А.А.Лигун и А.А.Шумейко в работе [21] показали, что любая строго выпуклая гладкая плоская кривая  $\Gamma(\varphi)$  может быть записана в виде

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

где  $\theta(\varphi)$  - функция такая, что  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не меняет знак на периоде.

К аналогичному результату можно прийти, используя решение задачи синтеза кулачковых механизмов, полученное И.И.Артоболевским и Н.И.Левицким [3]. В последнее время использование данного представления активно исследуется в работах Кукурузы Д.В. [13].

Полученное описание выпуклых кривых позволило установить связь между технологическими описаниями выпуклой кривой и представлением опорной функции. Так, если контур кривой описан дугами окружностей, то опорная функция пред-

ставляет собой тригонометрический сплайн. Данный факт позволил использовать мощный аппарат теории аппроксимации для решения задачи технологического описания выпуклых кривых, к примеру, при заданной точности аппроксимации, описать контур кривой наименьшим числом дуг. В связи с этим, важное место в монографии занимает оптимизация разбиений для разного рода обобщенных сплайнов. При фиксированных  $r$ ,  $k$  и  $p$  последовательность разбиений  $\{\Delta_{n[a,b]}^*\}_{n=1}^\infty$  назовем асимптотически оптимальной для функции  $x \in C_{[a,b]}^{r+1}$  и последовательности операторов  $\{P_{r,k}(\bullet, \Delta_{n[a,b]})\}_{n=1}^\infty$ , если при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$\|x - P_{r,k}(x, \Delta_{n[a,b]}^*)\|_{p[a,b]} = \inf_{\Delta_{n[a,b]}} \|x - P_{r,k}(x, \Delta_{n[a,b]})\|_{p[a,b]} (1 + o(1)).$$

Задаче выбора последовательностей асимптотически наилучших разбиений для полиномиальных сплайнов посвящено много работ, например, этой задачей занимались С. DeBoor [5], L. Schumaker [52], А.И. Гребенников [7], А.А. Лигун и А.А. Шумейко [17], [19], [47] и другие.

Данное описание выпуклых кривых оказалось очень конструктивным. Отталкиваясь от представления выпуклых кривых с помощью опорной функции, удалось получить интересные и новые результаты не только для плоских кривых и приложений в теории машин и механизмов, но для выпуклых поверхностей в пространствах  $\mathbb{R}_2$  и  $\mathbb{R}_n$ , чему и посвящены результаты данной монографии.

Монография может быть полезна научным работникам, преподавателям, студентам и всем, кому интересна геометрия.

## Глава 1

### ОПИСАНИЕ ВЫПУКЛЫХ КРИВЫХ

#### 1.1. Представление выпуклых кривых через опорную функцию

Вначале приведем несколько определений.

Жорданову кривую  $\Gamma(t)$  будем называть *кусочно-гладкой*, если ее касательная в каждой точке изменяется непрерывно.

Как обычно, под направляющим вектором касательной к кривой  $\Gamma(t)$  в точке  $\Gamma(t)$  будем понимать вектор с координатами  $(x'(t), y'(t))$ .

Кривую  $\Gamma(t)$  с непрерывной кривизной

$$k(\Gamma, t) = \frac{y'(t)x''(t) - y''(t)x'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} \quad (1.1)$$

будем называть *гладкой*. Через  $R(\Gamma, t) = \left|k^{-1}(\Gamma, t)\right|$  обозначим *радиус кривизны* кривой  $\Gamma(t)$ .

Жорданову кривую (дугу)  $\Gamma(t)$  будем называть *строго выпуклой*, если любая прямая пересекает ее не более чем в двух различных точках.

Задачи аппроксимации кривых тесно связаны с понятием эквидистанты.

Как обычно, для гладкой замкнутой параметрически заданной кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  под  $\varepsilon$  – эквидистантой (внут-

ренной или внешней) будем понимать кривую, определяемую равенствами

$$\Gamma_{\varepsilon}^{\pm}(t) = \begin{cases} x_{\varepsilon}(t) = x(t) \mp \varepsilon \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}; \\ y_{\varepsilon}(t) = y(t) \pm \varepsilon \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Важную роль в дифференциальной геометрии и ее приложениях играют эволюты кривых – геометрическое место центров кривизны кривой, которые определяются уравнениями:

$$\tilde{\Gamma}(t) = \left( x(t) + \frac{R(\Gamma, t) \cdot y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}; y(t) - \frac{R(\Gamma, t) \cdot x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right). \quad (1.3)$$

Через  $C^{r,*}(T)$  обозначим множество всех  $T$  – периодических функций  $f(t)$  с кусочно-непрерывной  $r$ -й производной. Для определенности будем считать, что в точке разрыва  $t$  значение  $r$ -й производной определено равенством

$$f^{(r)}(t) = \frac{f^{(r)}(t-0) + f^{(r)}(t+0)}{2}.$$

Каждой функции  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$  поставим в соответствие кривую, заданную параметрическими уравнениями

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.4)$$

Приведем некоторые, необходимые в дальнейшем, свойства кривых  $\Gamma(\theta, \varphi)$ , представленных в виде (1.4). Для удобства ссылок объединим их в одно утверждение. Некоторые из них, в том или ином виде, известны в теории выпуклых кривых.

**Предложение 1.1.** Пусть функция  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$ , тогда

1. Кривая  $\Gamma(t)$  замкнутая и кусочно-гладкая;

2. Если

$$\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi) + x_0 \sin \varphi - y_0 \cos \varphi, \quad (1.5)$$

то

$$x(\theta, \varphi) = x(\theta_1, \varphi) - x_0, \quad y(\theta, \varphi) = y(\theta_1, \varphi) - y_0.$$

3. Если для  $\varphi \in [\alpha, \beta]$  имеет место равенство  $\theta(\varphi) = \theta_1(\varphi)$ , то

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \Gamma(\theta_1, \varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

4. Направляющий вектор касательной к кривой  $\Gamma(\theta)$  в точке  $\Gamma(\theta, \varphi)$  составляет с положительным направлением оси  $OX$  угол  $\varphi + \pi$ , если  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) < 0$  и угол  $\varphi$ , если  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$ .

5. Кривизна кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  определяется равенством

$$k(\Gamma(\theta), \varphi) = -\frac{1}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)}.$$

Следовательно, если выражение  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не изменяет знак на периоде, то кривая  $\Gamma(\theta)$  строго выпуклая.

6. Если функция  $\theta(\varphi)$  такова, что ее первая производная имеет ограниченную полную вариацию, то дифференциал дуги кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  определяется равенством

$$d\ell(\Gamma(\theta, \varphi)) = \theta(\varphi) d\varphi + d\theta'(\varphi).$$

7. Длина дуги  $\mathcal{L}(\Gamma(\theta))$  кривой  $\Gamma(\theta)$  вычисляется следующим образом:

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi) d\varphi.$$

8. Если функция  $\theta(\varphi)$  такова, что ее первая производная имеет ограниченную полную вариацию и функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не изменяет знак на периоде, то площадь фигуры  $S(\Gamma(\theta))$ , ограниченной кривой  $\Gamma(\theta)$ , определяется равенством

$$S(\Gamma(\theta)) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\theta^2(\varphi) - (\theta'(\varphi))^2) d\varphi.$$

9. Если имеет место неравенство  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0$ , то для эквидистант имеет место соотношение

$$\Gamma_\varepsilon^+(\theta, \varphi) = \Gamma(\theta + \varepsilon, \varphi) \quad (1.6)$$

при любом  $\varepsilon > 0$  и

$$\Gamma_\varepsilon^-(\theta, \varphi) = \Gamma(\theta - \varepsilon, \varphi)$$

для достаточно малых положительных  $\varepsilon$ .

10. Для эквидистант справедливы равенства

$$\mathcal{L}(\Gamma_\varepsilon^\pm(\theta)) = \mathcal{L}(\Gamma(\theta)) \mp 2\pi\varepsilon,$$

$$S(\Gamma_\varepsilon^\pm(\theta)) = S(\Gamma(\theta)) + 2\pi\varepsilon^2 + 2\varepsilon \mathcal{L}(\Gamma(\theta)).$$

11. Если функция  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$ , то эволюта кривой  $\Gamma(\theta)$  описывается следующими параметрическими уравнениями

$$\tilde{\Gamma}(\theta, \varphi) = \begin{cases} \tilde{x}(\theta, \varphi) \\ \tilde{y}(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} \theta''(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ -\theta''(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

**Доказательство.** Справедливость свойства 1 очевидным образом следует из вида кривой (1.4). Для доказательства справедливости свойства 2, необходимо в (1.4) вместо функции  $\theta(\varphi)$  использовать левую часть равенства (1.5). Учитывая, что

$$\theta'(\varphi) = \theta'_1(\varphi) + x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi,$$

после очевидных преобразований, получаем требуемое соотношение.

Данный результат говорит о том, что коэффициенты Фурье при  $\sin \varphi$  и  $\cos \varphi$  функции  $\theta(\varphi)$  определяют параллельный перенос кривой  $\Gamma(\theta)$ . Поэтому, не ограничивая общности, в дальнейшем будем считать, что функция  $\theta(\varphi)$  имеет коэффициенты Фурье  $a_1$  и  $b_1$  равные нулю.

Утверждение пункта 3 следует из равенств (1.4).

Используя соотношения

$$x'(\theta, \varphi) = -\cos \varphi \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)), \quad (1.7)$$

$$y'(\theta, \varphi) = -\sin \varphi \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)), \quad (1.8)$$

сразу убеждаемся в справедливости утверждения 4.

Для доказательства свойства 5 достаточно в формуле для вычисления кривизны (1.1) использовать равенства (1.7) – (1.8) и

$$x''(\theta, \varphi) = \sin \varphi \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) - \cos \varphi \cdot (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)), \quad (1.9)$$

$$y''(\theta, \varphi) = -\cos \varphi \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) - \sin \varphi \cdot (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)). \quad (1.10)$$

Таким образом, для того чтобы кривая  $\Gamma(\theta, \varphi)$  была строго выпуклой, необходимо, чтобы на всем периоде функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  была строго отлична от нуля.

Из формул (1.7), (1.8) сразу следует равенство

$$d\ell(\Gamma(\theta, \varphi)) = \theta(\varphi) d\varphi + d\theta'(\varphi).$$

Отсюда и из того факта, что для  $2\pi$ -периодической функции  $\theta(\varphi)$  с интегрируемой производной имеет место равенство

$$\int_0^{2\pi} d\theta'(\varphi) = 0,$$

сразу получаем

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = \int_0^{2\pi} d\ell(\Gamma(\varphi)) = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi) d\varphi.$$

Для вычисления площади фигуры, ограниченной выпуклой кривой  $\Gamma(\theta)$ , достаточно в формулу для вычисления площади

$$\mathcal{S}(\Gamma(\theta)) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma(\theta)} x dy - y dx$$

подставить значения  $x(\theta, \varphi)$ ,  $y(\theta, \varphi)$  и их дифференциалов.

Для доказательства справедливости пункта 9 достаточно в равенстве (1.2) использовать соотношения (1.7), (1.8) и учесть факты, приведенные в пунктах 7, 8.

Эволюта  $\tilde{\Gamma}(\theta)$  кривой  $\Gamma(\theta)$  определяется из равенств (1.3), соотношений (1.4) и утверждения пункта 5.

Обозначим через  $\delta(M, L)$  расстояние от точки  $M$  до прямой  $L$ . Пусть  $L_t(\Gamma(\theta), \varphi)$  - касательная к кривой  $\Gamma(\theta)$  в точке  $\Gamma(\theta, \varphi)$ .

**Предложение 1.2.** Пусть  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$ , тогда имеет место равенство

$$\delta(0, L_t(\Gamma(\theta), \varphi)) = |\theta(\varphi)|.$$

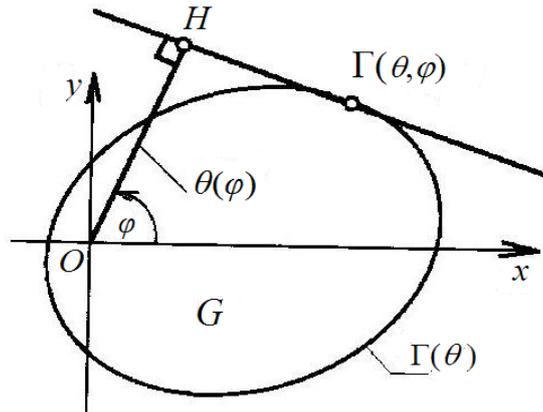


Рис. 1.1. Опорная функция кривой  $\Gamma(\theta)$

Действительно, касательная к кривой  $\Gamma(\theta)$  в точке  $\Gamma(\theta, \varphi)$  (рис.1.1) описывается уравнением

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi + \theta(\varphi) = 0. \quad (1.11)$$

Таким образом, ясно, что

$$\delta(0, L_t(\Gamma(\theta), \varphi)) = \frac{|0 \sin \varphi - 0 \cos \varphi + \theta(\varphi)|}{\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}} = |\theta(\varphi)|,$$

то есть,  $\theta(\varphi)$  – опорная функция кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  ([2]).

**Предложение 1.3.** На кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  определим функцию плотности, равную кривизне кривой в точке  $\varphi$ . Тогда центр тяжести (центр тяжести кривизны кривой)  $\bar{M}(\bar{x}(\theta), \bar{y}(\theta))$  будет иметь координаты

$$\bar{x}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(\theta, \varphi) d\varphi, \quad \bar{y}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} y(\theta, \varphi) d\varphi.$$

Действительно, в этом случае в соотношения

$$\bar{x}(\theta) = \frac{\int_{\Gamma(\theta)} k(\Gamma(\theta), \varphi) x(\theta, \varphi) d\ell(\Gamma(\theta), \varphi)}{\int_{\Gamma(\theta)} k(\Gamma(\theta), \varphi) d\ell(\Gamma(\theta), \varphi)},$$

$$\bar{y}(\theta) = \frac{\int_{\Gamma(\theta)} k(\Gamma(\theta), \varphi) y(\theta, \varphi) d\ell(\Gamma(\theta), \varphi)}{\int_{\Gamma(\theta)} k(\Gamma(\theta), \varphi) d\ell(\Gamma(\theta), \varphi)}$$

необходимо подставить функции плотности, дифференциала дуги и учесть равенства (1.4).

Иногда центр тяжести кривизны (точку  $\bar{M} = \bar{M}(\Gamma)$ ) называют точкой Штейнера кривой  $\Gamma(\theta)$  ([16]).

Отсюда и из пункта 2 предложения 1.1 сразу получаем следующее утверждение:

**Предложение 1.4.** Пусть функция  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$  такова, что

$$\int_0^{2\pi} \theta(\varphi) \sin \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi) \cos \varphi d\varphi = 0,$$

тогда справедливо равенство

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} \bar{x}(\theta) - \theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \bar{y}(\theta) + \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

**Определение 1.5.** Жорданову кусочно-гладкую кривую  $\gamma_n(\varphi)$  будем называть *дуговым* (или *кусочно-окружностным*) *сплайном минимального дефекта*, если она состоит из  $n$  дуг окружностей.

Через  $\Delta_n = \{0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = 2\pi\}$  обозначим произвольное разбиение периода с переменным шагом  $h_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

**Определение 1.6.** Тригонометрическим сплайном минимального дефекта по разбиению  $\Delta_n$  будем называть непрерывную вместе со своей производной  $2\pi$ -периодическую функцию, которая на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет вид

$$s(\varphi) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin \varphi + C_{i+1/2} \cos \varphi, \quad (1.12)$$

где  $A_{i+1/2}$ ,  $B_{i+1/2}$  и  $C_{i+1/2}$  – некоторые константы.

Множество всех таких сплайнов обозначим через  $\text{ST}_1(\Delta_n)$ .

**Теорема 1.7.** Любой дуговой сплайн минимального дефекта  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  представим в виде

$$\gamma(\Delta_n, \varphi) = \begin{cases} x(\Delta_n, \varphi) \\ y(\Delta_n, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.13)$$

где тригонометрический сплайн  $\theta(\Delta_n) \in \text{ST}_1(\Delta_n)$  такой, что  $A_{i+1/2} > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Параметры дугового и тригонометрического сплайнов определяются взаимно однозначно, то есть если для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  тригонометрический сплайн  $\theta(\Delta_n, \varphi)$  имеет вид (1.12), то кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  совпадает с дугой окружности радиуса  $A_{i+1/2}$  и центром в точке  $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$  и раствором центрального угла  $[\varphi_i + \pi/2, \varphi_{i+1} + \pi/2]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  и наоборот.

*Доказательство.* Пусть имеет место представление (1.13). Из определения тригонометрического сплайна следует, что для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  непрерывная кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$  будет иметь следующее параметрическое представление:

$$\begin{aligned} x(\Delta_n, \varphi) &= -\theta(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi = \\ &= -(A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin \varphi + C_{i+1/2} \cos \varphi) \sin \varphi - \\ &\quad - (B_{i+1/2} \cos \varphi - C_{i+1/2} \sin \varphi) \cos \varphi = \\ &= -A_{i+1/2} \sin \varphi - B_{i+1/2} = A_{i+1/2} \cos(\varphi + \pi/2) - B_{i+1/2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y(\Delta_n, \varphi) &= \theta(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi = \\ &= A_{i+1/2} \cos \varphi + C_{i+1/2} = A_{i+1/2} \sin(\varphi + \pi/2) + C_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $\theta(\Delta_n, \varphi)$ , где  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ , будет соответствовать дуга окружности радиуса  $A_{i+1/2}$  с центром в точке  $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$ .

Выпуклость кривой  $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$  следует из условия  $A_{i+1/2} > 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Покажем теперь, что кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$  кусочно – гладкая. Для этого достаточно показать, что касательные справа и слева в точке  $\varphi_i + \pi/2$  совпадают.

В силу непрерывности производной тригонометрического сплайна, для всех  $i = 0, 1, \dots, n$  имеем

$$\theta'(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \theta'(\Delta_n, \varphi_i + 0).$$

Данное равенство можно переписать в виде

$$B_{i-1/2} \cos \varphi_i - C_{i-1/2} \sin \varphi_i = B_{i+1/2} \cos \varphi_i - C_{i+1/2} \sin \varphi_i,$$

или, что тоже,

$$(B_{i+1/2} - B_{i-1/2}) \sin(\varphi_i + \pi/2) + (C_{i+1/2} - C_{i-1/2}) \cos(\varphi_i + \pi/2) = 0.$$

Таким образом, вектор  $(B_{i+1/2} - B_{i-1/2}, C_{i+1/2} - C_{i-1/2})$  ортогонален вектору  $(\sin(\varphi_i + \pi/2), \cos(\varphi_i + \pi/2))$  и, следовательно, касательные справа и слева к кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  совпадают.

Пусть теперь замкнутая, выпуклая кусочно-гладкая кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$   $\varphi \in [0, 2\pi]$ , совпадает с дугой окружности радиуса  $A_{i+1/2}$ , центром в точке  $M_{i+1/2}(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$  и раствором центрального угла  $[\varphi_i + \pi/2, \varphi_{i+1} + \pi/2]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Покажем, что тригонометрический сплайн  $\theta(\gamma(\Delta_n), \varphi)$ , который на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$  имеет вид (1.12), будет непрерывно дифференцируемым на всем периоде.

Из непрерывности дугового сплайна в каждой точке  $\varphi \in [0, 2\pi]$  следует, что для  $i = 0, 1, \dots, n-1$  имеют место равенства

$$A_{i-1/2} \cos(\varphi_i + \pi/2) - B_{i-1/2} = A_{i+1/2} \cos(\varphi_i + \pi/2) - B_{i+1/2}$$

и

$$A_{i-1/2} \sin(\varphi_i + \pi/2) + C_{i-1/2} = A_{i+1/2} \sin(\varphi_i + \pi/2) + C_{i+1/2}.$$

Первое равенство умножим на  $-\sin \varphi_i$ , второе - на  $\cos \varphi_i$ . По-членно складывая, получим равенство

$$\begin{aligned} & A_{i-1/2} + B_{i-1/2} \sin \varphi_i + C_{i-1/2} \cos \varphi_i = \\ & = A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin \varphi_i + C_{i+1/2} \cos \varphi_i. \end{aligned}$$

Таким образом, показана непрерывность соответствующего тригонометрического сплайна  $\theta(\gamma(\Delta_n), \varphi)$ .

В силу кусочной гладкости кривой в любой точке  $\varphi \in [0, 2\pi]$  касательная справа совпадает с касательной слева. Для точки  $\varphi_i + \pi/2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , это условие эквивалентно тому, что вектора  $\overline{M_{i-1/2} \gamma(\Delta_n, \varphi_i)}$  и  $\overline{M_{i+1/2} \gamma(\Delta_n, \varphi_i)}$  ортогональны направляющему вектору касательной  $(-\sin(\varphi_i + \pi/2), \cos(\varphi_i + \pi/2))$ . Это условие можно переписать в виде

$$(B_{i+1/2} - B_{i-1/2}) \sin(\varphi_i + \pi/2) + (C_{i+1/2} - C_{i-1/2}) \cos(\varphi_i + \pi/2) = 0,$$

или, что тоже,

$$B_{i-1/2} \cos \varphi_i - C_{i-1/2} \sin \varphi_i = B_{i+1/2} \cos \varphi_i - C_{i+1/2} \sin \varphi_i.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\theta'(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \theta'(\Delta_n, \varphi_i + 0).$$

Теорема доказана.

С помощью предельного перехода отсюда сразу получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.8.** *Любая замкнутая кусочно-гладкая строго выпуклая жорданова кривая  $\Gamma$  представима в виде (1.4), где  $2\pi$  – периодическая функция  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$  такова, что функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не меняет знак на периоде и может обращаться в ноль только на множестве меры ноль.*

Из теоремы 1.7 и пунктов 7 и 8 предложения 1.1 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 1.9.** *Длина контура любого дугового сплайна  $\gamma(\Delta_n)$  минимального дефекта определена равенством*

$$\mathcal{L}(\gamma(\Delta_n)) = \sum_{i=1}^n A_{i-1/2} \Delta\varphi_{i-1/2},$$

*а площадь фигуры, ограниченной выпуклым дуговым сплайном  $\gamma(\Delta_n)$  определяется равенством*

$$\begin{aligned} S(\gamma(\Delta_n)) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_{i-1/2} (A_{i-1/2} \Delta\varphi_{i-1/2} + \\ & + 2 \sin \frac{\Delta\varphi_{i-1/2}}{2} (B_{i-1/2} \sin \varphi_{i-1/2} + C_{i-1/2} \cos \varphi_{i-1/2})), \end{aligned}$$

где  $\Delta\varphi_{i-1/2} = \varphi_i - \varphi_{i-1}$  и  $\varphi_{i-1/2} = (\varphi_i + \varphi_{i-1})/2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Пример.** *Рассмотрим описание эллипса через опорную функцию.*

Пусть эллипс задан параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x' = -a \sin t, \\ y' = b \cos t. \end{cases}$$

Отсюда, для каждого фиксированного  $t$  сразу получаем уравнение касательной

$$a \sin t \cdot (y - b \sin t) + b \cos t \cdot (x - a \cos t) = 0.$$

Расстояние от касательной до начала координат равно

$$\theta(t) = \frac{a \sin t \cdot (0 - b \sin t) + b \cos t \cdot (0 - a \cos t)}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

С другой стороны, уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = \operatorname{tg} \varphi \cdot (x - x_0).$$

Имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{b}{a} \operatorname{ctg} t,$$

то есть

$$t = \operatorname{arcctg} \left( -\frac{a}{b} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right).$$

Следовательно,

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{b \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} = \frac{a \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

Подставляя полученные выражения в (1.4), сразу получаем

$$\theta(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Тогда

$$\theta'(\varphi) = \frac{\sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot (a^2 - b^2)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$$

и

$$\theta''(\varphi) = \frac{(a^2 - b^2)(2a^2 \cos^2 \varphi - a^2 \cos^4 \varphi + b^2 \cos^4 \varphi - a^2)}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}}.$$

Проверим выполнение условия выпуклости (выполнение условий теоремы 1.8):

$$\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{3/2}} > 0.$$

Теперь получим уравнение эллипса через опорную функцию:

$$x(\theta, \varphi) = -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi = -\frac{a^2 \sin \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$y(\theta, \varphi) = \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi = \frac{b^2 \cos \varphi}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}.$$

**Предложение 1.10.** Пусть функция  $\theta(\varphi)$  непрерывно-дифференцируема всюду, кроме точки  $\varphi_0$  и

$$\ell_0 = \theta'(\varphi_0 + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0) > 0,$$

тогда на кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  значению параметра  $\varphi = \varphi_0$  будет соответствовать участок прямой длины  $\ell_0$ .

Если функция  $\theta \in C^{2,*}(2\pi)$  такова, что  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) = 0$  при  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , то на кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  есть угловая точка с полукасательными (касательными слева и справа), наклоненными к положительному направлению оси  $Ox$  под углами  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно.

Действительно, как следует из вида дифференциала дуги (см. пункт 6 предложения 1.1), для любого малого  $\varepsilon > 0$  справедливо соотношение

$$\int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} dl(\Gamma(\varphi)) = (\theta'(\varphi_0 + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0))(1 + o(1)).$$

Отсюда сразу следует, что если функция  $\theta(\varphi)$  такова, что ее первая производная в точке  $\varphi_0$  имеет разрыв первого рода и

$$\ell_0 = \theta'(\varphi_0 + 0) - \theta'(\varphi_0 - 0),$$

то значению параметра  $\varphi = \varphi_0$  на кривой  $\Gamma(\theta, \varphi)$  будет соответствовать отрезок прямой длиной  $\ell_0$ .

Справедливость второй части предложения следует из пункта 4 предложения 1.1.

Пусть  $\Theta_n$  – множество промежутков  $[\alpha_k, \beta_k]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) из промежутка  $[0, 2\pi]$  таких, что  $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_n$ . Через  $\Psi_m$  обозначим  $m$  – мерный вектор  $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$  такой, что

$$\varphi_k \in (\beta_i, \beta_i + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

и  $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_m$ .

Обозначим через  $\mathcal{L}_m = \{\ell_k\}_{k=1}^m$   $m$  – мерный вектор с положительными координатами. Кроме того, пусть  $\mathcal{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$  – класс замкнутых выпуклых жордановых кривых  $\Gamma(t)$ , которые имеют следующие свойства:

- если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси  $OX$  под углом  $\alpha_i$ , то при переходе через эту точку угол наклона принимает значение  $\beta_i$ ;
- если касательная, скользящая по кривой, в некоторой точке наклонена к положительному направлению оси  $OX$  под углом  $\varphi_k$ , то касательная будет совпадать с участком кривой длины  $\ell_k$ .

Здесь мы считаем, что направление касательной в точке  $(x(t), y(t))$  совпадает с направлением вектора  $(x'(t), y'(t))$ .

Каждому набору  $(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$  поставим в соответствие класс  $\mathfrak{I}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$   $2\pi$ -периодических кусочно-дифференцируемых функций  $\theta(\varphi)$ , определенных следующим образом:

➤ производная  $\theta'(\varphi)$  непрерывна во всех точках промежутка  $[0, 2\pi]$ , кроме точек  $\varphi_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), в которых имеет место соотношение

$$\theta'(\varphi_k + 0) - \theta'(\varphi_k - 0) = \ell_k,$$

➤ производная  $\theta''(\varphi)$  почти всюду существует, функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не изменяет знак на периоде, обращается в ноль при  $\varphi \in [\alpha_k, \beta_k]$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и на множестве

$$(\beta_i, \beta_i + 2\pi) \setminus \bigcup_{i=1}^n (\alpha_i, \beta_i) \text{ почти всюду отлична от нуля.}$$

Из предложения 1.10 и теоремы 1.8 сразу получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.11.** *Кривая  $\Gamma(\theta)$  принадлежит классу  $\mathcal{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$  тогда и только тогда, когда она представима в виде (1.4), где функция  $\theta(\varphi)$  принадлежит классу  $\mathfrak{I}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$ .*

Отсюда и из предложения 1.2 вытекает такое следствие.

**Следствие 1.12.** *Если выпуклая кривая  $\Gamma(\theta_0)$  находится в области, ограниченной гладкой выпуклой кривой  $\Gamma(\theta_1)$ , то имеет место неравенство*

$$\theta_0(\varphi) \leq \theta_1(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

и наоборот, если  $\theta_0(\varphi) + \theta_0''(\varphi)$  не изменяет знак на периоде, а функция  $\theta_1(\varphi) + \theta_1''(\varphi)$  строго отделена от нуля и  $\theta_0(\varphi) \leq \theta_1(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , то кривая  $\Gamma(\theta_0, \varphi)$  лежит в области, ограниченной кривой  $\Gamma(\theta_1, \varphi)$ .

**Следствие 1.3.** Любой выпуклый  $n$  – угольник с вершинами в точках  $M_i(x_i, y_i)$   $i = 1, 2, \dots, n$  однозначно представим в виде (1.4), где функция  $\theta(\varphi)$  определяется равенством

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{\sin(\varphi_{i+1} - \varphi_i)} (\theta_{i+1} \sin(\varphi - \varphi_i) + \theta_i \sin(\varphi_{i+1} - \varphi)),$$

где

$$\theta_i = \sqrt{(x_i - \tilde{x})^2 + (y_i - \tilde{y})^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\tilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \tilde{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

и угол  $\varphi_i$  ( $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < \varphi_{n+1} = \varphi_1 + 2\pi$ ) есть угол наклона вектора  $\overline{M_i M_{i+1}}$  к положительному направлению оси  $OX$ .

**Определение 1.14.** Жорданову кусочно-гладкую кривую  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  будем называть  $G$ -сплайном минимального дефекта по разбиению  $\Delta_n$ , если ее эволюта на каждом участке совпадает с дугой гипоциклоиды.

**Определение 1.15.** Тригонометрическим сплайном второго порядка по разбиению  $\Delta_n$  будем называть  $2\pi$  – периодическую непрерывную вместе со своей производной функцию, которая на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет вид

$$s(\varphi) = A_i + B_i \sin \varphi + C_i \cos \varphi + D_i \sin 2\varphi + E_i \cos 2\varphi,$$

где  $A_i, B_i, C_i, D_i$  и  $E_i$  – некоторые константы.

Множество всех таких сплайнов обозначим через  $ST_2(\Delta_n)$ .

Аналогично теореме 1.7 доказывается следующее утверждение:

**Теорема 1.16.** *Для того, чтобы строго выпуклая кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  была  $G$ -сплайном минимального дефекта, необходимо и достаточно, чтобы кривая была представима в виде (1.4), где  $\theta(\varphi) = \theta(\Delta_n, \varphi)$  – тригонометрический сплайн второго порядка ( $\theta(\Delta_n) \in ST_2(\Delta_n)$ ) такой, что  $A_i > 4 \sqrt{D_i^2 + E_i^2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

Как обычно,  $\varepsilon$  – коридором  $\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$  кривой  $\Gamma$  назовем объединение всех кругов  $K_M(\varepsilon)$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами, лежащими на кривой  $\Gamma$ , то есть

$$\mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma) = \bigcup_{M \in \Gamma} K_M(\varepsilon).$$

Через  $\mathfrak{R}(\Gamma, \gamma)$  обозначим наименьшее значение  $\varepsilon$ , при котором  $\gamma \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)$ , то есть

$$\mathfrak{R}(\Gamma, \gamma) = \min\{\varepsilon : \gamma(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon(\Gamma)\}.$$

При этом будем говорить, что кривая  $\gamma$  находится от кривой  $\Gamma$  на расстоянии  $\mathfrak{R}(\Gamma, \gamma)$ . Заметим, что таким образом введенное расстояние не является коммутативным.

**Теорема 1.17.** *Если кривые  $\Gamma$  и  $\gamma$  замкнутые выпуклые (а кривая  $\Gamma$ , кроме того, кусочно-гладкая и строго выпуклая) таковы, что*

$$\|\theta(\Gamma) - \theta(\gamma)\|_C = \varepsilon,$$

то при достаточно малых  $\varepsilon$  справедливо соотношение  $\mathfrak{R}(\Gamma, \gamma) \leq \varepsilon$ .

**Доказательство.** Пусть вначале кривая  $\Gamma$  такова, что

$$\theta(\Gamma, \varphi) + \theta''(\Gamma, \varphi) > a > 0$$

для всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Из условия

$$\|\theta(\Gamma) - \theta(\gamma)\|_C = \varepsilon$$

следуют неравенства

$$\theta(\Gamma, \varphi) - \varepsilon \leq \theta(\gamma, \varphi) \leq \theta(\Gamma, \varphi) + \varepsilon.$$

В силу следствия 1.12, получаем, что кривая  $\gamma$  лежит между кривыми  $\Gamma(\theta(\Gamma) - \varepsilon, \varphi)$  и  $\Gamma(\theta(\Gamma) + \varepsilon, \varphi)$ . Поэтому, из предложения 1.2, получаем, что кривая  $\gamma$  лежит между внешней и внутренней границами  $\varepsilon$ -коридора кривой  $\Gamma$ , то есть  $\gamma \in \mathfrak{K}_\varepsilon(\Gamma)$ .

Общий случай получается предельным переходом.

**Следствие 1.18.** *Учитывая (см.[47]), что для любой функции из  $C_{[0, 2\pi]}^3$  найдется тригонометрический сплайн минимального дефекта, аппроксимирующий данную функцию с порядком  $O(n^{-3})$ . Отсюда и из теорем 1.8 и 1.17 следует, что для достаточно гладкой кривой найдется последовательность дуговых сплайнов, сходящаяся к этой кривой в метрике Хаусдорфа с порядком  $O(n^{-3})$ .*

В другом виде связь между аппроксимацией опорных функций в  $C_{[0,2\pi]}$  и аппроксимацией кривых в метрике Хаусдорфа приведена, например, в [16] стр. 144.

Таким образом, можно оценить качество приближения в хаусдорфовой метрике через приближение опорной функции в равномерной метрике.

С другой стороны, значения опорной функции не всегда известны. Приведем один алгоритм точечного задания функции  $\theta(\Gamma, \varphi)$ .

Пусть замкнутая выпуклая кривая задана параметрическими уравнениями  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, T]$ . Выберем произвольное число  $n$  и рассмотрим точки

$$t_k = \operatorname{ctg} \frac{kT}{2(n+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n;$$

$$t_k = \pi + t_{n-k}, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n.$$

Вычислим углы  $\varphi_k$  по формулам

$$\varphi_k = \operatorname{arcctg} \frac{x'(t_k)}{y'(t_k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\varphi_k = \pi + \operatorname{arcctg} \frac{x'(t_k)}{y'(t_k)}, \quad k = n+1, n+2, \dots, 2n,$$

а значения функции толкателя найдем по формулам

$$\theta_k = -x(t_k) \sin \varphi_k + y(t_k) \cos \varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2n.$$

Таким образом, мы получаем таблицу значений  $(\theta_k, \varphi_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, 2n$ ). Применяя различные методы обработки таблич-

ных данных ([19]), получим аналитическое описание функции  $\theta(\Gamma, \varphi)$ .

## 1.2. Тригонометрические и квазитригонометрические сплайны

Как следует из предыдущего, описание кривых дугами окружностей тесно связано с описанием опорной функции тригонометрическими сплайнами, чему и посвящены результаты этого параграфа.

### 1.2.1. Эрмитовые тригонометрические сплайны

Пусть  $\Delta_n$  – произвольное разбиение промежутка  $[0; 2\pi]$  точками ( $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 2\pi$ ) и  $t_{i+1/2} = t_i + 0,5 h_{i+1/2}$ , где  $h_{i+1/2} = t_{i+1} - t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) и, кроме того,  $\Delta_{2n}^* = \{t_i\}_{i=0}^n \cup \{t_{i+1/2}\}_{i=0}^{n-1}$ .

**Определение 1.19.** Если известны значения функции  $f$  и ее производной  $f'$  в точках разбиения  $\Delta_n$ , то *тригонометрическим эрмитовым сплайном* будем называть функцию  $\tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) \in C_{[0; 2\pi]}^1$ , которая на каждом из промежутков разбиения  $\Delta_{2n}^*$  имеет вид  $\tilde{s}(t) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin t + C_{i+1/2} \cos t$ , (где  $A_{i+1/2}$ ,  $B_{i+1/2}$  и  $C_{i+1/2}$  постоянные) и однозначно определяется интерполяционными условиями

$$\tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t_i) = f_i = f(t_i), \quad \tilde{s}'(f, \Delta_{2n}^*, t_i) = f'_i = f'(t_i) \quad (1.14)$$

$$(i = 0, 1, \dots, n).$$

**Теорема 1.20.** Если для функции  $f \in C^4_{[0, 2\pi]}$  выполняется условие

$$|f(t) + f''(t)| > 0, \quad (1.15)$$

то при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) и  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} & \left| f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) \right| = \\ & = \left| f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2} \right| h_{i+1/2}^3 \cdot \frac{(\tau + 0,5)^2 |\tau - 0,25|}{12} + O(h_{i+1/2}^4), \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\tau = (t - t_{i+1/2})/h_{i+1/2}$ .

**Доказательство.** Пусть при некотором  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) и  $t \in [t_i, t_{i+1/2}]$  имеет место равенство

$$\begin{aligned} s(f, t) = a_i \sin(\tau h_{i+1/2}) + \frac{f'_i - a_i \cos(0,5h_{i+1/2})}{\sin(0,5h_{i+1/2})} \cdot (\cos(\tau h_{i+1/2}) - \\ - \cos(0,5h_{i+1/2})) + f_i + a_i \sin(0,5h_{i+1/2}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Если же  $t \in [t_{i+1/2}, t_{i+1}]$ , то аналогично получаем

$$\begin{aligned} s(f, t) = a_i \sin(\tau h_{i+1/2}) - \frac{f'_{i+1} - a_i \cos(0,5h_{i+1/2})}{\sin(0,5h_{i+1/2})} \cdot (\cos(\tau h_{i+1/2}) - \\ - \cos(0,5h_{i+1/2})) + f_{i+1} - a_i \sin(0,5h_{i+1/2}), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где числа  $a_i$  определены следующим образом

$$a_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{2} \cdot \frac{\sin(0,5h_{i+1/2})}{1 - \cos(0,5h_{i+1/2})} - \frac{f'_{i+1} + f'_i}{2}.$$

Покажем, что функция, заданная равенствами (1.17), (1.18) и есть эрмитовый тригонометрический сплайн  $\tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t)$ . Не-

сложно убедиться в том, что выполняются условия интерполяции (1.14) и, кроме того, имеют место равенства

$$s(f, t_i - 0) = s(f, t_i + 0), \quad s'(f, t_i - 0) = s'(f, t_i + 0) \\ (i = 0, 1, \dots, n)$$

и

$$s(f, t_{i+1/2} - 0) = s(f, t_{i+1/2} + 0), \\ s'(f, t_{i+1/2} - 0) = s'(f, t_{i+1/2} + 0) \\ (i = 0, 1, \dots, n-1),$$

то есть, функция  $s(f, t)$  непрерывная вместе со своей производной на  $[0; 2\pi]$ .

Для завершения доказательства теоремы остается показать справедливость соотношения (1.16).

Используя формулу Тейлора при  $t \in [t_i, t_{i+1/2}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), получаем

$$f(t) = f_{i+1/2} + f'_{i+1/2} h_{i+1/2} \tau + f''_{i+1/2} h_{i+1/2}^2 \frac{\tau^2}{2} + \\ + f'''_{i+1/2} h_{i+1/2}^3 \frac{\tau^3}{6} + O(h_{i+1/2}^4).$$

Кроме того, используя известные асимптотические равенства

$$\cos(0,5h_{i+1/2}) = 1 - \frac{h_{i+1/2}^2}{8} + O(h_{i+1/2}^4), \\ \sin(0,5h_{i+1/2}) = \frac{h_{i+1/2}}{2} - \frac{h_{i+1/2}^3}{48} + O(h_{i+1/2}^5),$$

и представление

$$a_i = f'_{i+1/2} - \frac{1}{24} f'''_{i+1/2} h_{i+1/2}^2 + O(h_{i+1/2}^3),$$

сразу получаем

$$\begin{aligned} \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) &= f_{i+1/2} + f'_{i+1/2} h_{i+1/2} \tau + \\ &+ f''_{i+1/2} h_{i+1/2}^2 \frac{\tau^2}{2} + f'''_{i+1/2} h_{i+1/2}^3 \frac{\tau^3}{6} + \\ &+ (f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}) \cdot \frac{(\tau + 0,5)^2 (\tau - 0,25)}{12} \cdot h_{i+1/2}^3 + O(h_{i+1/2}^4). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) &= \\ &= (f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}) \cdot \frac{(\tau + 0,5)^2 (\tau - 0,25)}{12} \cdot h_{i+1/2}^3 + O(h_{i+1/2}^4), \end{aligned}$$

что и доказывает теорему 1.20 при  $t \in [t_i, t_{i+1/2}]$ . Для  $t \in [t_{i+1/2}, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) доказательство аналогично.

Из данной теоремы и очевидного соотношения

$$\max_{t \in [t_i, t_{i+1/2}]} (\tau + 0,5)^2 (\tau - 0,25) = \frac{1}{8},$$

получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.21.** *Если функция  $f \in C^4_{[0; 2\pi]}$  такова, что выполняется условие (1.15), то выполняется соотношение*

$$\begin{aligned} &\max_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{96} \max_{i=0, 1, \dots, n-1} h_{i+1/2}^3 |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| + O(h_n^4), \end{aligned}$$

где

$$h_n = \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_{i+1/2}.$$

Как обычно, для непрерывной на  $[a, b]$  функции  $z$ , положим

$$\|z\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |z(t)|.$$

**Теорема 1.22.** Пусть  $M > 0$  и функция  $f \in C^4_{[0;2\pi]}$  такова, что выполняется условие (1.15) и  $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$  - последовательность кусочно-непрерывных на отрезке  $[0, 2\pi]$  функций таких, что

$$\|f' + f''' - f_n\|_{\infty} \leq \frac{M}{n^{3/4}}.$$

Определим последовательность разбиений  $\{\Delta_n^0\}_{n=1}^{\infty}$  (где  $\Delta_n^0 = \{t_{i,n}^0\}_{i=0}^n$ ) следующими равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^0} \left( |f_n(t)|^{1/3} + \frac{1}{n^{3/4}} \right) dt = \frac{i}{n} \int_0^{2\pi} \left( |f_n(t)|^{1/3} + \frac{1}{n^{3/4}} \right) dt, \quad (1.19)$$

( $i = 0, 1, \dots, n, \quad n = 1, 2, \dots$ ).

Тогда для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$  выполняется соотношение

$$\max_{t \in [0, 2\pi]} \left| f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) \right| = \frac{1}{96n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt \right)^3 + o(n^{-3}),$$

то есть

$$\left\| f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*, t) \right\|_{C[0, 2\pi]} = \frac{1}{96n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} d\varphi \right)^3 (1 + o(1)).$$

Это утверждение получается из теоремы 1.20 и того факта, что если узлы разбиения  $\Delta_n^0$  выбраны из условия (1.19), то равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{96} h_{i+1/2}^3 |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| + O(h_{i+1/2}^4) = \\ & = \frac{1}{96n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} d\varphi \right)^3. \end{aligned}$$

Можно показать (схему доказательства см. [19]), что для любого разбиения  $\Delta_n$  выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| f(t) - \tilde{s}(f, \Delta_{2n}^*) \right\|_{C[0, 2\pi]} \geq \\ & \geq \frac{1}{96n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} d\varphi \right)^3 (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Отсюда и из условия теоремы 1.22 следует, что последовательность разбиений  $\{\Delta_n^0\}_{n=1}^\infty$  является асимптотически оптимальной, то есть никакая другая последовательность разбиений не даст погрешность приближения меньше.

### 1.2.2. Тригонометрические интерполяционные сплайны минимального дефекта

**Определение 1.23.** Если известны значения функции  $f(t)$  в точках  $t_{i+1/2}$ , то *интерполяционным тригонометрическим сплайном минимального дефекта* по разбиению  $\Delta_n$ , будем называть  $2\pi$

– периодическую функцию  $s(f, \Delta_n, t)$ , непрерывную вместе со своей производной, которая на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет вид

$$s(t) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin t + C_{i+1/2} \cos t,$$

(где  $A_{i+1/2}$ ,  $B_{i+1/2}$  и  $C_{i+1/2}$  – постоянные) и однозначно определяется интерполяционными условиями

$$s(f, \Delta_n, t_{i+1/2}) = f_{i+1/2} = f(t_{i+1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (1.20)$$

Нетрудно видеть, что если  $m_i = s(f, \Delta_n, t_i)$ , то тригонометрический сплайн

$$\begin{aligned} s(f, \Delta_n, t) = & \frac{m_{i+1} - m_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} \sin(t - t_{i+1/2}) - \\ & - \frac{m_{i+1} - 2f_{i+1/2} + m_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} (\cos(t - t_{i+1/2}) - \cos(0,5h_{i+1/2})) + \frac{m_{i+1} + m_i}{2} \end{aligned} \quad (1.21)$$

интерполирует функцию  $f(t)$  в точках  $t_{i+1/2}$ .

Замечая, что

$$\begin{aligned} s'(f, \Delta_n, t) = & \frac{m_{i+1} - m_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} \cos(t - t_{i+1/2}) + \\ & + \frac{m_{i+1} - 2f_{i+1/2} + m_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} \sin(t - t_{i+1/2}), \end{aligned}$$

условие непрерывности первой производной в узле  $t_i$

$$s'(f, \Delta_n, t_i - 0) = s'(f, \Delta_n, t_i + 0)$$

будет иметь вид

$$\frac{m_i - m_{i-1}}{2 \sin(0,5h_{i-1/2})} \cos(0,5h_{i-1/2}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m_i - 2f_{i-1/2} + m_{i-1}}{2(1 - \cos(0,5h_{i-1/2}))} \sin(0,5h_{i-1/2}) = \\
& = \frac{m_{i+1} - m_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} \cos(0,5h_{i+1/2}) - \\
& - \frac{m_{i+1} - 2f_{i+1/2} + m_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} \sin(0,5h_{i+1/2}).
\end{aligned}$$

Таким образом, числа  $m_i$  однозначно определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} m_0 = m_n, \\ \lambda_i m_{i-1} + \sigma_i m_i + \mu_i m_{i+1} = \delta_i, & (i = 1, 2, \dots, n), \\ m_{n+1} = m_1, \end{cases} \quad (1.22)$$

где

$$\begin{aligned}
\lambda_i &= \frac{1}{2 \sin(0,5h_{i-1/2})}, \quad \mu_i = \frac{1}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})}, \\
\sigma_i &= \frac{\sin(0,5h_{i-1/2})}{2(1 - \cos(0,5h_{i-1/2}))} + \frac{\sin(0,5h_{i+1/2})}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} + \\
& + \frac{\cos(0,5h_{i-1/2})}{2 \sin(0,5h_{i-1/2})} + \frac{\cos(0,5h_{i+1/2})}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})}, \\
\delta_i &= f_{i-1/2} \cdot \frac{\sin(0,5h_{i-1/2})}{1 - \cos(0,5h_{i-1/2})} + f_{i+1/2} \cdot \frac{\sin(0,5h_{i+1/2})}{1 - \cos(0,5h_{i+1/2})}.
\end{aligned}$$

Ясно, что матрица системы (1.22) имеет диагональное преобладание. Именно поэтому, в силу критерия Адамара (см., на-

пример [9], стр. 333), система имеет одно и только одно решение, которое легко получить, например, методом прогонки (см., например [9], стр. 336).

**Определение 1.24.** *Тригонометрическим сплайном дефекта 2 по разбиению  $\Delta_n$  назовем любую непрерывную функцию, которая на каждом промежутке  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) совпадает с тригонометрическим полиномом первой степени.*

**Определение 1.25.** *Локальным интерполяционным тригонометрическим сплайном  $s_2(f, \Delta_n)$  будем называть сплайн дефекта 2, который на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) однозначно определяется интерполяционными условиями*

$$\begin{aligned} s_2(f, \Delta_n, t_i) &= f_i, \\ s_2(f, \Delta_n, t_{i+1/2}) &= f_{i+1/2}, \\ s_2(f, \Delta_n, t_{i+1}) &= f_{i+1}. \end{aligned}$$

Для  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) функция  $s_2(f, \Delta_n, t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} s_2(f, \Delta_n, t) &= \frac{f_{i+1} - f_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} \sin(t - t_{i+1/2}) - \\ &- \frac{f_{i+1} - 2f_{i+1/2} + f_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} (\cos(t - t_{i+1/2}) - \cos(0,5h_{i+1/2})) + \frac{f_{i+1} + f_i}{2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Используя асимптотические равенства

$$\cos(0,5h_{i+1/2}) = 1 - \frac{h_{i+1/2}^2}{8} + O(h_{i+1/2}^4), \quad (1.24)$$

$$\sin(0,5h_{i+1/2}) = \frac{h_{i+1/2}}{2} - \frac{h_{i+1/2}^3}{48} + O(h_{i+1/2}^5), \quad (1.25)$$

$$\cos(0,5h_{i-1/2}) = 1 - \frac{h_{i-1/2}^2}{8} + O(h_{i-1/2}^4), \quad (1.26)$$

$$\sin(0,5h_{i-1/2}) = \frac{h_{i-1/2}}{2} - \frac{h_{i-1/2}^3}{48} + O(h_{i-1/2}^5), \quad (1.27)$$

убеждаемся в справедливости соотношений

$$\frac{\sin(t - t_{i+1/2})}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} = \frac{t - t_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} \left( 1 + \frac{1}{3!} (h_{i+1/2}^2 - (t - t_{i+1/2})^2) \right) + O(h_{i-1/2}^2)$$

и

$$\frac{\cos(t - t_{i+1/2}) - \cos(0,5h_{i+1/2})}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} = \frac{h_{i+1/2} - 4(t - t_{i+1/2})^2}{2h_{i+1/2}^2} \left( 1 + O(h_{i+1/2}^2) \right).$$

Отсюда и из формулы Тейлора, сразу получаем

$$\begin{aligned} & f(t) - s_2(f, \Delta_n, t) = \\ & = \frac{1}{6} (t - t_i)(t - t_{i+1/2})(t - t_{i+1})(f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}) + O(h_{i+1/2}^4). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Дальнейшая наша задача состоит в том, чтобы показать, что для регулярных последовательностей разбиений интерполяционные тригонометрические сплайны минимального дефекта отличаются от локальных тригонометрических сплайнов на величину пренебрежительно малую по сравнению с величиной погрешности как тех, так и других сплайнов. Это даст нам возможность найти главный член асимптотики уклонения интерпо-

ляционных тригонометрических сплайнов минимального дефекта от функции  $f(t)$ .

Положим  $c_i = m_i - f_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда система (1.22) переписывается в виде

$$\lambda_i c_{i-1} + \sigma_i c_i + \mu_i c_{i+1} = \xi_i,$$

где

$$\xi_i = \delta_i - \lambda_i f_{i-1} - \sigma_i f_i - \mu_i f_{i+1}.$$

Отсюда и из критерия Адамара ([9]) имеем

$$|c_i| \leq \max_{i=0,1,\dots,n} \frac{\sin(0,5h_{i+1/2}) \cdot \sin(0,5h_{i-1/2})}{\sin(0,5(h_{i-1/2} + h_{i+1/2}))} \cdot |\xi_i|. \quad (1.29)$$

С помощью интегрирования по частям, легко убедиться в том, что

$$\xi_i = \int_{t_{i-1/2}}^{t_{i+1/2}} K(t) f'''(t) dt + O(h_{i+1/2}^3 + h_{i-1/2}^3),$$

где

$$K(t) = \begin{cases} -0,5\lambda_i (t - t_{i-1})^2, & (t \in [t_{i-1}, t_{i-1/2}]); \\ \frac{1 + \cos(0,5h_{i-1/2}) - 2\cos^2(0,5h_{i-1/2})}{4\sin(0,5h_{i-1/2})(1 - \cos(0,5h_{i-1/2}))} \cdot (t - t_i)^2 + \\ + \frac{h_{i-1/2} \sin(0,5h_{i-1/2})}{4(1 - \cos(0,5h_{i-1/2}))} \cdot (t - t_i), & (t \in [t_{i-1/2}, t_i]); \\ -\frac{1 + \cos(0,5h_{i+1/2}) - 2\cos^2(0,5h_{i+1/2})}{4\sin(0,5h_{i+1/2})(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} \cdot (t - t_i)^2 - \\ - \frac{h_{i-1/2} \sin(0,5h_{i-1/2})}{4(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} \cdot (t - t_i), & (t \in [t_i, t_{i+1/2}]); \\ 0,5\mu_i (t - t_{i+1})^2, & (t \in [t_{i+1/2}, t_{i+1}]). \end{cases}$$

Так как для любого  $t \in [t_{i-1}, t_{i+1}]$  справедливо равенство

$$\text{sign } K(t) = \text{sign } (t - t_i),$$

то по теореме о среднем значении для интегралов, найдутся точки  $\eta_{i-1/2} \in [t_{i-1}, t_i]$  и  $\eta_{i+1/2} \in [t_i, t_{i+1}]$  такие, что

$$\xi_i = f'''(\eta_{i-1/2}) \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t) dt + \theta'''(\eta_{i+1/2}) \int_{t_i}^{t_{i+1}} K(t) dt + O(h_n^3).$$

Используя асимптотические равенства (1.24) – (1.27), получаем

$$\begin{aligned} \xi_i &\leq \frac{1}{12} \left| f'''(\eta_{i+1/2}) h_{i+1/2}^2 - f'''(\eta_{i-1/2}) h_{i-1/2}^2 \right| + O(h_{i+1/2}^3 + h_{i-1/2}^3) = \\ &= \frac{|f_i'''}{12} \cdot \left| h_{i+1/2}^2 - h_{i-1/2}^2 \right| + o(h_{i+1/2}^3 + h_{i-1/2}^3). \end{aligned}$$

Таким образом, если последовательность разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  является регулярной, то равномерно по  $i$  выполняется соотношение

$$|c_i| = o(h_n^3).$$

Как обычно, для непрерывной на  $[a, b]$  функции  $z$ , положим

$$\|z\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |z(t)|.$$

Из представлений (1.21) и (1.23) вытекает соотношение

$$\|s_2(\theta, \Delta_n) - s(\theta, \Delta_n)\|_{C(t_i, t_{i+1})} = o(h_n^3). \quad (1.30)$$

Отсюда и из (1.28) следует, что при  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) и при  $n \rightarrow \infty$  выполняется соотношение

$$\begin{aligned} f(t) - s(f, \Delta_n, t) &= f(t) - s_2(f, \Delta_n, t) + s_2(f, \Delta_n, t) - s(f, \Delta_n, t) = \\ &= \left( (t - t_{i+1/2})^2 - 0,25h_{i+1/2}^2 \right) \cdot (t - t_{i+1/2}) \cdot \frac{f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}}{6} + O(h_n^4). \end{aligned} \quad (1.31)$$

То есть, для регулярной последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  и функции  $f \in C_{[0, 2\pi]}^4$  погрешность ее аппроксимации интерполяционными тригонометрическими сплайнами дает асимптотическое равенство

$$\|s(f, \Delta_n) - f\|_{C[0, 2\pi]} = \frac{1}{72\sqrt{3}} \max_{i=0, 1, \dots, n-1} h_{i+1/2}^3 \cdot |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| + o(h_n^3). \quad (1.32)$$

В частности, для равномерного разбиения  $\delta_n = \{2\pi i/n\}_{i=0}^n$  будет выполняться равенство

$$\|s(f, \delta_n) - f\|_{C[0, 2\pi]} = \frac{\pi^3}{9\sqrt{3}n^3} \max_{i=0, 1, \dots, n-1} |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| \cdot (1 + o(1)).$$

Интуитивно ясно, что погрешность приближения (правая часть (1.32)) будет наименьшей в том случае, когда величины  $h_{i+1/2}^3 \cdot |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}|$  будут примерно одинаковыми на каждом промежутке. Точная формулировка этого факта даст алгоритм выбора последовательности асимптотически оптимальных разбиений  $\Delta_n^0$ .

**Предложение 1.26.** Пусть  $M > 0$ , функция  $f(t)$  имеет пятую непрерывную производную и  $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$  – последовательность кусочно-непрерывных на отрезке  $[0, 2\pi]$  функций таких, что

$$\|f' + f''' - f_n\|_{\infty} \leq \frac{M}{n^{3/4}}. \quad (1.33)$$

Определим последовательность разбиений  $\{\Delta_n^0\}_{n=1}^{\infty}$  (где  $\Delta_n^0 = \{t_{i,n}^0\}_{i=1}^{\infty}$ ) следующими равенствами

$$\int_0^{t_{i,n}^0} \left( |f_n(t)|^{1/3} + \frac{1}{n^{3/4}} \right) dt = \frac{i}{n} \int_0^{2\pi} \left( |f_n(t)|^{1/3} + \frac{1}{n^{3/4}} \right) dt, \quad (1.34)$$

( $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ).

Тогда выполняется соотношение

$$\|s(f, \Delta_n^0) - f\|_{C[0, 2\pi]} = \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt \right)^3 (1 + o(1)).$$

Кроме того, для любой последовательности тригонометрических сплайнов дефекта 2  $\{s_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$  с  $n$  узлами (а, следова-

тельно, и сплайнов минимального дефекта) при  $n \rightarrow \infty$  выполняется неравенство

$$\|s_{2,n} - f\|_{C[0,2\pi]} \geq \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt \right)^3 (1 + o(1)).$$

Это утверждение можно переписать в эквивалентном виде.

**Предложение 1.27.** Пусть функция  $f(t)$  имеет пятую непрерывную производную. Для любой наперед заданной погрешности аппроксимации  $\varepsilon > 0$  выберем число  $n^* = n^*(\varepsilon)$  из условия

$$n^* = \left[ \frac{1}{\sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} d\varphi \right] + 1, \quad (1.35)$$

где  $[\cdot]$  - целая часть числа.

Если узлы разбиения  $\Delta_n^0$  определяются из равенства (1.34) при  $n = n^*$ , то при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет иметь место неравенство

$$\|s(f, \Delta_{n^*}^0) - f\|_{C[0,2\pi]} = \varepsilon(1 + o(1)).$$

Кроме того, для любой последовательности сплайнов дефекта 2  $\{s_{2,n}\}$  с  $n$  узлами таких, что

$$\|s_{2,n} - f\|_{C[0,2\pi]} \leq \varepsilon$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$  будет выполняться неравенство

$$n/n^* \geq 1 + o(1). \quad (1.36)$$

Таким образом, при заданной погрешности приближения опорной функции  $f(t)$ , никакая кривая, состоящая из дуг окружностей, не может иметь меньше  $n^*$  дуг. Следовательно, по-

строенный нами алгоритм является асимптотически оптимальным.

Переходя к доказательству, отметим, что если узлы разбиения  $\Delta_n^0$  выбраны из условия (1.34), то равномерно по  $i$  выполняется равенство

$$h_{i+1/2}^3 \cdot |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| + O(h_n^4) = \frac{1}{n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt \right)^3. \quad (1.37)$$

Действительно, положим

$$A_n = \int_0^{2\pi} \left( |f_n(t)|^{1/3} + \frac{1}{n^{3/4}} \right) dt$$

и

$$A = \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt.$$

Из равенства (1.34) и условия (1.33) вытекает, что при достаточно больших  $n$  существуют числа  $|\chi_{i+1/2}| \leq 1$  такие, что

$$\int_{t_{i,n}^o}^{t_{i+1,n}^o} \left( |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} + n^{-3/4} + \chi_{i+1/2} M n^{-3/4} \right) dt = \frac{A_n}{n}.$$

По теореме о среднем существует точка  $\zeta_{i+1/2} \in (t_{i,n}^o, t_{i+1,n}^o)$  такая, что

$$\left( |f'(\zeta_{i+1/2}) + f'''(\zeta_{i+1/2})|^{1/3} + n^{-3/4} (1 + \chi_{i+1/2} M) \right) h_{i+1/2} = \frac{A_n}{n}. \quad (1.38)$$

Таким образом, из (1.31) и (1.38) имеем

$$\begin{aligned}
\max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| s(f, \Delta_n^0, t) - f(t) \right| &= \frac{1}{72\sqrt{3}} |f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2}| \cdot h_{i+1/2}^3 + O(h_n^4) = \\
&= \frac{1}{72\sqrt{3}} |f'(\zeta_{i+1/2}) + f'''(\zeta_{i+1/2})| \cdot h_{i+1/2}^3 + O(h_n^4) = \\
&= \frac{1}{72\sqrt{3}} \left( |f'(\zeta_{i+1/2}) + f'''(\zeta_{i+1/2})|^{1/3} h_{i+1/2} \right)^3 + O(h_n^4) = \\
&= \frac{1}{72\sqrt{3}} \left( \frac{A_n}{n} \right)^3 + O(h_n^4).
\end{aligned}$$

Кроме того, из равенства (1.38) и определения величин  $A$  и  $A_n$  получаем, что

$$A_n = \int_0^{2\pi} \left( |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} + n^{-3/4} (1 + \chi_{i+1/2} M) \right) dt = A + O(n^{-3/4}). \quad (1.39)$$

Из равенства (1.34) следует, что  $n^{-3/4} h_{i+1/2} \leq A_n / n$ , то есть  $h_{i+1/2} \leq A_n \cdot n^{-1/4}$ .

Таким образом, учитывая (1.39), получаем

$$\begin{aligned}
\|s(f, \Delta_n^0) - f\|_{C[0, 2\pi]} &= \max_{i=0, 1, \dots, n-1} \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} \left| s(f, \Delta_n^0, t) - f(t) \right| = \\
&= \frac{A^3}{72\sqrt{3}n^3} (1 + o(1)).
\end{aligned}$$

Покажем теперь выполнение неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{n(\varepsilon)}{n^*(\varepsilon)} \geq 1,$$

или, в другой форме, неравенства

$$\|s_{2,n} - f\|_{C[0, 2\pi]} \geq \frac{1}{72\sqrt{3}n^3} \left( \int_0^{2\pi} |f'(t) + f'''(t)|^{1/3} dt \right)^3 (1 + o(1))$$

для любой последовательности  $\{s_{2,n}\}_{n=1}^{\infty}$  сплайнов дефекта 2 с  $n$  узлами.

Доказательство этого факта довольно сложное (см. [20]). Поэтому мы приведем лишь его схему.

Через  $(H(\Delta_N))$  обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых  $2\pi$  – периодических функций  $\ell(t)$ , которые на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) имеют вид

$$\ell(t) = a_i + b_i t + c_i \sin t + d_i \cos t, \quad (1.40)$$

где  $a_i, b_i, c_i$  и  $d_i$  – некоторые константы.

**Определение 1.28.** Эрмитовым квазитригонометрическим сплайном будем называть функцию  $\ell(f, \Delta_N) \in H(\Delta_N)$ , которая однозначно определяется интерполяционными условиями

$$\ell(f, \Delta_N, f_i) = f_i, \quad \ell'(f, \Delta_N, f_i) = f_i' \quad (i = 0, 1, \dots, N-1).$$

Проводя построения, аналогичные тем, которые приведены при определении погрешности приближения сплайнами  $s_2(f, \Delta_n)$ , убеждаемся в том, что на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) эрмитовый сплайн имеет вид

$$\begin{aligned} \ell(f, \Delta_N, t) = & A_i + B_i(t - t_{i+1/2}) + C_i \sin(t - t_{i+1/2}) + \\ & + D_i(\cos(0,5h_{i+1/2}) - \cos(t - t_{i+1/2})), \end{aligned}$$

где постоянные  $A_i, B_i, C_i$  и  $D_i$  определяются равенствами

$$A_i = \frac{f_{i+1} + f_i}{2},$$

$$B_i = \frac{(f_{i+1} - f_i) \cos(0,5h_{i+1/2}) - (f'_{i+1} + f'_i) \sin(0,5h_{i+1/2})}{2((0,5h_{i+1/2}) \cos(0,5h_{i+1/2}) - \sin(0,5h_{i+1/2}))},$$

$$C_i = \frac{f'_{i+1} + f'_i - 2B_i}{2 \cos(0,5h_{i+1/2})}, \quad D_i = \frac{f'_{i+1} - f'_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})}.$$

Кроме того, если  $f(t)$  имеет непрерывную пятую производную, то выполняется соотношение

$$f(t) - \ell(f, \Delta_N, t) = \frac{(t-t_i)^2(t_{i+1}-t)^2}{24} \cdot (f''_{i+1/2} + f^{(4)}_{i+1/2}) + O(h_{i+1/2}^5). \quad (1.41)$$

Можно убедиться в том, что на каждом из промежутков  $[t_i, t_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, N-1$ ) имеет место равенство

$$\begin{aligned} \ell'(f, \Delta_N, t) + \ell'''(f, \Delta_N, t) &= B_i = \\ &= f'_{i+1/2} + f'''_{i+1/2} + \frac{h_{i+1/2}^2}{40} (f'''_{i+1/2} + f^{(5)}_{i+1/2}) + o(h_{i+1/2}^2). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Выберем число

$$N = \lfloor n^{0,9} \rfloor + 1$$

и построим разбиение

$$\delta_N = \left\{ \frac{2\pi i}{N} \right\}_{i=0}^{-N}.$$

Из равенства (1.41) получаем соотношение

$$\| \ell(f, \delta_N) - f \|_{C[0, 2\pi]} = O(N^4). \quad (1.43)$$

Аналогично, как это было сделано в [19] (стр.293), можно показать, что если для тригонометрического сплайна  $s_{2, n_i}$  дефекта 2 с  $n_i$  узлами имеет место неравенство

$$\| \ell(f, \delta_N) - s_{2, n_i} \|_{C[2\pi i/N, 2\pi(i+1)/N]} \leq \varepsilon,$$

то

$$n_i \geq \frac{2\pi}{N \sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \sqrt[3]{B_i} (1 + O(\sqrt[3]{\varepsilon})),$$

что эквивалентно (см. (1.42)) неравенству

$$\begin{aligned} n_i &\geq \frac{2\pi}{N \sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \sqrt[3]{\theta' \left( \frac{2\pi(i+1/2)}{N} \right) + \theta'' \left( \frac{2\pi(i+1/2)}{N} \right)} (1 + O(\sqrt[3]{\varepsilon})) = \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \int_{2\pi i/N}^{2\pi(i+1)/N} \sqrt[3]{f'(t) + f''(t)} dt (1 + O(\sqrt[3]{\varepsilon})). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$n = \sum_{i=0}^{N-1} n_i \geq \frac{1}{\sqrt[3]{72\sqrt{3}\varepsilon}} \int_0^{2\pi} \sqrt[3]{f'(t) + f''(t)} dt (1 + o(1)),$$

что и завершает доказательство.

Приведем другую конструкцию квазитригонометрических сплайнов, основанную на использовании соответствующих В – сплайнов.

### 1.2.3. Квазитригонометрические В – сплайны и их линейные комбинации

Пусть функция  $\tilde{T}_h(t)$  такова, что для любого  $h > 0$

$$\tilde{T}_h(t) = \begin{cases} t - \sin t + 2(t-h)\cos h - 2\sin(t-h), & t \in [0, h], \\ 2h - t + \sin(t-2h), & t \in [h, 2h], \\ 0, & |t| \geq 2h, \end{cases}$$

и

$$\tilde{T}_h(-t) = \tilde{T}_h(t).$$

Функцию

$$T_h(t) = \frac{\tilde{T}_h(t)}{2h(1 - \cosh h)} \quad (1.44)$$

будем называть *нормированным квазитригонометрическим В – сплайном* (рис. 1.2 – 1.5). Нетрудно убедиться в том, что  $T_h(t) \in C^2$  и имеет место тождество

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} T_h(t - ih) \equiv 1.$$

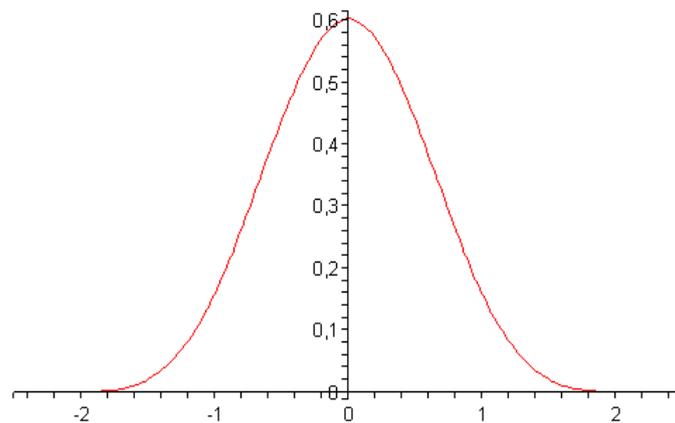


Рис. 1.2. Квазитригонометрический В-сплайн

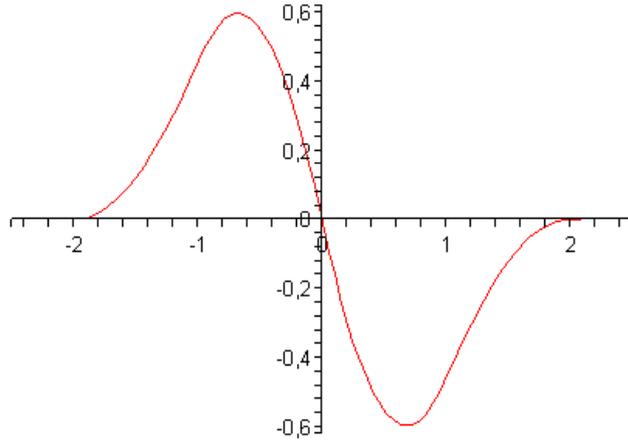


Рис. 1.3. Производная квазитригонометрического В-сплайна

Ясно, что функция

$$sc(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i T_h(t - ih) \quad (1.45)$$

есть *квазитригонометрический сплайн минимального дефекта* по разбиению  $\{ih\}_{i=-\infty}^{\infty}$ . Для любого  $2\pi$  – периодического сплайна при любом  $t \in (ih, (i+1)h)$  в представлении (1.45) используются лишь три слагаемых, поэтому сужение (1.45) на промежуток  $[0; 2\pi]$  можно записать в виде

$$sc(t) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i T_h(t - ih), \quad (1.46)$$

где  $h = 2\pi/n$ . В силу периодичности  $sc(t)$  имеем  $c_{-1} = c_{n-1}$ ,  $c_0 = c_n$  и  $c_1 = c_{n+1}$ .

В частности, если потребовать выполнение условий

$$\begin{aligned} sc(ih) &= (c_{i-1} + c_{i+1}) T_h(h) + c_i T_h(0) = \\ &= c_i \frac{\sin h - h \cosh h}{h(1 - \cos h)} + (c_{i-1} + c_{i+1}) \frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} = f_i, \end{aligned}$$

то есть, выбрать коэффициенты  $c_i$  из системы

$$\begin{cases} c_i = c_{n+i}, \\ c_{i-1} \frac{h - \sin h}{\sin h - h \cos h} + c_i + c_{i+1} \frac{h - \sin h}{\sin h - h \cos h} = 2 \frac{h(1 - \cos h)}{\sin h - h \cos h} f_i, \\ i = 0, \dots, n, \end{cases}$$

то сплайн (1.46) будет интерполяционным сплайном минимального дефекта по равномерному разбиению  $\{ih\}_{i=0}^{n+1}$ .

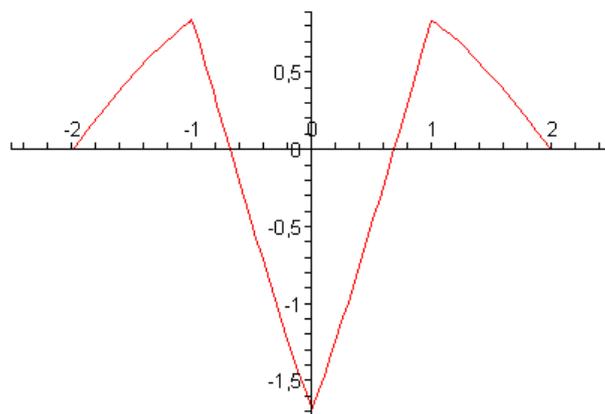


Рис. 1.4. Вторая производная квазитригонометрического В-сплайна.

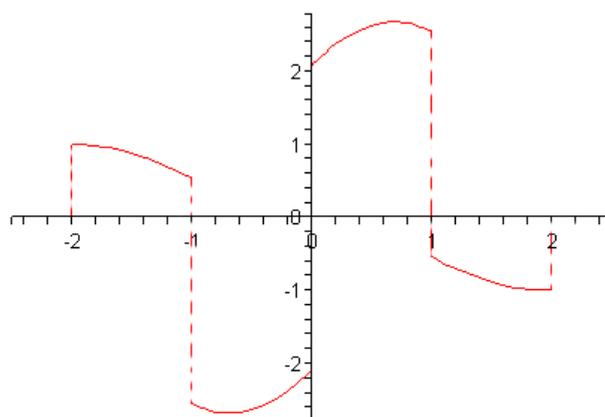


Рис. 1.5. Третья производная квазитригонометрического В-сплайна.

**Теорема 1.29.** Пусть  $n=1,2,\dots$ ,  $h=2\pi/n$ ,  $f_i = f(ih)$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и

$$\tilde{c}_i = \tilde{c}_i(f) = \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i, \quad (1.47)$$

тогда

$$sc(f, \Delta_n^0, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \tilde{c}_i \mathbb{T}_h(t - ih) \quad (1.48)$$

есть интерполяционный квазитригонометрический сплайн минимального дефекта по равномерному разбиению  $\Delta_n^0 = \{ih\}_{i=0}^n$ .

Действительно, для любого  $2\pi$ -периодического сплайна  $sc(t)$  при любом  $t \in (ih, (i+1)h)$  в представлении В-сплайна используются лишь три слагаемых. Таким образом, используя свойства квазитригонометрического В-сплайна, сразу получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned} sc(ih) &= (c_{i-1} + c_{i+1}) \mathbb{T}_h(h) + c_i \mathbb{T}_h(0) = \\ &= c_i \frac{\sin h - h \cos h}{h(1 - \cos h)} + (c_{i-1} + c_{i+1}) \frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} = \\ &= c_i + \frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \Delta^2 c_i. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Отсюда и из (1.48) сразу получаем

$$\begin{aligned} sc(f, \Delta_n^0, ih) &= \\ &= \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i + \Delta^2 \left( \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i - \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^{v+1} \Delta^{2v+2} f_i = \\
&= \sum_{v=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i - \sum_{v=1}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i = \\
&= \Delta^0 f_i = f_i.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$sc(f, \Delta_n^0, ih) = f_i,$$

то есть сплайн  $sc(f, \Delta_n^0, ih)$  интерполирует функцию  $f(t)$  в узлах  $ih$ .

Рассмотрим сплайн

$$sc_m(f, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \sum_{v=0}^m \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i \mathbb{T}_h(t - ih).$$

Из соотношения

$$\left| \Delta^{2v} f_i \right| \leq 4^{v-3} \max_k \left| \Delta^6 f_k \right|,$$

справедливого для всех  $v \geq 3$ , имеем

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{v=3}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i \right| &\leq \sum_{v=3}^{\infty} \left| \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \Delta^{2v} f_i \right| \leq \\
&\leq \max_k \left| \Delta^6 f_k \right| \sum_{v=3}^{\infty} 4^{v-3} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^v \leq \\
&\leq \frac{1}{64} \max_k \left| \Delta^6 f_k \right| \frac{\left( \frac{31}{45} \right)^3}{1 - \frac{31}{45}} = \frac{29791}{1814400} \max_k \left| \Delta^6 f_k \right|.
\end{aligned}$$

Кроме того, если функция  $f$  имеет шесть непрерывных производных на периоде, то

$$\max_k \left| \Delta^6 f_k \right| = O(h^6).$$

Таким образом, получаем

$$\tilde{c}_i = f_i - \frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \Delta^2 f_i + \left( \frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^2 \Delta^4 f_i + O(h^6). \quad (1.50)$$

С другой стороны, интерполяционные квазитригонометрические сплайны минимального дефекта приближают функцию с точностью до  $O(h^4)$ . Таким образом, при  $m \geq 2$  сплайны  $sc_m(f, t)$  асимптотически совпадают с интерполяционным сплайном минимального дефекта  $sc(f, t)$ .

Пусть, теперь информация о функции  $f(t)$  задана интегралами

$$f_i^* = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} f(t) dt, \quad i = 0, \pm 1, \dots \quad (1.51)$$

Так как функция  $f(t)$   $2\pi$  – периодическая, то для всех  $i$  выполняются равенства

$$f_{i+n}^* = f_i^*.$$

Ясно, что для любого  $i$  и любого сплайна  $sc(t)$  вида (1.46) будет выполняться соотношение

$$s_i^* = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} sc(t) dt = \frac{1}{h} \sum_{v=-1}^{n+1} c_v \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} T_h(t - vh) dt =$$

$$= \frac{1}{h} \left( c_i \int_{-h/2}^{h/2} T_h(t) dt + (c_{i+1} + c_{i-1}) \int_{h/2}^{3h/2} T_h(t) dt + \right. \\ \left. + (c_{i+2} + c_{i-2}) \int_{3h/2}^{2h} T_h(t) dt \right).$$

Отсюда и из вида квазитригонометрического В-сплайна следует, что

$$s_i^* = \frac{1}{8h^2(1-\cosh h)} \left( c_i \left( h^2 - 6h^2 \cosh h - 8 + 24 \cos \frac{h}{2} - 16 \cosh h \right) + \right. \\ \left. + (c_{i+1} + c_{i-1}) \left( 3h^2 - h^2 \cosh h + 8 - 16 \cos \frac{h}{2} + 8 \cosh h \right) + \right. \\ \left. + (c_{i+2} + c_{i-2}) \left( \frac{h^2}{2} + 4 \cos \frac{h}{2} - 4 \right) \right).$$

Таким образом, для всех  $i$  и любого сплайна  $sc(t)$  вида (1.46) выполняется равенство

$$s_i^* = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} sc(t) dt = \\ c_i + \frac{h^2(5 - \cosh h) - 8(1 - \cosh h)}{8h^2(1 - \cosh h)} \Delta^2 c_i + \frac{h^2 - 8(1 - \cos \frac{h}{2})}{16h^2(1 - \cosh h)} \Delta^4 c_i.$$

Рассмотрим сплайны

$$sc_2^*(f, \Delta_n^0, t) = \sum_{i=-1}^{n+1} \left( f_i^* - \frac{h^2(5 - \cosh h) - 8(1 - \cosh h)}{8h^2(1 - \cosh h)} \Delta^2 f_i^* \right) T_h(t - ih). \quad (1.52)$$

Аналогично тому, как было доказано соотношение (1.50), получаем, что если функция  $f(t)$  имеет пять непрерывных производных на периоде, то равномерно по  $i$  выполняются порядковые соотношения

$$\frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} sc_2^*(f, \Delta_n^0, t) dt = \frac{1}{h} \int_{(2i-1)h/2}^{(2i+1)h/2} f(t) dt + O(h^4).$$

Таким образом, с точностью до  $O(h^4)$  сплайны  $sc_2^*(f, t)$  интерполируют в среднем функцию  $f(t)$ . Этим и объясняется их название – *почти интерполяционные в среднем квазитригонометрические сплайны*.

Приведем результат, характеризующий качество приближения функции такими сплайнами.

**Теорема 1.30.** Пусть  $n=1,2,\dots$ ,  $h=2\pi/n$  и  $2\pi$ – периодическая функция  $f(t)$  имеет пять непрерывных производных на периоде, тогда на каждом промежутке  $[ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется соотношение

$$f(t) - sc_2^*(f, \Delta_n^0, t) = \frac{h^4}{192} \left| f''(t) + f^{(4)}(t) \right| \left( (\tau^2 - 1)^2 - \frac{8}{15} \right) + O(h^5),$$

где  $\tau = 2h^{-1}(t - (i + 0,5)h)$ .

### 1.2.4. Тригонометрические В-сплайны и их линейные комбинации

Приведем без доказательств несколько аналогичных результатов для тригонометрических сплайнов минимального дефекта.

Пусть  $\tilde{B}_h(t)$  функция, такова, что

$$\tilde{B}_h(-t) = \tilde{B}_h(t)$$

для любого  $h > 0$  и

$$\tilde{B}_h(t) = \begin{cases} -2 \cos h + 2 \cos \frac{h}{2} \cos t, & t \in [0, h/2], \\ 1 - \cos \left( t - \frac{3h}{2} \right), & t \in [h/2, 3h/2], \\ 0, & t \geq 3h/2. \end{cases}$$

Обозначим через

$$B_h(t) = \frac{\tilde{B}_h(t)}{2(1 - \cos h)} \quad (1.53)$$

нормированный тригонометрический В-сплайн (рис. 1.6 – 1.8).

Несложно убедиться в том, что  $B_h(t) \in C^1$  и имеет место тождество

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} B_h(t - (i + 0.5)h) \equiv 1.$$

Ясно, что функция

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i B_h(t - (i + 0.5)h) \quad (1.54)$$

есть *тригонометрический сплайн минимального дефекта* по разбиению  $\{ih\}_{i=-\infty}^{\infty}$ . Для любого  $2\pi$ -периодического сплайна

при любом  $t \in (ih, (i+1)h)$  в представлении (1.54) используются лишь три слагаемых, поэтому сужение (1.54) на промежуток  $[0; 2\pi]$  можно записать в виде

$$s(t) = \sum_{i=-1}^n c_i B_h(t - (i + 0.5)h), \quad (1.55)$$

где  $h = 2\pi/n$ . В силу периодичности  $s(t)$  имеем  $c_{-1} = c_{n-1}$ ,  $c_0 = c_n$  и  $c_1 = c_{n+1}$ .

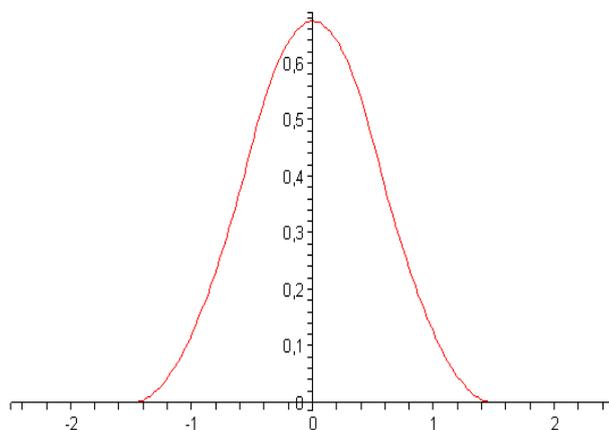


Рис. 1.6. Тригонометрический В-сплайн

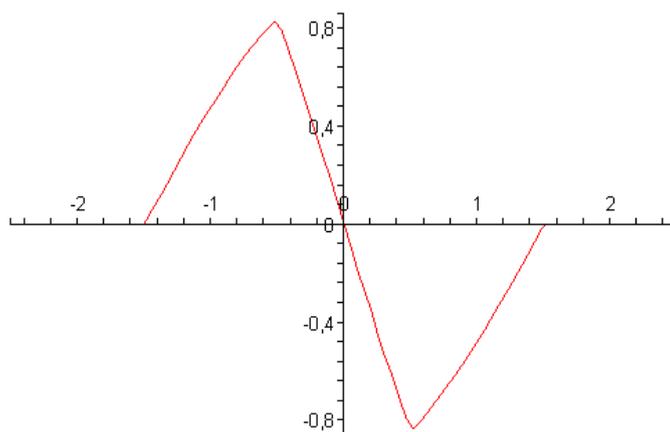


Рис. 1.7. Производная тригонометрического В-сплайна

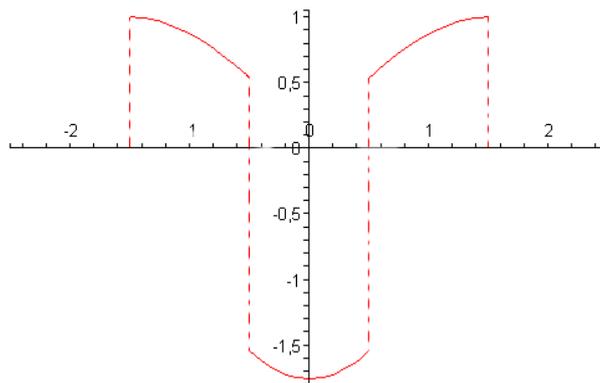


Рис. 1.8. Вторая производная тригонометрического В-сплайна.

Заметим, что

$$\begin{aligned} s((i+0,5)h) &= (c_{i-1} + c_{i+1})B_h(h) + c_i B_h(0) = \\ &= c_i \frac{\cos \frac{h}{2} - \cos h}{1 - \cos h} + (c_{i-1} + c_{i+1}) \frac{1 - \cos \frac{h}{2}}{2(1 - \cos h)}. \end{aligned}$$

В частности, если потребовать выполнение условий  $s((i+0,5)h) = f_i$ , то есть, выбрать коэффициенты  $c_i$  из системы

$$\begin{cases} c_i = c_{n+i}, \\ c_{i-1} \frac{1 - \cos \frac{h}{2}}{\cos \frac{h}{2} - \cos h} + 2c_i + c_{i+1} \frac{1 - \cos \frac{h}{2}}{\cos \frac{h}{2} - \cos h} = 2 \frac{1 - \cos h}{\cos \frac{h}{2} - \cos h} f_i, \end{cases}$$

$$i = 0, \dots, n,$$

то сплайн (1.55) будет интерполяционным сплайном минимального дефекта по равномерному разбиению  $\{ih\}_{i=0}^{n+1}$ .

**Теорема 1.31.** Пусть  $n=1,2,\dots$ ,  $h=2\pi/n$ ,  $f_i = f(ih)$  ( $i=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и

$$\tilde{c}_i = \tilde{c}_i(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( -\frac{1 - \cos \frac{h}{2}}{2(1 - \cos h)} \right)^{\nu} \Delta^{2\nu} f_i,$$

тогда

$$s(f, \Delta_n^0, t) = \sum_{i=-1}^n \tilde{c}_i B_h(t - (i + 0.5)h)$$

есть интерполяционный тригонометрический сплайн минимального дефекта по равномерному разбиению  $\Delta_n^0 = \{ih\}_{i=0}^n$ .

Пусть, теперь информация о функции  $f(t)$  задана интегралами

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} f(t) dt, \quad i=0, \pm 1, \dots$$

тогда имеет место следующее утверждение.

**Теорема 1.32.** Пусть  $n=1,2,\dots$ ,  $h=2\pi/n$  и

$$c_i^* = c_i^*(f) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left( -\frac{h - \sin h}{2h(1 - \cos h)} \right)^{\nu} \Delta^{2\nu} f_i,$$

тогда

$$st^*(f, \Delta_n^0, t) = \sum_{i=-1}^n c_i^* B_h(t - (i + 0.5)h)$$

есть интерполяционный в среднем тригонометрический сплайн минимального дефекта по равномерному разбиению, то есть

$$\frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} st^*(f, \Delta_n^0, t) dt = f_{i+1/2}^* \quad (i = 0, \pm 1, \dots)$$

и если  $2\pi$ -периодическая функция  $f(t)$  имеет четыре непрерывных производных на периоде, тогда на каждом промежутке  $[ih, (i+1)h]$  при  $h \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  и по  $i$  выполняется соотношение

$$f(t) - st^*(f, \Delta_n^0, t) = \frac{h^3}{6} |f'(t) + f'''(t)| \tau(\tau^2 - 1/4) + O(h^4),$$

где  $\tau = h^{-1}(t - (i + 0,5)h)$ .

### 1.3. Восстановление кривых кусочно-окружностными линиями

Кусочно-окружностные (дуговые) сплайны представляют собой одну из наиболее популярных технологических кривых. Исследованию такого рода кривых посвящено много работ, например, [10], [19], [50] и многие другие. В данном параграфе мы рассмотрим только такие дуговые сплайны, которые порождены тригонометрическими сплайнами, рассмотренными ранее.

#### 1.3.1. Дуговые эрмитовые сплайны

Пусть задана функция  $\theta(\varphi)$ , для которой выполняется условие

$$|\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)| > 0, \quad (\varphi \in [0, 2\pi]), \quad (1.56)$$

и

$$\Delta_n = \{0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = 2\pi\}$$

произвольное разбиение периода с переменным шагом  $h_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

В качестве информации о функции  $\theta$  будем использовать значения функции и ее производной  $\theta'$  в точках разбиения  $\Delta_n$ :

$$\theta_i = \theta(\varphi_i), \quad \theta'_i = \theta'(\varphi_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Пусть  $\varphi_{i+1/2} = \varphi_i + 0,5h_{i+1/2}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). При фиксированном  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) обозначим через  $\gamma_i^-$  окружность с центром в точке  $M_i^-(x_i^-, y_i^-)$ , где

$$x_i^- = -\frac{\theta'_i \sin(\varphi_{i+1/2}) - a_i \sin(\varphi_i)}{\sin(0,5h_{i+1/2})}, \quad y_i^- = \frac{\theta'_i \cos(\varphi_{i+1/2}) - a_i \cos(\varphi_i)}{\sin(0,5h_{i+1/2})} \quad (1.57)$$

и радиусом

$$R_i^- = \theta_i + \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} - \frac{\theta'_{i+1} + \theta'_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} - \theta'_i \frac{\cos(\varphi_{i+1/2})}{\sin(0,5h_{i+1/2})}. \quad (1.58)$$

Аналогично, обозначим через  $\gamma_i^+$  окружность с центром в точке  $M_i^+(x_i^+, y_i^+)$ , где

$$x_i^+ = \frac{\theta'_{i+1} \sin(\varphi_{i+1/2}) - a_i \sin(\varphi_{i+1})}{\sin(0,5h_{i+1/2})},$$

$$y_i^+ = -\frac{\theta'_{i+1} \cos(\varphi_{i+1/2}) - a_i \cos(\varphi_{i+1})}{\sin(0,5h_{i+1/2})}$$

и радиусом

$$R_i^+ = \theta_{i+1} + \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} + \frac{\theta'_{i+1} + \theta'_i}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} + \theta'_{i+1} \frac{\cos(\varphi_{i+1/2})}{\sin(0,5h_{i+1/2})}. \quad (1.59)$$

В этих равенствах числа  $a_i$  определены следующим образом:

$$a_i = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{2} \cdot \frac{\sin(0,5h_{i+1/2})}{1 - \cos(0,5h_{i+1/2})} - \frac{\theta'_{i+1} + \theta'_i}{2}.$$

Через  $\gamma(\Delta_n, t) = (x(\Delta_n, t), y(\Delta_n, t))$  обозначим функцию, которая для  $t \in [\varphi_i, \varphi_{i+1/2}]$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) совпадает с дугой окружности

$$\gamma_i^-(t) = (x_i^-(t), y_i^-(t)) = (-R_i^- \sin t + x_i^-, R_i^- \cos t + y_i^-), \quad (1.60)$$

а для  $t \in [\varphi_{i+1/2}, \varphi_{i+1}]$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ) соответствующий участок совпадает с дугой окружности (рис.1.9)

$$\gamma_i^+(t) = (x_i^+(t), y_i^+(t)) = (-R_i^+ \sin t + x_i^+, R_i^+ \cos t + y_i^+). \quad (1.61)$$

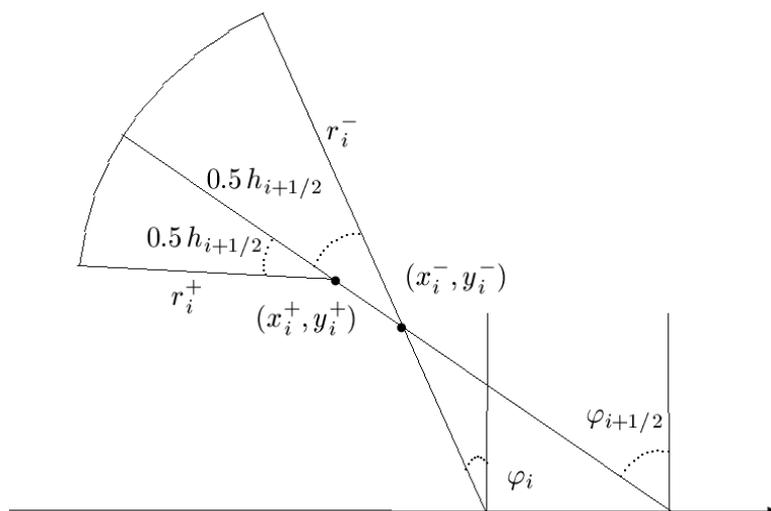


Рис. 1.9.

**Теорема 1.33.** Если для функции  $\theta(\varphi)$  выполняется условие (1.56), то кривая  $\gamma(\Delta_n, t)$  является гладкой и выпуклой.

*Доказательство.* В начале убедимся, что кривая  $\gamma(\Delta_n)$  является непрерывной. Для этого достаточно показать, что

$$\gamma(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \gamma(\Delta_n, \varphi_i + 0) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.62)$$

и

$$\gamma(\Delta_n, \varphi_{i+1/2} - 0) = \gamma(\Delta_n, \varphi_{i+1/2} + 0) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1) \quad (1.63)$$

Ясно, что условие (1.62) эквивалентно условию

$$\gamma_i^-(\varphi_i) = \gamma_{i-1}^+(\varphi_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.64)$$

Справедливость условия (1.64) следует из того, что

$$\begin{aligned} & x_i^-(\varphi_i) - x_{i-1}^+(\varphi_i) = \\ & = R_i^- \cos(\varphi_i + \pi/2) + x_i^- - R_{i-1}^+ \cos(\varphi_i + \pi/2) + x_{i-1}^+ = \\ & = \left( -\theta_i \sin \varphi_i + \frac{\theta_i'}{\sin(0,5 h_{i+1/2})} (\sin \varphi_i \cos(0,5 h_{i+1/2}) - \sin \varphi_{i+1/2}) \right) - \\ & - \left( -\theta_i \sin \varphi_i + \frac{\theta_i'}{\sin(0,5 h_{i-1/2})} (\sin \varphi_{i-1/2} - \sin \varphi_i \cos(0,5 h_{i-1/2})) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично, можно показать, что

$$y_i^-(\varphi_i) - y_{i-1}^+(\varphi_i) = 0.$$

Кроме того,

$$x_i^-(\varphi_{i+1/2}) = x_i^+(\varphi_{i+1/2}), \quad y_i^-(\varphi_{i+1/2}) = y_i^+(\varphi_{i+1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Отсюда следует *непрерывность* кривой  $\gamma(\Delta_n, t)$  в точках  $\varphi_{i+1/2}$ .

Для доказательства *гладкости* кривой  $\gamma(\Delta_n, t)$  достаточно показать, что выполняется условие

$$\frac{\frac{dy_i^-}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_i^-}{dt}(\varphi_i)} = \frac{\frac{dy_{i-1}^+}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_{i-1}^+}{dt}(\varphi_i)} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.65)$$

и

$$\frac{\frac{dy_i^-}{dt}(\varphi_{i+1/2})}{\frac{dx_i^-}{dt}(\varphi_{i+1/2})} = \frac{\frac{dy_i^+}{dt}(\varphi_{i+1/2})}{\frac{dx_i^+}{dt}(\varphi_{i+1/2})} \quad (i=0, 1, \dots, n-1). \quad (1.66)$$

Покажем, что это так. Имеем

$$\frac{d}{dt} y_i^-(t) = -R_i^- \sin t; \quad \frac{d}{dt} x_i^-(t) = -R_i^- \cos t,$$

и, следовательно,

$$\frac{\frac{dy_i^-}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_i^-}{dt}(\varphi_i)} = \frac{-R_i^- \cdot \sin \varphi_i}{-R_i^- \cdot \cos \varphi_i} = \operatorname{tg} \varphi_i.$$

Аналогично, убеждаемся в том, что

$$\frac{\frac{dy_{i-1}^+}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_{i-1}^+}{dt}(\varphi_i)} = \operatorname{tg} \varphi_i,$$

что и доказывает равенство (1.65). Аналогично доказывается (1.66).

Замечая, что

$$\sum_{i=0}^{h-1} h_{i+1/2} = 2\pi,$$

делаем вывод, что кривая  $\gamma(\Delta_n, t)$  непрерывная, гладкая и без самопересечений. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  выполняется условие

$$R_i^\pm > 0. \quad (1.67)$$

В общем случае доказательство этого факта нетривиально. Гораздо проще доказать, что неравенство (1.67) справедливо для достаточно больших  $n$  и разбиения  $\Delta_n$  такого, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_{i+1/2} = 0.$$

В этом случае, используя формулу Тейлора, из выражения (1.58) равномерно по  $i$  получаем

$$R_i^+ = \theta_{i+1/2} + \theta_{i+1/2}'' + \frac{h_{i+1/2}}{6} (\theta_{i+1/2}' + \theta_{i+1/2}''') + O(h_{i+1/2}^2)$$

и

$$R_i^- = \theta_{i+1/2} + \theta_{i+1/2}'' - \frac{h_{i+1/2}}{6} (\theta_{i+1/2}' + \theta_{i+1/2}''') + O(h_{i+1/2}^2).$$

Следовательно, если  $h_{i+1/2}$  достаточно мало, то при выполнении условия (1.56) будет выполняться неравенство (1.67).

### 1.3.2. Дуговые сплайны минимального дефекта

Пусть задана функция  $\theta(\varphi)$ , для которой выполняется условие (1.56) и  $\Delta_n$  – произвольное разбиение периода с переменным шагом  $h_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Через  $h_n = \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_{i+1/2}$  обозначим длину наибольшего шага разбиения

ния  $\Delta_n$ . Последовательность разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$  будем называть регулярной, если для шагов разбиения выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_{i+1/2} - h_{i-1/2}}{h_{i+1/2} + h_{i-1/2}} = 0. \quad (1.68)$$

Такие разбиения в основном применяют на практике. Введем еще значение углов  $\varphi_{i+1/2} = \varphi_i + 0,5 \cdot h_{i+1/2}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

В качестве информации о функции  $\theta(\varphi)$  будем использовать значение функции в точках  $\varphi_{i+1/2}$ :

$$\theta_{i+1/2} = \theta(\varphi_{i+1/2}) \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

При фиксированном  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) обозначим через  $\gamma_{i+1/2}$  окружность с центром в точке  $M_{i+1/2}(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$  и радиусом  $R_{i+1/2}$ , где

$$x_{i+1/2} = -\frac{1}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} (m_{i+1}(\cos(\varphi_{i+1/2}) - \cos(\varphi_i)) - \theta_{i+1/2}(\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_i)) + m_i(\cos(\varphi_{i+1}) - \cos(\varphi_{i+1/2}))); \quad (1.69)$$

$$y_{i+1/2} = -\frac{1}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} (m_{i+1}(\sin(\varphi_{i+1/2}) - \sin(\varphi_i)) - \theta_{i+1/2}(\sin(\varphi_{i+1}) - \sin(\varphi_i)) + m_i(\sin(\varphi_{i+1}) - \sin(\varphi_{i+1/2}))) \quad (1.70)$$

и

$$R_{i+1/2} = -\frac{1}{2(1 - \cos(0,5h_{i+1/2}))} (m_{i+1} + m_i - 2\theta_{i+1/2}(0,5h_{i+1/2})). \quad (1.71)$$

В этих равенствах числа  $m_i$  однозначно определяются из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} m_0 = m_n, \\ \lambda_i m_{i-1} + \sigma_i m_i + \mu_i m_{i+1} = \delta_i, & (i = 1, 2, \dots, n), \\ m_{n+1} = m_1, \end{cases} \quad (1.72)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{1}{2 \sin(0,5 h_{i-1/2})}, & \mu_i &= \frac{1}{2 \sin(0,5 h_{i+1/2})}, \\ \sigma_i &= \frac{\sin(0,5 h_{i-1/2})}{2(1 - \cos(0,5 h_{i-1/2}))} + \frac{\sin(0,5 h_{i+1/2})}{2(1 - \cos(0,5 h_{i+1/2}))} + \\ &+ \frac{\cos(0,5 h_{i-1/2})}{2 \sin(0,5 h_{i-1/2})} + \frac{\cos(0,5 h_{i+1/2})}{2 \sin(0,5 h_{i+1/2})}, \\ \delta_i &= \theta_{i-1/2} \cdot \frac{\sin(0,5 h_{i-1/2})}{1 - \cos(0,5 h_{i-1/2})} + \theta_{i+1/2} \cdot \frac{\sin(0,5 h_{i+1/2})}{1 - \cos(0,5 h_{i+1/2})}. \end{aligned}$$

Ясно, что матрица системы (1.72) имеет диагональное преобладание. Именно поэтому, в силу критерия Адамара, система имеет одно и только одно решение, которое легко получить, например, методом прогонки (см., например [9], стр. 336).

Через  $\gamma(\theta, \Delta_n, t) = (x(\theta, \Delta_n, t), y(\theta, \Delta_n, t))$  обозначим функцию, которая для  $t \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) совпадает с дугой окружности (см. рис.1.10):

$$\gamma_{i+1/2}(t) = \begin{cases} x_{i+1/2}(t) \\ y_{i+1/2}(t) \end{cases} = \begin{cases} -R_{i+1/2} \sin t + x_{i+1/2}, \\ R_{i+1/2} \cos t + y_{i+1/2}. \end{cases} \quad (1.73)$$

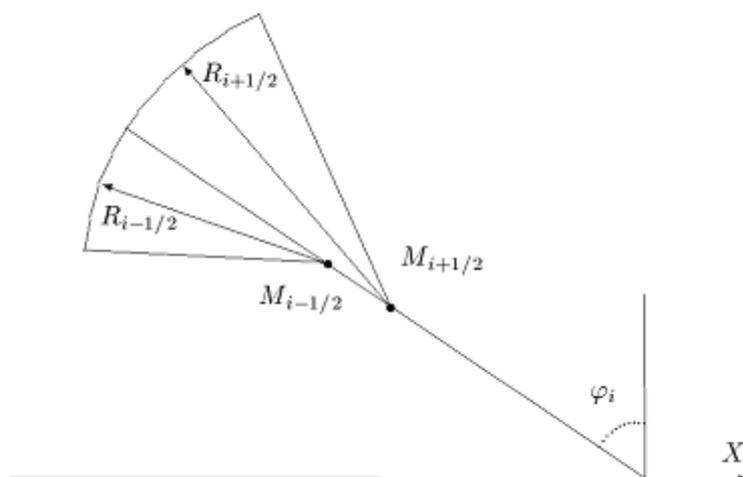


Рис. 1.10.

Дальнейшей нашей задачей будет доказательство того факта, что кусочно-окружностная кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  имеет следующие свойства:

- кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  является замкнутой и гладкой;
- для любой функции  $\theta(\varphi)$ , удовлетворяющей условию (1.56) кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  является выпуклой и, следовательно, без самопересечений;
- функция  $\theta(\gamma(\theta, \Delta_n, t))$  является тригонометрическим сплайном по разбиению  $\Delta_n$ , интерполирующий функцию  $\theta(\varphi)$  в узлах  $\varphi_{i+1/2}$ ;
- для регулярных разбиений сплайны  $\theta(\gamma(\theta, \Delta_n, t))$  имеют высокую степень аппроксимации исходной опорной функции  $\theta(\varphi)$ .

Кроме того, для любой трижды непрерывно – дифференцируемой функции  $\theta(\varphi)$  укажем алгоритм построения асимптотически оптимальной последовательности разбиений  $\{\Delta_n^0\}_{n=1}^\infty$ . То есть укажем асимптотически оптимальную последо-

вательность разбиений при аппроксимации опорной функции  $\theta(\varphi)$  тригонометрическими сплайнами, а, следовательно, при аппроксимации кривой кусочно – окружностными линиями.

Вначале убедимся, что кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  является *непрерывной*. Для этого достаточно показать, что для всех  $i = 1, 2, \dots, n$  выполняются равенства

$$\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi_i - 0) = \gamma(\theta, \Delta_n, \varphi_i + 0). \quad (1.74)$$

Ясно, что условие (1.74) эквивалентно равенству

$$\gamma_{i-1/2}(\varphi_i) = \gamma_{i+1/2}(\varphi_i). \quad (1.75)$$

Справедливость условия (1.75) в свою очередь, следует из того, что

$$\begin{aligned} & x_{i+1/2}(\varphi_i) - x_{i-1/2}(\varphi_i) = \\ & = R_{i+1/2} \cos(\varphi_i + \pi/2) + x_{i+1/2} - R_{i-1/2} \cos(\varphi_i + \pi/2) + x_{i-1/2} = 0. \end{aligned}$$

Аналогичным образом устанавливается равенство

$$y_{i+1/2}(\varphi_i) - y_{i-1/2}(\varphi_i) = 0.$$

Для доказательства *гладкости* кривой  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  достаточно показать, что выполняются условия

$$\frac{\frac{dy_{i+1/2}(\varphi_i)}{dt}}{\frac{dx_{i+1/2}(\varphi_i)}{dt}} = \frac{\frac{dy_{i-1/2}(\varphi_i)}{dt}}{\frac{dx_{i-1/2}(\varphi_i)}{dt}} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.76)$$

Для этого заметим, что

$$\frac{d}{dt} y_{i+1/2}(t) = -R_{i+1/2} \sin t, \quad \frac{d}{dt} x_{i+1/2}(t) = -R_{i+1/2} \cos t,$$

и, следовательно,

$$\frac{\frac{dy_{i+1/2}}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_{i+1/2}}{dt}(\varphi_i)} = \frac{-R_{i+1/2} \cdot \sin \varphi_i}{-R_{i+1/2} \cdot \cos \varphi_i} = \operatorname{tg} \varphi_i.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\frac{\frac{dy_{i-1/2}}{dt}(\varphi_i)}{\frac{dx_{i-1/2}}{dt}(\varphi_i)} = \operatorname{tg} \varphi_i,$$

что и доказывает (1.76), а вместе с ним и гладкость кривой  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$ .

Для доказательства *выпуклости* кривой  $\gamma(\theta, \Delta_n, t)$  (если последовательность  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  регулярна), достаточно показать, что при достаточно больших  $n$  будут иметь место неравенства  $R_{i+1/2} > 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ), где числа  $R_{i+1/2}$  определены равенствами (1.71).

Этот факт можно доказать следующим образом. Вначале найти главный член асимптотики коэффициентов  $m_i$ , которые являются решением системы (1.72). Затем подставить эти значения в (1.71). В полученном выражении для всех величин применить формулу Тейлора в окрестности значения точки  $\varphi_{i+1/2}$ . После упрощений получим асимптотические неравенства

$$R_{i+1/2} = \theta_{i+1/2} + \theta''_{i+1/2} + O(h_n) > 0,$$

которые и доказывают выпуклость кривой.

### 1.3.3. Дуговые сплайны, порожденные линейной комбинацией тригонометрических В-сплайнов

В случае использования приближения опорной функции тригонометрическим сплайном в виде линейной комбинации В-сплайнов можно выписать соответствующий порожденный дуговой сплайн.

На каждом промежутке с шагом  $h$  тригонометрический В-сплайн состоит из трех частей. Рассмотрим В-сплайн в точке  $t$  на промежутке  $[ih, (i+1)h]$  с коэффициентами  $c_i$ :

$$s(f, \Delta_n^0, t) = c_{i+1} \frac{1 - \cos\left(\frac{h}{2} - t\right)}{2 - 2\cos h} + c_i \frac{-2\cos h + 2\cos\frac{h}{2}\cos t}{2 - 2\cos h} + c_{i-1} \frac{1 - \cos\left(\frac{h}{2} - t\right)}{2 - 2\cos h}.$$

Тогда

$$s(f, \Delta_n^0, t) = \frac{1}{2(1 - \cos h)} \left( (c_{i-1} - c_{i+1}) \sin \frac{h}{2} \sin t + (2c_i - c_{i-1} - c_{i+1}) \cos \frac{h}{2} \cos t + (c_{i-1} + c_{i+1} - 2c_i \cos h) \right).$$

Отсюда и из теоремы 1.7 получаем, что дуговой сплайн будет состоять из дуг окружностей с центрами в точках

$$M_i = \left( \frac{(c_{i+1} - c_{i-1}) \sin \frac{h}{2}}{2(1 - \cos h)}, \frac{(2c_i - c_{i-1} - c_{i+1}) \cos \frac{h}{2}}{2(1 - \cos h)} \right)$$

и радиусами

$$R_i = c_{i-1} + c_{i+1} - 2c_i \cos h.$$

#### 1.4. Восстановление кривых логарифмическими спиралями

Одной из наиболее широко используемых кривых в различных естественнонаучных задачах есть логарифмическая спираль. В основе многих характеристик логарифмической спирали лежит тот факт, что она переходит в себя при линейных преобразованиях плоскости, образуя группу.

Контуры, построенные по логарифмическим спиралям, используют в гидроаэродинамике, теории механизмов и т.д.

С другой стороны, восстановление гладких кривых, которые состоят из дуг логарифмических спиралей, является достаточно сложной задачей.

**Определение 1.34.** Для произвольного разбиения периода  $\Delta_n = \{0 = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = 2\pi\}$  с переменным шагом  $h_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) обобщенным экспоненциальным сплайном по разбиению  $\Delta_n$  будем называть непрерывную вместе со своей второй производной  $2\pi$ -периодическую функцию, которая на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет вид

$$s(\varphi) = A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) + a_{i+1/2} \sin \varphi + b_{i+1/2} \cos \varphi, \quad (1.77)$$

где  $A_{i+1/2}$ ,  $\alpha_{i+1/2}$ ,  $a_{i+1/2}$  и  $b_{i+1/2}$  – некоторые постоянные.

Множество всех таких сплайнов обозначим через  $\mathbb{S}(\Delta_n)$ .

**Определение 1.35.** Гладкую жорданову кривую  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  будем называть *логарифмическим сплайном*, если на каждом из

промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) она совпадает с дугой логарифмической спирали.

**Теорема 1.36.** *Любой строго выпуклый гладкий логарифмический сплайн  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  может быть представлен в виде*

$$\gamma(\Delta_n, \varphi) = \begin{cases} x(\Delta_n, \varphi) \\ y(\Delta_n, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.78)$$

где обобщенный экспоненциальный сплайн  $\theta(\Delta_n) \in \mathcal{S}(\Delta_n)$  такой, что  $A_{i+1/2} > 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

Параметры логарифмического и обобщенного экспоненциального сплайнов определяются взаимно однозначно.

**Доказательство.** Пусть имеет место представление (1.78), из определения экспоненциального сплайна имеем, что для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  непрерывная замкнутая кривая  $\gamma(\theta, \Delta_n, \varphi)$  будет иметь следующее параметрическое представление

$$\begin{aligned} x(\Delta_n, \varphi) &= -\theta(\Delta_n, \varphi) \sin \varphi - \theta'(\Delta_n, \varphi) \cos \varphi = \\ &= -(A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) + a_{i+1/2} \sin \varphi + b_{i+1/2} \cos \varphi) \sin \varphi - \\ &- (A_{i+1/2} \cdot \alpha_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) + a_{i+1/2} \cos \varphi - b_{i+1/2} \sin \varphi) \cos \varphi = \\ &= -A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \cdot (\sin \varphi + \alpha_{i+1/2} \cos \varphi) - a_{i+1/2} = \\ &= -A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \cdot \sin(\varphi + \psi_{i+1/2}) - a_{i+1/2}, \end{aligned}$$

где

$$\psi_{i+1/2} = \arcsin \frac{\alpha_{i+1/2}}{\sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2}}.$$

Аналогично, получаем, что

$$y(\Delta_n, \varphi) = -A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \cdot \cos(\varphi + \psi_{i+1/2}) + b_{i+1/2}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что кривизна кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) равна

$$\begin{aligned} k(\gamma(\Delta_n), \varphi) &= \frac{y'(\Delta_n, \varphi) \cdot x''(\Delta_n, \varphi) - y''(\Delta_n, \varphi) \cdot x'(\Delta_n, \varphi)}{\left(x'^2(\Delta_n, \varphi) + y'^2(\Delta_n, \varphi)\right)^{3/2}} = \\ &= \frac{1}{A_{i+1/2} (1 + \alpha_{i+1/2}^2) \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi)}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Таким образом, если обобщенный экспоненциальный сплайн  $\theta(\Delta_n) \in \mathcal{S}(\Delta_n)$  такой, что  $A_{i+1/2} > 0$  для  $i = 0, 1, \dots, n$ , то кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  строго выпуклая.

Поместим полюс в точку  $(a_{i+1/2}, -b_{i+1/2})$  и найдем полярное уравнение кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  при  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} \rho(\varphi) &= \sqrt{(x(\Delta_n, \varphi) + a_{i+1/2})^2 + (y(\Delta_n, \varphi) - b_{i+1/2})^2} = \\ &= A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi). \end{aligned} \quad (1.80)$$

Как видно из выражения (1.80), на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  совпадает с дугой логарифмической спирали.

Для завершения доказательства первой части теоремы остается доказать, что обобщенному экспоненциальному сплайну минимального дефекта соответствует гладкая кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$ .

В связи с минимальностью дефекта сплайна  $\theta(\Delta_n)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$  имеем

$$\theta(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \theta(\Delta_n, \varphi_i + 0)$$

и

$$\theta''(\Delta_n, \varphi_i - 0) = \theta''(\Delta_n, \varphi_i + 0),$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) + a_{i+1/2} \sin \varphi_i + b_{i+1/2} \cos \varphi_i = \\ = A_{i-1/2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i) + a_{i-1/2} \sin \varphi_i + b_{i-1/2} \cos \varphi_i \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1/2}^2 \cdot A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) - a_{i+1/2} \sin \varphi_i - b_{i+1/2} \cos \varphi_i = \\ = \alpha_{i-1/2}^2 \cdot A_{i-1/2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i) - a_{i-1/2} \sin \varphi_i - b_{i-1/2} \cos \varphi_i \end{aligned}$$

Складывая почленно, получаем

$$(1 + \alpha_{i+1/2}^2) A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) = (1 + \alpha_{i-1/2}^2) A_{i-1/2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i).$$

Из (1.79) следует, что полученное равенство эквивалентно тому, что кривизна кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  есть непрерывной функцией. Таким образом, кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  есть замкнутым строго выпуклым логарифмическим сплайном.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Пусть  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  – замкнутый гладкий строго выпуклый логарифмический сплайн, который при  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  совпадает с дугой логарифмической спирали

$$\rho(\varphi) = A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \quad (1.81)$$

с полюсом в точке  $(a_{i+1/2}; -b_{i+1/2})$ .

Докажем, что функция  $\theta(\varphi)$ , которая на каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет вид

$$\theta(\varphi) = A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) + a_{i+1/2} \sin \varphi + b_{i+1/2} \cos \varphi,$$

непрерывна на периоде вместе со своими первой и второй производными, и при этом  $A_{i+1/2} > 0$  при  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Последнее свойство сразу получаем из строгой выпуклости кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  и соотношения (1.79).

Как известно (см. например [42]), проекцией логарифмической спирали на координатные оси есть уравнения затухающих колебаний, поэтому кривая (1.81) может быть представлена параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x(\Delta_n, \varphi) &= -A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \sin(\varphi + \psi_{i+1/2}) - a_{i+1/2}, \\ y(\Delta_n, \varphi) &= A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) \cos(\varphi + \psi_{i+1/2}) + b_{i+1/2}. \end{aligned}$$

В силу непрерывности кривой  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$  имеем

$$x(\Delta_n, \varphi_i - 0) = x(\Delta_n, \varphi_i + 0)$$

и

$$y(\Delta_n, \varphi_i - 0) = y(\Delta_n, \varphi_i + 0),$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} &-A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i + \psi_{i+1/2}) - a_{i+1/2} = \\ &= -A_{i-1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i-1/2}^2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i) \cdot \sin(\varphi_i + \psi_{i-1/2}) - a_{i-1/2} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &A_{i+1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i+1/2}^2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) \cdot \cos(\varphi_i + \psi_{i+1/2}) + b_{i+1/2} = \\ &= A_{i-1/2} \sqrt{1 + \alpha_{i-1/2}^2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i) \cdot \cos(\varphi_i + \psi_{i-1/2}) + b_{i-1/2}. \end{aligned}$$

Умножим первое из этих уравнений на  $-\sin \varphi_i$ , второе на  $\cos \varphi_i$  и сложим их. В результате этих преобразований получим равенство

$$\begin{aligned} & A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) + a_{i+1/2} \sin \varphi_i + b_{i+1/2} \cos \varphi_i = \\ & = A_{i-1/2} \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i) + a_{i-1/2} \sin \varphi_i + b_{i-1/2} \cos \varphi_i, \end{aligned} \quad (1.82)$$

то есть, функция  $\theta(\varphi)$  непрерывна на периоде.

В силу того, что кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  гладкая, с учетом (1.79), получаем, что

$$A_{i+1/2} (1 + \alpha_{i+1/2}^2) \cdot \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi_i) = A_{i-1/2} (1 + \alpha_{i-1/2}^2) \cdot \exp(\alpha_{i-1/2} \varphi_i)$$

для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Почленно отнимая это соотношение из (1.82), получаем справедливость равенства

$$\theta''(\varphi_i - 0) = \theta''(\varphi_i + 0)$$

для всех  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , что и завершает доказательство теоремы.

**Замечание.** Отметим, что в узлах  $\varphi_i$  производная сплайна  $\theta(\Delta_n)$  не обязательно непрерывная. Несмотря на то, что в представлении логарифмического сплайна (1.78) присутствуют значения как обобщенного экспоненциального сплайна, так и его первой производной, кривая  $\gamma(\Delta_n, \varphi)$  непрерывна и, как видно из (1.11), в каждой точке касательная к ней меняется непрерывно.

Таким образом, оценивая ошибку аппроксимации в равномерной метрике опорной функции кривой  $\Gamma$  обобщенным экспоненциальным сплайном  $\theta(\Delta_n)$  таким, что  $A_{i+1/2} > 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), мы сразу получаем оценку аппроксимации в мет-

рике Хаусдорфа кривой  $\Gamma$  соответствующим выпуклым гладким логарифмическим сплайном  $\gamma(\theta(\Delta_n))$ .

Условие  $A_{i+1/2} > 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) обеспечивает строгую выпуклость соответствующего логарифмического сплайна. Выполнение этого свойства зависит, в первую очередь, от вида обобщенного экспоненциального сплайна.

Через  $\ell(\theta, \Delta_n, \varphi) \in S(\Delta_n)$  обозначим *обобщенный экспоненциальный сплайн*, который однозначно определяется интерполяционными условиями

$$\ell^{(\nu)}(\theta, \Delta_n, \varphi_i) = \theta_i^{(\nu)}, \quad (\nu = 0, 2, i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.83)$$

На каждом из промежутков  $[\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) этот сплайн имеет вид

$$s(\theta, \Delta_n, \varphi) = A_{i+1/2} \exp(\alpha_{i+1/2} \varphi) + a_{i+1/2} \sin \varphi + b_{i+1/2} \cos \varphi,$$

где коэффициенты  $A_{i+1/2}$ ,  $\alpha_{i+1/2}$ ,  $a_{i+1/2}$  и  $b_{i+1/2}$  определяются условиями интерполяции (1.83), то есть

$$\alpha_{i+1/2} = \frac{1}{2h_{i+1/2}} \cdot \ln \frac{\theta_{i+1} + \theta_{i+1}''}{\theta_i + \theta_i''}, \quad (1.84)$$

$$A_{i+1/2} = \frac{\sqrt{(\theta_{i+1} + \theta_{i+1}'')(\theta_i + \theta_i'')}}{1 + \alpha_{i+1/2}^2}, \quad (1.85)$$

$$a_{i+1/2} = \frac{1}{2 \sin(0,5h_{i+1/2})} (\theta_{i+1} - \theta_i - A_{i+1/2} \cdot sh(0,5 \alpha_{i+1/2} h_{i+1/2})), \quad (1.86)$$

$$b_{i+1/2} = \frac{1}{2 \cos(0,5h_{i+1/2})} (\theta_{i+1} + \theta_i - A_{i+1/2} \cdot ch(0,5 \alpha_{i+1/2} h_{i+1/2})). \quad (1.87)$$

Тогда, из условия (1.56), этот сплайн однозначно определяется для любой выпуклой функции  $\theta$ .

Используя разложение функции и коэффициентов сплайна, по формуле Тейлора в окрестности точки  $\varphi_{i+1/2} = 0,5(\varphi_i + \varphi_{i+1})$  получаем, что, при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $i$  для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) имеет место асимптотическая оценка приближения функции  $\theta \in C_{[0,2\pi]}^4$  сплайнами  $\ell(\theta, \Delta_n, \varphi)$ :

$$|\theta(\varphi) - \ell(\theta, \Delta_n, \varphi)| = \frac{h_{i+1/2}^4}{384} |\Theta_{i+1/2}| \cdot |16t^4 - 24t^2 + 5| \cdot (1 + o(1)), \quad (1.88)$$

где

$$t = \frac{\varphi - 0,5(\varphi_{i+1} + \varphi_i)}{h_{i+1/2}},$$

$$\Theta(\varphi) = \theta''(\varphi) + \theta^{(4)}(\varphi) - \frac{(\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi))^2}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)}.$$

Отсюда, из теорем 1.17 и 1.36, соотношения (1.88), получаем следующее утверждение.

**Теорема 1.37.** Пусть  $2\pi$ -периодическая функция  $\theta \in C_{[0,2\pi]}^5$  является опорной функцией замкнутой гладкой строго выпуклой жордановой кривой  $\Gamma$ . Для произвольной последовательности разбиений  $\{\Delta_n\}_{n=1}^\infty$  при  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение

$$\rho(\Gamma, \gamma(\ell(\theta, \Delta_n))) = \frac{5}{384} \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_{i+1/2}^4 |\Theta_{i+1/2}| + o(h_n^4),$$

где  $h_n = \max_{i=0,1,\dots,n-1} h_{i+1/2}$ .

### 1.5. Замечательные выпуклые кривые

Важное значение в геометрии и в теории машин и механизмов (см., например [1], [37], [38], [39], [42]) имеют кривые равной ширины и дельта – кривые.

В машиностроении широко используют детали, профили которых имеют форму треугольника Релло. Такой криволинейный треугольник относится (вместе с кругом) к так называемым *кривым постоянной ширины*: когда он катится, то верхние и нижние точки контура перемещаются вдоль фиксированных параллельных прямых. В работах [13], [14], [36], [40] приведены исследования свойств треугольника Релло и его построения.

Подобно кругу, треугольник Релло или любая другая кривая равной ширины может вращаться в квадрате, одновременно касаясь всех четырех сторон квадрата.

Остановимся на этом вопросе подробнее.

Для кривой  $\Gamma$  каждый вектор  $\bar{\ell}$  определяет прямоугольник, описанный вокруг кривой  $\Gamma$  со сторонами параллельными и перпендикулярными вектору  $\bar{\ell}$ . Периметр этого прямоугольника обозначим через  $P(\Gamma, \bar{\ell})$ .

**Определение 1.38.** Если для любого направления  $\bar{\ell}$  величина  $P(\Gamma, \bar{\ell})$  является постоянной и равной  $P$ , то такую кривую будем называть *P – кривой*.

$P$  – кривую, у которой описанный прямоугольник является квадратом, будем называть *кривой равной ширины  $d$*  (при этом  $d = P/4$ ) (рис. 1.11 а).

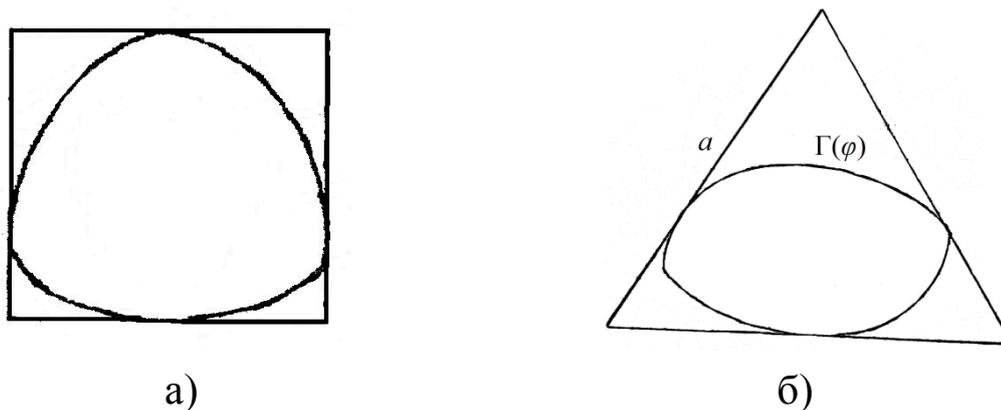


Рис. 1.11. Замечательные выпуклые кривые  
 а) кривая равной ширины, б) дельта – кривая

**Определение 1.39.** Будем говорить, что выпуклая кривая  $\Gamma$  есть дельта – кривая, если при любом повороте она вписана в фиксированный правильный треугольник со стороной  $a$  (то есть имеет три точки касания при любом повороте) (рис. 1.11 б).

Пусть кривая  $\Gamma(\varphi)$  удовлетворяет условиям теоремы 1.11 и задается параметрическими уравнениями

$$\Gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases} \quad (1.89)$$

В дальнейшем будем считать, что функция  $\theta(\varphi)$  такова, что  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не меняет знак на периоде.

**Теорема 1.41.** Любая  $P$  – кривая  $\Gamma(\varphi)$  представима в виде (1.89), где функция  $\theta(\varphi)$  имеет вид

$$\theta(\varphi) = \frac{P}{4} + \sum_{\substack{k \neq 4n, \\ n \in \mathbb{N}}} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k). \quad (1.90)$$

Любая кривая  $\Gamma(\varphi)$  равной ширины  $d$  представима в виде (1.89), где функция  $\theta(\varphi)$  имеет вид

$$\theta(\varphi) = \frac{d}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2k-1} \cos((2k-1)\varphi + \varphi_{2k-1}). \quad (1.91)$$

Любая дельта – кривая  $\Gamma(\varphi)$  представима в виде (1.89), где функция  $\theta(\varphi)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) = \frac{a\sqrt{3}}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (\rho_{3k-1} \cos((3k-1)\varphi + \varphi_{3k-1}) + \\ + \rho_{3k+1} \cos((3k+1)\varphi + \varphi_{3k+1})). \end{aligned} \quad (1.92)$$

**Доказательство.** Поскольку кривая  $\Gamma(\varphi)$  выпуклая, то, как следует из теоремы 1.8, ее можно представить в виде (1.89). Для любого  $\varphi$  касательная в точке  $\varphi$  параллельна касательной в точке  $\varphi + \pi$ . Расстояние между ними представляется в виде

$$\frac{|x'(\varphi)(y(\varphi + \pi) - y(\varphi)) - y'(\varphi)(x(\varphi + \pi) - x(\varphi))|}{\sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2}} = \theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi). \quad (1.93)$$

Кроме того, касательная в точке  $\varphi + \pi/2$  параллельна касательной в точке  $\varphi - \pi/2$  и перпендикулярна касательной в точке  $\varphi$ . Отсюда следует, что для того чтобы кривая  $\Gamma(\varphi)$  была  $P$  – кривой, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) + \theta(\varphi - \pi/2) + \theta(\varphi + \pi/2) = P/2 \quad (1.94)$$

для всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ .

Заметим, что для соответствующего ряда Фурье будут выполняться равенства

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k + k\pi/2) \cos(k\pi/2) \quad (1.95)$$

и

$$\theta(\varphi - \pi/2) + \theta(\varphi + \pi/2) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k) \cos(k\pi/2)$$

Отсюда сразу получаем равенство

$$\begin{aligned} & \theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) + \theta(\varphi - \pi/2) + \theta(\varphi + \pi/2) = \\ & a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k + k\pi/4) \cos(k\pi/2) \cos(k\pi/4). \end{aligned}$$

Следовательно, условие (1.94) эквивалентно тому, что у функции  $\theta(\varphi)$  все коэффициенты Фурье с номером кратным 4, равны нулю. Справедливость соотношения (1.91) сразу следует из (1.93) и (1.95).

Докажем справедливость соотношения (1.92). Как следует из (1.11), точка пересечения касательной с углом наклона  $\psi + \alpha$  к положительному направлению оси  $OX$  и касательной с углом наклона  $\psi + \beta$  имеет координаты

$$\begin{aligned} x_{\alpha, \beta} &= \frac{\theta(\psi + \beta) \cos \alpha - \theta(\psi + \alpha) \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)} ; \\ y_{\alpha, \beta} &= -\frac{\theta(\psi + \beta) \sin \beta - \theta(\psi + \alpha) \sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Расстояние от точки  $(x_{\alpha, \beta}, y_{\alpha, \beta})$  до касательной

$$x \sin \gamma - y \cos \gamma + \theta(\psi + \gamma) = 0$$

равно

$$d = \frac{\theta(\psi + \beta) \sin(\gamma - \alpha) + \theta(\psi + \alpha) \sin(\beta - \gamma) + \theta(\psi + \gamma) \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Легко проверить, что для треугольника с углами  $A$ ,  $B$  и  $C$ , описанного вокруг кривой  $\Gamma$ , высота, проведенная из вершины  $A$ , вычисляется согласно формуле

$$h_A(\psi) = \frac{\theta(\psi) \sin A + \theta(\psi + \pi - C) \sin B + \theta(\psi + \pi + B) \sin C}{\sin A}. \quad (1.96)$$

В частности, если треугольник  $ABC$  правильный, то

$$h(\psi) = \theta\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + \theta\left(\psi - \frac{2\pi}{3}\right) + \theta(\psi).$$

Отсюда получаем, что для выполнения условия  $h \equiv a\sqrt{3}/2$ , необходимо и достаточно, чтобы функция  $\theta(\varphi)$  имела отличные от нуля коэффициенты Фурье с номерами  $n = 3k \pm 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Естественным обобщением дельта – кривых являются выпуклые кривые, которые являются вписанными при вращении в произвольном треугольнике. Решение этой задачи довольно громоздкое. Приведем решение для равнобедренных треугольников.

Будем говорить, что выпуклая кривая  $\Gamma$  есть дельта – кривая  $\Delta_\alpha$ , если при любом повороте она вписана в фиксированный равнобедренный треугольник периметра  $P$  с углом  $\alpha$  при вершине.

**Следствие 1.42.** *Если для равнобедренного треугольника угол  $\alpha$  при вершине не выражается рационально через  $\pi$ , то для такого треугольника  $\Delta_\alpha$  – кривая не существует, а если у*

равнобедренного треугольника периметра  $P$  угол при вершине  $\alpha = \pi p/q$  (где  $p/q$  - несократимая дробь,  $p, q \in \mathbb{N}$ ), то для того чтобы кривая  $\Gamma(\varphi)$  была  $\Delta_\alpha$ -кривой, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (1.89), где функция  $\theta(\varphi)$  имеет вид

$$\theta(\varphi) = \frac{P \sin \alpha}{4 \left(1 + \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} + \sum_{k \in \mathcal{N}(p,q)} \rho_k \cos(k\varphi + \varphi_k),$$

где  $\mathcal{N}(p, q)$  – множество всех чисел вида

$$\frac{2q(2N+1) \pm (q-p)}{q+p} \in \mathbb{N}, \quad N \in \mathbb{Z}.$$

Приведем несколько частных случаев.

Для правильного треугольника  $\alpha = \pi/3$  и множество  $\mathcal{N}(1, 3)$  будет иметь вид  $3N \pm 1$ ,  $N = 0, 1, \dots$  Для прямоугольного равнобедренного треугольника  $\alpha = \pi/2$  и множество  $\mathcal{N}(1, 2)$  будет состоять из чисел вида  $8N + 1$ ,  $N = 0, 1, \dots$  Для равнобедренного треугольника с углом  $\alpha = 2\pi/3$  имеем множество  $\mathcal{N}(2, 3)$  из чисел вида  $12N + 1$ ,  $N = 0, 1, \dots$

Из теоремы 1.40 можно получить ряд интересных следствий. Приведем два таких следствия.

**Следствие 1.43.** Среди всех  $2\pi$ -периодических функций  $\theta(\varphi)$  таких, что

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi + \pi) = d \tag{1.97}$$

и функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не меняет знак на периоде, наименьшее значение

$$S(\theta) = \int_0^{2\pi} \left( \theta^2(\varphi) - (\theta'(\varphi))^2 \right) d\varphi \tag{1.98}$$

достигается для  $2\pi/3$ -периодической функции

$$\theta^*(\varphi) = \begin{cases} \frac{d}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{3} + \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{3} \right) \right), & -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0, \\ \frac{d}{\sqrt{3}} \sin \left( \varphi + \frac{\pi}{3} \right), & 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$$

или, что то же,

$$\theta^*(\varphi) = d \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 3k\varphi}{k(9k^2 - 1)} \right).$$

При этом экстремальное значение  $S$  равно

$$S_{\min} = S(\theta^*) = \frac{d^2(2\pi - \sqrt{3})}{2}.$$

**Доказательство.** Прежде всего отметим, что как следует из теоремы 1.40, для того чтобы кривая вида (1.89) была кривой равной ширины, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1.97) и функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не изменяла знак на периоде.

С другой стороны, хорошо известно ([4]), что среди всех кривых равной ширины фигуру наименьшей площади ограничивает треугольник Релло. Отсюда и из того факта, что треугольник Релло – кривая  $\Gamma(\theta^*)$ , сразу следует требуемое утверждение.

Аналогично доказывается следующее утверждение.

**Следствие 1.44.** Среди всех  $2\pi$ -периодических функций  $\theta(\varphi)$  таких, что

$$\theta(\varphi) + \theta(\varphi - 2\pi/3) + \theta(\varphi + 2\pi/3) = d$$

и функция  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  не меняет знак на периоде, наименьшее значение величины (1.98) достигается для  $\pi$ -периодической функции

$$\theta^*(\varphi) = \begin{cases} \frac{d}{2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), & 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{d}{2} \left(2 + \sqrt{3} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right), & \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi, \end{cases}$$

и экстремальное значение  $S$  определяется равенством

$$S_{\min} = S(\theta^*) = \frac{d^2(2\pi - 3\sqrt{3})}{3}.$$

Приведем еще одно свойство выпуклых кривых. Рассмотрим сетку  $(i, j)$ , где  $i, j \in \mathbb{Z}$ .

Ясно, что если  $\Gamma_{i,j}$  набор кругов радиуса  $1/2$  с центрами в узлах решетки, то при любом повороте на угол  $\varphi$  всех кругов, каждый из них будет касаться четырех соседних. Найдутся ли выпуклые фигуры, отличные от кругов, имеющие это свойство?

Будем говорить, что выпуклая кривая  $\Gamma$ , с диаметром не более единицы, имеет  $R$ -свойство, если для каждого узла решетки найдется такое расположение кривой  $\Gamma_{i,j}$  (с точностью до поворота и сдвига), при котором узел решетки будет лежать в области, ограниченной этой кривой, и при любом повороте всех кривых на один и тот же угол  $\varphi$  (вокруг соответствующего узла решетки) каждая из них будет касаться четырех соседних кривых.

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.45.** Если угол  $\alpha = \frac{2p+1}{2q} \pi$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$  и функция

$$\theta(\varphi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{2q(2k-1)} \cos(2q(2k-1)\varphi + \varphi_k)$$

такова, что  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) \geq 0$  при всех  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , то кривая  $\Gamma$  вида

$$\Gamma_{i,j}(\theta, \varphi) = \begin{cases} i - \theta(\varphi) \sin\left(\varphi + \frac{1-(-1)^{i+j}}{2} \alpha\right) - \theta'(\varphi) \cos\left(\varphi + \frac{1-(-1)^{i+j}}{2} \alpha\right), \\ j + \theta(\varphi) \cos\left(\varphi + \frac{1-(-1)^{i+j}}{2} \alpha\right) - \theta'(\varphi) \sin\left(\varphi + \frac{1-(-1)^{i+j}}{2} \alpha\right), \end{cases}$$

имеет  $R$  – свойство.

Одной из основных задач прикладной механики, основы которой были заложены П.Л.Чебышевым, является построение механизмов, которые обладают возможностью воспроизведения весьма сложных кривых как траекторий отдельных точек звеньев. Это могут быть как алгебраические, так и трансцендентные кривые. Порядок и вид этих кривых, вообще говоря, могут быть любыми.

Далее приводится общий вид некоторых характеристических кривых, порожденных данной кривой.

### 1.5.1. Тангенциальная кривая

**Определение 1.46.** Если кривая  $\Gamma(\varphi)$  в каждой точке имеет касательную  $\Gamma'(\varphi) = (x'(\varphi), y'(\varphi))$ , то для заданного  $\varepsilon$  геометрическое место точек концов векторов длины  $\varepsilon$  с направлением  $\Gamma'(\varphi)$  и началом в точке  $\Gamma(\varphi)$  называется  $\varepsilon$  – тангенциальной кривой или просто тангенциальной кривой (рис. 1.12).

Для кривой  $\Gamma(\varphi)$   $\varepsilon$  – тангенциальную кривую будем обозначать  $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$ . Сама кривая по отношению к тангенциальной кривой называется трактрисой.

Если кривая  $\Gamma(\varphi)$  имеет угловую точку  $\varphi_0$  с касательными векторами  $\Gamma'(\varphi_0 - 0)$  и  $\Gamma'(\varphi_0 + 0)$ , то частью тангенциальной кривой будем считать дугу окружности с центром в данной точке  $\varphi_0$  и радиусом  $\varepsilon$ .

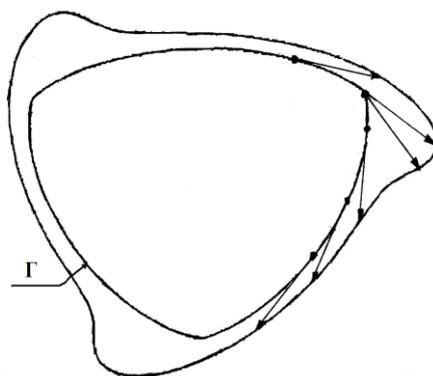


Рис.1.12. Схема образования тангенциальной кривой.

**Теорема 1.47.** Пусть кривая  $\Gamma(\theta)$  лежит в классе  $\mathcal{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$ . Тогда ее тангенциальная кривая  $T_\varepsilon\Gamma(\varphi)$  для всех точек  $\Gamma(\theta, \varphi)$ , не являющихся угловыми, имеет вид

$$T_\varepsilon\Gamma(\varphi) = \begin{cases} x_\varepsilon(\theta, \varphi) \\ y_\varepsilon(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - (\theta'(\varphi) - \varepsilon) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.99)$$

где функция  $\theta(\varphi)$  лежит в классе  $\mathcal{S}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$ , а для угловых точек – это части окружности радиуса  $\varepsilon$ .

Действительно, пусть кривая  $\Gamma(\varphi)$  определяется равенствами (1.4). Тогда направляющий вектор касательной к кривой  $\Gamma(\varphi)$  в точке  $\Gamma(\theta, \varphi)$  имеет вид

$$\Gamma'(\theta, \varphi) = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) (\cos \varphi, \sin \varphi).$$

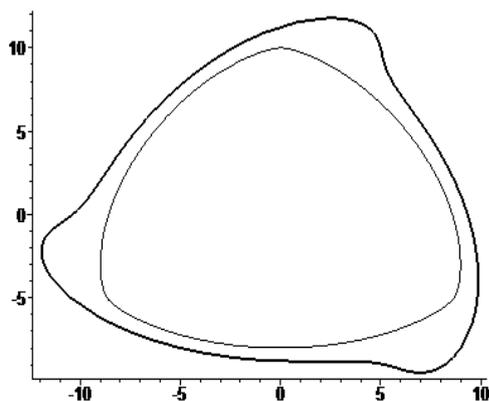
Поскольку кривая  $\Gamma(\varphi)$  выпуклая и величина  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  положительная, то вектор  $a(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$  есть нормализованный вектор кривой. Таким образом, для тех точек кривой  $\Gamma(\varphi)$ , которые не являются угловыми, то есть производная  $\Gamma'(\varphi)$  существует, уравнение тангенциальной кривой будет иметь вид:

$$\Gamma(\theta, \varphi) + \varepsilon \cdot a(\varphi) = (x(\theta, \varphi) + \varepsilon \cos \varphi, y(\theta, \varphi) + \varepsilon \sin \varphi),$$

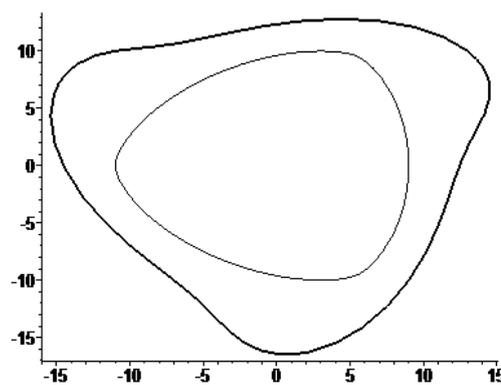
что вместе с равенствами (1.4) и завершает доказательство теоремы для точек, которые не являются угловыми. Для угловых точек утверждение очевидно.

Приведем несколько примеров тангенциальных кривых.

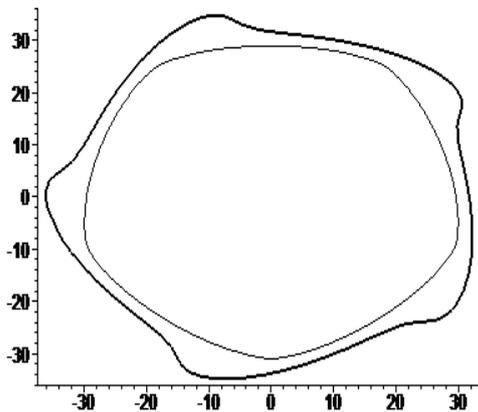
На рисунке 1.13 представлены тангенциальные кривые в случае, когда кривая  $\Gamma(\varphi)$  является кривой равной ширины (кривая изображена тонкой линией) с указанной опорной функцией  $\theta(\varphi)$  и заданной величиной  $\varepsilon$ .



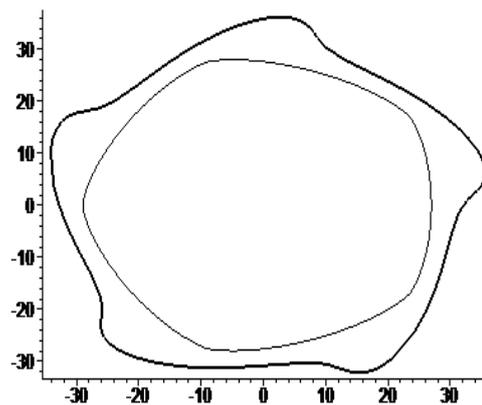
а)  $\varepsilon = 5$ ;  $\theta(\varphi) = 9 + \cos 3\varphi$ ;



б)  $\varepsilon = 10$ ;  $\theta(\varphi) = 10 - \sin 3\varphi$ ;

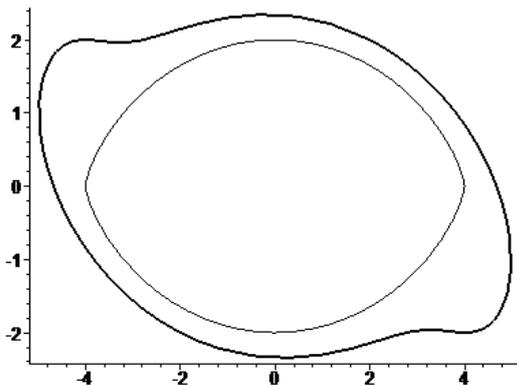


в)  $\varepsilon = 15$ ;  $\theta(\varphi) = 30 - \cos 5\varphi$ ;

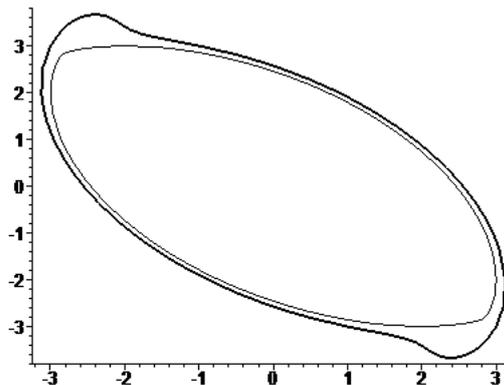


г)  $\varepsilon = 18$ ;  $\theta(\varphi) = 28 + \sin 5\varphi$ .

*Рис.1.13.* Тангенциальные кривые для кривой равной ширины  
 На рисунке 1.14 приведены тангенциальные кривые в случае, когда кривая  $\Gamma(\varphi)$  является дельта- кривой.



а)  $\varepsilon = 2$ ;  $\theta(\varphi) = 3 - \cos 2\varphi$ ;



б)  $\varepsilon = 1$ ;  $\theta(\varphi) = 3 + \sin 2\varphi$ ;

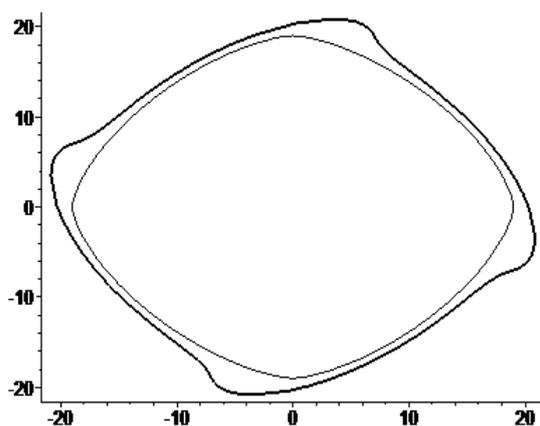
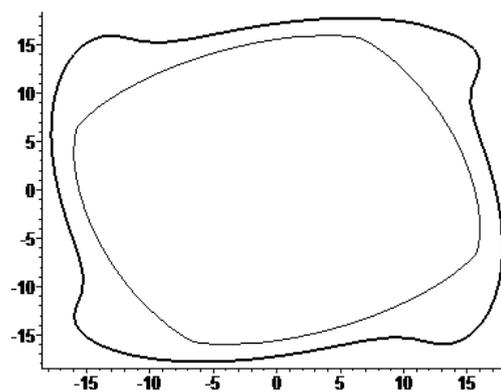
в)  $\varepsilon = 7$ ;  $\theta(\varphi) = 18 + \cos 4\varphi$ г)  $\varepsilon = 10$ ;  $\theta(\varphi) = 16 - \sin 4\varphi$ .

Рис. 1.14. Тангенциальные кривые для дельта – кривой

Приведем отдельные свойства тангенциальной кривой.

Выясним условия, при которых тангенциальная кривая будет выпуклой. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

**Теорема 1.48.** Пусть  $\Gamma(\theta, \varphi) = \Gamma(\varphi)$  – выпуклая замкнутая кривая и  $\theta(\varphi)$  – ее опорная функция. Для того чтобы тангенциальная кривая  $\Gamma_\varepsilon \Gamma(\varphi)$  была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из неравенств

$$\varepsilon > \max_{\varphi} \left( -\frac{\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2} \right) \quad (1.100)$$

или

$$\varepsilon < \min_{\varphi} \left( -\frac{\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi))^2 - 4(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2} \right). \quad (1.101)$$

**Доказательство.** Действительно, условие выпуклости эквивалентно тому, что кривизна кривой есть величина положительная, то есть

$$K_{\varepsilon}(\varphi) = \frac{x'_{\varepsilon} y''_{\varepsilon} - y'_{\varepsilon} x''_{\varepsilon}}{\left( (x'_{\varepsilon})^2 + (y'_{\varepsilon})^2 \right)^{3/2}} > 0 \quad (1.102)$$

при всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

Подставим значения производных

$$x'_{\varepsilon} = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi,$$

$$y'_{\varepsilon} = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi + \varepsilon \cdot \cos \varphi,$$

$$x''_{\varepsilon} = (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi - (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \cos \varphi,$$

$$y''_{\varepsilon} = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) \sin \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi,$$

в формулу для вычисления кривизны кривой. Получим, что кривизна тангенциальной кривой  $T_{\varepsilon}\Gamma(\varphi)$  в точке  $\varphi$  будет определяться равенством

$$K_{\varepsilon}(\varphi) = \frac{\varepsilon^2 + \varepsilon (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) + (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2}{\left( (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 + \varepsilon^2 \right)^{3/2}}.$$

Таким образом, условие (1.102) эквивалентно условию

$$\varepsilon^2 + \varepsilon (\theta'(\varphi) + \theta'''(\varphi)) + (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 > 0, \quad (\varphi \in [0, 2\pi])$$

откуда и получаем неравенства (1.100) и (1.101).

**Теорема 1.49.** *Площадь фигуры, ограниченной с внутренней стороны выпуклой кривой  $\Gamma(\varphi)$ , а с внешней стороны – ее тангенциальной кривой  $T_{\varepsilon}\Gamma(\varphi)$ , равна  $\pi \varepsilon^2$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\Gamma(\varphi)$  – выпуклая кривая, тогда она может быть представлена в виде (1.4). Следовательно, ее тангенциальная кривая  $T_{\varepsilon}\Gamma(\varphi)$  будет иметь вид (1.99).

Поскольку площадь фигуры  $S$ , ограниченной кривой  $\Gamma$ , определяется равенством

$$S = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx,$$

то

$$S(\Gamma_{\varepsilon}) - S(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varepsilon}} x_{\varepsilon} dy_{\varepsilon} - y_{\varepsilon} dx_{\varepsilon} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx.$$

Используя выражения для функций  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$ ,  $x_{\varepsilon}(\varphi)$ ,  $y_{\varepsilon}(\varphi)$  и их дифференциалов

$$dx = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi d\varphi, \quad dy = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi d\varphi,$$

$$dx_{\varepsilon} = (-(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi) d\varphi,$$

$$dy_{\varepsilon} = (-(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) \sin \varphi + \varepsilon \cdot \cos \varphi) d\varphi,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} S(\Gamma_{\varepsilon}) - S(\Gamma) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \theta(\varphi) \cdot (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) + \varepsilon^2 - \varepsilon \theta'(\varphi) - (\theta^2(\varphi) + (\theta'(\varphi))^2) \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left( \theta(\varphi) \cdot \theta''(\varphi) + (\theta'(\varphi))^2 + \varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \theta'(\varphi) \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(\theta(\varphi) \cdot \theta'(\varphi)) d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\varepsilon^2 - \varepsilon \cdot \theta'(\varphi)) d\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку для  $2\pi$ -периодической функции с интегрируемой производной имеет место равенство

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d(\theta'(\varphi)) = 0,$$

то

$$S(\Gamma_\varepsilon) - S(\Gamma) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \pi \varepsilon^2,$$

что и требовалось доказать.

Найдем длину дуги тангенциальной кривой. Известно, что

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} d\varphi,$$

тогда, учитывая выражения производных

$$x'_\varepsilon = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\cos \varphi - \varepsilon \cdot \sin \varphi,$$

$$y'_\varepsilon = -(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\sin \varphi + \varepsilon \cdot \cos \varphi,$$

получаем

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{((\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)^2 + ((\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))\sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \varepsilon^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta(\varphi) + \theta''(\varphi))^2 + \varepsilon^2} d\varphi. \end{aligned}$$

Выразим опорную функцию  $\theta(\psi)$  тангенциальной кривой  $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$  через опорную функцию  $\theta(\varphi)$  кривой  $\Gamma(\varphi)$ .

Пусть  $\psi$  – угол наклона касательной тангенциальной кривой к положительному направлению оси  $OX$ . Тогда

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi},$$

где

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)}.$$

Действительно, касательная к тангенциальной кривой описывается уравнением

$$\begin{aligned} & (x + \theta(\varphi)\sin \varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon)\cos \varphi)(\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi) = \\ & = (y - \theta(\varphi)\cos \varphi + (\theta'(\varphi) - \varepsilon)\sin \varphi)(\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi). \end{aligned}$$

Тогда расстояние от начала координат до касательной тангенциальной кривой равно

$$r(\varphi) = \frac{\theta(\varphi) - \sigma \cdot (\theta'(\varphi) + \varepsilon)}{\sqrt{1 + \sigma^2}}.$$

Таким образом, опорная функция тангенциальной кривой  $T_\varepsilon \Gamma(\varphi)$  будет равна  $\theta(\psi) = r(\varphi)$ , где

$$\psi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin \varphi - \sigma \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi + \sigma \cdot \sin \varphi} \right).$$

### 1.5.2.Обобщенная циклоида

В теории машиностроения используют механизмы для черчения циклических кривых, которые образуются при качении окружности по прямой или по другой окружности. В общем виде циклические кривые можно представить как рулетты, т.е. кривые, которые описывает на неподвижной плоскости точка, жестко связанная с одной из двух каких-либо линий, когда одна без скольжения катится по другой. Циклоида является одной из простейших рулетт.

Другим примером рулетт являются укороченная и удлиненная циклоиды, которые описывает точка, находящаяся соответственно внутри или вне кривой, катящейся по прямой линии.

Пусть выпуклая фигура  $D$  ограничена кривой  $\Gamma(\varphi)$ . Траекторию движения точки кривой  $\Gamma(\varphi)$ , катящейся без скольжения по прямой линии, будем называть *обобщенной циклоидой*. Обозначим обобщенную циклоиду через  $С\Gamma(\theta)$ . Схема образования обобщенной циклоиды приведена на рисунках 1.15 – 1.16.

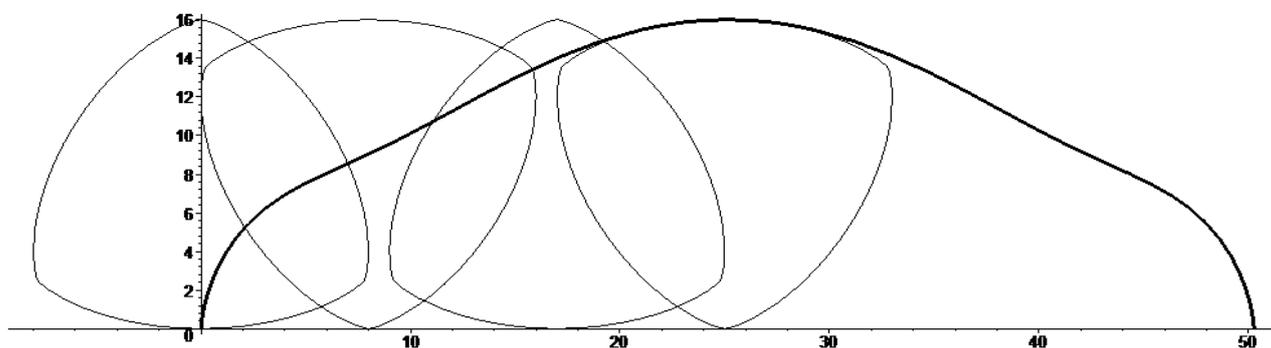


Рис. 1.15. Схема образования обобщенной циклоиды для кривой равной ширины

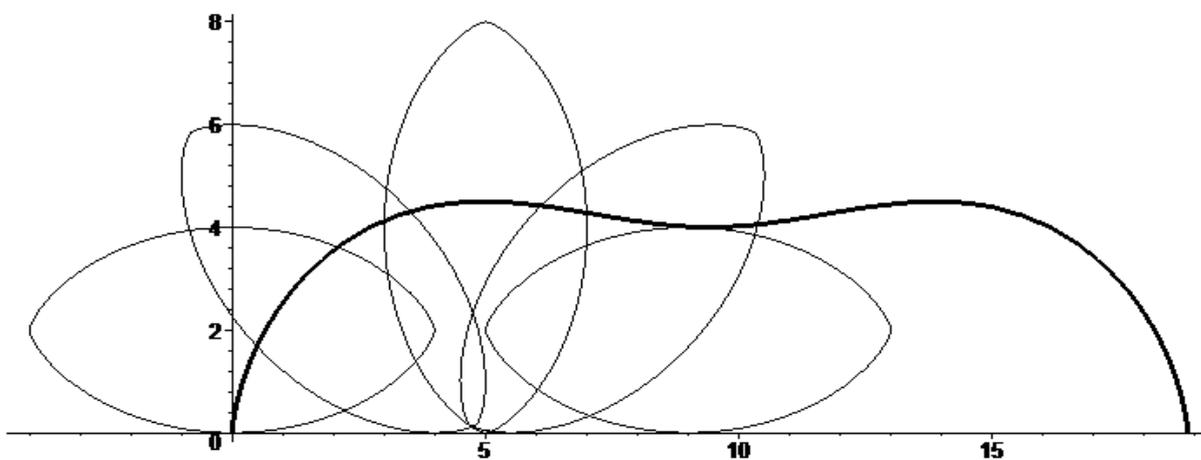


Рис. 1.16. Схема образования обобщенной циклоиды для дельта-кривой

**Теорема 1.50.** Пусть кривая  $\Gamma(\theta)$  лежит в классе  $\mathcal{M}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$ . Тогда ее обобщенная циклоида  $СГ(\theta)$  для всех точек  $\Gamma(\theta, \varphi)$  имеет вид

$$СГ(\theta) = \begin{cases} x_c(\theta, \varphi) \\ y_c(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} \int_0^\varphi \theta(-u) du + \theta'(0) - \theta(\varphi - \psi) \sin \varphi - \\ 0 \\ -\theta'(\varphi - \psi) \cos \varphi, \\ -\theta(-\psi) + \theta(\varphi - \psi) \cos \varphi - \theta'(\varphi - \psi) \sin \varphi, \end{cases} \quad (1.103)$$

где функция  $\theta(\varphi)$  лежит в классе  $\mathfrak{S}(\Theta_n, \Psi_m, \mathcal{L}_m)$ ,

**Доказательство.** Пусть замкнутая строго выпуклая кривая  $\Gamma(\varphi)$  задается параметрическими уравнениями

$$\Gamma(\varphi) = \begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Повернем данную кривую на угол  $\psi$  возле точки Штейнера (начало координат подвижной плоскости, которая связана с кривой), получим

$$\Gamma_\psi(\theta, \phi) = \begin{cases} x_\psi(\theta, \phi) \\ y_\psi(\theta, \phi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi, \\ \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi, \end{cases}$$

Где  $\phi = \varphi + \psi$ .

В работе [20] доказано, что при  $\phi = 0$  касательная к кривой будет горизонтальной и соответственно точка  $(-\theta'(-\psi), \theta(-\psi))$  будет точкой минимума. Перенесем кривую  $\Gamma_\psi(\theta, \phi)$  так, чтобы

ее минимум совпал с началом координат неподвижной плоскости:

$$\Gamma_{\psi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} x_{\psi}^0(\theta, \phi) \\ y_{\psi}^0(\theta, \phi) \end{cases} = \begin{cases} \theta'(-\psi) - \theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi, \\ -\theta(-\psi) + \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi. \end{cases}$$

Кривая  $\Gamma_{\psi}^0(\theta, \phi)$  и есть кривая, которая лежит на оси  $OX$ .

Если кривая  $\Gamma(\varphi)$  катится без скольжения по оси  $OX$ , то при повороте на угол  $\psi$  точка касания будет находиться от начала координат на расстоянии, равном длине  $\ell(\psi)$  дуги кривой, соответствующей промежутку изменения параметра от 0 до  $\psi$ , при обратном изменении параметра  $\varphi$ . Из [20] имеем

$$\ell(\psi) = \int_0^{\psi} (\theta(-\varphi) + \theta''(-\varphi)) d\varphi = \int_0^{\psi} \theta(-\varphi) d\varphi - \theta'(-\psi) + \theta'(0). \quad (1.104)$$

Таким образом, если кривая  $\Gamma(\varphi)$  катится по оси  $OX$  и при этом поворачивается на угол  $\psi$ , то ее уравнение принимает вид:

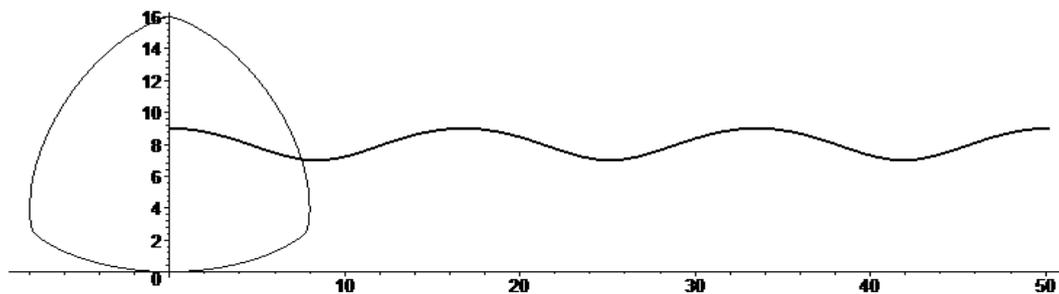
$$\Gamma_{\psi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} x_{\psi}^0(\theta, \phi) \\ y_{\psi}^0(\theta, \phi) \end{cases} = \begin{cases} \theta'(-\psi) - \theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi + \ell(\psi), \\ -\theta(-\psi) + \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi. \end{cases} \quad (1.105)$$

Учитывая выражение для длины дуги кривой (1.104), получаем утверждение теоремы.

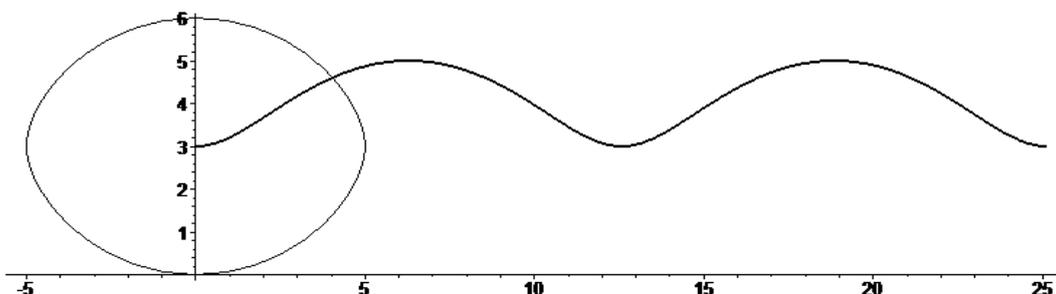
Если кривая  $\Gamma(\varphi)$  катится по оси  $OX$ , то ее точка Штейнера (начало початок координат подвижной плоскости, связанной с кривой) описывает траекторию, которая определяется уравнениями

$$\tilde{\Gamma}_\psi = \begin{cases} x(\psi) \\ y(\psi) \end{cases} = \begin{cases} \theta'(-\psi) + \ell(\psi), \\ -\theta(-\psi). \end{cases} \quad (1.106)$$

На рисунке 1.17 приведены траектории движения точки Штейнера для кривой равной ширины (а) и дельта-кривой (б)



а)



б)

Рис. 1.17. Траектории движения точки Штейнера

Таким образом, при использовании соотношений (1.105) и (1.106), можно составить параметрическое уравнение трохоиды (то есть укороченной или удлиненной циклоиды) для каждого фиксированного угла  $\varphi_0$ . Оно имеет следующий вид

$$\tilde{\Gamma}_\psi(\lambda, \varphi_0) = \lambda \Gamma_\psi^0(\theta, \varphi_0) + (1 - \lambda) \tilde{\Gamma}(\psi),$$

или

$$\tilde{\Gamma}_\psi(\lambda, \varphi_0) = \begin{cases} \tilde{x}_\psi(\lambda, \varphi_0) \\ \tilde{y}_\psi(\lambda, \varphi_0) \end{cases} = \begin{cases} \lambda(-\theta(\varphi_0) \sin(\varphi_0 + \psi) - \theta'(\varphi_0) \cos(\varphi_0 + \psi) + \\ + \theta'(-\psi) + \ell(\psi)) + (1 - \lambda)(\theta'(-\psi) + \ell(\psi)), \\ \lambda(\theta(\varphi_0) \cos(\varphi_0 + \psi) - \theta'(\varphi_0) \sin(\varphi_0 + \psi) - \\ - \theta(-\psi)) - (1 - \lambda)\theta(-\psi). \end{cases}$$

Получаем, что

$$\tilde{\Gamma}_\psi(\lambda, \varphi_0) = \begin{cases} \tilde{x}_\psi(\lambda, \varphi_0) \\ \tilde{y}_\psi(\lambda, \varphi_0) \end{cases} = \begin{cases} \lambda(-\theta(\varphi_0) \sin(\varphi_0 + \psi) - \theta'(\varphi_0) \cos(\varphi_0 + \psi)) - \\ - \theta'(-\psi) + \ell(\psi), \\ \lambda(\theta(\varphi_0) \cos(\varphi_0 + \psi) - \theta'(\varphi_0) \sin(\varphi_0 + \psi)) + \\ + \theta(-\psi), \end{cases} \quad (1.107)$$

где  $\lambda$  – любое действительное число. При  $0 < \lambda < 1$ , (1.107) есть уравнением укороченной обобщенной циклоиды, при  $\lambda > 1$  – удлиненной обобщенной циклоиды.

На рисунке 1.18 приведена укороченная обобщенная циклоида для кривой равной ширины с опорной функцией  $\theta(\varphi) = 8 - \cos 3\varphi$  для  $\varphi_0 = 0$  при разных значениях  $\lambda$ .

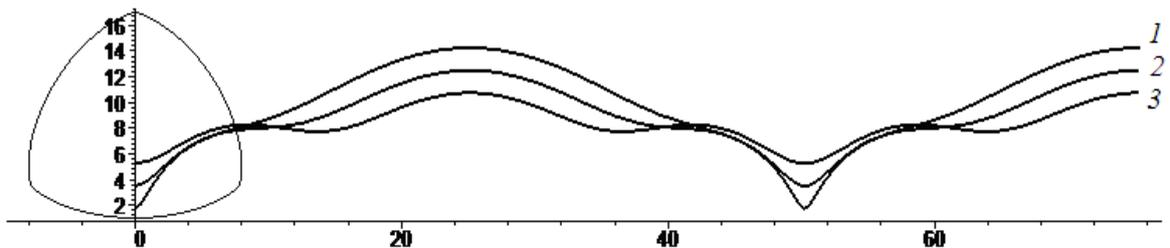


Рис. 1.18. Укороченная обобщенная циклоида для кривой равной ширины.

- 1)  $\lambda = 0,75$ ;      2)  $\lambda = 0,5$ ;      3)  $\lambda = 0,25$ .

Заметим, что при  $\lambda = 0$  имеем траекторию движения точки Штейнера (начало початок координат подвижной плоскости, связанной с кривой).

На следующем рисунке приведена обобщенная удлиненная циклоида для кривой равной ширины с опорной функцией  $\theta(\varphi) = 8 - \cos 3\varphi$  для  $\varphi_0 = 0$  при разных значениях  $\lambda$ .

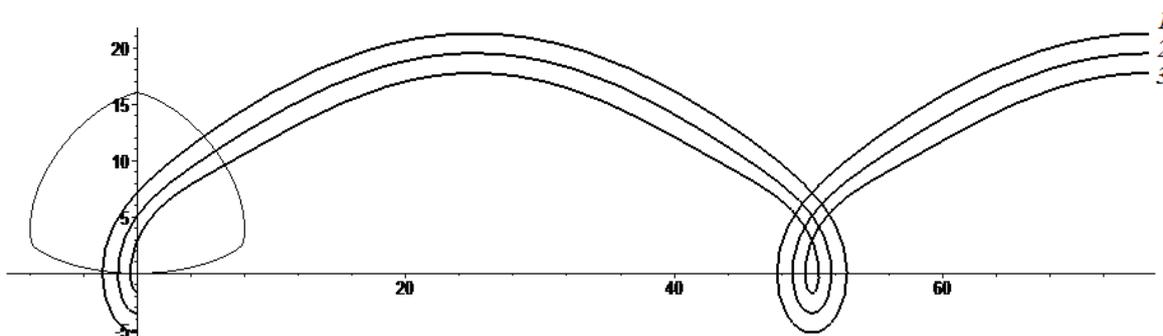


Рис. 1.19. Удлиненная обобщенная циклоида для кривой равной ширины

1)  $\lambda = 1,75$ ;      2)  $\lambda = 1,5$ ;      3)  $\lambda = 1,25$ .

На рисунке ниже приведена укороченная обобщенная циклоида для дельта – кривой с опорной функцией  $\theta(\varphi) = 3 - \cos 2\varphi$  для  $\varphi_0 = 0$  при разных значениях  $\lambda$ .

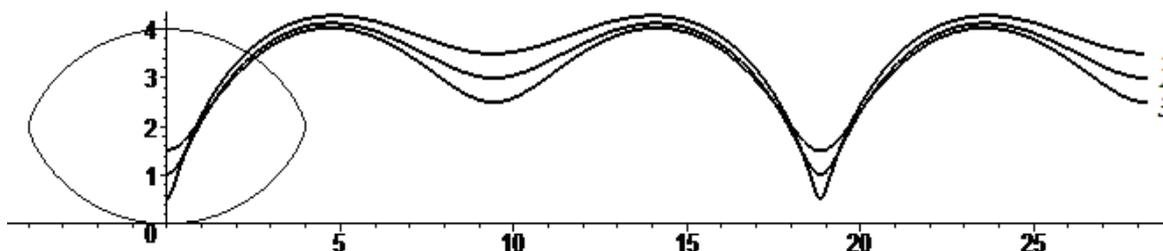


Рис. 1.20. Укороченная обобщенная циклоида для дельта – кривой

1)  $\lambda = 0,75$ ;      2)  $\lambda = 0,5$ ;      3)  $\lambda = 0,25$ .

На рисунке 1.21 приведена обобщенная удлиненная циклоида для дельта – кривой с опорной функцией  $\theta(\varphi) = 3 - \cos 2\varphi$  для  $\varphi_0 = 0$  при разных значениях  $\lambda$ .

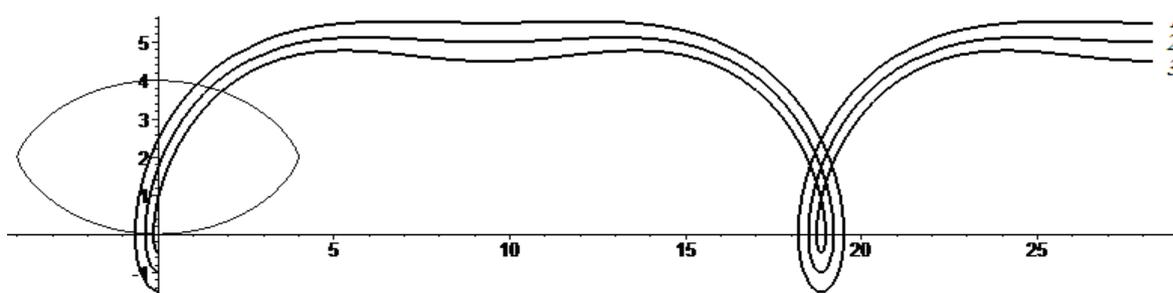


Рис. 1.21. Удлиненная обобщенная циклоида для дельта – кривой

- 1)  $\lambda = 1,75$ ;      2)  $\lambda = 1,5$ ;      3)  $\lambda = 1,25$ .

### 1.5.3. Обобщенная гипоциклоида

Пусть выпуклые фигуры  $D_1$  и  $D_2$  ограничены кривыми  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  та  $\gamma(\theta, \varphi)$  соответственно. Функции  $\Theta(\varphi)$  и  $\theta(\varphi)$  есть опорными функциям для данных кривых. Траекторию движения точек кривой  $\gamma(\theta, \varphi)$ , которая катится без скольжения по внешней стороне кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$ , будем называть *обобщенной гипоциклоидой*. Обозначим обобщенную гипоциклоиду через  $G\Gamma(\theta, \varphi)$ .

**Теорема 1.51.** Пусть  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  и  $\gamma(\theta, \varphi)$  – гладкие строго выпуклые кривые. Тогда параметрическое уравнение обобщенной гипоциклоиды  $G\Gamma(\theta, \varphi)$  имеет вид

$$G\Gamma(\varphi, \psi) = \begin{cases} (\theta(\pi - \psi) - \Theta(\varphi)) \sin \varphi - (\theta'(\pi - \psi) + \Theta'(\varphi)) \cos \varphi + \\ + \theta(\varphi) \sin \psi + \theta'(\varphi) \cos \psi; \\ (\theta(\pi - \psi) + \Theta(\varphi)) \cos \varphi - (\theta'(\pi - \psi) - \Theta'(\varphi)) \sin \varphi + \\ + \theta(\varphi) \cos \psi - \theta'(\varphi) \sin \psi, \end{cases}$$

где функции  $\theta(\varphi)$  и  $\Theta(\varphi)$  такие, что выражения  $\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)$  и  $\Theta(\varphi) + \Theta''(\varphi)$  не меняют знак на периоде, и при этом выполняется равенство

$$\int_0^{\varphi} (\Theta(t) + \Theta''(t)) dt = \int_{\pi}^{\pi+\psi} (\theta(-t) + \theta''(-t)) dt.$$

**Доказательство.** Пусть заданы две замкнутые строго выпуклые кривые

$$\Gamma(\Theta, \varphi) = \begin{cases} x_1(\Theta, \varphi) \\ y_1(\Theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\Theta(\varphi) \sin \varphi - \Theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \Theta(\varphi) \cos \varphi - \Theta'(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

и

$$\gamma(\theta, \varphi) = \begin{cases} x_2(\theta, \varphi) \\ y_2(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Пусть кривая  $\gamma(\theta, \varphi)$  катится без скольжения по внешней стороне кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  (рис. 1.22). Тогда длины соприкасаемых дуг кривых будут совпадать, то есть

$$\int_0^{\varphi} (\Theta(t) + \Theta''(t)) dt = \int_{\pi}^{\pi+\psi} (\theta(-t) + \theta''(-t)) dt.$$

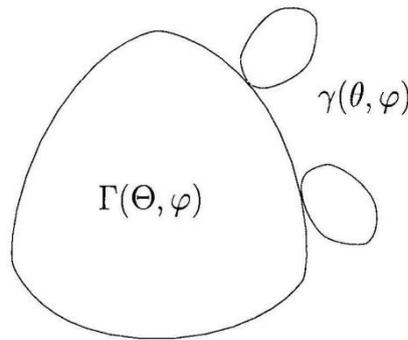


Рис. 1.22. Схема образования обобщенной гипоциклоиды

Понятно, что катящаяся кривая при этом поворачивается на угол  $\psi$ . Уравнение этой кривой при каждом фиксированном  $\psi$  будет иметь вид

$$\gamma_{\psi}(\theta, \varphi) = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin(\varphi + \psi) - \theta'(\varphi) \cos(\varphi + \psi), \\ \theta(\varphi) \cos(\varphi + \psi) - \theta'(\varphi) \sin(\varphi + \psi). \end{cases}$$

Обозначим  $\varphi + \psi = \phi$ , тогда  $\varphi = \phi - \psi$ . Таким образом, параметрические уравнения этой кривой при каждом фиксированном  $\psi$  будет иметь вид

$$\gamma_{\psi}(\theta, \phi) = \begin{cases} -\theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi, \\ \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi. \end{cases}$$

При  $\phi = \pi$  касательная к кривой  $\gamma_{\psi}(\theta, \phi)$  будет горизонтальной и соответствующая точка  $(\theta'(\pi - \psi), -\theta(\pi - \psi))$  будет точкой максимума. Сдвинем кривую  $\gamma_{\psi}(\theta, \phi)$  так, чтобы ее максимум совпал с началом координат:

$$\gamma_{\psi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} -\theta'(\pi - \psi) - \theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi, \\ \theta(\pi - \psi) + \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi. \end{cases}$$

Поскольку для кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  угол  $\varphi$  соответствует углу наклона касательной к положительному направлению оси абс-

цисс, то для определения уравнения катящейся кривой, сначала плоскость кривой  $\gamma_{\psi}^0(\theta, \phi)$  повернем на угол  $\varphi$ :

$$\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} (-\theta'(\pi - \psi) - \theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi) \cos \varphi + \\ + (\theta(\pi - \psi) + \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi) \sin \varphi, \\ -(-\theta'(\pi - \psi) - \theta(\phi - \psi) \sin \phi - \theta'(\phi - \psi) \cos \phi) \sin \varphi + \\ + (\theta(\pi - \psi) + \theta(\phi - \psi) \cos \phi - \theta'(\phi - \psi) \sin \phi) \cos \varphi, \end{cases}$$

или

$$\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} -\theta(\phi - \psi) \sin(\phi - \varphi) - \theta'(\phi - \psi) \cos(\phi - \varphi) + \\ + \theta(\pi - \psi) \sin \varphi - \theta'(\pi - \psi) \cos \varphi, \\ \theta(\phi - \psi) \cos(\phi - \varphi) - \theta'(\phi - \psi) \sin(\phi - \varphi) + \\ + \theta(\pi - \psi) \cos \varphi + \theta'(\pi - \psi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Учитывая обозначения, введенные ранее, данное выражение можно переписать в виде

$$\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi) = \begin{cases} -\theta(\varphi) \sin \psi - \theta'(\varphi) \cos \psi + \\ + \theta(\pi - \psi) \sin \varphi - \theta'(\pi - \psi) \cos \varphi, \\ \theta(\varphi) \cos \psi - \theta'(\varphi) \sin \psi + \\ + \theta(\pi - \psi) \cos \varphi + \theta'(\pi - \psi) \sin \varphi. \end{cases}$$

Перенесем начало координат плоскости, связанной с этой кривой, в точку кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  так, чтобы касательная к кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  в этой точке совпала с осью абсцисс повернутой плоскости кривой  $\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi)$ .

Тогда уравнение кривой  $\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi)$  в плоскости кривой  $\Gamma(\Theta, \varphi)$  будет иметь вид

$$\gamma_{\psi, \varphi}^0(\theta, \phi) = (x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

где

$$x(\varphi, \psi) = -\Theta(\varphi) \sin \varphi - \Theta'(\varphi) \cos \varphi + \theta(\varphi) \sin \psi + \theta'(\varphi) \cos \psi + \\ - \theta'(\pi - \psi) \cos \varphi + \theta(\pi - \psi) \sin \varphi$$

и

$$y(\varphi, \psi) = \Theta(\varphi) \cos \varphi - \Theta'(\varphi) \sin \varphi - \theta(\varphi) \cos \psi + \theta'(\varphi) \sin \psi + \\ + \theta'(\pi - \psi) \sin \varphi + \theta(\pi - \psi) \cos \varphi.$$

Таким образом, параметрические уравнения обобщенной гипоциклоиды имеют вид

$$G\Gamma(\theta, \varphi) = (x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

где

$$x(\varphi, \psi) = -(\Theta(\varphi) - \theta(\pi - \psi)) \sin \varphi - (\Theta'(\varphi) + \theta'(\pi - \psi)) \cos \varphi + \\ + \theta(\varphi) \sin \psi + \theta'(\varphi) \cos \psi$$

и

$$y(\varphi, \psi) = (\Theta(\varphi) + \theta(\pi - \psi)) \cos \varphi - (\Theta'(\varphi) - \theta'(\pi - \psi)) \sin \varphi + \\ + \theta(\varphi) \cos \psi - \theta'(\varphi) \sin \psi.$$

При этом

$$\int_0^{\varphi} (\Theta(t) + \Theta''(t)) dt = \int_{\pi}^{\pi+\psi} (\theta(-t) + \theta''(-t)) dt,$$

что и доказывает теорему.

#### 1.5.4. Тангенциальная кривая и обобщенная циклоида дуговых сплайнов

Пусть  $\theta(\Delta_n, \varphi)$  – тригонометрический сплайн. Из определения тригонометрического сплайна следует, что для всех  $\varphi$  тангенциальная кривая непрерывна, замкнута и для  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  определяется равенствами

$$\gamma_\varepsilon(\Delta_n, \varphi) = \begin{cases} x_\varepsilon(\Delta_n, \varphi) \\ y_\varepsilon(\Delta_n, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -A_{i+1/2} \sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi - B_{i+1/2}, \\ -A_{i+1/2} \cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi + C_{i+1/2}. \end{cases} \quad (1.108)$$

Следовательно, для угла  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  функции  $\theta(\Delta_n, \varphi)$  будет соответствовать дуга окружности радиуса  $\sqrt{A_{i+1/2}^2 + \varepsilon^2}$  с центром в точке  $(-B_{i+1/2}, C_{i+1/2})$ .

Тангенциальная кривая  $\gamma_\varepsilon(\Delta_n, \varphi)$  не является гладкой и, если  $\alpha_i$  – угол между левыми и правыми касательными векторами в точке стыковки окружностей, то

$$\sin^2 \alpha_i = \frac{\varepsilon^2 \cdot (A_{i+1/2} - A_{i-1/2})^2}{A_{i+1/2}^2 \cdot A_{i-1/2}^2 + \varepsilon^2 \cdot (A_{i+1/2}^2 + A_{i-1/2}^2) + \varepsilon^4}.$$

Используя формулу Тейлора, получаем

$$A_{i+1/2} = A_i + A'_i h_{i+1/2} + 0,5A''_i h_{i+1/2}^2 + O(h_{i+1/2}^3),$$

$$A_{i-1/2} = A_i + A'_i h_{i-1/2} + 0,5A''_i h_{i-1/2}^2 + O(h_{i-1/2}^3),$$

где

$$h_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i, \quad h_{i-1/2} = \varphi_i - \varphi_{i-1}.$$

Тогда

$$\sin^2 \alpha_i = \frac{\varepsilon^2 \cdot (h_{i+1/2} - h_{i-1/2})^2 \cdot (A'_i + 0,5A''_i (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}))^2}{(\varepsilon^2 + A_i^2 + A_i \cdot A'_i \cdot (h_{i+1/2} + h_{i-1/2}))^2}$$

или

$$\sin \alpha_i = \frac{\varepsilon \cdot \Delta h_i \cdot (A_i' + A_i'' \cdot h_i^*)}{(\varepsilon^2 + A_i^2 + 2A_i \cdot A_i' \cdot h_i^*)} + O((h_i^*)^3),$$

где

$$\Delta h_i = h_{i+1/2} - h_{i-1/2}, \quad h_i^* = 0,5(h_{i+1/2} + h_{i-1/2}).$$

Следовательно, имеет место асимптотическое равенство

$$\sin \alpha_i = \varepsilon \cdot \Delta h_i \cdot \left[ \frac{1}{\varepsilon^2 + A_i^2} \cdot \frac{A_i' + A_i'' \cdot h_i^*}{1 + \frac{2A_i \cdot A_i'}{\varepsilon^2 + A_i^2} \cdot h_i^*} \right] + O((h_i^*)^3),$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha_i = \varepsilon \Delta h_i \left[ \frac{A_i}{\varepsilon^2 + A_i^2} + \frac{A_i^2 \cdot (A_i'' - 2A_i') + \varepsilon^2 \cdot A_i''}{\varepsilon^2 + A_i^2} \cdot h_i^* \right] + \\ + O(\max(h_i^*)^3, \varepsilon^4, \varepsilon h_i^2). \end{aligned}$$

Таким образом, при  $h_i = \max h_{i+1/2} \rightarrow 0$  угол  $\alpha_i \rightarrow 0$ .

То есть, если  $\Gamma(\theta)$  – гладкая, кусочно-окружностная кривая, то тангенциальная кривая  $T_\varepsilon \Gamma(\theta)$  кривой  $\Gamma(\theta)$  есть кусочно-окружностная, но не гладкая кривая с теми же центрами и радиусами  $R_\varepsilon = \sqrt{A_{i+1/2}^2 + \varepsilon^2}$ .

Из определения тригонометрического сплайна следует, что для всех  $\varphi \in [\varphi_i, \varphi_{i+1}]$  обобщенная циклоида будет иметь следующее параметрическое задание

$$\gamma_c(\Delta_n, \varphi) = \begin{cases} x_c(\Delta_n, \varphi) \\ y_c(\Delta_n, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} A_{i+1/2}(\varphi - \sin \varphi) - B_{i+1/2}, \\ A_{i+1/2}(1 - \cos \varphi), \end{cases} \quad (1.109)$$

то есть, функции  $\theta(\Delta_n, \varphi)$  будет соответствовать дуга циклоиды с началом в точке  $(-B_{i+1/2}, 0)$ .

Покажем, что кривая  $\gamma_c(\Delta_n, \varphi)$  кусочно-гладкая. Для этого достаточно показать, что выполняется условие

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} y_{i+1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi} x_{i+1/2}(\varphi_i)} = \frac{\frac{d}{d\varphi} y_{i-1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi} x_{i-1/2}(\varphi_i)}, \quad (1.110)$$

то есть касательные справа и слева в точке  $\varphi_i$  совпадают.

Прежде всего, заметим, что

$$\frac{d}{d\varphi} y_{i+1/2}(\varphi_i) = A_{i+1/2} \sin \varphi_i, \quad \frac{d}{d\varphi} x_{i+1/2}(\varphi_i) = A_{i+1/2} (1 - \cos \varphi_i),$$

и, следовательно,

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} y_{i+1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi} x_{i+1/2}(\varphi_i)} = \frac{A_{i+1/2} \sin \varphi_i}{A_{i+1/2} (1 - \cos \varphi_i)} = \frac{\sin \varphi_i}{(1 - \cos \varphi_i)}.$$

Аналогично устанавливается равенство

$$\frac{\frac{d}{d\varphi} y_{i-1/2}(\varphi_i)}{\frac{d}{d\varphi} x_{i-1/2}(\varphi_i)} = \frac{A_{i-1/2} \sin \varphi_i}{A_{i-1/2} (1 - \cos \varphi_i)} = \frac{\sin \varphi_i}{(1 - \cos \varphi_i)},$$

что и доказывает (1.110), а вместе с ним и гладкость кривой  $\gamma_c(\Delta_n, \varphi)$ .

Если кривая  $\Gamma(\theta)$  – кусочно-гладкая и  $\theta(\varphi)$  есть тригонометрический сплайн, то многие характеристики кривой вычисляются относительно легко через коэффициенты этого сплайна.

**Предложение 1.52.** *Если  $\theta(\varphi)$  есть тригонометрический сплайн, то длина любого дугового сплайна  $\gamma_c(\Delta_n, \varphi)$  определяется равенством*

$$L(\Gamma_c) = 4 \sum_{i=1}^n A_{i+1/2} \cdot \sin \frac{\delta_{i+1/2}}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_{i+1/2}}{2},$$

а площадь фигуры, ограниченной выпуклым дуговым сплайном  $\gamma_c(\Delta_n, \varphi)$ , равна

$$S(\Gamma_c) = \sum_{i=1}^n A_{i+1/2}^2 \left( \frac{3}{2} \delta_{i+1/2} - 4 \sin \frac{\delta_{i+1/2}}{2} \cos \frac{\varphi_{i+1/2}}{2} + \frac{1}{2} \sin \delta_{i+1/2} \cos \varphi_{i+1/2} \right),$$

где  $\delta_{i+1/2} = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ ,  $\varphi_{i+1/2} = \varphi_{i+1} + \varphi_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ).

Действительно, площадь обобщенной циклоиды в общем виде выражается равенством

$$S(\Gamma_c) = \int_0^{2\pi} (\theta - \theta(0) \cos \varphi - \theta'(0) \sin \varphi)(\theta + \theta'') (1 - \cos \varphi) d\varphi.$$

Тогда, если

$$\theta(\varphi) = A_{i+1/2} + B_{i+1/2} \sin \varphi + C_{i+1/2} \cos \varphi,$$

то

$$\begin{aligned}
S(\Gamma_c) &= \sum_{i=1}^n A_{i+1/2}^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi = \\
&= \sum_{i=1}^n A_{i+1/2}^2 \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left( \frac{3}{2} - 2 \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi.
\end{aligned}$$

Вычисляя данный интеграл, получаем требуемое равенство.

В общем виде для дуги обобщенной циклоиды определяется следующим образом:

$$L(\Gamma_c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(\theta + \theta'')^2 (1 - \cos \varphi)^2 + (\theta' + \theta(0) \sin \varphi - \theta'(0) \cos \varphi)^2} d\varphi.$$

Если  $\theta(\varphi)$  – тригонометрический сплайн, то

$$\begin{aligned}
L(\Gamma_c) &= \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{A_{i+1/2}^2 (1 - \cos \varphi)^2 + A_{i+1/2}^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{2} A_{i+1/2} \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \sqrt{1 - \cos \varphi} d\varphi.
\end{aligned}$$

Вычислив данный интеграл, получим требуемое равенство для длины контура дугового сплайна.

## 1.6. Проектирование кулачковых механизмов с использованием опорных функций

### 1.6.1. Проектирование кулачковых механизмов с плоским толкателем

Кулачковые механизмы используют в разных областях машиностроения, например, в двигателях внутреннего сгорания,

металлорежущих станках, машинах пищевой промышленности и др., в которых через кулачковый механизм осуществляют программирование рабочего процесса; в машинах – автоматах, где кулачковый механизм выполняет функцию управления, включая и выключая рабочие органы в соответствующий момент.

В зависимости от того, какой вид имеет ведомое звено (толкатель) различают разные типа плоских кулачковых механизмов. Прежде всего, это кулачковые механизмы с игольчатым, плоским, роликовым и рамочным толкателем.

Для решения основных задач исследования и проектирования механизмов используют эмпирические, геометрические и аналитические методы. Наибольшее распространение получили геометрические методы. Они хорошо зарекомендовали себя при невысоких требованиях, которые предъявляются к кулачковым механизмам (прежде всего, к гладкости кулачка, точности проектирования профиля кулачковой шайбы и пр.). При решении сложных задач, геометрические методы приводят к трудоемким построениям, что снижает возможности их использования. Аналитические методы, в отличие от эмпирических и геометрических методов, дают возможность решать поставленные задачи с любой наперед заданной точностью. В настоящее время аналитические методы расчета кулачковых механизмов решены лишь для простейших случаев.

При исследовании кулачковых механизмов принято выделять два класса задач (см., например, [2]) – задачи анализа и задачи синтеза.

Задача анализа состоит в том, что при известном профиле кулачка требуется исследовать различные его свойства (такие

как выпуклость, гладкость и др.) и их влияние на функцию движения толкателя.

Одна из основных задач анализа – нахождение передаточной функции, то есть функции движения толкателя. Эту задачу будем называть задачей анализа в узком смысле. Профиль кулачка можно подобрать таким образом, чтобы обеспечить любой, наперед заданный закон движения толкателя. В этом основное преимущество кулачковых механизмов. Поэтому их широко используют, особенно в сложных машинах – автоматах, где необходимо обеспечить согласованное движение многих исполнительных органов.

К задачам синтеза кулачковых механизмов относятся все задачи, связанные с проектированием механизмов, которые обладают наперед заданными свойствами.

Важнейшей задачей синтеза является задача проектирования кулачкового механизма с заданной функцией движения толкателя. Это задача синтеза в узком смысле.

В дальнейшем под задачами анализа и синтеза будем понимать задачи в узком смысле.

Приведем точную формулировку *задачи анализа в узком смысле* для кулачковых механизмов **с плоским толкателем**.

Пусть задан кулачек с профилем шайбы  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  и центром вращения  $O$ . Не ограничивая общности, можно считать, что центр вращения совмещен с началом координат. Повернем кулачек вокруг центра вращения  $O$  на угол  $\varphi$ . К его профилю проведем касательную параллельную оси  $OX$ . Тогда расстояние от этой касательной до оси абсцисс и есть значение

функции движения толкателя  $\theta(\Gamma, \varphi)$  для заданного угла  $\varphi$  (рис. 1.23). Ясно, что если профиль  $\Gamma(t)$  – гладкий, то функция  $\theta(\Gamma, \varphi)$  есть гладкая  $2\pi$ –периодическая функция.

Задача определения функции  $\theta(\Gamma, \varphi)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi]$ ) для каждого фиксированного профиля  $\Gamma(t)$  с центром вращения  $O$  есть задача анализа. Рассмотрим условия разрешимости этой задачи.

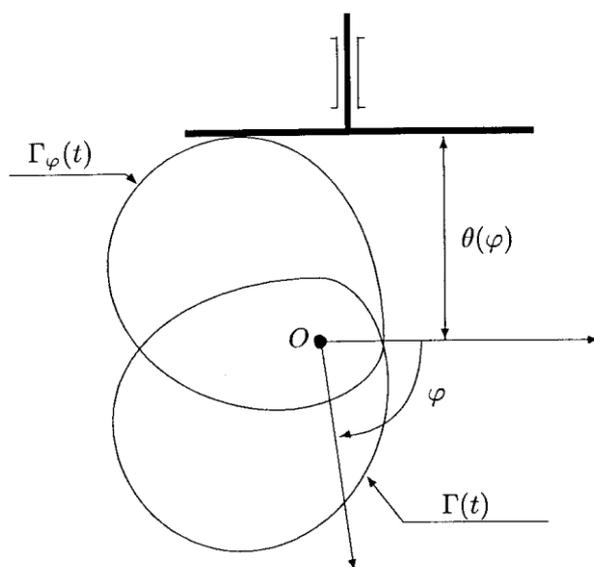


Рис. 1.23. Схема кулачкового механизма с плоским толкателем

Как обычно, множество  $G$  будем называть строго выпуклым, если вместе с любыми двумя точками его внутренность (наибольшее открытое множество, которое содержится в  $G$ ) содержит открытый отрезок, соединяющий эти точки. Контур (линия) называется выпуклым, если он замкнут, без самопересечений и ограничивает выпуклую (строго выпуклую) фигуру.

Выпуклой оболочкой множества  $G$  называется наименьшее выпуклое множество, которое содержит данное множество  $G$ .

Известно (см., например [3]), что если контур  $\Gamma(t)$  произвольный, а  $\Gamma^*(t)$  граница его выпуклой оболочки, то

$$\theta(\Gamma, \varphi) = \theta(\Gamma^*, \varphi),$$

поэтому для кулачков с плоским толкателем достаточно рассматривать кулачки только с выпуклым профилем.

Если кривая  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  гладкая и замкнутая, то условие выпуклости профиля  $\Gamma$  эквивалентно тому, что кривизна  $k(\Gamma, t)$  кривой знакопостоянна.

*Задача синтеза* кулачковых механизмов (в узком смысле) состоит в том, что для заданной  $2\pi$ -периодической функции движения толкателя  $\theta(\varphi)$  требуется построить выпуклый кулачек с контуром  $\Gamma(\theta, t)$  для которого функция движения толкателя совпадает с данной функцией  $\theta(\varphi)$ , то есть такой, что

$$\theta(\Gamma(\theta), \varphi) = \theta(\varphi) \quad (\varphi \in [0, 2\pi]).$$

Кроме того, требуется определить необходимые и достаточные условия на функцию  $\theta(\varphi)$ , для того чтобы эта задача была разрешима.

Как показано в теореме 1.8, для любого строго выпуклого кулачка с профилем шайбы  $\Gamma(t)$  функция движения толкателя  $\theta(\Gamma, \varphi)$  обладает свойством

$$\theta(\Gamma, \varphi) + \theta''(\Gamma, \varphi) > 0 \quad (\varphi \in [0, 2\pi]).$$

Таким образом, условие

$$\theta(\varphi) + \theta''(\varphi) > 0 \quad (\varphi \in [0, 2\pi]) \quad (1.111)$$

является необходимым для разрешимости задачи синтеза.

Покажем, что это условие является и достаточным, то есть для любой функции движения толкателя  $\theta(\varphi)$  такой, что выполняется условие (1.111), можно спроектировать выпуклый кулачек, который порождает эту функцию.

*Приведем решение задачи анализа в узком смысле.*

Пусть уравнение профиля кулачка задано в параметрическом виде

$$\Gamma(t): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  есть  $2\pi$ -периодические дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Так как профиль гладкий и выпуклый, то при любом повороте кулачка существуют две и только две точки, в которых касательная к профилю параллельна оси  $OX$  (сверху и снизу профиля) и две и только две точки, в которых она параллельна оси  $OY$  (с левой и правой сторон от профиля). Для профиля  $\Gamma(t)$  значения параметра  $t$ , которое соответствует точке касания верхней горизонтальной касательной, обозначим через  $\tau_1$ , а через  $\tau_2$  ( $\tau_1 < \tau_2$ ) обозначим значение параметра, которое соответствует точке касания нижней горизонтальной касательной. Через  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ( $\xi_1 < \xi_2$ ) обозначим значения параметра, соответствующие точкам касания левой и правой вертикальным касательным.

Определенные таким образом значения параметра будут упорядочены следующим образом

$$\xi_1 < \tau_1 < \xi_2 < \tau_2 < \xi_1 + 2\pi.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$f(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Нетрудно видеть, что это  $2\pi$ -периодическая функция.

Вычислим ее производную:

$$f'(t) = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} = \frac{k(\Gamma, t) \left( (x(t))^2 + (y(t))^2 \right)^{3/2}}{(x'(t))^2}.$$

В силу строгой выпуклости профиля, его кривизна во всех точках положительная. Следовательно, на каждом из интервалов  $(\xi_1, \xi_2)$  и  $(\xi_2, \xi_1 + 2\pi)$  функция  $f(t)$  строго возрастает. Отсюда следует, что каждому  $t \in (\xi_1, \xi_2)$  соответствует одно и только одно значение  $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  такое, что

$$\varphi = \operatorname{arctg} f(t) := F(t).$$

Аналогично, каждому значению  $t \in (\xi_2, \xi_1 + 2\pi)$  соответствует одно и только одно значение  $\varphi \in (\pi/2, 3\pi/2)$  такое, что (см. рис. 1.24)

$$\varphi = \operatorname{arctg} f(t) + \pi := F(t).$$

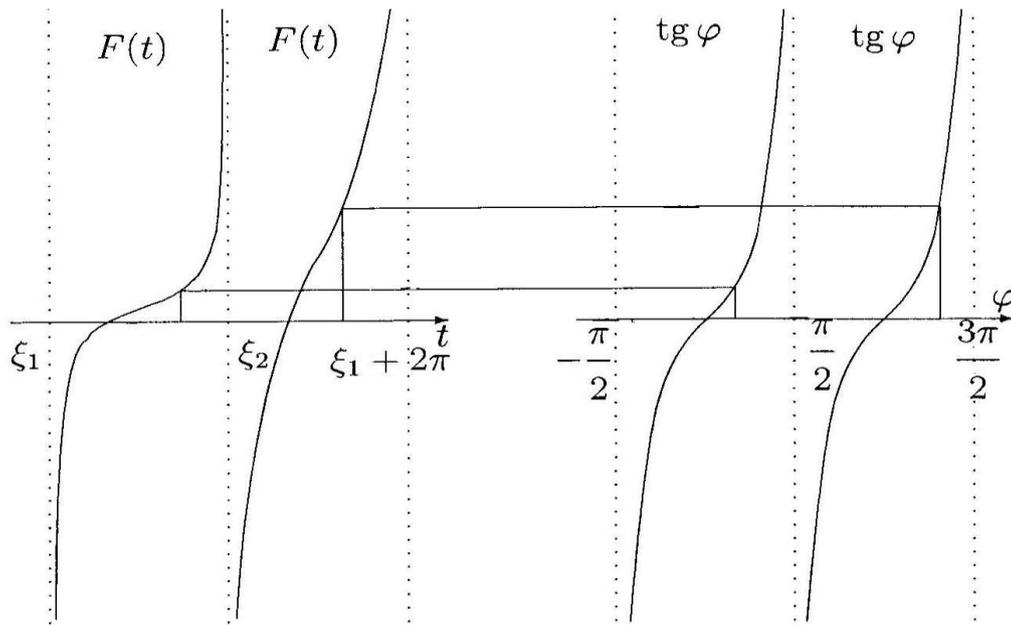


Рис. 1.24. Соответствие между переменными  $t$  и  $\varphi$

Положим еще

$$F(\xi_1) = -\frac{\pi}{2}, \quad F(\xi_2) = \frac{\pi}{2}.$$

Мы получили непрерывное взаимно однозначное отображение  $\varphi = F(t)$  отрезка  $[\xi_1, \xi_1 + 2\pi]$  на отрезок  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ .

Обратное отображение обозначим через  $t = F^{-1}(\varphi)$ .

Покажем, что решение задачи анализа доставляет функция

$$\theta(\Gamma, \varphi) = -x(F^{-1}(\varphi)) \cdot \sin \varphi + y(F^{-1}(\varphi)) \cdot \cos \varphi. \quad (1.112)$$

Действительно, после поворота на угол  $\varphi$  уравнение профиля кулачка принимает вид

$$\Gamma_{\varphi}(t) = \begin{cases} x_{\varphi}(t) \\ y_{\varphi}(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) \cos \varphi + y(t) \sin \varphi, \\ -x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\theta(\Gamma, \varphi) = \max_{t \in [0, 2\pi]} (-x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi). \quad (1.113)$$

В силу непрерывности функций  $x(t)$  и  $y(t)$  этот максимум всегда достигается. Обозначим через  $\tau$  точку максимума функции  $\theta(\Gamma, \varphi)$ , то есть,  $\tau$  является решением уравнения

$$y'_\varphi(t) = -x'(t) \sin \varphi + y'(t) \cos \varphi = 0.$$

Следовательно,  $\tau$  удовлетворяет тождеству

$$\frac{y'(\tau)}{x'(\tau)} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Отсюда и из предыдущего получаем  $\tau = F^{-1}(\varphi)$ . Используя это значение в формуле (1.113), сразу получаем функцию движения толкателя (1.112).

Таким образом, получена явная формула движения толкателя для произвольного выпуклого кулачка с профилем  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Единственную сложность при непосредственном использовании этой формулы вызывает наличие значений обратной функции  $F^{-1}(\varphi)$ .

В качестве параметра  $t$  точки контура  $\Gamma(t)$  можно выбрать значение угла наклона нормали к кривой  $\Gamma(t)$  в этой точке к положительному направлению оси  $OX$ . Из приведенного решения нетрудно видеть, что в этом случае решение задачи анализа дает функция  $\theta(\Gamma, \varphi)$  следующего вида

$$\theta(\Gamma, \varphi) = -x(\varphi) \sin \varphi + y(\varphi) \cos \varphi.$$

Понятно, что сложности, которые возникают при введении такой параметризации, соизмеримы со сложностями построения обратной функции  $F^{-1}(\varphi)$ .

*Перейдем к решению задачи синтеза.*

Хотя решение задачи синтеза легко следует из результатов параграфа 1.1, для полноты изложения, приведем решение задачи синтеза полностью.

Для решения этой задачи достаточно показать, что для любой  $2\pi$ -периодической функции  $\theta(t)$ , для которой выполняется условие (1.111), уравнение профиля кулачка, порождающего функцию  $\theta(t)$ , будет описываться параметрическими уравнениями

$$\Gamma(\theta, t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(t) \sin t - \theta'(t) \cos t, \\ \theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t. \end{cases} \quad (1.114)$$

Повернем кулачек с профилем  $\Gamma(\theta, t)$  на угол  $\varphi$  вокруг его точки вращения  $O$ . После этого преобразования уравнение профиля кулачка принимает вид:

$$\Gamma_{\varphi}(\theta, t) = \begin{cases} x_{\varphi}(t) \\ y_{\varphi}(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) \cos \varphi + y(t) \sin \varphi, \\ -x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi, \end{cases}$$

или

$$\Gamma_{\varphi}(\theta, t) = \begin{cases} x_{\varphi}(t) \\ y_{\varphi}(t) \end{cases} = \begin{cases} (-\theta(t) \sin t - \theta'(t) \cos t) \cos \varphi + \\ + (\theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t) \sin \varphi, \\ (\theta(t) \sin t + \theta'(t) \cos t) \sin \varphi + \\ + (\theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t) \cos \varphi. \end{cases}$$

Покажем, что касательная к профилю (1.114) в точке  $t = \varphi$  будет параллельна оси  $OX$ .

Если функция  $\theta(t)$  дважды непрерывно дифференцируема, то функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , а, следовательно, и функции  $x_\varphi(t)$  и  $y_\varphi(t)$  непрерывно дифференцируемые. Тогда, учитывая условие (1.111), имеем

$$\frac{dy_\varphi}{dt}(t_0) = -x'(t_0)\sin\varphi + y'(t_0)\cos\varphi = (\theta(t_0) + \theta''(t_0))\sin(t_0 - \varphi) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta(\Gamma(\theta), \varphi) &= (\theta(\varphi)\sin\varphi + \theta'(\varphi)\cos\varphi)\sin\varphi + \\ &+ (\theta(\varphi)\cos\varphi - \theta'(\varphi)\sin\varphi)\cos\varphi = \theta(\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\theta(t)$  описывает движение толкателя кулачка с профилем, заданным равенствами (1.114).

Для завершения доказательства, остается показать, что если выполнено условие (1.111), то профиль (1.114) ограничивает выпуклую фигуру.

Вначале будем считать, что функция  $\theta(t)$  трижды непрерывно дифференцируемая. Вычислим значения вторых производных:

$$x''(t) = \theta(t)\sin t - \theta'(t)\cos t + \theta''(t)\sin t - \theta'''(t)\cos t,$$

$$y''(t) = -\theta(t)\cos t - \theta'(t)\sin t - \theta''(t)\cos t - \theta'''(t)\sin t.$$

Подставляя полученные значения первых и вторых производных, после очевидных преобразований получаем

$$k(\Gamma(\theta), t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\theta(t) + \theta''(t)} > 0,$$

что и требовалось доказать. Общий случай (когда  $\theta(t)$  не является трижды дифференцируемой) легко получается предельным переходом.

Приведем решение задачи синтеза в узком смысле для иной конструкции кулачкового механизма с плоским толкателем (рис. 1.25).

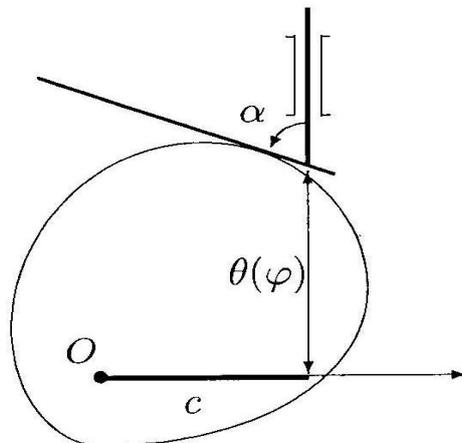


Рис. 1.25. Схема кулачкового механизма с плоским толкателем

В этом случае решение задачи будет следующим. Для любой  $2\pi$ -периодической функции  $\theta(t)$  такой, что для всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполняется условие

$$(\theta(t) + \theta''(t))\sin \alpha + c \cos \alpha > 0,$$

уравнение профиля кулачка, который порождает функцию  $\theta(t)$ , будет описываться параметрическими уравнениями

$$\Gamma(\theta, t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = \begin{cases} -(\theta(t) \sin \alpha + c \cos \alpha) \sin t - \theta'(t) \sin \alpha \cos t, \\ (\theta(t) \sin \alpha + c \cos \alpha) \sin \varphi - \theta'(t) \sin \alpha \sin t. \end{cases}$$

Одним из наиболее важных сфер использования кулачковых механизмов является их использование для включения (и выключения) каких-либо элементов машины. В этом случае требуется, чтобы толкатель двигался лишь для фазового угла  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , пребывая в неподвижном состоянии при остальных значениях фазового угла.

Часто для этих целей используют функцию  $\theta(\varphi)$ , которая имеет вид

$$\theta(\varphi) = a + (b - a)\Theta(\varphi),$$

где  $\Theta(\varphi) \in [0, 1]$  непрерывная функция с одним максимумом и отличная от нуля лишь для  $\varphi \in [\alpha, \beta]$  (рис.1.26).

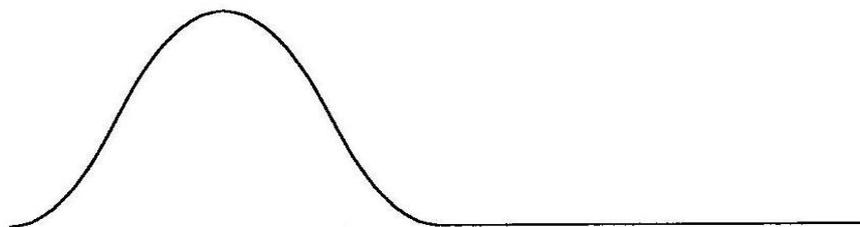


Рис. 1.26. График функции  $\theta(\varphi) = a + (b - a)\Theta(\varphi)$

Как правило, в этом случае используют законы кусочно-равноускоренного движения толкателя:

$$\theta^{\alpha, \beta}(\varphi) = a + 4(b - a) \frac{\xi^{\alpha, \beta}(\varphi)}{(\beta - \alpha)^2}, \quad (1.115)$$

где

$$\xi^{\alpha, \beta}(\varphi) = \begin{cases} \frac{(\varphi - \alpha)^2}{2}, & \varphi \in \left( \alpha, \frac{\beta + 3\alpha}{4} \right), \\ \left( \frac{\beta - \alpha}{4} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \varphi - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2, & \varphi \in \left( \frac{\beta + 3\alpha}{4}, \frac{3\beta + \alpha}{4} \right), \\ \frac{(\varphi - \beta)^2}{2}, & \varphi \in \left( \frac{3\beta + \alpha}{4}, \beta \right). \end{cases}$$

Эта функция обладает тем свойством, что она обеспечивает наименьшую вторую производную при заданном промежутке изменения функции толкателя.

Чтобы задача синтеза соответствующего кулачка была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы параметры  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяли условиям

$$a < b < a \frac{32 + 7(\beta - \alpha)^2}{32 - (\beta - \alpha)^2}.$$

В этом случае профиль кулачковой шайбы будет описываться уравнениями

$$\Gamma(\theta^{\alpha, \beta}, t) = (x(t), y(t)),$$

где

$$x(t) = \begin{cases} -\left(a + 2(b-a)\frac{(t-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right)\sin t - \left(4(b-a)\frac{t-\alpha}{(\beta-\alpha)^2}\right)\cos t, & t \in \left(\alpha, \frac{\beta+3\alpha}{4}\right), \\ -\left(a + 2(b-a)\frac{2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^2 - \left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right)\sin t - \\ -4(b-a)\frac{t - \frac{\alpha+\beta}{2}}{(\beta-\alpha)^2}\cos t, & t \in \left(\frac{\beta+3\alpha}{4}, \frac{3\beta+\alpha}{4}\right), \\ -\left(a + 2(b-a)\frac{(t-\beta)^2}{(\beta-\alpha)^2}\right)\sin t - \left(4(b-a)\frac{t-\beta}{(\beta-\alpha)^2}\right)\cos t, & t \in \left(\frac{3\beta+\alpha}{4}, \beta\right), \\ -a\sin t, & t \notin [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

И

$$y(t) = \begin{cases} \left( a + 2(b-a) \frac{(t-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2} \right) \cos t - \left( 4(b-a) \frac{t-\alpha}{(\beta-\alpha)^2} \right) \sin t, \\ \qquad \qquad \qquad t \in \left( \alpha, \frac{\beta+3\alpha}{4} \right), \\ \\ \left( a + 2(b-a) \frac{2\left(\frac{\beta-\alpha}{4}\right)^2 - \left(t - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{(\beta-\alpha)^2} \right) \cos t - \\ - 4(b-a) \frac{t - \frac{\alpha+\beta}{2}}{(\beta-\alpha)^2} \sin t, \\ \qquad \qquad \qquad t \in \left( \frac{\beta+3\alpha}{4}, \frac{3\beta+\alpha}{4} \right), \\ \\ \left( a + 2(b-a) \frac{(t-\beta)^2}{(\beta-\alpha)^2} \right) \cos t - \left( 4(b-a) \frac{t-\beta}{(\beta-\alpha)^2} \right) \sin t, \\ \qquad \qquad \qquad t \in \left( \frac{3\beta+\alpha}{4}, \beta \right), \\ \\ a \cos t, \qquad t \notin [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

На рисунке 1.27 приведены профили кулачков, которые порождают закон движения (1.106) для  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \pi$  и значениях  $a = 9, 8, 7, 6, 5$  и  $b = 13, 12, 11, 10, 9$  соответственно.

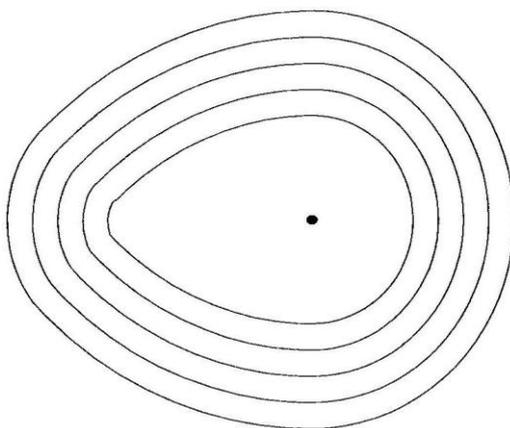


Рис. 1.27. Профили кулачков

Отметим, что точное решение задачи синтеза, заданное равенствами (1.105), позволяет получить явные формулы многих характеристик профиля кулачковой шайбы. Например, как видно из формулы (1.105), дифференциал дуги  $d\ell$  профиля  $\Gamma(\theta, \varphi)$  определяется равенством

$$d\ell(\Gamma(\theta, \varphi)) = (\theta(\varphi) + \theta''(\varphi)) d\varphi.$$

Отсюда и из того факта, что для любой непрерывно-дифференцируемой на всей оси  $2\pi$ -периодической функции ее производная в среднем равна нулю на периоде, следует, что полная длина профиля кулачка определяется равенством

$$\mathcal{L}(\Gamma(\theta)) = \int_0^{2\pi} \theta(\varphi) d\varphi.$$

Нетрудно получить и другие характеристики профиля. Например, эволюта (геометрическое место центров кривизны кривой) профиля кулачка, обеспечивающего заданный закон движения толкателя  $\theta(\varphi)$  определяется равенствами

$$\begin{cases} X = \theta''(\varphi) \sin \varphi - \theta'(\varphi) \cos \varphi, \\ Y = -\theta''(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi. \end{cases}$$

В результате технологической обработки профиль кулачка отличается от теоретического профиля на величину допуска  $\varepsilon$ . Поэтому важно знать, как ошибка задания профиля влияет на поведение функции толкателя. Покажем, что хорошее приближение профиля кулачка обеспечивает хорошее приближение функции толкателя. Для этого нам понадобятся некоторые понятия.

Внутреннюю эквидистанту к кривой  $\Gamma(t)$  обозначим через  $\Gamma_\varepsilon^-(t)$ , а внешнюю – через  $\Gamma_\varepsilon^+(t)$ . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что для строго выпуклого профиля  $\Gamma(t)$  при достаточно малых  $\varepsilon$  будут выполняться равенства

$$(\Gamma_\varepsilon^-)^+(t) = (\Gamma_\varepsilon^+)^-(t) = \Gamma(t)$$

и

$$\theta(\Gamma, t) = \theta(\Gamma_\varepsilon^-(t)) + \varepsilon = \theta(\Gamma_\varepsilon^+(t)) - \varepsilon. \quad (1.116)$$

Будем говорить, что профиль  $\gamma(t)$  описывает данный профиль  $\Gamma(t)$  с погрешностью  $\varepsilon$ , если контур  $\gamma(t)$  охватывает контур  $\Gamma_\varepsilon^-(t)$  (то есть, множество, границей которого является  $\gamma$ , содержит в себе контур  $\Gamma_\varepsilon^-(t)$ ) и контур  $\Gamma_\varepsilon^+(t)$  охватывает  $\gamma(t)$ .

Отсюда и из предыдущего следует, что если профиль  $\gamma(t)$  описывает профиль  $\Gamma(t)$  с погрешностью  $\varepsilon$ , то

$$\theta(\Gamma, \varphi) - \varepsilon = \theta(\Gamma_\varepsilon^-, \varphi) \leq \theta(\gamma, \varphi) \leq \theta(\Gamma_\varepsilon^+, \varphi) = \theta(\Gamma, \varphi) + \varepsilon, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Таким образом,

$$|\theta(\Gamma, \varphi) - \theta(\gamma, \varphi)| \leq \varepsilon$$

для всех  $\varphi \in [0, 2\pi]$ .

То есть величина погрешности функции толкателя всегда не превышает ошибки описания профиля кулачка.

### **1.6.2. Решение задач анализа и синтеза для центральных кулачковых механизмов с роликовым толкателем**

Далее рассмотрим точное решение задач синтеза и анализа для кулачкового механизма с вращающимся кулачком и возвратно-поступательно движущимся роликовым толкателем при условии, что центр вращения кулачка находится на продолжении оси, вдоль которой происходит движение толкателя (центральный кулачковый механизм).

Приведем точную формулировку задач анализа и синтеза для данного кулачкового механизма.

*Задача анализа состоит в следующем.* Пусть профиль кулачка описывается кривой  $\Gamma(t)$  и центр вращения находится в точке  $O$ , лежащей на вертикальной оси. Повернем кулачек вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ . Построим круг радиуса  $r$  с центром на оси  $OU$ , касающийся профиля кулачка с внешней стороны. Тогда расстояние от центра круга до точки  $O$  и есть значение функции движения толкателя для данного угла  $\varphi$  (рис. 1.28).

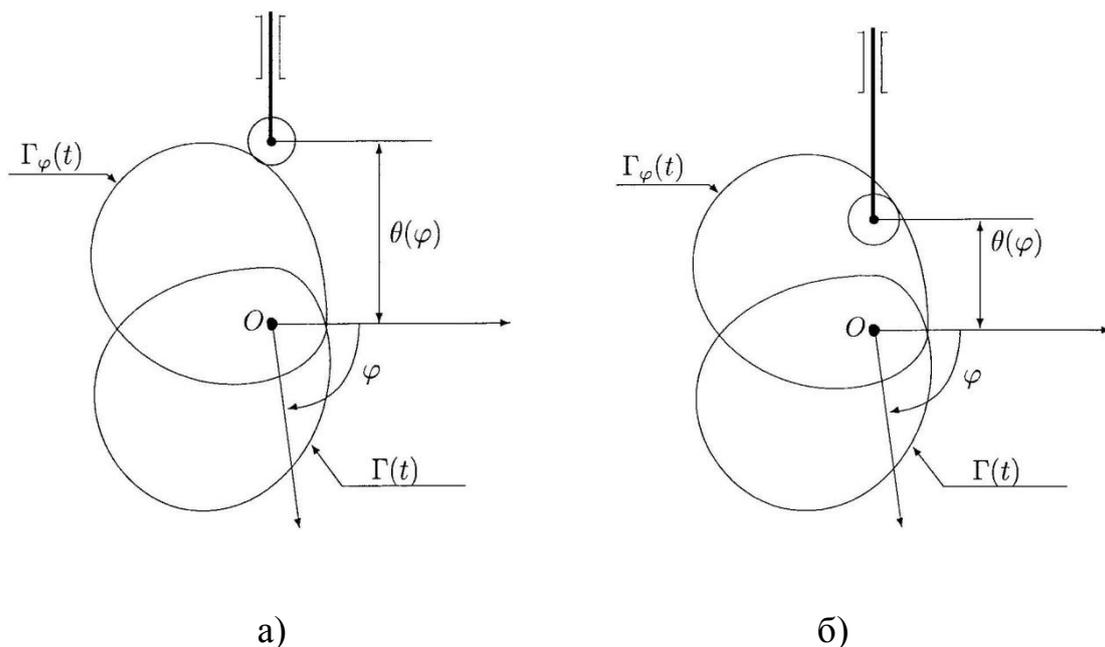


Рис. 1.28 Схема кулачкового механизма с роликовым толкателем

Задача определения функции  $\theta(\Gamma, \varphi)$  ( $\varphi \in [0, 2\pi]$ ) для каждого фиксированного профиля  $\Gamma(t)$  и центра вращения  $O$  есть задача анализа. Приведем решение этой задачи.

Будем говорить, что кривая  $\Gamma(t)$  обладает свойством «звездности», если она не имеет самопересечений и любой луч, проведенный из ее центра, пересекает данную кривую в одной и только одной точке. Необходимым и достаточным условием «звездности» кривой, имеющей параметрическое задание  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ , будет условие

$$x'(t)y(t) - x(t)y'(t) > 0 \quad \text{для } \forall t \in [0, 2\pi]. \quad (1.117)$$

Пусть уравнение профиля кулачка задано в параметрической форме  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ , где  $x(t)$  и  $y(t)$  есть  $2\pi$ -периодические, дважды непрерывно дифференцируемые функции. Покажем, что если кривая  $\Gamma(t)$  удовлетворяет условию (1.117) и ее

минимальная кривизна больше  $-1/r$ , где  $r$  – радиус ролика, то задача анализа имеет решение.

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = \frac{x_r(t)}{y_r(t)} = \frac{x(t) - r \cdot \frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}{y(t) + r \cdot \frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}}.$$

Нетрудно видеть, что функция  $\psi(t)$  есть  $2\pi$  – периодическая функция. Из условия (1.117) и того факта, что минимальная кривизна кривой  $\Gamma(t)$  больше  $-1/r$ , следует, что существует две и только две точки, в которых знаменатель обращается в ноль, и две и только две точки, в которых числитель равен нулю.

Пусть знаменатель функции  $\psi(t)$  обращается в ноль в точках  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , а числитель соответственно в точках  $\eta_1$  и  $\eta_2$ . Эти точки можно упорядочить следующим образом

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \xi_1 + 2\pi.$$

Вычислим производную функции  $\psi(t)$ . Имеем

$$\psi'(t) = \frac{x'_r(t) \cdot y_r(t) - x_r(t) \cdot y'_r(t)}{y_r^2(t)}.$$

Поскольку

$$x'_r(t) = x(t)(1 + rk(t)), \quad y'_r(t) = y(t)(1 + rk(t)),$$

где

$$k(t) = \frac{x''(t) \cdot y'(t) - x'(t) \cdot y''(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{3/2}}$$

кривизна кривой  $\Gamma(t)$ , то

$$\psi'(t) = \frac{(1 + rk(t)) \cdot (x'(t)y(t) - x(t)y'(t)) + r \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y_r^2(t)}.$$

В силу условия (1.117) и того, что минимальная кривизна кривой  $\Gamma(t)$  больше  $-1/r$ , мы получаем, что на каждом из интервалов  $(\xi_1, \xi_2)$  и  $(\xi_2, \xi_1 + 2\pi)$  функция  $\psi(t)$  является строго монотонно возрастающей.

Тогда, каждому значению  $t$  из интервала  $(\xi_1, \xi_2)$  соответствует одно и только одно значение  $\phi$  из интервала  $(-\pi/2, \pi/2)$  такое, что

$$\phi = \operatorname{arctg} \psi(t) := \Psi(t),$$

и каждому значению  $t \in (\xi_2, \xi_1 + 2\pi)$  соответствует одно и только одно значение  $\phi \in (\pi/2, 3\pi/2)$  такое, что

$$\phi = \operatorname{arctg} \psi(t) + \pi := \Psi(t).$$

Положим теперь  $\Psi(\xi_1) = -\frac{\pi}{2}$  и  $\Psi(\xi_2) = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом, мы получили непрерывное взаимно однозначное отображение  $\phi = \Psi(t)$  отрезка  $[\xi_1, \xi_1 + 2\pi]$  на отрезок  $[-\pi/2, 3\pi/2]$ . Отображение, обратное к  $\Psi(t)$ , обозначим через  $t = \Psi^{-1}(\phi)$ .

Покажем, что решение задачи анализа доставляет функция

$$\theta(\Gamma, \phi) = \left( (x_r)^2(\Psi^{-1}(\phi)) + (y_r)^2(\Psi^{-1}(\phi)) \right)^{1/2}. \quad (1.118)$$

Повернем кулачек на угол  $\phi$ , после поворота уравнение профиля кулачка принимает вид

$$\Gamma_\phi(t) = \begin{cases} x_\phi(t) \\ y_\phi(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) \cos \phi - y(t) \sin \phi, \\ x(t) \sin \phi + y(t) \cos \phi. \end{cases}$$

Каждому значению параметра  $t$  поставим в соответствие точку  $(x_{r,\phi}(t), y_{r,\phi}(t))$  с координатами

$$x_{r,\phi}(t) = x_\phi(t) - r \cdot \frac{y'_\phi(t)}{\sqrt{(x'_\phi(t))^2 + (y'_\phi(t))^2}},$$

$$y_{r,\phi}(t) = y_\phi(t) + r \cdot \frac{x'_\phi(t)}{\sqrt{(x'_\phi(t))^2 + (y'_\phi(t))^2}}.$$

Эта точка лежит на нормали к кривой  $\Gamma_\phi(t)$  в точке, соответствующей значению параметра  $t$  на расстоянии  $r$  с внешней стороны. В соответствии с постановкой задачи анализа, если значение параметра  $t_\phi$  таково, что  $x_{r,\phi}(t_\phi) = 0$ , то

$$\theta(\Gamma, \phi) = y_{r,\phi}(t_\phi). \quad (1.119)$$

Уравнение  $x_{r,\phi}(t_\phi) = 0$  можно переписать в виде

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{x_r(t_\phi)}{y_r(t_\phi)}.$$

Отсюда и из определения обратного отображения  $\Psi^{-1}(\phi)$  следует, что  $t_\phi = \Psi^{-1}(\phi)$ , что вместе с равенством (1.119) и завершает доказательство.

Таким образом, мы получили явную формулу функции движения роликового толкателя для произвольного кулачка, профиля которого удовлетворяет условию (1.117) и минимальная кривизна которого больше чем  $-1/r$ . Однако, при непосредственном использовании этой формулы возникает трудность, связанная с вычислением значений обратного отображения.

*Рассмотрим решение задачи синтеза в узком смысле.*

Пусть  $\theta(t)$  есть  $2\pi$ -периодическая положительная, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть для функции  $\theta(t)$  и радиуса ролика  $r$  для всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполнены условия

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{(\theta^2(t) + \theta'^2(t))^{3/2}}{\theta^2(t) + 2\theta'(t)\theta''(t) - \theta(t)\theta''(t)} \right| > r, \quad (1.120)$$

$$\frac{1}{r} > \frac{\sqrt{\theta^2(t) + \theta'^2(t)}}{\theta^2(t)}. \quad (1.121)$$

Тогда решение задачи синтеза будет доставлять профиль  $\Gamma(\theta, t) = (x(\theta, t), y(\theta, t))$ , где

$$x(\theta, t) = \theta(t) \sin t + r \cdot \frac{\theta'(t) \cos t - \theta(t) \sin t}{\sqrt{\theta^2(t) + \theta'^2(t)}}, \quad (1.122)$$

$$y(\theta, t) = \theta(t) \cos t - r \cdot \frac{\theta'(t) \sin t + \theta(t) \cos t}{\sqrt{\theta^2(t) + \theta'^2(t)}}. \quad (1.123)$$

Для этого нам необходимо показать, что кривая, задаваемая формулами (1.122) – (1.123), удовлетворяет условию (1.111), ее минимальная кривизна больше  $-1/r$  и функция движения толкателя  $\theta(\Gamma(\theta), t)$ , которую порождает кулачек с профилем (1.122) – (1.123), совпадает с функцией  $\theta(t)$ .

Докажем вначале, что если выполнены условия (1.120) – (1.121), то

$$x'(\theta, t) \cdot y(\theta, t) - x(\theta, t) \cdot y'(\theta, t) > 0 \quad (1.124)$$

и

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} k(t) > -\frac{1}{r}, \quad (1.125)$$

где  $k(t)$  – кривизна профиля  $\Gamma(\theta, t)$ .

Учитывая, что

$$x'(\theta, t) = (\theta'(t) \sin t + \theta(t) \cos t)(1 - rk^{-1}(t)),$$

$$y'(\theta, t) = (\theta'(t) \cos t - \theta(t) \sin t)(1 - rk^{-1}(t)),$$

где

$$k^{-1}(t) = \frac{\theta^2(t) + 2\theta'^2(t) - \theta(t)\theta''(t)}{(\theta^2(t) + \theta'^2(t))^{3/2}},$$

получаем

$$\begin{aligned} & x'(\theta, t) \cdot y(\theta, t) - x(\theta, t) \cdot y'(\theta, t) = \\ & = (1 - rk^{-1}(t)) \cdot \left( \theta^2(t) - r \cdot \sqrt{\theta'^2(t) + \theta^2(t)} \right). \end{aligned}$$

Из условий (1.120) и (1.121) немедленно следует справедливость неравенства (1.124).

Вычислим теперь кривизну профиля  $\Gamma(\theta, t)$ . Вначале будем считать, что функция  $\theta(t)$  трижды непрерывно дифференцируемая. Вычислим значения вторых производных:

$$\begin{aligned} x''(\theta, t) &= ((\theta''(t) - \theta(t)) \sin t + 2\theta'(t) \cos t)(1 - rk^{-1}(t)) - \\ & - (\theta'(t) \sin t + \theta(t) \cos t)r(k^{-1}(t))', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''(\theta, t) &= ((\theta''(t) - \theta(t)) \cos t - 2\theta'(t) \sin t)(1 - rk^{-1}(t)) - \\ & - (\theta'(t) \cos t - \theta(t) \sin t)r(k^{-1}(t))'. \end{aligned}$$

Подставляя значения первых и вторых производных функций  $x(\theta, t)$  и  $y(\theta, t)$  в формулу для кривизны кривой

$$k(\Gamma, t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} > 0$$

и учитывая, что  $1 - rk^{-1}(t) > 0$  при всех  $t \in [0, 2\pi]$ , получаем, что

$$k(t) = \frac{k^{-1}(t)}{1 - rk^{-1}(t)}.$$

Тогда

$$k(t) + \frac{1}{r} = \frac{k^{-1}(t)}{1 - rk^{-1}(t)} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r(1 - rk^{-1}(t))} > 0.$$

Следовательно,

$$\min_{t \in [0, 2\pi]} k(t) > -\frac{1}{r}.$$

Случай, когда  $\theta'''(t)$  не является непрерывной, получается предельным переходом.

Покажем теперь, что  $\theta(\Gamma(\theta), t) = \theta(t)$ . Повернем кулачек с профилем  $\Gamma(\theta, t)$  на угол  $\varphi$  вокруг точки вращения  $O$ . После этого, уравнение профиля кулачка принимает вид

$$x_\varphi(\theta, t) = \theta(t) \sin(t - \varphi) + r \cdot \frac{\theta'(t) \cos(t - \varphi) - \theta(t) \sin(t - \varphi)}{\sqrt{\theta^2(t) + \theta'^2(t)}},$$

$$y_\varphi(\theta, t) = \theta(t) \cos(t - \varphi) - r \cdot \frac{\theta'(t) \sin(t - \varphi) + \theta(t) \cos(t - \varphi)}{\sqrt{\theta^2(t) + \theta'^2(t)}}.$$

В точке  $t_0 = \varphi$  к профилю кулачка проведем нормаль и отложим на ней отрезок длиной  $r$ . В результате этих построений получим точку с координатами

$$x_{r,\varphi}(\theta, \varphi) = x_\varphi(\theta, \varphi) - r \cdot \frac{y'_\varphi(\theta, \varphi)}{\sqrt{(x'_\varphi(\theta, \varphi))^2 + (y'_\varphi(\theta, \varphi))^2}},$$

$$y_{r,\varphi}(\theta, \varphi) = y_\varphi(\theta, \varphi) + r \cdot \frac{x'_\varphi(\theta, \varphi)}{\sqrt{(x'_\varphi(\theta, \varphi))^2 + (y'_\varphi(\theta, \varphi))^2}}.$$

Так как функция  $\theta(t)$  дважды непрерывно дифференцируема, то функции  $x_\varphi(\theta, t)$  и  $y_\varphi(\theta, t)$  будут иметь непрерывную первую производную. Тот факт, что  $\theta(\Gamma(\theta), t) = \theta(t)$  будет доказан, если показать, что  $x_{r,\varphi}(\theta, t) = 0$  и  $y_{r,\varphi}(\theta, t) = \theta(\varphi)$ .

Действительно, с учетом того, что  $1 - rk^{-1}(t) > 0$  для всех  $t \in [0, 2\pi]$ , получаем

$$x_{r,\varphi}(\theta, \varphi) = r \cdot \frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\theta^2(\varphi) + \theta'^2(\varphi)} -$$

$$- r \cdot \frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\theta^2(\varphi) + \theta'^2(\varphi)}} \cdot \frac{1 - rk^{-1}(t)}{1 - rk^{-1}(t)} = 0,$$

и

$$y_{r,\varphi}(\theta, \varphi) = \theta(\varphi) - r \frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\theta^2(\varphi) + \theta'^2(\varphi)} +$$

$$+ r \frac{\theta'(\varphi)}{\sqrt{\theta^2(\varphi) + \theta'^2(\varphi)}} \cdot \frac{1 - rk^{-1}(t)}{1 - rk^{-1}(t)} = \theta(\varphi),$$

что и завершает доказательство.

В машинах-автоматах, где функцию управления осуществляет кулачковый механизм, часто требуется, чтобы движение толкателя проходило лишь для фазового угла  $\varphi \in [-h, h]$ , а для

$h < \varphi < \pi$  толкатель находился бы в неподвижном состоянии. Для этих случаев удобно использовать функцию вида (рис. 1.29):

$$\theta^{a,\delta,h}(t) = \begin{cases} \left(1 + \cos \frac{\pi t}{h}\right) \frac{\delta}{2} + a, & |t| \leq h, \\ a, & h < \varphi < \pi. \end{cases}$$

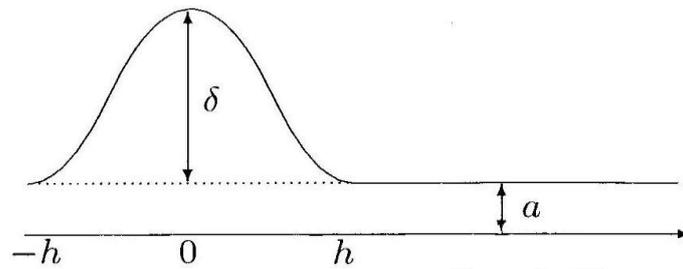


Рис. 1.29. График функции  $\theta^{a,\delta,h}(t)$ .

Чтобы задача синтеза для соответствующего кулачка была разрешима, параметры  $a$ ,  $\delta$ ,  $h$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} r < \frac{a^2}{a + \delta \left(1 + \frac{\pi}{2h}\right)}, & |t| \leq h, \\ r < a, & h < |t| < \pi. \end{cases}$$

В этом случае профиль кулачка будет описываться уравнением

$$\Gamma(\theta^{a,\delta,h}, t) = (x(t), y(t)),$$

где

$$x(t) = \begin{cases} \left( a + \frac{1 + \cos \frac{\pi t}{h}}{\delta} \right) \sin t - r \sin(\alpha + t), & |t| \leq h, \\ (a - r) \sin t, & h < |t| < \pi, \end{cases}$$

$$y(t) = \begin{cases} \left( a + \frac{1 + \cos \frac{\pi t}{h}}{\delta} \right) \cos t - r \cdot \cos(\alpha + t), & |t| \leq h, \\ (a - r) \cos t, & h < |t| < \pi, \end{cases}$$

и угол  $\alpha$  однозначно определяется условиями

$$\sin \alpha = \frac{\frac{\pi}{h} \cdot \sin \frac{\pi t}{h}}{\sqrt{\left( 1 + \cos \frac{\pi t}{h} + \frac{2a}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{h} \sin \pi h t \right)^2}},$$

$$\cos \alpha = \frac{\left( 1 + \cos \frac{\pi t}{h} + \frac{2a}{\delta} \right)}{\sqrt{\left( 1 + \cos \frac{\pi t}{h} + \frac{2a}{\delta} \right)^2 + \left( \frac{\pi}{h} \sin \pi h t \right)^2}}.$$

Функция  $\theta^{a,\delta,h}(t)$  непрерывна вместе со своей производной. Ее производная для  $h < |t| < \pi$  равна нулю, а для  $|t| \leq h$  равна соответственно

$$\left( \theta^{a,\delta,h}(t) \right)' - \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\cos \frac{\pi t}{h}}{2} \delta$$

и терпит разрыв в точках  $t$ . Значение скачков в этих точках по модулю равны  $(\pi^2 \delta)/(2h^2)$ , следовательно, работа толкателя будет сопровождаться «легкими ударами» импульсного типа. Чтобы этого избежать, достаточно вместо функции  $\theta^{a,\delta,h}(t)$  взять результат применения к ней какого-либо сглаживающего аппарата.

### 1.6.3. Проектирование кулачковых механизмов рамочного типа

Наряду с кулачковыми механизмами с плоскими толкателями важную роль в современном машиностроении играют кулачковые механизмы рамочного типа. Использование такого рода кулачковых механизмов обусловлено тем, что они обладают рядом достоинств, в частности, они устойчивы и надежны при перегрузках и пр.

Для кулачков данного типа достаточно рассматривать те, и только те кулачковые механизмы, у которых профиль является выпуклым и равной ширины.

Пусть область  $G$  лежит между двумя параллельными прямыми  $\rho^+$  и  $\rho^-$ . Множество всех таких пар прямых с нормальным вектором  $\bar{\ell}$  обозначим через  $\Pi(G, \bar{\ell})$ . Для области  $G$  с непрерывной границей наименьшее расстояние  $d$  между прямыми перпендикулярными вектору  $\bar{\ell}$ , называется шириной области  $G$  с нормалью  $\bar{\ell}$  (рис. 1.30), то есть

$$d = d(\bar{\ell}) = \min_{\rho^+, \rho^- \in \Pi(G, \bar{\ell})} |\rho^+ - \rho^-|,$$

где  $|\rho^+ - \rho^-|$  – расстояние между прямыми  $\rho^+$  и  $\rho^-$ .

Если область  $G$  такова, что для любого не нулевого вектора  $\bar{\ell}$  имеет место равенство

$$d_0 = d(\bar{\ell}),$$

то такая область называется *областью равной ширины*.

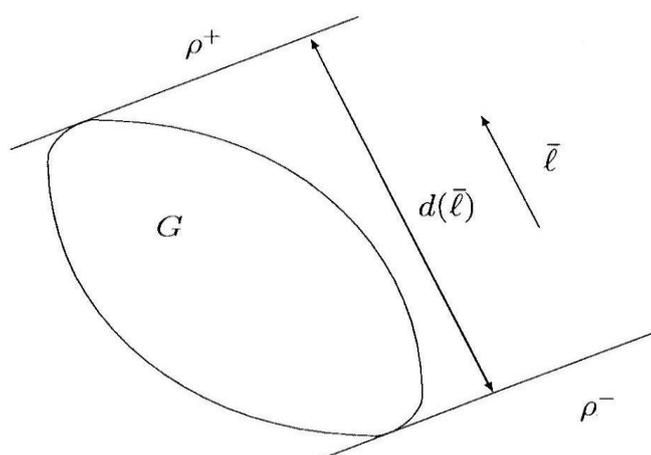


Рис. 1.30. Область равной ширины

Приведем точную формулировку *задачи анализа в узком смысле* для кулачковых механизмов **рамочного типа**.

Пусть задан кулачек равной ширины с профилем шайбы  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$  и центром вращения  $O$ . Без потери общности будем считать, что центр вращения совмещен с началом координат. Для механизмов рамочного типа всегда можно ограничиться кулачками с выпуклым профилем равной ширины. Повернем кулачек вокруг центра вращения  $O$  на угол  $\varphi$ . К его профилю проведем касательную параллельную оси  $OX$ . Тогда величина, равная расстоянию от этой касательной до оси абсцисс и есть значение функции движения толкателя  $\theta(\Gamma, \varphi)$  для заданного угла  $\varphi$  (рис. 1.31). Ясно, что если профиль  $\Gamma(t)$  – гладкий, то функция  $\theta(\Gamma, \varphi)$  есть гладкая  $2\pi$ – периодическая функция.

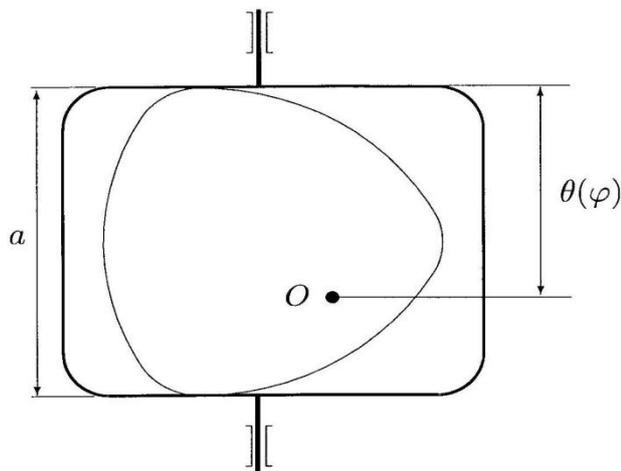


Рис. 1.31. Схема кулачкового механизма рамочного типа

Далее нам понадобится следующее утверждение.

**Теорема 1.52.** Для того, чтобы гладкая кривая  $\Gamma(t)$  была выпуклой и равной ширины, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде

$$\Gamma(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} = \begin{cases} x_0 - \theta(\Gamma, t) \sin t - \theta'(\Gamma, t) \cos t, \\ y_0 + \theta(\Gamma, t) \cos t - \theta'(\Gamma, t) \sin t, \end{cases} \quad (1.126)$$

где  $\theta(\Gamma, t)$   $2\pi$ -периодическая дважды непрерывно дифференцируемая функция, такая, что для всех  $t \in [0, 2\pi]$  выполняется условие (1.111) и

$$\theta(\Gamma, t) = a/2 + \nu(\Gamma, t), \quad (1.127)$$

где функция

$$\nu(\Gamma, t) = \theta(\Gamma, t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta(\Gamma, t) d\varphi, \quad (1.128)$$

и такая, что

$$\nu(\Gamma, t) = -\nu(\Gamma, t + \pi). \quad (1.129)$$

*Доказательство.* Пусть кривая описывается уравнением (1.126). Выберем произвольную точку  $M(x_0, y_0)$ . Не ограничивая общности, можно считать, что эта точка совпадает с началом координат.

Повернем профиль  $\Gamma(\theta, t)$  на угол  $\varphi$  вокруг начала координат  $O$ . После этого преобразования уравнение профиля кулачка принимает вид

$$\Gamma_{\varphi}(t) = \begin{cases} x_{\varphi}(t) \\ y_{\varphi}(t) \end{cases} = \begin{cases} x(t) \cos \varphi + y(t) \sin \varphi, \\ -x(t) \sin \varphi + y(t) \cos \varphi, \end{cases}$$

или

$$\Gamma_{\varphi}(\theta, t) = \begin{cases} x_{\varphi}(t) \\ y_{\varphi}(t) \end{cases} = \begin{cases} (-\theta(t) \sin t - \theta'(t) \cos t) \cos \varphi + \\ + (\theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t) \sin \varphi, \\ (\theta(t) \sin t + \theta'(t) \cos t) \sin \varphi + \\ + (\theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t) \cos \varphi. \end{cases}$$

Покажем, что касательная к профилю (1.126) в точке  $t = \varphi$  будет параллельна оси  $OX$ .

Если функция  $\theta(t)$  дважды непрерывно дифференцируема, то функции  $x(t)$  и  $y(t)$ , а, следовательно, и функции  $x_{\varphi}(t)$  и  $y_{\varphi}(t)$  непрерывно дифференцируемые. Тогда, учитывая условие (1.111), имеем

$$\frac{dy_{\varphi}}{dt}(t_0) = -x'(t_0) \sin \varphi + y'(t_0) \cos \varphi = (\theta(t_0) + \theta''(t_0)) \sin(t_0 - \varphi) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta(\Gamma(\theta), \varphi) &= (\theta(\varphi) \sin \varphi + \theta'(\varphi) \cos \varphi) \sin \varphi + \\ &+ (\theta(\varphi) \cos \varphi - \theta'(\varphi) \sin \varphi) \cos \varphi = \theta(\varphi). \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\theta(t)$  описывает движение толкателя кулачка с профилем, заданным равенствами (1.126).

Покажем, что профиль  $\Gamma(\theta, t)$  ограничивает область равной ширины  $a$ . Повернем  $\Gamma(\theta, t)$  на угол  $\varphi + \pi$ . После этого уравнение профиля кулачка запишется в виде

$$\Gamma_{\varphi+\pi}(\theta, t) = (x_{\varphi+\pi}(t), y_{\varphi+\pi}(t)).$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{dy_{\varphi+\pi}}{dt}(t_0) &= (\theta(t_0) + \theta''(t_0)) \sin(t_0 - \varphi - \pi) = \\ &= -(\theta(t_0) + \theta''(t_0)) \sin(t_0 - \varphi) = 0. \end{aligned}$$

То есть, касательная к профилю (1.126) в точке  $t = \varphi + \pi$  будет параллельна оси  $OX$ . Следовательно, область, ограниченная профилем кулачка, лежит между параллельными касательными, расстояние между которыми равно

$$|y_{\varphi}(\varphi) - y_{\varphi+\pi}(\varphi + \pi)| = |\theta(\varphi) - \theta(\varphi + \pi)|.$$

Отсюда и из условий (1.127) – (1.129) получаем, что для любого  $\varphi \in [0, 2\pi]$  область, ограниченная профилем кулачка, лежит между параллельными касательными, расстояние между которыми равно  $a$ .

Покажем, что если выполнено условие (1.111) то профиль (1.126) ограничивает выпуклую фигуру.

Вначале будем считать, что функция  $\theta(t)$  трижды непрерывно дифференцируемая. Вычислим значения вторых производных:

$$x''(t) = \theta(t) \sin t - \theta'(t) \cos t + \theta''(t) \sin t - \theta'''(t) \cos t,$$

$$y''(t) = -\theta(t) \cos t - \theta'(t) \sin t - \theta''(t) \cos t - \theta'''(t) \sin t.$$

Тогда кривизна профиля будет удовлетворять неравенству

$$k(\Gamma(\theta), t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left((x'(t))^2 + (y'(t))^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{\theta(t) + \theta''(t)} > 0,$$

что и требовалось доказать. Общий случай (когда  $\theta(t)$  не является трижды дифференцируемой) легко получается предельным переходом.

Нами доказан следующий факт. Функция  $\theta(\varphi)$ , которая удовлетворяет условиям (1.127) – (1.129), по формулам (1.126) однозначно определяет профиль выпуклого кулачка равной ширины  $a$ . С другой стороны, любой выпуклый кулачек  $\Gamma(t)$  равной ширины  $a$  порождает единственную передаточную функцию  $\theta(\Gamma, \varphi)$ .

Таким образом, в силу взаимно однозначного соответствия между профилем кулачковой шайбы и передаточной функцией, получаем, что условия (1.127) – (1.129) являются необходимыми и достаточными для задачи проектирования кулачкового механизма рамочного типа.

Получена явная формула (1.126) для проектирования профиля рамочного кулачка. Условие (1.111) позволяет варьировать габариты кулачка, а условие (1.127) эквивалентно тому, что функция  $\nu(t)$  может быть представлена в виде ряда Фурье:

$$\nu(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1} \cos((2k-1)\varphi - \varphi_{2k-1}).$$

Как правило, для стабильной работы механизма требуется, чтобы величина наибольшего ускорения была как можно меньше на протяжении полного оборота вращения кулачка. По-

сколькx движение толкателя линейное, то величина  $\theta''(\varphi)$  является ускорением движения толкателя.

Для решения этой задачи вначале рассмотрим вспомогательную задачу.

Среди всех  $2\pi/n$  – периодических функций  $\theta(\varphi)$ , для которых выполняются условия (1.111), (1.127) и минимум которых равен  $\alpha$ , а максимум –  $\beta$ , найти такую, у которой величина

$$\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |\theta''(\varphi)|$$

принимает наименьшее значение.

Вначале решим задачу определения величины

$$\sup_{f \in W_{\infty}^2} \left| \max_{t \in [0, 2\pi]} f(t) - \min_{t \in [0, 2\pi]} f(t) \right|,$$

где  $W_{\infty}^2$  – множество всех  $2\pi$ – периодических функций  $f(t)$ , имеющих локально абсолютно непрерывную первую производную и таких, что

$$\|f''\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f''(t)| \leq 1.$$

Пусть

$$\alpha = \min_{t \in [0, 2\pi]} f(t) = f(\xi), \quad \beta = \max_{t \in [0, 2\pi]} f(t) = f(\xi + \varepsilon).$$

Используя формулу интегрирования по частям, нетрудно убедиться в том, что

$$\beta - \alpha = \int_{\xi}^{\xi + \varepsilon} K_{\varepsilon}(t) f''(t) dt, \quad (1.130)$$

где  $K_\varepsilon(t)$  – ломаная с узлами в точках  $\xi$ ,  $\xi + \varepsilon$  и  $\xi + 2\pi$ , принимающая в этих узлах значения  $-h$ ,  $h$  и  $-h$  соответственно, где

$$h = \frac{(2\pi - \varepsilon)\varepsilon}{4\pi}.$$

Учитывая, что  $f \in W_\infty^2$  из (1.112) получаем

$$\beta - \alpha \leq \int_{\xi}^{\xi+2\pi} |K_\varepsilon(t)| dt = h\pi = \frac{(2\pi - \varepsilon)\varepsilon}{4} \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Таким образом, для любой функции  $f \in W_\infty^2$  справедливо неравенство

$$\beta - \alpha \leq \frac{\pi^2}{4}. \quad (1.131)$$

Рассмотрим нечетную  $2\pi$ - периодическую функцию  $e_2(t)$  такую, что

$$e_2(t) = \frac{1}{2} t(t - \pi) \quad (t \in [0, \pi]),$$

и функцию

$$f^*(t) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{8e_2(t) + \pi^2}{2\pi^2}.$$

Не трудно убедиться в том, что для функции  $f^*(t)$  неравенство (1.131) обращается в равенство. Таким образом, получаем соотношение

$$\sup_{f \in W_\infty^2} \left| \max_{t \in [0, 2\pi]} f(t) - \min_{t \in [0, 2\pi]} f(t) \right| = \left| \max_{t \in [0, 2\pi]} f^*(t) - \min_{t \in [0, 2\pi]} f^*(t) \right| = \frac{\pi^2}{4}.$$

Проведя аналогичные рассуждения, можно убедиться в том, что среди всех  $2\pi/n$  – периодических функций  $\theta(\varphi)$ , минимум которых равен  $\alpha$ , а максимум –  $\beta$ , наименьшую величина  $\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} |\theta''(\varphi)|$  имеет функция

$$\theta_n^{\alpha, \beta}(\varphi) = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{8n^2 e_{2,n}(\varphi) + \pi^2}{2\pi^2},$$

где  $e_{2,n}(\varphi)$  есть идеальный сплайн Эйлера второго порядка, то есть такая функция, что

$$e_{2,n}''(\varphi) = \text{sign} \sin n\varphi.$$

Функция  $e_{2,n}(\varphi)$  есть нечетная  $2\pi/n$  – периодическая функция вида

$$e_{2,n}(t) = \frac{1}{2} \varphi \left( \varphi - \frac{\pi}{n} \right) \quad (\varphi \in [0, \pi/n]).$$

Следовательно, имеет место равенство

$$e_{2,n}(\varphi) = -e_{2,n}(\varphi + \pi),$$

то есть функция  $e_{2,n}(\varphi)$  удовлетворяет условию (1.126).

Отметим, что для окончательного решения задачи требуется определить в каких пределах могут изменяться значения  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы для функции  $\theta_n^{\alpha, \beta}(\varphi)$  выполнялись условия (1.111), (1.126).

Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} & \theta_n^{\alpha, \beta}(\varphi) + \left( \theta_n^{\alpha, \beta}(\varphi) \right)'' = \\ & = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{8n^2 e_{2,n}(\varphi) + \pi^2}{2\pi^2} - (\beta - \alpha) \frac{4n^2}{\pi^2} \geq \alpha - (\beta - \alpha) \frac{4n^2}{\pi^2}, \end{aligned}$$

то есть условие (1.111) будет выполняться, если наибольшее и наименьшее значения функции движения толкателя будут удовлетворять неравенству

$$\beta < \alpha \left( \frac{\pi^2}{4n^2} + 1 \right).$$

Для выполнения условия (1.126) высота рамки  $a$  должна удовлетворять неравенству

$$a \geq 2(\beta - \alpha).$$

Ясно, что в этом случае движение толкателя будет равноускоренным, но при этом работа соответствующего механизма будет сопровождаться «мягкими ударами». Для того, чтобы избежать биения между кулачком и толкателем, можно сгладить функцию  $\theta_n^{\alpha, \beta}(\varphi)$ , применив, например, функцию Стеклова.

Отметим, что появление идеальных (или напряженных) функций в полученном результате не случайно. Такой результат характерен для всех экстремальных задач (см., например [11]).

## Глава 2

### ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Теория выпуклых тел, основанная в конце XIX века, в настоящее время является наукой, богатой общими методами и отдельными интересными результатами. Она интенсивно разрабатывается и в наше время. Её популярность связана, в первую очередь, с её важностью для геометрии, а также с её значительным использованием в других разделах математики и других науках.

Работы многих известных математиков (О.Коши, Г.Минковского, Г.Либмана, Д.Гильберта, Г.Вейля, С.Н.Бернштейна, В.Бляшке, Г. Леви, А.Д.Александрова, О.В.Погорелова и других) были посвящены изучению выпуклых поверхностей. Проблемы, которые они ставили в своих работах, разработанные методы исследования, а также полученные результаты имеют большое значение и сегодня.

В связи с современными исследованиями выпуклых поверхностей актуальной является задача расширения результатов, полученных в предыдущей главе, на описание выпуклых поверхностей. В данной главе мы рассмотрим поверхности, заданные в географических координатах и в барицентрических координатах единичной сферы  $n$  – мерного пространства.

## 2.1. Поверхности в географических координатах

Рассмотрим поверхность  $\Pi(\varphi, \psi)$ , описанную параметрическими уравнениями вида

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi) \sin \psi \cos \varphi + \theta_{\psi}(\varphi, \psi) \cos \psi \cos \varphi - \theta_{\varphi}(\varphi, \psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \\ y(\varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi) \sin \psi \sin \varphi + \theta_{\psi}(\varphi, \psi) \cos \psi \sin \varphi + \theta_{\varphi}(\varphi, \psi) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \\ z(\varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi) \cos \psi - \theta_{\psi}(\varphi, \psi) \sin \psi, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\theta(\varphi, \psi)$  строго положительная, непрерывная вместе со своими производными функция, заданная в области  $[0, 2\pi] \times (0, \pi)$  и такая что

$$(\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 > 0.$$

Приведем некоторые свойства поверхности вида (2.1).

**Теорема 2.1.** Для любых значений  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\psi \in (0, \pi)$  вектор  $\mathbf{n}^0 \left( n_x^0, n_y^0, n_z^0 \right)$ , где

$$n_x^0 = \cos \varphi \sin \psi, \quad n_y^0 = \sin \varphi \sin \psi, \quad n_z^0 = \cos \psi, \quad (2.2)$$

есть единичный вектор нормали к поверхности (2.1) в точке  $\Pi(\varphi, \psi)$ , а значения параметров  $\varphi$  и  $\psi$  определяют углы Эйлера нормального вектора к поверхности.

**Доказательство.** Действительно, если  $\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \psi)}$ ,  $\frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \psi)}$  и

$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)}$  – функциональные определители матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} & \frac{\partial y}{\partial \psi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix},$$

то, как известно [46], вектором нормали к поверхности  $x = x(\varphi, \psi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi)$  и  $z = z(\varphi, \psi)$  есть вектор

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \psi)} \bar{i} + \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \psi)} \bar{j} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} \bar{k}.$$

Если

$$\begin{aligned} \theta = \theta(\varphi, \psi), \quad \theta_\varphi = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad \theta_\psi = \frac{\partial \theta}{\partial \psi}, \\ \theta_{\varphi\psi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial \psi}, \quad \theta_{\varphi\varphi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2}, \quad \theta_{\psi\psi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2}, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \theta_\varphi \sin \psi \cos \varphi - \theta \sin \psi \sin \varphi + \theta_{\varphi\psi} \cos \varphi \cos \psi - \\ - \theta_\psi \sin \varphi \cos \psi - \theta_{\varphi\varphi} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - \theta_\varphi \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \psi} = (\theta + \theta_{\psi\psi}) \cos \varphi \cos \psi - \theta_{\varphi\psi} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} + \theta_\varphi \frac{\sin \varphi \cos \psi}{\sin^2 \psi}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \theta_\varphi \sin \varphi \sin \psi + \theta \cos \varphi \sin \psi + \theta_{\varphi\psi} \sin \varphi \cos \psi + \\ + \theta_\psi \cos \varphi \cos \psi + \theta_{\varphi\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - \theta_\varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \psi} = (\theta + \theta_{\psi\psi}) \sin \varphi \cos \psi + \theta_{\varphi\psi} \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - \theta_\varphi \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\sin^2 \psi}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \theta_{\varphi} \cos \psi - \theta_{\varphi\psi} \sin \psi, \quad \frac{\partial z}{\partial \psi} = -(\theta + \theta_{\psi\psi}) \sin \psi. \quad (2.7)$$

Отсюда, получаем

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \psi)} = -\cos \varphi \left( (\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 \right),$$

$$\frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \psi)} = -\sin \varphi \left( (\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 \right),$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} = -\frac{\cos \psi}{\sin \psi} \left( (\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 \right),$$

Обозначим через

$$K_{\Pi}(\varphi, \psi) = \frac{\sin^2 \psi}{(\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2},$$

тогда вектор  $N(N_x, N_y, N_z)$  с координатами

$$N_x = \cos \varphi \sin \psi \frac{\sin \psi}{K_{\Pi}(\varphi, \psi)},$$

$$N_y = \sin \varphi \sin \psi \frac{\sin \psi}{K_{\Pi}(\varphi, \psi)},$$

$$N_z = \cos \psi \frac{\sin \psi}{K_{\Pi}(\varphi, \psi)},$$

есть нормальным вектором поверхности вида (2.1). Отсюда получаем утверждение теоремы 2.1.

Одной из важных характеристик выпуклой поверхности является гауссова кривизна. Кроме того, важную роль при исследовании выпуклости поверхности играет средняя кривизна поверхности. Имеет место следующая теорема, которая позволяет вычислять указанные характеристики выпуклой поверхности.

**Теорема 2.2.** Для любых значений  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\psi \in (0, \pi)$  гауссова кривизна поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$ , заданной уравнениями (2.1), равна

$$K_{\Pi}(\varphi, \psi) = \frac{\sin^2 \psi}{(\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2},$$

а значение средней кривизны поверхности имеет вид

$$H_{\Pi}(\varphi, \psi) = -\frac{1}{2} \frac{(2 \cdot \theta + \theta_{\psi\psi}) \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi}}{(\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2},$$

где

$$\theta = \theta(\varphi, \psi), \quad \theta_{\varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi}, \quad \theta_{\varphi\psi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi \partial \psi}.$$

**Доказательство.** Известно, что значение гауссовой кривизны поверхности определяется равенством

$$K_{\Pi}(\varphi, \psi) = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (2.8)$$

а значение средней кривизны поверхности равно

$$H_{\Pi}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad (2.9)$$

где

$$g_{11} = \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right)^2, \quad g_{22} = \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \psi} \right)^2,$$

$$g_{12} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi},$$

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)} \right),$$

$$b_{22} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)} \right),$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} \left( \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\psi)} + \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \psi} \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)} \right).$$

Учитывая выражения (2.3) – (2.7) для частных производных, находим коэффициенты  $g_{11}$ ,  $g_{12}$  и  $g_{22}$ :

$$g_{11} = \frac{1}{\sin^2 \psi} \left( \left( \theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi} \right)^2 + \left( \theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi} \right)^2 \right),$$

$$g_{12} = -\left( \theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi} \right) \cdot \left( 2\theta + \theta_{\psi\psi} + \theta_{\psi} \operatorname{ctg} \psi + \theta_{\varphi\varphi} \frac{1}{\sin^2 \psi} \right),$$

$$g_{22} = \left( \theta + \theta_{\psi\psi} \right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \psi} \left( \theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi} \right)^2.$$

Таким образом,

$$g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{\left( (\theta + \theta_{\psi\psi}) (\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 \right)^2}{\sin^2 \psi} \quad (2.10)$$

Для нахождения коэффициентов  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  вычислим вторые производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} &= (\theta_{\varphi\varphi} - \theta) \cos \varphi \sin \psi - 2 \cdot (\theta_{\varphi} \sin \psi + \theta_{\varphi\psi} \cos \psi) \sin \varphi + \\ &+ (\theta_{\varphi\varphi\psi} - \theta_{\psi}) \cos \varphi \cos \psi + (\theta_{\varphi} - \theta_{\varphi\varphi\varphi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} - 2 \cdot \theta_{\varphi\varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \psi^2} &= -(\theta_{\psi\psi} + \theta) \cos \varphi \sin \psi + (\theta_{\psi\psi\psi} + \theta_{\psi}) \cos \varphi \cos \psi + \\ &+ \left( \theta_{\varphi} \frac{1}{\sin^2 \psi} - 2 \cdot \theta_{\varphi\psi} \cdot \operatorname{ctg} \psi + \theta_{\varphi\psi\psi} \right) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi \partial \psi} &= -(\theta_{\psi\psi} + \theta) \sin \varphi \cos \psi + (\theta_{\varphi\psi\psi} + \theta_{\varphi}) \cos \varphi \cos \psi + \\ &+ (\theta_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\varphi\psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} + (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi}) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} &= (\theta_{\varphi\varphi} - \theta) \sin \varphi \sin \psi + 2 \cdot (\theta_{\varphi} \sin \psi + \theta_{\varphi\psi} \cos \psi) \cos \varphi + \\ &+ (\theta_{\varphi\varphi\psi} - \theta_{\psi}) \sin \varphi \cos \psi - (\theta_{\varphi} - \theta_{\varphi\varphi\varphi}) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} - 2 \cdot \theta_{\varphi\varphi} \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \psi^2} = -(\theta_{\psi\psi} + \theta) \sin \varphi \sin \psi + (\theta_{\psi\psi\psi} + \theta_{\psi}) \sin \varphi \cos \psi +$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \theta_{\varphi} \frac{1}{\sin^2 \psi} - 2 \cdot \theta_{\varphi\psi} \cdot \operatorname{ctg} \psi + \theta_{\varphi\psi\psi} \right) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \\
\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi \partial \psi} & = (\theta_{\psi\psi} + \theta) \cos \varphi \cos \psi + (\theta_{\varphi\psi\psi} + \theta_{\varphi}) \sin \varphi \cos \psi - \\
& - (\theta_{\varphi\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\varphi\psi}) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} + (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \theta_{\varphi\varphi} \cos \psi - \theta_{\varphi\varphi\psi} \sin \psi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} = -(\theta_{\psi\psi} + \theta) \cos \psi - (\theta_{\psi\psi\psi} + \theta_{\psi}) \sin \psi,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi \partial \psi} = -(\theta_{\varphi\psi\psi} + \theta_{\varphi}) \sin \psi.$$

Тогда

$$b_{11} = \theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi\psi},$$

$$b_{22} = \theta + \theta_{\psi\psi}, \quad b_{12} = -(\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})$$

и

$$\begin{aligned}
b_{11} b_{22} - b_{12}^2 & = (\theta + \theta_{\psi\psi})(\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi\psi} \sin \psi \cos \psi + \theta_{\psi\psi\psi}) - \\
& - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Если подставить полученные величины (2.10) и (2.11) в (2.8), то получим выражение для вычисления гауссовой кривизны.

Для нахождения формулы вычисления средней кривизны будем использовать следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 & b_{11} g_{22} - 2 b_{12} g_{12} + b_{22} g_{11} = \\
 = & \left( (\theta + \theta_{\psi\psi}) (\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 \right) \times \\
 & \times \left( (\theta + \theta_{\psi\psi}) + \frac{1}{\sin^2 \psi} (\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \sin \psi \cos \psi + \theta_{\psi\psi}) \right).
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Если подставить значения выражений (2.10) и (2.12) в (2.9), то получим формулу для вычисления средней кривизны поверхности, заданной параметрическими уравнениями (2.1).

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

**Теорема 2.3.** Пусть функция  $\theta(\varphi, \psi)$  на прямоугольнике  $[0, 2\pi] \times (0, \pi)$  строго положительная и непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно. Кроме того, функция  $K_{\Pi}(\varphi, \psi)$  непрерывна и строго положительна на  $[0, 2\pi] \times (0, \pi)$ . Тогда параметрические уравнения (2.1) описывают замкнутую, строго выпуклую, ограниченную поверхность.

**Замечание.** Можно показать, что является справедливым и обратное утверждение, любая выпуклая, гладкая, замкнутая поверхность может быть представлена параметрическими уравнениями (2.1), где функция  $\theta(\varphi, \psi)$  на прямоугольнике  $[0, 2\pi] \times (0, \pi)$  строго положительна и непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно и при этом

$$(\theta + \theta_{\psi\psi}) (\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\psi\psi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 > 0. \tag{2.13}$$

Доказательство обратного утверждения базируется на следующих рассуждениях. В каждой точке поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$ , заданной уравнениями (2.1), существует единственная касательная плоскость. Через  $\delta(\Pi, \varphi, \psi)$  обозначим расстояние от точки  $M$  до касательной плоскости к поверхности (2.1) в точке  $\Pi(\varphi, \psi)$ . Величину  $\delta(\Pi, \varphi, \psi)$  будем называть опорной функцией поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$ .

**Теорема 2.4.** Для любых значений  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\psi \in (0, \pi)$  опорная функция поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$ , заданной уравнениями (2.1), равна  $\delta(\Pi, \varphi, \psi) = \theta(\varphi, \psi)$ .

*Доказательство.* В уравнение касательной плоскости

$$n_x^0 \cdot (x - x(\varphi, \psi)) + n_y^0 \cdot (y - y(\varphi, \psi)) + n_z^0 \cdot (z - z(\varphi, \psi)) = 0$$

подставим координаты нормального вектора (2.2) и значения (2.1). Получаем

$$\begin{aligned} & x \cdot \sin \psi \cos \varphi + y \cdot \sin \psi \sin \varphi + z \cdot \cos \psi - \\ & - \sin \psi \cos \varphi \cdot \left( \theta \sin \psi \cos \varphi + \theta_\psi \cos \psi \cos \varphi - \theta_\varphi \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} \right) - \\ & - \sin \psi \sin \varphi \cdot \left( \theta \sin \psi \sin \varphi + \theta_\psi \cos \psi \sin \varphi + \theta_\varphi \frac{\cos \varphi}{\sin \psi} \right) - \\ & - \cos \psi \cdot (\theta \cos \psi - \theta_\psi \sin \psi) = 0, \end{aligned}$$

или, что тоже,

$$x \cdot \sin \psi \cos \varphi + y \cdot \sin \psi \sin \varphi + z \cdot \cos \psi - \theta(\varphi, \psi) = 0.$$

Расстояние от этой плоскости до начала координат равно  $\theta(\varphi, \psi)$ , что и доказывает справедливость теоремы 2.4.

При исследовании выпуклых поверхностей важную роль играют эквидистанты к ним. Дадим определение эквидистанты, ограничившись случаем замкнутых поверхностей.

Под  $\varepsilon$ -слоем поверхности  $\Pi$  будем понимать объединение всех шаров радиуса  $\varepsilon$  с центрами, лежащими на поверхности  $\Pi$ , то есть  $K_\varepsilon(\Pi) = \bigcup_{M \in \Pi} B_\varepsilon(M)$ , где  $B_\varepsilon(M)$  - шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке  $M$ .

**Определение 2.5.** Внешнюю границу  $\Pi_\varepsilon^+$   $\varepsilon$ -слоя будем называть *внешней  $\varepsilon$ -эквидистантой* поверхности  $\Pi$ , а внутреннюю границу  $\Pi_\varepsilon^-$  (если она выпукла и расположена внутри области, ограниченной поверхностью  $\Pi$ ) назовем *внутренней  $\varepsilon$ -эквидистантой*.

**Теорема 2.6.** Пусть для любых значений  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\psi \in (0, \pi)$  опорная функция  $\theta(\varphi, \psi)$  удовлетворяет условию (2.13), тогда  $\varepsilon$ -эквидистанты  $\Pi_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi)$  определяются параметрическими уравнениями

$$\left\{ \begin{array}{l} x_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = (\theta(\varphi, \psi) \pm \varepsilon) \sin \psi \cos \varphi + \theta_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \cos \varphi - \\ \quad - \theta_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \\ y_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = (\theta(\varphi, \psi) \pm \varepsilon) \sin \psi \sin \varphi + \theta_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \sin \varphi + \\ \quad + \theta_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \\ z_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = (\theta(\varphi, \psi) \pm \varepsilon) \cos \psi - \theta_\psi(\varphi, \psi) \sin \psi, \end{array} \right.$$

при любом  $\varepsilon$  для внешней эквидистанты  $(x_\varepsilon^+, y_\varepsilon^+, z_\varepsilon^+)$  и при таком  $\varepsilon$ , что внутренняя граница  $K_\varepsilon(\Pi)$  лежит в области, ограниченной поверхностью  $\Pi$ , и является выпуклой для внутренней эквидистанты  $(x_\varepsilon^-, y_\varepsilon^-, z_\varepsilon^-)$ .

**Доказательство.** Действительно, в силу условий, наложенных на функцию  $\theta(\varphi, \psi)$ , и учитывая, что частные производные первого порядка, которые определяются равенствами (2.3) – (2.7), непрерывны, получаем, что параметрические уравнения  $\varepsilon$  – эквидистанты данной поверхности можно определить следующим образом:

$$\begin{cases} x_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = x(\varphi, \psi) \pm \varepsilon \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \psi)} / \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\ y_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = y(\varphi, \psi) \pm \varepsilon \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(\varphi, \psi)} / \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \\ z_\varepsilon^\pm(\varphi, \psi) = z(\varphi, \psi) \pm \varepsilon \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)} / \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{cases}$$

Используя значения функциональных определителей, отсюда и из (2.1), после достаточно громоздких вычислений, получаем требуемое утверждение.

**Предложение 2.7.** Пусть для любых значений  $\varphi \in [0, 2\pi]$  и  $\psi \in (0, \pi)$  опорная функция  $\theta(\varphi, \psi)$  удовлетворяет условию (2.13), тогда площадь поверхности  $\Pi$ , которая задана уравнениями (2.1), определяется равенством

$$S(\Pi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \frac{\sin \psi}{K_\Pi(\varphi, \psi)} d\psi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} (\rho + \rho''_{\psi\psi}) (\rho \sin \psi + \rho'_{\psi} \cos \psi) d\psi.$$

Доказательство этого факта легко получается, учитывая вид дифференциала площади

$$dS(\varphi, \psi) = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} d\varphi d\psi$$

для поверхности, определенной уравнениями (2.1).

### 2.1.1. Поверхности равной ширины

В качестве одного приложения описания выпуклых поверхностей вида (2.1), приведем условия на поверхность, при которых она будет поверхностью равной ширины.

Будем рассматривать гладкую, строго выпуклую поверхность вида (2.1). Поскольку поверхность  $\Pi(\varphi, \psi)$  замкнутая и строго выпуклая, то каждому направлению (вектору  $\ell$ ) в пространстве соответствует две и только две опорные плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с нормальными векторами  $\pm \ell$  соответственно. Расстояние между этими плоскостями обозначим  $d_{\ell}(\Pi)$ .

Если для любого направления  $\ell$  справедливо равенство  $d_{\ell}(\Pi) = d = \text{const}$ , то такую поверхность называют *поверхностью равной ширины*.

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема 2.8.** *Для того, чтобы замкнутая, гладкая строго выпуклая поверхность  $\Pi(\varphi, \psi)$  была поверхностью равной ширины  $d$  необходимо и достаточно, чтобы она имела вид (2.1), где*

$$\begin{aligned}
\theta(\varphi, \psi) = & \frac{d}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1} \cos(2i-1)\psi + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,2k-1} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{2\nu,2k-1} \right) \times \right. \\
& \times \left. \cos(2k-1)\varphi + \left( \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,2k-1} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{2\nu,2k-1} \right) \sin(2k-1)\varphi \right),
\end{aligned} \tag{2.14}$$

– произвольная функция, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка включительно на прямоугольнике  $D = [0, 2\pi] \times (0, \pi)$  и такая, что имеет место неравенство

$$(\theta + \theta_{\psi\psi}) (\theta \sin^2 \psi + \theta_{\psi} \cos \psi \sin \psi + \theta_{\varphi\varphi}) - (\theta_{\varphi} \operatorname{ctg} \psi - \theta_{\varphi\psi})^2 > 0.$$

**Доказательство.** Каждая опорная функция, заданная на прямоугольнике  $D = [0, 2\pi] \times (0, \pi)$ , допускает четное,  $2\pi$  - периодическое (по  $\psi$ ) продолжение, которое будем вновь обозначать  $\theta(\varphi, \psi)$ .

Из условия гладкости и четности функции  $\theta(\varphi, \psi)$  следует, что имеет место следующее разложение в ряд Фурье:

$$\begin{aligned}
\theta(\varphi, \psi) = & \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\psi + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) + \\
& + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_{\nu, \mu} \cos \nu\psi \cos \mu\varphi + B_{\nu, \mu} \cos \nu\psi \sin \mu\varphi). \tag{2.15}
\end{aligned}$$

Поскольку в окрестности полюсов ( $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ ) поверхность гладкая, то

$$\left. \frac{\partial \theta(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right|_{\psi=0} = \left. \frac{\partial \theta(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} \right|_{\psi=\pi} = 0. \quad (2.16)$$

Найдем частные производные по  $\varphi$  от функции вида (2.15) и вычислим их значения при  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\varphi, \psi)}{\partial \varphi} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-k \alpha_k \sin k\varphi + k \beta_k \cos k\varphi) + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-\mu A_{\nu, \mu} \sin \mu\varphi \cos \nu\psi + \mu B_{\nu, \mu} \cos \mu\varphi \cos \nu\psi). \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы выполнялось соотношение (2.16), коэффициенты Фурье должны удовлетворять условиям:

$$\left\{ \begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu A_{\nu, \mu}, \\ -\sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\nu \mu A_{\nu, \mu}, \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \alpha_k &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} A_{\nu, k}, \\ \alpha_k &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu A_{\nu, k}, \end{aligned} \right.$$

и

$$\left\{ \begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu B_{\nu, \mu}, \\ -\sum_{k=1}^{\infty} k \beta_k &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^\nu \mu B_{\nu, \mu}, \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \beta_k &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} B_{\nu, k}, \\ \beta_k &= -\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu B_{\nu, k}. \end{aligned} \right.$$

Следовательно,

$$\alpha_k = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{\infty} ((-1)^\nu + 1) A_{\nu, k},$$

то есть

$$\alpha_k = - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{2\nu,k}.$$

Аналогично получаем, что

$$\beta_k = - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{2\nu,k}.$$

Таким образом, любая замкнутая, строго выпуклая поверхность может быть представлена в виде (2.1), где функция  $\theta(\varphi, \psi)$  непрерывна на прямоугольнике  $D = [0, 2\pi] \times (0, \pi)$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \theta(\varphi, \psi) = & \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cos i\psi + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_{i,k} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{2\nu,k} \right) \cos k\varphi + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,k} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{2\nu,k} \right) \sin k\varphi \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Для неё имеет место условие (2.13).

Углы  $\varphi$  и  $\psi$  являются углами Эйлера касательной плоскости, поэтому нормальный вектор, проведенный к поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$  в точке  $(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z(\varphi, \psi))$ , с точностью до множителя, имеет координаты  $(\cos \varphi \sin \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \psi)$ . Функция  $\theta(\varphi, \psi)$  является опорной функцией поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$ , следовательно, для каждого  $(\varphi, \psi) \in D$  ее значение совпадает с расстоянием от начала координат до касательной плоскости к поверхности  $\Pi(\varphi, \psi)$  в точке  $(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), z(\varphi, \psi))$ .

Таким образом, поверхность (2.1) есть поверхность равной ширины  $d$ , то есть для всех  $(\varphi, \psi) \in D$  имеет место тождество

$$\theta(\varphi, \psi) + \theta(\pi + \varphi, \pi - \psi) \equiv d. \quad (2.18)$$

Отсюда и из (2.17), получаем

$$\begin{aligned} \theta(\varphi, \psi) + \theta(\pi + \varphi, \pi - \psi) &= \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (1 + (-1)^i) a_i \cos i\psi + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 + (-1)^{i+k}) A_{i,k} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 + (-1)^{\nu+k}) A_{2\nu,k} \right) \cos k\varphi + \right. \\ &\left. + \left( \sum_{i=1}^{\infty} (1 + (-1)^{i+k}) B_{i,k} \cos i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} (1 + (-1)^{\nu+k}) B_{2\nu,k} \right) \sin k\varphi \right) \equiv d \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &\alpha_0 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_{2i} \cos 2i\psi + \\ &+ 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \sum_{i=1}^{\infty} A_{2i,2k} \cos 2i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} A_{2\nu,2k} \right) \cos 2k\varphi + \right. \\ &\left. + \left( \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i,2k} \cos 2i\psi - \sum_{\nu=1}^{\infty} B_{2\nu,2k} \right) \sin 2k\varphi \right) \equiv d. \end{aligned}$$

Следовательно, для того, чтобы поверхность вида (2.1) была поверхностью равной ширины  $d$ , необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты Фурье опорной функции удовлетворяли равенствам

$$\alpha_0 = d, \quad \alpha_{2i} = A_{2i,2k} = B_{2i,2k} = 0, \quad (i, k = 1, 2, \dots),$$

что вместе с условием (2.18) и завершает доказательство теоремы.

На рисунках 2.1 – 2.2 приведены примеры поверхностей равной ширины для различных опорных функций

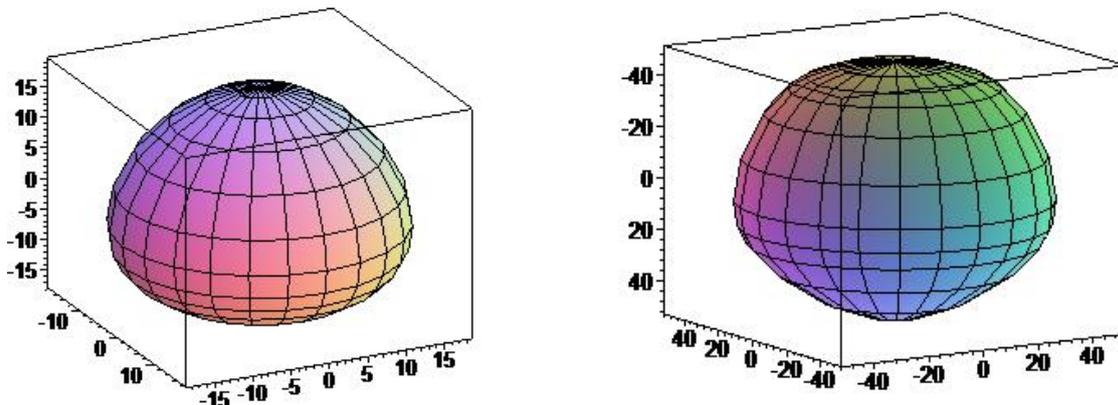
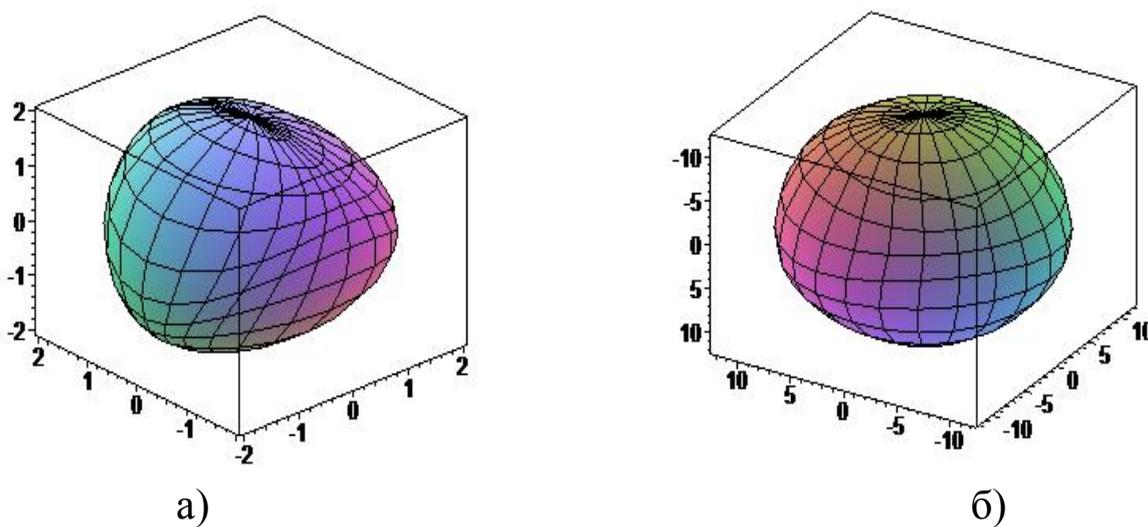


Рис. 2.1. Поверхности равной ширины с опорными функциями

а)  $\theta(\varphi, \psi) = 18 + \cos 3\psi$ ;

б)  $\theta(\varphi, \psi) = 50 + \cos 5\psi$



а)

б)

Рис. 2.2. Поверхности равной ширины с опорными функциями

а)  $\theta(\varphi, \psi) = 2 - \frac{1}{8} \cos 2\varphi (\cos \psi - \cos 3\psi)$ ;

б)  $\theta(\varphi, \psi) = 12 + \frac{1}{8} \sin 2\varphi (\cos 3\psi - \cos 5\psi)$ .

## 2.2. Выпуклые поверхности в пространстве $R_n$

В данном разделе рассмотрим одно из представлений выпуклых поверхностей в пространстве  $\mathbb{R}_n$ , основой которого является параметризация выпуклой поверхности по нормальному вектору единичной сферы. Основываясь на этом представлении, изучены некоторые свойства выпуклых поверхностей.

Прежде всего, приведем несколько определений и понятий, необходимых нам в дальнейшем.

Тело  $T \in \mathbb{R}_n$  будем называть *строго выпуклым*, если для любых  $x_1, x_2 \in T$  и любого  $\lambda \in (0; 1)$  точка  $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$  является внутренней точкой множества  $T$ .

Границу  $\partial T$  ограниченного, строго выпуклого тела  $T \in \mathbb{R}_n$  будем называть *выпуклой поверхностью без края в пространстве  $\mathbb{R}_n$*  (или просто выпуклой поверхностью, если это не вызывает недоразумений).

Пусть

$$\mathbb{S}_n^R = \left\{ u \in \mathbb{R}_n; \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n (u^i)^2 - R^2 \right) = 0 \right\} \quad (2.19)$$

сфера в  $\mathbb{R}_n$  с центром в начале координат радиуса  $R$  и  $\mathbb{S}_n = \mathbb{S}_n^1$ , а  $\mathbb{B}_n$  единичный шар в  $\mathbb{R}_n$ .

В дальнейшем будем считать, что начало координат является внутренней точкой тела, ограниченного выпуклой поверхностью. Как будет показано далее (предложение 2.11), это условие не ограничивает общности построения.

Плоскость (гиперплоскость)  $\pi_{u_1}(y)$  ( $u_0 \in \mathbb{S}_n$ ), которая задается уравнением  $(x - y(u_0), u_1) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}_n$ ), будем называть

опорной плоскостью поверхности  $y$  в точке  $u_0$  с нормальным вектором  $u_1 \in S_n$ , если для всех  $u \in S_n$  выполняется неравенство

$$(y(u) - y(u_0), u_1) \geq 0.$$

Здесь и далее

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n u^i v^i$$

– скалярное произведение элементов  $u$  и  $v$ ,  $|u| = \sqrt{(u, u)}$  – длина  $u$ .

Опорной функцией  $\theta(y, u)$  ( $\theta(y): S_n \rightarrow R_1$ ) выпуклой поверхности  $y$  называют скалярную функцию, которая определяется как расстояние от начала координат до опорной плоскости к поверхности  $y$  с нормальным вектором  $u \in S_n$ .

Здесь и далее через  $y(v)|_Q$  будем обозначать сужение отображения  $y(v)$  на множество  $Q$ . В этом случае будем писать  $y(u)$ .

Как обычно, будем считать, что  $C^m(Q)$  – множество всех функций  $f: Q \rightarrow R_1$  ( $Q \in R_n$ ) непрерывных на  $Q$  вместе со своими частными производными до  $m$  – го порядка включительно.

Вместо  $\frac{\partial \rho}{\partial u^i}$ ,  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial u^i \partial u^j}$  будем писать  $\rho_{u^i}$ ,  $\rho_{u^i u^j}$  соответ-

венно.

Положим

$$x_{u^i}(u) = \left( x_{u^i}^1(u), x_{u^i}^2(u), \dots, x_{u^i}^n(u) \right).$$

Кроме того, пусть

$$\nabla\rho(\mathbf{u}) = \left( \rho_{u_1}(\mathbf{u}), \rho_{u_2}(\mathbf{u}), \dots, \rho_{u_n}(\mathbf{u}) \right)$$

– градиент функции  $\rho(\mathbf{u})$  в точке  $\mathbf{u}$  и

$$\Delta\rho(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \rho_{u_i u_i}(\mathbf{u})$$

– значение оператора Лапласа функции  $\rho(\mathbf{u})$  в точке  $\mathbf{u}$ .

Рассмотрим поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  (отображение  $\mathbf{x}(\rho): \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ ), заданную равенством

$$\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = \left( (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}))\mathbf{u} + \nabla\rho(\mathbf{u}) \right) \Big|_{\mathbb{S}_n}. \quad (2.20)$$

Покажем, что при некотором (естественном) условии на функцию  $\rho(\mathbf{u})$  поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  является выпуклой (строго выпуклой) поверхностью и опорная функция этой поверхности равна  $\theta(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ).

Далее, покажем, что любая гладкая строго выпуклая поверхность может быть представлена в виде (2.20). Таким образом, изучение выпуклых поверхностей фактически сводится к изучению поверхностей вида (2.20).

В дальнейшем всюду будем предполагать, что функция  $\rho(\mathbf{u})$  непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности единичной сферы  $\mathbb{S}_n$ .

Обозначим

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{u}) &= \sigma(\rho, \mathbf{u}) = (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \\ \lambda(\mathbf{u}) &= \lambda(\rho, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) - \sigma(\mathbf{u}), \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}(\rho, \mathbf{u}) = \left\{ c_{i,j} \right\}_{i=1, j=1}^n, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$c_{i,j} = c_{i,j}(\rho, \mathbf{u}) = \rho_{u^i u^j} - u^i b_j + \lambda(\mathbf{u}) \delta_{i,j}, \quad (2.22)$$

$$b_j = \sum_{k=1}^n \rho_{u^k u^j} u^k, \quad (i, j = \overline{1, n}),$$

где  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера.

Матрица  $C(\rho, \mathbf{u})$  будет играть важную роль в дальнейших исследованиях. Многие характеристики выпуклых поверхностей связаны со свойствами этой матрицы.

Приведем два важных свойства матрицы  $C(\rho, \mathbf{u})$ , необходимые нам в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что из (2.21) следует равенство

$$\sum_{k=1}^n c_{i,k} u^k = \lambda u^i, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.23)$$

Кроме того, полагая

$$b_j = \sum_{k=1}^n \rho_{u^k u^j} u^k, \quad \mathbf{b} = (b^1, b^2, \dots, b^n) \quad \text{и} \quad B = \sum_{i=1}^n b^i, \quad (2.24)$$

получаем

$$\sum_{i=1}^n c_{i,j} u^j = \sum_{i=1}^n (\rho_{u^i u^j} - b_j u^i + \lambda \delta_{i,j}) u^j = b_j - B u^j + \lambda u^j, \quad (j = 1, \dots, n). \quad (2.25)$$

Из равенств (2.23) и (2.25) следуют соответственно равенства

$$\mathbf{u} C(\rho, \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u} \quad (2.26)$$

и

$$\mathbf{u} C^T(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{b} + (\lambda - B) \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

где  $C^T(\rho, \mathbf{u})$  есть транспонированная матрица  $C(\rho, \mathbf{u})$ .

Основные результаты данного раздела существенно опираются на следующее утверждение:

**Теорема 2.9.** Пусть  $N(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  – нормальный вектор поверхности  $\mathcal{Y}$  в точке  $\mathbf{u}$  и

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{N(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{|N(\mathbf{y}, \mathbf{u})|} \quad (2.28)$$

нормированный нормальный вектор этой поверхности в точке  $\mathbf{u}$ , тогда если поверхность задана равенством (2.20), то

$$N(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda(\mathbf{u})} |C(\rho, \mathbf{u})| \mathbf{u} \quad (2.29)$$

и

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \mathbf{u}. \quad (2.30)$$

**Доказательство.** Пусть  $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_n$  некоторая гладкая поверхность,  $\mathcal{R}_\varepsilon$  – некоторая  $\varepsilon$  окрестность этой поверхности и отображение  $\mathbf{y}(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{y}(\mathbf{v}): \mathcal{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}_n$ ) непрерывно дифференцируемо в  $\mathcal{R}_\varepsilon$ . Тогда нормальный вектор  $N(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  поверхности  $\mathcal{Y}$  равен

$$N(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} i^1 & y_{u^1}^1(\mathbf{u}) & \dots & y_{u^{n-1}}^1(\mathbf{u}) \\ i^2 & y_{u^1}^2(\mathbf{u}) & \dots & y_{u^{n-1}}^2(\mathbf{u}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & y_{u^1}^n(\mathbf{u}) & \dots & y_{u^{n-1}}^n(\mathbf{u}) \end{vmatrix}, \quad (2.31)$$

где  $i^1, i^2, \dots, i^n$  орты  $\mathbb{R}_n$  и  $\mathbf{u} \in \mathcal{R}$ .

Пусть отображение  $\mathbf{x}(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{x}(\mathbf{v}): \mathcal{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}_n$ ) непрерывно дифференцируемо на  $\mathcal{R}_\varepsilon$ . Если поверхность  $\mathcal{R}$  задается уравнением

$$\varphi(u^1, u^2, \dots, u^n) = 0, \quad (u^n = u^n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})), \quad (2.32)$$

то, предположим, что

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}, \varphi) = \mathbf{x} \left( u^1, u^2, \dots, u^{n-1}, u^n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}) \right). \quad (2.33)$$

В этом случае

$$\mathbf{y}_{u^i} = \mathbf{x}_{u^i} + \mathbf{x}_{u^n} u_{u^i}^n.$$

Кроме того, из (2.32) имеем

$$u^i + u_{u^i}^n u^n = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n-1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{y}_{u^i} = \mathbf{x}_{u^i} + \mathbf{x}_{u^n} \left( -\frac{u^i}{u^n} \right). \quad (2.34)$$

В этом случае определитель (2.32) будет иметь вид

$$N(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} i^1 & x_{u^1}^1 + x_{u^n}^1 \left( -\frac{u^1}{u^n} \right) & \dots & x_{u^{n-1}}^1 + x_{u^n}^1 \left( -\frac{u^{n-1}}{u^n} \right) \\ i^2 & x_{u^1}^2 + x_{u^n}^2 \left( -\frac{u^1}{u^n} \right) & \dots & x_{u^{n-1}}^2 + x_{u^n}^2 \left( -\frac{u^{n-1}}{u^n} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & x_{u^1}^n + x_{u^n}^n \left( -\frac{u^1}{u^n} \right) & \dots & x_{u^{n-1}}^n + x_{u^n}^n \left( -\frac{u^{n-1}}{u^n} \right) \end{vmatrix}. \quad (2.35)$$

Отсюда следует, что если  $\mathfrak{R} = \mathbb{S}_n$ , то равенство (2.35) принимает вид

$$N(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ i^1 & x_{u^1}^1 & x_{u^2}^1 & \dots & x_{u^n}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & x_{u^1}^n & x_{u^2}^n & \dots & x_{u^n}^n \end{vmatrix}. \quad (2.36)$$

Пусть поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  задается уравнением (2.20), в этом случае

$$x_{u^i}^k = c_{i,k}, \quad (2.37)$$

где  $c_{i,k} = c_{i,k}(\rho, \mathbf{u})$  определены равенствами (2.21).

Отсюда и из (2.36) получаем

$$N(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ i^1 & c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}. \quad (2.38)$$

Умножим  $(i+1)$ -ю строку определителя (2.38) на  $-\frac{u^i}{\lambda}$ , сложим полученные строки и прибавим результат к первой строке. Это приведет нас к равенствам:

$$\begin{aligned} N(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n u^k i^k & 0 & \dots & 0 \\ i^1 & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \mathbf{u} & 0 & \dots & 0 \\ i^1 & c_{1,1} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ i^n & c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \mathbf{u} \begin{vmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \mathbf{u} |C(\rho, \mathbf{u})|, \end{aligned}$$

что и доказывает равенство (2.29). Равенство (2.30) из (2.29) следует очевидным образом.

Сформулируем некоторые утверждения, которые следуют из теоремы 2.9.

**Следствие 2.10.** Пусть гладкая строго выпуклая поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  определена равенством (2.20), тогда:

➤ касательная (опорная) плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}(\rho)$  к поверхности  $\mathbf{x}(\rho)$  в точке  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  (здесь и далее  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ) задается уравнением

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}); \quad (2.39)$$

➤ ортогональная проекция  $\mathbf{x}^\perp(\rho, \mathbf{u})$  начала координат на плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}(\rho)$  определяется равенством

$$\mathbf{x}^\perp(\rho, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}; \quad (2.40)$$

➤ функция  $\rho(\mathbf{u})$  есть опорной функцией поверхности  $\mathbf{x}(\rho)$ , то есть

$$\theta(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) \quad (2.41)$$

и

$$(\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}), \quad (2.42)$$

а также

$$\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) - \mathbf{x}^\perp(\rho, \mathbf{u}) = (\nabla \rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \mathbf{u}). \quad (2.43)$$

**Доказательство.** Из выражения (2.20) следует, что опорная плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}(\rho)$  определяется уравнением

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0. \quad (2.44)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) &= ((\rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \mathbf{u}) + \nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \\ &= \rho(\mathbf{u}) |\mathbf{u}|^2 - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) |\mathbf{u}|^2 + (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}), \end{aligned}$$

то есть

$$(\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}),$$

и равенство (2.42) доказано. Используя это соответствие в (2.44), получим (2.39).

Прямая, проходящая через начало координат и ортогональная опорной плоскости  $\pi_{\mathbf{u}}(\rho)$ , задается уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} \tau \quad (\tau \in \mathbb{R}_1).$$

Таким образом,  $\mathbf{x}^\perp(\rho, \mathbf{u})$  является решением системы

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{u} \tau, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}), \end{cases}$$

то есть

$$\mathbf{x} = \rho(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}.$$

Отсюда получаем равенство (2.41). Соотношение (2.43) следует из (2.41) и представления (2.20).

Равенства (2.41) и (2.42) утверждают, что если поверхность определена равенством (2.20) и  $\rho(\mathbf{u}) > 0$ , то  $\rho(\mathbf{u})$  есть опорной функцией этой поверхности. С другой стороны, для любой гладкой строго выпуклой поверхности, ограничивающей тело, которое содержит начало координат, каждое направление  $\mathbf{u}$  определяет одну и только одну опорную плоскость к этой поверхности с нормальным вектором  $\mathbf{u}$  и одну и только одну точку касания этой опорной плоскости с поверхностью.

Поставим в соответствие вектору  $\mathbf{u}$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ) эту точку поверхности. Тем самым мы получим представление поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  как отображение единичной сферы в пространство  $\mathbb{R}_n$  такое, что  $\mathbf{u}$  есть нормальным вектором этой поверхности в

точке  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ . Учитывая, что для поверхности вида (2.20) равенство (2.41) верно для любой гладкой функции  $\rho(\mathbf{x})$ , заключаем, что выражение (2.20) и является таким представлением поверхности.

Следующее утверждение иллюстрирует естественную связь сдвига и поворота выпуклой поверхности с соответствующими преобразованиями опорной функции.

**Предложение 2.11.** *Равенство*

$$\mathbf{x}(\rho_c, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) + \mathbf{c}$$

*выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\rho_c(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u}).$$

*Для любой ортогональной матрицы  $A$  порядка  $n$  (такой, что  $A \cdot A^{-1} = E$ , где  $E$  – единичная матрица, а  $A^{-1}$  – обратная матрица  $A$ ), выполняется равенство*

$$\mathbf{x}(\rho(A \cdot), \mathbf{u}) = A^{-1} \mathbf{x}(\rho, A\mathbf{u}). \quad (2.45)$$

**Доказательство.** Пусть  $\rho_c(\mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u})$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\rho_c, \mathbf{u}) &= (\rho(\mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u}) - (\nabla(\rho(\mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u})), \mathbf{u}))\mathbf{u} + \nabla(\rho(\mathbf{u}) + (\mathbf{c}, \mathbf{u})) = \\ &= \rho(\mathbf{u})\mathbf{u} + (\mathbf{c}, \mathbf{u})\mathbf{u} - (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u})\mathbf{u} - (\mathbf{c}, \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla\rho(\mathbf{u}) + \mathbf{c} = \\ &= (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}))\mathbf{u} + (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) + \mathbf{c} = \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) + \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Далее,

$$\mathbf{x}(\rho, A\mathbf{u}) = (\rho(A\mathbf{u}) - (\nabla(\rho(A\mathbf{u})), A\mathbf{u}))A\mathbf{u} + \nabla(\rho(A\mathbf{u})).$$

Кроме того,

$$\nabla(\rho(A\mathbf{u})) = A \nabla\rho(A\mathbf{u}),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{x}(\rho, A\mathbf{u}) = (\rho(A\mathbf{u}) - (A \nabla\rho(A\mathbf{u}), A\mathbf{u}))A\mathbf{u} + A \nabla\rho(A\mathbf{u}).$$

Используя в последнем соотношении равенство  $(Ax, Ay) = (x, y)$ , сразу получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\rho, A\mathbf{u}) &= \left( \rho(A\mathbf{u}) - (A \nabla \rho(A\mathbf{u}), A\mathbf{u}) \right) A\mathbf{u} + A \nabla \rho(A\mathbf{u}) = \\ &= A \mathbf{x}(\rho(A \cdot), \mathbf{u}), \end{aligned}$$

что и доказывает (2.45).

Отметим еще несколько утверждений.

**Предложение 2.12.** Пусть  $Q \in \mathbb{S}_n$  и в некоторой окрестности  $Q$

$$\rho(\mathbf{u}) = R + (\bar{C}, \mathbf{u}),$$

тогда для  $\mathbf{u} \in Q$

$$\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = R\mathbf{u} + \bar{C}$$

и на множестве  $Q$  поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  совпадает со сферой с центром в точке  $\bar{C}$  радиуса  $R$ , и наоборот.

*Доказательство.* Пусть  $\rho(\mathbf{u}) = R + (\bar{C}, \mathbf{u})$ , тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) &= \left( R + (\bar{C}, \mathbf{u}) - (\nabla(R + (\bar{C}, \mathbf{u})), \mathbf{u}) \right) \mathbf{u} + \nabla(R + (\bar{C}, \mathbf{u})) = \\ &= R\mathbf{u} + (\bar{C}, \mathbf{u})\mathbf{u} - (\nabla R, \mathbf{u})\mathbf{u} - (\bar{C}, \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla R + \bar{C} = R\mathbf{u} + \bar{C}, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение.

Пусть  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ) – гладкая строго выпуклая поверхность в пространстве  $\mathbb{R}_n$ . Для  $\eta > 0$  геометрическое место концов нормальных векторов  $\eta \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  с началами на поверхности  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  в точке  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  назовем *внешней  $\eta$  – эквидистантой* поверхности  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  и обозначим  $\mathbf{x}_\eta^+(\rho, \mathbf{u})$ , а геометрическое место концов нормальных векторов  $-\eta \mathbf{n}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  назовем *внутренней  $\eta$  – эквидистантой* поверхности и обозначим  $\mathbf{x}_\eta^-(\rho, \mathbf{u})$ .

**Предложение 2.13.** Для любого  $\eta > 0$

$$\mathbf{x}_\eta^\pm(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(\rho \pm \eta, \mathbf{u}).$$

*Доказательство.* Согласно определению эквидистанты и теореме 2.9 справедливо равенство

$$\mathbf{x}_\eta^\pm(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) \pm \eta \mathbf{n}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) \pm \eta \mathbf{u}.$$

Пусть поверхность определена равенством (2.20), тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_\eta^\pm(\rho, \mathbf{u}) &= \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) \pm \eta \mathbf{u} = (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u})) \mathbf{u} + \nabla \rho(\mathbf{u}) \pm \eta \mathbf{u} = \\ &= (\rho(\mathbf{u}) \pm \eta) \mathbf{u} - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \mathbf{u} \mp (\nabla \eta, \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla \rho(\mathbf{u}) \pm \nabla \eta = \\ &= ((\rho(\mathbf{u}) \pm \eta) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) \mp (\nabla \eta, \mathbf{u})) \mathbf{u} + \nabla(\rho(\mathbf{u}) \pm \eta) = \\ &= ((\rho(\mathbf{u}) \pm \eta) - (\nabla(\rho(\mathbf{u}) \pm \eta), \mathbf{u})) \mathbf{u} + \nabla(\rho(\mathbf{u}) \pm \eta) = \mathbf{x}(\rho(\mathbf{u}) \pm \eta, \mathbf{u}), \end{aligned}$$

что и доказывает предложение 2.13.

### 2.3. Основные квадратичные формы поверхности

Многие геометрические свойства поверхности связаны с ее характеристиками – первой, второй и третьей основными квадратичными формами. В данном параграфе найдены эти характеристики для поверхностей, заданных в виде (2.20).

Пусть  $\mathfrak{R}$  некоторая гладкая поверхность в пространстве  $\mathbb{R}_n$  и  $\mathfrak{R}_\varepsilon$  некоторая  $\varepsilon$  окрестность этой поверхности, отображение  $\mathbf{y}(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{y}(\mathbf{v}) : \mathfrak{R}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}_n$ ) непрерывно дифференцируемо в  $\mathfrak{R}_\varepsilon$ . *Первой основной квадратичной формой* отображения  $\mathbf{y}$  называется величина

$$M_1(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = \left| \sum_{j=1}^n y_{u^j} du^j \right|^2,$$

второй основной квадратичной формой отображения  $\mathbf{y}$  называется величина

$$M_2 = (\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( y_{u^i}(\mathbf{u}), \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \right) du^i du^j. \quad (2.46)$$

Определитель второй основной квадратичной формы называется *радиусом кривизны*  $r(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ , а величина

$$k(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \frac{1}{r(\mathbf{y}, \mathbf{u})} - \text{гауссовой кривизной поверхности } \mathbf{y} \text{ в точке } \mathbf{u}.$$

Третьей основной квадратичной формой отображения  $\mathbf{y}$  называется величина

$$M_3(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = |dn(\mathbf{y}, \mathbf{u})|.$$

**Теорема 2.14.** Пусть поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  определена равенством (2.20), тогда

$$M_1(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = \left( d\mathbf{u}, d\mathbf{u} \left( \mathbb{C}(\rho, \mathbf{u}) \mathbb{C}^T(\rho, \mathbf{u}) \right) \right), \quad (2.47)$$

$$M_2(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = (d\mathbf{u}, d\mathbf{u} \mathbb{C}(\rho, \mathbf{u})), \quad (2.48)$$

$$M_3(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = (d\mathbf{u})^2 \quad (2.49)$$

и радиус гауссовой кривизны определяется соотношением

$$r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda} |\mathbb{C}(\rho, \mathbf{u})|, \quad (2.50)$$

где  $d\mathbf{u} = (du^1, du^2, \dots, du^n)$ , для любого  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ,  $(\mathbf{u}, d\mathbf{u}) = 0$  и матрица  $\mathbb{C}(\rho, \mathbf{u})$  определена равенствами (2.21), (2.22).

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{x}(v)$  отображение некоторой окрестности сферы  $S_n$  в пространство  $R_n$  и

$$\mathbf{y}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(v)|_{S_n} = \mathbf{x}\left(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}, u^n(u^1, u^2, \dots, u^{n-1})\right),$$

$$\sum_{i=1}^n (u^i)^2 = 1.$$

Из определения первой квадратичной формы и равенств (2.34) следует, что

$$\begin{aligned} M_1(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left[ \left( \mathbf{x}_{u^i} - \mathbf{x}_{u^n} \frac{u^i}{u^n} \right) \left( \mathbf{x}_{u^j} - \mathbf{x}_{u^n} \frac{u^j}{u^n} \right) \right] du^i du^j = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left[ (\mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{x}_{u^j}) - \frac{u^i}{u^n} (\mathbf{x}_{u^j}, \mathbf{x}_{u^n}) - \frac{u^j}{u^n} (\mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{x}_{u^n}) + \frac{u^i u^j}{(u^n)^2} (\mathbf{x}_{u^n}, \mathbf{x}_{u^n}) \right] du^i du^j. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Кроме того, в силу равенства  $(\mathbf{u}, d\mathbf{u}) = 0$ , имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u^j}{u^n} (\mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{x}_{u^n}) du^i du^j = \\ &= \frac{1}{u^n} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \mathbf{x}_{u^i}, \sum_{j=1}^n u^j du^j \mathbf{x}_{u^n} \right) du^i = \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{x}_{u^n}) du^i du^n. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{u^i}{u^n} (\mathbf{x}_{u^j}, \mathbf{x}_{u^n}) du^i du^j = - \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{x}_{u^j}, \mathbf{x}_{u^n}) du^j du^n.$$

Таким образом,

$$M_1(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{x}_{u^j}) du^i du^j.$$

Отсюда и из (2.21) получаем

$$\begin{aligned} M_1(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{i,k} c_{k,j} du^i du^j = \\ &= \left( d\mathbf{u}, d\mathbf{u} C(\rho, \mathbf{u}) C^T(\rho, \mathbf{u}) \right), \end{aligned}$$

что и доказывает (2.47)

Далее, в силу (2.34), вторую основную квадратичную форму можно записать в виде

$$M_2(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \mathbf{x}_{u^i} - \mathbf{x}_{u^n} \frac{u^i}{u^n}, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j. \quad (2.52)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_2(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) &= - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j + \\ &+ \mathbf{x}_{u^n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{u^i}{u^n}, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j = \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( \mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j + \frac{\mathbf{x}_{u^n}}{u^n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( u^i, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Учитывая, что  $(\mathbf{u}, d\mathbf{u}) = 0$ , и  $\sum_{i=1}^{n-1} u^i du^i = -u^n du^n$ , получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \left( u^i, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j &= \sum_{i=1}^{n-1} du^i \left( u^i, \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^j = \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} du^i \left( u^i, \mathbf{n}_{u^n}(\mathbf{y}) \right) du^n = \sum_{i=1}^{n-1} \left( u^i, \mathbf{n}_{u^n}(\mathbf{y}) \right) du^i du^n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$M_2(\mathbf{y}, \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \mathbf{x}_{u^i}, \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{y}) \right) du^i du^j. \quad (2.54)$$

В случае, когда поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  задана равенством (2.20), имеем  $x_{u^i}^j = c_{i,j}$ . Кроме того, в силу теоремы 2.9 получаем что  $\mathbf{n}(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{u}$ , следовательно  $\mathbf{n}_{u^i}(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = i^j$ . Поэтому

$$\left( \mathbf{x}_{u^i}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{n}_{u^j}(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) \right) = x_{u^i}^j = c_{i,j},$$

что вместе с (2.54) и завершает доказательство равенства (2.48). Соотношение (2.49) сразу следует из теоремы 2.9.

Если поверхность задана уравнением (2.20), то из определения радиуса кривизны и выражения (2.34) получаем

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) &= \left| \left\{ x_{u^i}^j - x_{u^n}^j \frac{u^i}{u^n} \right\}_{i=1, j=1}^{n-1, n-1} \right| = \\ &= \left| \begin{array}{ccc} x_{u^1}^1 - x_{u^n}^1 \frac{u^1}{u^n} & \dots & x_{u^{n-1}}^1 - x_{u^n}^1 \frac{u^{n-1}}{u^n} \\ x_{u^1}^2 - x_{u^n}^2 \frac{u^1}{u^n} & \dots & x_{u^{n-1}}^2 - x_{u^n}^2 \frac{u^{n-1}}{u^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{u^1}^{n-1} - x_{u^n}^{n-1} \frac{u^1}{u^n} & \dots & x_{u^{n-1}}^{n-1} - x_{u^n}^{n-1} \frac{u^{n-1}}{u^n} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{u^n} \left| \begin{array}{ccc} x_{u^1}^1 & \dots & x_{u^{n-1}}^1 & x_{u^n}^1 \\ x_{u^1}^2 & \dots & x_{u^{n-1}}^2 & x_{u^n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{u^1}^{n-1} & \dots & x_{u^{n-1}}^{n-1} & x_{u^n}^{n-1} \\ u^1 & \dots & u^{n-1} & u^n \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Заметим, что из (2.38) следует, что  $k$  – тая координата вектора  $N(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u})$  равна

$$N^k(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = (-1)^k \begin{vmatrix} u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix}.$$

С другой стороны, в силу теоремы 2.9,

$$N^k(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} u^k.$$

Таким образом,

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k-1,1} & c_{k-1,2} & \dots & c_{k-1,n} \\ u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ c_{k+1,1} & c_{k+1,2} & \dots & c_{k+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \dots & c_{n,n} \end{vmatrix} u^k.$$

Отсюда, при  $k = n$ , из (2.37) и (2.55), сразу получаем соотношение (2.50).

Положим

$$\rho_{i,j} = \rho_{u^i u^j}(\mathbf{u}), \quad (2.56)$$

тогда равенство (2.50) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) &= \\ &= -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \rho_{1,1} - b_1 u^1 + \lambda & \rho_{1,2} - b_2 u^1 & \dots & \rho_{1,n} - b_n u^1 \\ \rho_{2,1} - b_1 u^2 & \rho_{2,2} - b_2 u^2 + \lambda & \dots & \rho_{2,n} - b_n u^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n,1} - b_1 u^n & \rho_{n,2} - b_2 u^n & \dots & \rho_{n,n} - b_n u^n + \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Умножим  $i$  – тую строку этого определителя на  $u^{i-1}$ , сложим полученные выражения и вычтем из первой строки найденную сумму. Учитывая после этого равенство (2.56) и тот факт, что  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ , получаем

$$r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda u^1 & -\lambda u^2 & \dots & -\lambda u^n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}.$$

Таким образом, радиус кривизны поверхности вида (2.20) можно записать следующим образом:

$$r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = -\frac{1}{\lambda} |C(\rho, \mathbf{u})| = - \begin{vmatrix} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{vmatrix}, \quad (2.57)$$

где  $\lambda(\mathbf{u}) = \lambda(\rho, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u})$ .

**Замечание 2.15.** Из равенства (2.57) следует, что если для всех  $\mathbf{v}$  в окрестности единичной сферы  $\rho_{i,j} = 0$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ), то

$$r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 1 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ u^2 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\rho, \mathbf{u}), \quad (2.58)$$

где  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ .

Как известно, кривизна нормального сечения отображения  $y(u)$  ( $y: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{R}_n$ ,  $\mathfrak{R}$  - гладкая поверхность, лежащая в  $\mathbb{R}_n$ ) в точке  $u$  плоскости, которая проходит через бесконечно близкую точку этой поверхности  $u + du$  равна

$$K_{du}(y, du) = -\frac{M_2(y, u, du)}{M_1(y, u, du)}.$$

Отсюда и из теоремы 2.14 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.16.** *Для поверхности вида (2.20) кривизна нормального сечения в точке  $u \in \mathbb{S}_n$  плоскости, проходящей через бесконечно близкую точку этой поверхности  $u + du$  ( $(u, du) = 0$ ), равна*

$$K_{du}(x(\rho), u) = \frac{(du, du C(\rho, u))}{(du, du C(\rho, u) C^T(\rho, u))}.$$

Для многих приложений условие  $(u, du) = 0$  осложняет решение задач. Например, задача нахождения главных кривизн сводится к двух параметрической задаче на собственные значения

$$|\mu_0 C(\rho, u) + \mu_1 C(\rho, u) C^T(\rho, u) + \mu_2 U| = 0,$$

где

$$U = \begin{pmatrix} u^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & u^2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u^n \end{pmatrix}.$$

Этот недостаток можно устранить, положив

$$du = dv - (u, dv)u.$$

Тогда для любого  $dv \in \mathbb{R}_n$  условие  $(u, du) = 0$  выполняется и, кроме того, основные квадратичные формы принимают вид

$$M_1(x(\rho), u, du) = (dv, dv C(\rho, u) C^T(\rho, u)) - \\ - 2\lambda(dv, u)(u, dv C(\rho, u)) + \lambda^2 (u, dv)^2,$$

$$M_2(x(\rho), u, du) = (dv, dv C(\rho, u)) - (dv, u)(u, dv C(\rho, u)),$$

и

$$M_3(x(\rho), u, du) = |dv|^2 - (u, dv)^2.$$

Действительно, так как

$$(u, C(\rho, u)) = \lambda u \quad \text{и} \quad \lambda(u) = \rho(u) - (\nabla \rho(u), u),$$

то по теореме 2.14 для  $u \in \mathbb{R}_n$  имеем

$$M_1(x(\rho), u, du) = (dv, dv C(\rho, u) C^T(\rho, u)) = |du C(\rho, u)|^2 = \\ = |dv C(\rho, u) - (u, dv)u C(\rho, u)|^2 = |dv C(\rho, u) - (u, dv)\lambda u|^2 = \\ = |dv C(\rho, u)|^2 - 2\lambda(dv, u)(u, dv C(\rho, u)) + \lambda^2 (u, dv)^2,$$

то есть

$$M_1(x(\rho), u, du) = |dv C(\rho, u)|^2 - 2\lambda(dv, u)(u, dv C(\rho, u)) + \\ + \lambda^2 (u, dv)^2.$$

Далее,

$$M_2(x(\rho), u, du) = (dv - (u, dv)u, dv C(\rho, u) - (u, dv)u C(\rho, u)) = \\ = (dv - (u, dv)u, dv C(\rho, u) - \lambda(u, dv)u) = \\ = (u, dv C(\rho, u)) - (u, dv)(u, dv) - (u, dv)(u, dv C(\rho, u)) + \\ + (u, dv)^2 |u|^2 = (dv, dv C(\rho, u)) - (dv, u)(u, dv C(\rho, u)),$$

(2.59)

то есть

$$M_2(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = (d\mathbf{v}, d\mathbf{v} C(\rho, \mathbf{u})) - (d\mathbf{v}, \mathbf{u})(\mathbf{u}, d\mathbf{v} C(\rho, \mathbf{u})).$$

Наконец,

$$M_3(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = |d\mathbf{u}|^2 = |d\mathbf{v} - (\mathbf{u}, d\mathbf{v})\mathbf{u}|^2 = |d\mathbf{v}|^2 - (\mathbf{u}, d\mathbf{v})^2.$$

Заметим, что из (2.59) и (2.27) следует, что вторую квадратичную форму можно записать в виде

$$M_2(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}, d\mathbf{u}) = (d\mathbf{v}, d\mathbf{v} C(\rho, \mathbf{u})) - (d\mathbf{v}, \mathbf{u})(d\mathbf{v}, \mathbf{b}) + (B - \lambda)(d\mathbf{v}, \mathbf{u})^2.$$

Хорошо известно, что если у поверхности без края радиус кривизны в каждой точке есть величина положительная, то это выпуклая поверхность. Отсюда и из теоремы 2.9 и замечания к ней, следует, что любую строго выпуклую гладкую поверхность можно представить в виде (2.20) при условии, что ее радиус кривизны всегда положительный. Для удобства ссылок сформулируем этот факт в виде теоремы.

**Теорема 2.17.** *Для любой строго выпуклой гладкой поверхности без края найдется положительная функция  $\rho(\mathbf{u})$  (опорная функция этой поверхности), такая, что эта поверхность представима в виде*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}))\mathbf{u} + \nabla\rho(\mathbf{u}), \quad (\mathbf{u} \in S_n) \\ r(\rho, \mathbf{u}) = \frac{1}{K(\rho, \mathbf{u})} = - \left| \begin{array}{ccccc} 0 & u^1 & u^2 & \dots & u^n \\ u^1 & \rho_{1,1} + \lambda & \rho_{1,2} & \dots & \rho_{1,n} \\ u^2 & \rho_{2,1} & \rho_{2,2} + \lambda & \dots & \rho_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \dots & \rho_{n,n} + \lambda \end{array} \right| > 0. \end{array} \right. \quad (2.60)$$

В дальнейшем всюду, говоря о свойствах поверхности, будем подразумевать, что изучаем поверхности вида (2.60), то есть будем изучать строго выпуклые поверхности, иногда с некоторыми оговорками о гладкости и нестрогой выпуклости.

## 2.4. Приложение гармонического анализа к характеристикам выпуклых поверхностей

Пусть  $du$  инвариантная относительно группы вращения  $SO(n)$  мера Хаара на сфере  $S_n$ , нормированная так, что

$$\int_{S_n} du = \sigma(S_n) = \begin{cases} \frac{2^m \pi^{m-1}}{(2m-3)!!}, & n = 2m - 1, \\ \frac{2\pi^m}{(m-1)!}, & n = 2m, \end{cases}$$

где  $\sigma(y)$  полная поверхность  $y$ .

Обозначим через  $L_2$  множество всех функций  $f$ , заданных на сфере  $S_n$ , с ограниченной нормой

$$\|f\| = \left( \frac{1}{\sigma(S_n)} \int_{S_n} f^2(u) |du| \right)^{1/2}.$$

Под элементом поверхности  $dx$ , заданной на сфере, будем понимать величину  $dv = d_x v = n(x, v)|_{S_n} du$ . Тогда

$$\int_{x(u)} f(v) dv = \int_{S_n} f(u) n(x, u) du. \quad (2.61)$$

Далее нам потребуются некоторые понятия из гармонического анализа на сфере.

Функцию

$$\prod_{\nu=1}^n u_{\nu}^{\alpha_{\nu}} \quad \left( \alpha_{\nu} \in \mathbf{N}^+, \quad \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} = 1 \right)$$

называют *алгебраическим мономом* порядка  $k$  в пространстве  $\mathbb{R}_n$ .

Линейную комбинацию мономов  $k$  – го порядка будем называть  *$n$  – мерным однородным полиномом*  $k$  – го порядка и обозначать через  $P_k(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_n$ ).

Отметим (в дальнейшем этот факт будет существенно использоваться), что для любого однородного полинома  $k$  – го порядка выполняется тождество Эйлера

$$(\nabla P_k(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = k P_k(\mathbf{v}). \quad (2.62)$$

Если однородный полином  $k$  – го порядка  $\tilde{H}_k(\mathbf{v})$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \tilde{H}_k(\mathbf{v}) = 0,$$

то его будем называть  *$n$  – мерным гармоническим однородным полиномом*  $k$  – го порядка и, наконец, если  $\tilde{H}_k(\mathbf{v})$  однородный гармонический полином  $k$  – го порядка, то функцию  $H_k(\mathbf{u})$  ( $H_k(\mathbf{u}) : \mathbb{S}_n \rightarrow \mathbb{R}_1$ ), равную  $\tilde{H}_k(\mathbf{v})|_{\mathbb{S}_n}$ , называют *гармоникой*  $k$  – го порядка.

Для гармоник  $H_k(\mathbf{u})$  и  $H_m(\mathbf{u})$  выполняются равенства

$$\int_{\mathbb{S}_n} H_k(\mathbf{u}) H_m(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0 \quad (m, k = 0, 1, \dots, \quad k \neq m). \quad (2.63)$$

Любая функция  $\rho(\mathbf{u}) \in L_2(\mathbb{S}_n)$  однозначно представима в виде ряда

$$\rho(\mathbf{u}) = H_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} H_k(\rho, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{S}_n, \quad (2.64)$$

где  $H_k(\rho, \mathbf{u})$  гармонические однородные полиномы  $k$  – го порядка, которые также однозначно определяются функцией  $\rho(\mathbf{u})$ .

Отсюда, используя тождество Эйлера, получаем

$$(\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} k H_k(\rho, \mathbf{u}). \quad (2.65)$$

Если поверхность представима в виде (2.60), то

$$\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \left( H_0(\rho) - \sum_{k=2}^{\infty} H_k(\rho, \mathbf{u})(k-1) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \nabla H_k(\rho, \mathbf{u}). \quad (2.66)$$

Отсюда и из (2.63) выходит, что если  $f \in L_2$  (в частности, если функция  $f$  непрерывна на сфере), то

$$\int_{\mathbb{S}_n} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = H_0(f) \sigma(\mathbb{S}_n). \quad (2.67)$$

Все эти утверждения можно найти, например, в монографии [44], глава 4.

Как видно из (2.67), при вычислении интегралов существенную роль играет число  $H_0(f)$ , то есть свободный член разложения функции в ряд (2.64). Для вычисления такого рода интегралов полезно следующее утверждение.

**Теорема 2.18.** Пусть функция  $f$  непрерывна на сфере  $\mathbb{S}_n$  и (2.64) её разложение в гармонический ряд,  $\tilde{f}(\mathbf{u})$  – гармоническое продолжение функции на сферу  $\mathbb{S}_n$ , тогда

$$H_0(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k \tilde{f}|_0.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что если  $Q_m(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{v} \in \mathbb{S}_n$ ) полином порядка не выше  $m$ , то

$$H_0(Q_m) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k Q_m|_0.$$

Пусть

$$Q_m = P_0(\mathbf{v}) + P_1(\mathbf{v}) + \dots + P_m(\mathbf{v}),$$

где  $P_k(\mathbf{v})$  однородные полиномы порядка  $k$ .

По теореме Стейна-Вейса (см. [44], стр. 159) любой однородный полином  $P_{2k}(\mathbf{v})$  ( $\mathbf{v} \in \mathbb{S}_n$ ) порядка  $2k$  представим в виде

$$P_{2k}(\mathbf{v}) = H_{2k}(P_{2k}, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 H_{2k-2}(P_{2k}, \mathbf{v}) + \dots + |\mathbf{v}|^{2k} H_0(P_{2k}, \mathbf{v}), \quad (2.68)$$

а любой полином  $P_{2k+1}(\mathbf{v})$  имеет вид

$$P_{2k+1}(\mathbf{v}) = H_{2k+1}(P_{2k+1}, \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 H_{2k-1}(P_{2k+1}, \mathbf{v}) + \dots \\ \dots + |\mathbf{v}|^{2k} H_1(P_{2k+1}, \mathbf{v}), \quad (2.69)$$

где  $H_\nu(P_\mu)$  однородный гармонический полином порядка  $\nu$ , который однозначно определяется полиномом  $P_\mu$ .

Отсюда, в частности, следует, что

$$H_0(P_{2k+1}, \mathbf{v}) = 0.$$

Кроме того, для любого однородного гармонического многочлена  $H_k$  порядка  $k$  верно тождество

$$\Delta(|\mathbf{v}|^{2m} H_k(\mathbf{v})) = 2m(2m+n+2k-2)|\mathbf{v}|^{2m-2} H_k(\mathbf{v}). \quad (2.70)$$

Действительно,

$$\Delta(|\mathbf{v}|^{2m} H_k(\mathbf{v})) = 2m(2m+n-2)|\mathbf{v}|^{2m-2} H_k(\mathbf{v}) + \\ + 2 \cdot 2m |\mathbf{v}|^{2m-2} (\nabla H_k(\mathbf{v}), \mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^{2m} \Delta H_k(\mathbf{v}).$$

Остается учесть, что в силу тождества Эйлера (2.62) имеем

$$(\nabla H_k(\mathbf{v}), \mathbf{v}) = k H_k(\mathbf{v}).$$

Так как  $H_k(\mathbf{v})$  гармонический полином, то  $\Delta H_k(\mathbf{v}) = 0$ . Из этого равенства и из (2.68), в частности, следует, что

$$\Delta^k P_{2k}(\mathbf{v}) = \frac{(2k)!!(n-2+2k)!!}{(n-2)!!} H_0(P_{2k}).$$

Учитывая, что  $\Delta^k P_{2k}(\mathbf{v})$  - величина постоянная, получаем

$$H_0(P_{2k}) = \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k P_{2k}|_0.$$

Следовательно,

$$H_0(Q_m) = \sum_{k=0}^{[m/2]} H_0(P_{2k}) = \sum_{k=0}^{[m/2]} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k P_{2k}|_0.$$

Кроме того,

$$\Delta^k Q_m|_0 = \Delta^k P_{2k}|_0,$$

что вместе с (2.64) и завершает доказательство теоремы 2.18.

Из равенства (2.67) и теоремы 2.18 следует, что

$$\int_{S_n} f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = \sigma(S_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k \tilde{f}|_0. \quad (2.71)$$

Обозначим через  $\sigma(\mathbf{y})$  площадь поверхности  $\mathbf{y}$ , а через  $V(\mathbf{y})$  - объем тела, ограниченного замкнутой, без самопересечений поверхностью  $\mathbf{y}$ .

**Теорема 2.19.** Пусть  $\rho(\mathbf{u})$  сужение полинома  $\tilde{\rho}(\mathbf{v})$  на сферу  $S_n$ , тогда

$$\sigma(\mathbf{x}(\rho)) = \sigma(S_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k r(\tilde{\rho}) \Big|_0 \quad (2.72)$$

и

$$V(\mathbf{x}(\rho)) = \sigma(S_n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2k)!!(n-2+2k)!!} \Delta^k (\tilde{\rho} \cdot r(\tilde{\rho})) \Big|_0. \quad (2.73)$$

**Доказательство.** Равенство (2.72) сразу следует из (2.71) и (2.67). Докажем равенство (2.73). Согласно формуле Гаусса – Остроградского, если  $V$  – односвязное множество с кусочно-гладкой границей  $\partial V$  и заданное векторное поле  $\mathbf{y}(\mathbf{v})$  непрерывно дифференцируемо на  $V$ , то

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{w}) \, d\mathbf{w} = \int_{\partial V} (\mathbf{y}(\mathbf{v}), d\mathbf{v}), \quad (2.74)$$

где, как обычно,

$$\operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{w}) = \sum_{i=1}^n y_{w^i}^i(\mathbf{w})$$

– дивергенция векторного поля  $\mathbf{y}(\mathbf{w})$ , а  $d\mathbf{v}$  – векторный элемент площади поверхности  $\partial V$ .

Пусть  $T(\rho)$  – тело, ограниченное выпуклой поверхностью  $\mathbf{x}(\rho)$ , тогда полагая в (2.74)

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}) = V / \mathbf{n},$$

и, учитывая, что при этом

$$\operatorname{div} \mathbf{y}(\mathbf{v}) = 1,$$

получим

$$V(\mathbf{x}(\rho)) = \int_{T(\rho)} d\mathbf{v} = \frac{1}{n} \int_{\mathbf{x}(\rho)} (\mathbf{v}, d\mathbf{v}).$$

Кроме того, из теоремы 2.9 следует, что для  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$  имеет место равенство

$$d\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot r(\rho, \mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Таким образом,

$$V(\mathbf{x}(\rho)) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_n} (\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) r(\rho, \mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Отсюда и из равенства (2.42) получаем

$$V(\mathbf{x}(\rho)) = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{S}_n} \rho(\mathbf{u}) r(\rho, \mathbf{u}) d\mathbf{u}.$$

Далее остается воспользоваться равенством (2.71).

Хорошо известно, (см., например [44]), что на сфере  $\mathbb{S}_n$  существует система из  $\xi_{k,n} = C_{n+k-1}^k - C_{n+k-3}^{k-2}$  ортонормированных гармоник  $k$ -го порядка  $R_{n,k,1}(\mathbf{u}), \dots, R_{n,k,\xi_{n,k}}(\mathbf{u})$ , которые называют *частичными гармониками*  $k$ -го порядка.

В частности, можно положить

$$R_{n,1,i}(\mathbf{u}) = u^i. \quad (2.75)$$

Эти гармоники ортогональны друг другу на сфере и для любой непрерывной на  $\mathbb{S}_n$  функции справедливо разложение в ряд Фурье по системе гармоник

$$f(\mathbf{u}) = R_0(f) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{k,i}(f) R_{n,k,i}(\mathbf{u}),$$

где  $a_{k,i}(f)$  коэффициенты Фурье.

В частности, если

$$\rho(\mathbf{u}) = R_0 + R_1(\mathbf{u}) + R_2(\mathbf{u}), \quad R_1(\mathbf{u}) = (\mathbf{a}, \mathbf{u}),$$

$$R_2(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u} \mathbf{A}),$$

где  $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i=1,j=1}^{n,n}$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i}$ ,  $\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0$ ,  $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \dots, a^n)$ , то равенство (2.66) принимает вид

$$\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = R_0 \mathbf{u} - R_2(\rho, \mathbf{u}) + \mathbf{a} + \nabla R_2(\mathbf{u}) \quad (2.76)$$

или, что тоже,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) &= R_0 u^i + a^i + \sum_{i=1}^n a_{i,j} u^j - u^i \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} u^i u^j = \\ &= (R_0 - R_2(\mathbf{u})) u^i + a^i + \sum_{i=1}^n a_{i,j} u^j. \end{aligned} \quad (2.77)$$

При этом

$$\lambda = R_0 - (\mathbf{u}, \mathbf{u} \mathbf{A}) = R_0 - R_2(\mathbf{u}).$$

Таким образом, равенство (2.39) принимает вид

$$r(\mathbf{x}(\rho), \mathbf{u}) = \begin{vmatrix} 0 & u^1 & \dots & u^n \\ u^1 & a_{1,1} + R_0 - R_2(\mathbf{u}) & \dots & a_{1,n} \\ u^2 & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u^n & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} + R_0 - R_2(\mathbf{u}) \end{vmatrix}. \quad (2.78)$$

Выберем на сфере  $S_n$  произвольную точку  $\mathbf{a}$ . Существует единственная (с точностью до знака) гармоника  $k$ -го порядка  $R_{n,k}^{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$  с нормой в  $L_2$  равной единице и такая, что при любом повороте сферы, оставляющем на месте точку  $\mathbf{a}$ , она переходит

сама в себя. Такая гармоника называется *зональной гармоникой*. При этом будем говорить, что зональная гармоника инвариантна относительно группы вращения  $SO_a(n)$ .

Из предложения 2.11 и теоремы 2.17 следует, что для того, чтобы строго выпуклая гладкая поверхность была инвариантна относительно группы вращения  $SO_a(n)$  необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60) и функция  $\rho(\mathbf{u})$  имела вид

$$\rho(\mathbf{u}) = b_0 + \sum_{k=1}^n b_k R_{n,k}^a(\mathbf{u}). \quad (2.79)$$

Если плотность  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  поверхности  $\mathbf{x}(\rho)$  в точке  $\mathbf{u}$  численно равна гауссовой кривизне поверхности  $\mathbf{x}(\rho)$  в точке  $\mathbf{u}$ , то центр тяжести такой поверхности называют точкой Штейнера или естественным центром поверхности.

**Теорема 2.20.** Пусть  $\rho \in L_2(S_n)$ , выражение (2.64) – её разложение в гармонический ряд и  $H_1(\rho, \mathbf{u}) = (\mathbf{a}(\rho), \mathbf{u})$ . Тогда  $\mathbf{a}(\rho)$  есть точка Штейнера выпуклой поверхности (2.60).

**Доказательство.** Исходя из определения точки Штейнера, ее координаты  $x_0^k(\rho)$  определяются равенствами

$$x_0^k(\rho) = \frac{\int x^k(\rho, \mathbf{v}) k(\rho, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}{\int_{x(\rho)} k(\rho, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}.$$

Отсюда, из (2.61) и теоремы 2.18 получаем

$$\int_{x(\rho)} x^k(\rho, \mathbf{v}) k(\rho, \mathbf{v}) d\mathbf{v} = \int_{S_n} x^k(\rho, \mathbf{u}) k(\rho, \mathbf{u}) \frac{1}{k(\rho, \mathbf{u})} d\mathbf{u} =$$

$$= \int_{S_n} x^k(\rho, \mathbf{u}) d\mathbf{u} = \int_{S_n} \left( (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u})) u^k + \rho_{u^k}(\mathbf{u}) \right) d\mathbf{u}. \quad (2.80)$$

Если (2.64) – разложение функции  $\rho(\mathbf{u})$  в ряд по гармоникам, то в силу тождества Эйлера

$$(\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu H_{\nu}(\rho, \mathbf{u}),$$

и, следовательно,

$$\rho(\mathbf{u}) - (\rho(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = H_0(\rho) + \sum_{\nu=2}^{\infty} (1 - \nu) H_{\nu}(\rho, \mathbf{u}).$$

Так как  $u^k$  есть частичная гармоника первого порядка, то из последнего соотношения и из равенства (2.63) следует

$$\int_{S_n} (\rho(\mathbf{u}) - (\nabla \rho(\mathbf{u}), \mathbf{u})) u^k d\mathbf{u} = 0.$$

Кроме того,  $\partial H_k / \partial u^i$  при  $k \geq 2$  есть гармоника не нулевого порядка или тождественный ноль. Таким образом,

$$\int_{S_n} \frac{\partial H_k(\mathbf{u})}{\partial u^i} d\mathbf{u} = 0 \quad (k \geq 2)$$

и

$$\int_{S_n} \frac{\partial H_1(\mathbf{u})}{\partial u^i} d\mathbf{u} = \int_{S_n} a^i(\rho) d\mathbf{u} = a^i(\rho) \sigma(S_n).$$

Следовательно,

$$\int_{S_n} x^k(\rho, \mathbf{u}) k(\rho, \mathbf{u}) d\mathbf{u} = a^i(\rho) \sigma(S_n). \quad (2.81)$$

Кроме того, из равенства (2.61) и теоремы 2.18 следует, что

$$\int_{x(\rho)} k(\rho, \nu) d\nu = \int_{S_n} du = \sigma(S_n).$$

Последнее равенство вместе с (2.81) завершает доказательство теоремы 2.20.

## 2.5. Параметризация выпуклых кривых и поверхностей по нормальному вектору единичной сферы

В данном разделе рассматривается связь между параметризациями выпуклых поверхностей с предыдущими результатами, то есть с представлением поверхностей в географических координатах и представлением выпуклых кривых.

В пространстве  $R_2$  соотношение (2.60) можно переписать следующим образом

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{u}) = \left( \rho(\mathbf{u}) - \left( \rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^2 \right) \right) u^1 + \rho_{u^1}(\mathbf{u}), \\ x_2(\mathbf{u}) = \left( \rho(\mathbf{u}) - \left( \rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^2 \right) \right) u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (2.82)$$

Пусть опорная функция кривой имеет вид  $\rho(\mathbf{u}) = \rho(u^1, u^2)$ , где  $u^1 = -\sin \varphi$ ,  $u^2 = \cos \varphi$ , тогда

$$\rho_\varphi(\mathbf{u}) = -\rho_{u^1}(\mathbf{u}) \cos \varphi - \rho_{u^2}(\mathbf{u}) \sin \varphi = -\rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^1.$$

Из полученного выражения найдем  $\rho_{u^2}$ :

$$\rho_{u^2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{u^1} \left( \rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \cos \varphi \right). \quad (2.83)$$

Подставим выражение (2.83) в правую часть каждого уравнения системы (2.82), получим

$$\begin{aligned} x_1(\rho, \varphi) &= \rho(\mathbf{u})u^1 + \rho_{u^1}(\mathbf{u})(1 - (u^1)^2) - \rho_{u^2}(\mathbf{u})u^1 u^2 = \\ &= -\rho(\mathbf{u})\sin \varphi + \rho_{u^1}(\mathbf{u})\cos^2 \varphi - (\rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u})\cos \varphi)\cos \varphi = \\ &= -\rho(-\sin \varphi, \cos \varphi)\sin \varphi - \rho_\varphi(-\sin \varphi, \cos \varphi)\cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2(\rho, \varphi) &= \rho(\mathbf{u})u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u})(1 - (u^2)^2) - \rho_{u^1}(\mathbf{u})u^1 u^2 = \\ &= \rho(\mathbf{u})\cos \varphi - (\rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u})\cos \varphi)\sin \varphi + \rho_{u^1}(\mathbf{u})\sin \varphi \cos \varphi = \\ &= \rho(-\sin \varphi, \cos \varphi)\cos \varphi - \rho_\varphi(-\sin \varphi, \cos \varphi)\sin \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, при  $n = 2$  соотношение (2.60) принимает вид

$$\begin{cases} x(\theta, \varphi) \\ y(\theta, \varphi) \end{cases} = \begin{cases} -\theta(\varphi)\sin \varphi - \theta'(\varphi)\cos \varphi, \\ \theta(\varphi)\cos \varphi - \theta'(\varphi)\sin \varphi, \end{cases} \quad (2.84)$$

где

$$\theta(\varphi) = \rho(-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Таким образом, доказана эквивалентность двух представлений выпуклой кривой в пространстве  $\mathbb{R}_2$ .

В пространстве  $\mathbb{R}_3$  соотношение (2.60) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_1(\mathbf{u}) = \left( \rho(\mathbf{u}) - \left( \rho_{u^1}(\mathbf{u})u^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u})u^2 + \rho_{u^3}(\mathbf{u})u^3 \right) \right) u^1 + \rho_{u^1}(\mathbf{u}), \\ x_2(\mathbf{u}) = \left( \rho(\mathbf{u}) - \left( \rho_{u^1}(\mathbf{u})u^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u})u^2 + \rho_{u^3}(\mathbf{u})u^3 \right) \right) u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}), \\ x_3(\mathbf{u}) = \left( \rho(\mathbf{u}) - \left( \rho_{u^1}(\mathbf{u})u^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u})u^2 + \rho_{u^3}(\mathbf{u})u^3 \right) \right) u^3 + \rho_{u^3}(\mathbf{u}), \end{cases} \quad (2.85)$$

где  $\rho(\mathbf{u})$  – опорная функция поверхности, вектор  $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3) \in \mathbb{S}_3$  такой, что

$$u^1 = \cos \varphi \sin \psi, \quad u^2 = \sin \varphi \sin \psi, \quad u^3 = \cos \psi. \quad (2.86)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \rho_\varphi(\mathbf{u}) &= -\rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^1 = \\ &= -\rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) \sin \psi \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho_\psi(\mathbf{u}) &= \rho_{u^1}(\mathbf{u}) u_\psi^1 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u_\psi^2 - \rho_{u^3}(\mathbf{u}) u_\psi^3 = \\ &= \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \cos \psi \cos \varphi + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) \cos \psi \sin \varphi - \rho_{u^3}(\mathbf{u}) \sin \psi. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\rho_{u^2}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sin \psi \cos \varphi} \left( \rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi \right), \quad (2.87)$$

$$\rho_{u^3}(\mathbf{u}) = -\frac{1}{\sin \psi} \left( \rho_\psi(\mathbf{u}) - \rho_\varphi(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right). \quad (2.88)$$

Подставим полученные соотношения в правую часть первого выражения системы (2.85) и используем равенства (2.86).

Получим

$$\begin{aligned} x_1(\mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u}) u^1 + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \left( 1 - (u^1)^2 \right) - \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^1 u^2 - \rho_{u^3}(\mathbf{u}) u^1 u^3 = \\ &= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \cos \varphi + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \left( 1 - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi \right) - \\ &\quad - \frac{\sin^2 \psi \sin \varphi}{\sin \psi} \left( \rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi \right) + \\ &\quad + \frac{\sin \psi \cos \psi \cos \varphi}{\sin \psi} \left( \rho_\psi(\mathbf{u}) - \rho_\varphi(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \cos \varphi + \rho_{\psi}(\mathbf{u}) \cos \psi \cos \varphi - \\
&\quad - \rho_{\varphi}(\mathbf{u}) \left( \sin \psi \sin \varphi + \frac{\cos^2 \psi \sin \varphi}{\sin \psi} \right) + \\
&\quad + \rho_{u^1} (1 - \sin^2 \psi \cos^2 \varphi - \sin^2 \psi \sin^2 \varphi - \cos^2 \psi) = \\
&= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \cos \varphi + \rho_{\psi}(\mathbf{u}) \cos \psi \cos \varphi - \rho_{\varphi}(\mathbf{u}) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}.
\end{aligned}$$

Теперь подставим соотношения (2.87) и (2.88) в правую часть второго выражения системы (2.85) и проведем аналогичные преобразования. Получим

$$\begin{aligned}
x_2(\mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u}) u^2 + \rho_{u^2}(\mathbf{u}) (1 - (u^2)^2) - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^1 u^2 - \rho_{u^3}(\mathbf{u}) u^2 u^3 = \\
&= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin^2 \psi \sin \varphi \cos \varphi + \\
&\quad + \frac{1 - \sin^2 \psi \sin^2 \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} (\rho_{\varphi}(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi) + \\
&\quad + \frac{\sin \psi \cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi} \left( \rho_{\psi}(\mathbf{u}) - \rho_{\varphi}(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right) = \\
&= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi + \rho_{\psi}(\mathbf{u}) \cos \psi \sin \varphi - \\
&\quad - \rho_{\varphi}(\mathbf{u}) \left( \frac{\cos^2 \psi \sin^2 \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} - \frac{1 + \sin^2 \psi \sin^2 \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} \right) + \\
&\quad + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \operatorname{tg} \varphi (1 - \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + \sin^2 \psi \cos^2 \varphi - \cos^2 \psi) = \\
&= \rho(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi + \rho_{\psi}(\mathbf{u}) \cos \psi \sin \varphi + \rho_{\varphi}(\mathbf{u}) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}.
\end{aligned}$$

И, наконец, подставим соотношения (2.87) и (2.87) в правую часть третьего выражения системы (2.85). После аналогичных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 x_3(\mathbf{u}) &= \rho(\mathbf{u}) u^3 + \rho_{u^3}(\mathbf{u}) (1 - (u^3)^2) - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) u^1 u^3 - \rho_{u^2}(\mathbf{u}) u^2 u^3 = \\
 &= \rho(\mathbf{u}) \cos \psi - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \cos \psi \cos \varphi - \\
 &\quad - \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\cos \varphi} (\rho_\varphi(\mathbf{u}) + \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \sin \psi \sin \varphi) - \\
 &\quad - \frac{1 - \cos^2 \psi}{\sin \psi} \left( \rho_\psi(\mathbf{u}) - \rho_\varphi(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin \psi \cos \varphi} - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \frac{\cos \psi}{\cos \varphi} \right) = \\
 &= \rho(\mathbf{u}) \cos \psi - \rho_\psi(\mathbf{u}) \sin \psi - \\
 &\quad - \rho_\varphi(\mathbf{u}) \left( \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\cos \psi \sin \varphi}{\sin^2 \psi \cos \varphi} (1 - \cos^2 \psi) \right) - \\
 &\quad - \rho_{u^1}(\mathbf{u}) \left( \sin \psi \cos \psi \cos \varphi + \frac{\sin \psi \cos \psi \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} - \frac{\sin \psi \cos \psi}{\cos \varphi} \right) = \\
 &= \rho(\mathbf{u}) \cos \psi - \rho_\psi(\mathbf{u}) \sin \psi.
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что для  $n=3$  равенство (2.60) принимает вид

$$\begin{cases} x(\varphi, \psi) \\ y(\varphi, \psi) \\ z(\varphi, \psi) \end{cases} = \begin{cases} \theta(\varphi, \psi) \sin \psi \cos \varphi + \theta_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \cos \varphi - \theta_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}, \\ \theta(\varphi, \psi) \sin \psi \sin \varphi + \theta_\psi(\varphi, \psi) \cos \psi \sin \varphi + \theta_\varphi(\varphi, \psi) \frac{\cos \varphi}{\sin \psi}, \\ \theta(\varphi, \psi) \cos \psi - \theta_\psi(\varphi, \psi) \sin \psi, \end{cases}$$

где

$$\theta(\varphi, \psi) = \rho(\mathbf{u}) = \rho(\sin \psi \cos \varphi, \sin \psi \sin \varphi, \cos \psi).$$

Полученные результаты доказывают эквивалентность двух представлений выпуклой поверхности в пространстве  $\mathbb{R}_3$ .

## 2.6. Некоторые свойства выпуклых поверхностей

В дальнейшем при изучении свойств поверхности, будем иметь в виду, что изучаем поверхности вида (2.60). То есть будем рассматривать строго выпуклые поверхности, иногда с некоторыми поправками про гладкость и нестрогую выпуклость.

Для случая  $n$  переменных ограничения на опорную функцию  $\rho(\mathbf{u})$  можно ослабить так, как это было сделано в параграфе 1.1, где рассматривался случай для  $n = 2$ . Например, если в некоторой области  $\mathfrak{R} \in \mathbb{R}_n$  выполняется равенство

$$r(\rho, \mathbf{u}) = 0,$$

то можно показать, что в этом случае найдется точка  $\mathbf{c}_0$  такая, что

$$\rho(\mathbf{u}) = (\mathbf{c}_0, \mathbf{u}). \quad (2.89)$$

При этом точка  $\mathbf{c}_0$  лежит на поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  и для  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}$  опорная плоскость задается уравнением

$$(\mathbf{x} - \mathbf{c}_0, \mathbf{u}) = 0, \quad (2.90)$$

то есть точка  $\mathbf{c}_0$  является конической особой точкой поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$ . Верно и обратное утверждение: если  $\mathbf{c}_0$  коническая особая точка поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$ , то ее опорная плоскость в точке  $\mathbf{u}$  имеет вид (2.90), а опорная функция  $\rho(\mathbf{u}) = |(\mathbf{c}_0, \mathbf{u})|$ .

Аналогично можно показать соответствие между особыми точками поверхности типа ребер и равенством нулю радиуса кривизны  $r(\rho, \mathbf{u})$ .

Точки разрыва производной функции  $\rho(\mathbf{u})$  характеризуют «прилипание» выпуклой поверхности к опорной плоскости. Для тех  $\mathbf{u}$ , при которых  $\rho(\mathbf{u})$  не является дифференцируемой, но таковой, что односторонние производные  $\rho'_a(\mathbf{u} \pm 0 \cdot \mathbf{a})$  в любом направлении  $\mathbf{a}$  существует часть поверхности, которая совпадает со своей опорной плоскостью, нужно воспринимать как часть опорной плоскости, ограниченную краем пересечения поверхности и опорной плоскости. Вид края тесно связан с функцией

$$\ell_{\rho, \mathbf{u}}(\mathbf{a}) = \rho'_a(\mathbf{u} + 0 \cdot \mathbf{a}) - \rho'_a(\mathbf{u} - 0 \cdot \mathbf{a}).$$

Край области «прилипания» может содержать в себе, в частности, конические или ребристые особые точки. В этом случае в соответствующих областях  $\mathbf{u}$  поверхность представима в виде (2.60), где  $\rho(\mathbf{u})$  имеет вид (2.89).

Как обычно,  $\varepsilon$  – коридором  $K_\varepsilon(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  поверхности  $\mathbf{y}$  назовем объединение всех шаров  $B_n^\varepsilon$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами, лежащими на  $\mathbf{y}$ .

Через  $\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  обозначим наименьшее значение  $\varepsilon$ , при котором  $\mathbf{y} \in K_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , то есть

$$\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min \{ \varepsilon : \mathbf{y}(\mathbf{u}) \in K_\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \}.$$

При этом будем говорить, что поверхность  $\mathbf{y}(\mathbf{u})$  находится от поверхности  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$  на расстоянии  $\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Отметим, что таким образом введенное расстояние не является коммутативным.

**Предложение 2.21.** Если поверхности  $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{y}(\mathbf{u})$  гладкие строго выпуклые и их опорные функции  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ ,  $\rho(\mathbf{y}, \mathbf{u})$  такие, что

$$\|\rho(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{y})\|_{C(\mathbb{R}_n)} = \max_{\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n} |\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{y}, \mathbf{u})| = \varepsilon,$$

то, при достаточно малых  $\varepsilon$ , справедливо соотношение

$$\mathfrak{R}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \varepsilon.$$

*Доказательство.* Ясно, что если

$$\|\rho(\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{y})\|_{C(\mathbb{R}_n)} = \varepsilon,$$

то для всех  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$  выполняется

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \varepsilon \leq \rho(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \varepsilon.$$

В силу предложения 2.21, имеем, что поверхность  $\mathbf{y}$  лежит между эквидистантами  $\mathbf{x}_\varepsilon^-(\rho, \mathbf{u})$  и  $\mathbf{x}_\varepsilon^+(\rho, \mathbf{u})$ .

Как уже отмечалось ранее (параграф 1.1), в другом виде связь между аппроксимацией опорных функций в равномерной метрике и аппроксимацией соответствующих выпуклых множеств в метрике Хаусдорфа приведена, например, в [16] стр. 144.

Описание поверхности (2.60) и предложение 2.21 дают возможность аппроксимировать выпуклые поверхности. Рассмотрим задачу об аппроксимации (в равномерной метрике) функции  $\rho_\nu(\mathbf{u})$  (на сфере  $\mathbb{S}_n$  или в области, содержащей сферу) гладкими функциями, которые на каждой ячейке разбиения имеют, например, вид

$$\rho_\nu(\mathbf{u}) = a_{0,\nu} + (a_{1,\nu}, \mathbf{u}) + (a_{2,\nu}, \mathbf{u}, \mathbf{u})$$

и

$$\sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0.$$

Тогда соответствующая выпуклая поверхность будет аппроксимирована выпуклыми гладкими поверхностями, склеенными из кусков, которые на малых клетках разбиения поверхности сферы представимы в виде

$$\mathbf{x}(\rho_v, \mathbf{u}) = (\rho_v(\mathbf{u}) - (\nabla \rho_v(\mathbf{u}), \mathbf{u})) \mathbf{u} + \nabla \rho_v(\mathbf{u}).$$

### 2.6.1. Проекция выпуклой поверхности на плоскость

Рассмотрим одну важную задачу, связанную с геометрией выпуклых тел. Пусть задана фиксированная плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}$  с нормальным вектором  $\mathbf{u}$ ,  $|\mathbf{u}|=1$ . Найдем проекцию выпуклой поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  на эту плоскость.

**Теорема 2.22.** Пусть  $\mathbf{u}$  – произвольная точка сферы, тогда уравнение границы проекции выпуклой поверхности на плоскость с нормальным вектором  $\mathbf{u}$ , с точностью до параллельного сдвига вдоль вектора  $\mathbf{u}$ , имеет вид  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})|_{\mathbb{S}_{n,\mathbf{u}}}$ , где  $\mathbb{S}_{n,\mathbf{u}} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{S}_n, (\mathbf{w}, \mathbf{u}) = 0\}$ .

Ясно, что любая выпуклая поверхность есть внутренняя огибающая семейства своих опорных плоскостей. Таким образом, проекция выпуклой поверхности в  $\mathbb{R}_n$  есть выпуклая поверхность в пространстве  $\mathbb{R}_{n-1}$ , которая является огибающей своих опорных плоскостей, которые получаются посредством пересечения опорной плоскости, перпендикулярной к поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$ , с исходной плоскостью  $\pi_{\mathbf{u}}$ .

Выберем произвольный вектор  $\mathbf{v}$  ортогональный вектору  $\mathbf{u}$  и проведем к поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  опорную плоскость  $\pi_{\mathbf{v}}(\rho)$  с нормальным вектором  $\mathbf{v}$ . Проекция  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  на плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}$  является сдвигом проекции поверхности на плоскость  $\pi_{\mathbf{v}}(\rho)$  вдоль вектора  $\mathbf{u}$ . Поэтому, для того, чтобы найти проекцию поверхности  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  на плоскость  $\pi_{\mathbf{u}}(\rho)$ , достаточно найти проекцию этой поверхности на плоскость  $\pi_{\mathbf{v}}(\rho)$ .

Опорной функцией границы проекции на плоскость  $\pi_{\mathbf{v}}(\rho)$  является расстояние от проекции начала координат на эту плоскость до гиперплоскости пересечения опорных плоскостей с нормальными векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно. Гиперплоскость пересечения опорных плоскостей определяется уравнениями

$$\begin{cases} (\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}), \\ (\mathbf{x}(\rho, \mathbf{v}), \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}), \end{cases} \quad (2.91)$$

а проекция начала координат есть решение системы

$$\begin{cases} \mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}, \\ (\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (2.92)$$

Решая эту систему, получаем, что, что  $\lambda = \rho(\mathbf{u})$  и координаты точки  $\tilde{M}$  – проекции начала координат на плоскость  $\pi_{\mathbf{v}}(\rho)$ , имеют вид

$$\tilde{\mathbf{x}} = \rho(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \quad (2.93)$$

Расстояние от точки  $\tilde{M}$  до гиперплоскости пересечения опорных плоскостей с нормальными векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  соответственно, является решением экстремальной задачи:

$$d^2 = |\mathbf{x}^* - \tilde{\mathbf{x}}|^2 \rightarrow \min ,$$

где  $\mathbf{x}^*$  – решение системы (2.91).

Эта задача эквивалентна следующей экстремальной задаче на условный экстремум:

$$d^2 = |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2 \rightarrow \min ,$$

при условиях

$$(\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}), \quad (2.94)$$

$$(\mathbf{x}(\rho, \mathbf{v}), \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}). \quad (2.95)$$

Поскольку  $d^2$  является квадратичной формой и ограничения (2.94) – (2.95) линейные, то необходимые условия экстремума совпадают с достаточными условиями. Для решения данной экстремальной задачи составим функцию Лагранжа

$$L = \lambda_0 |\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}|^2 + \lambda_1 ((\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u})) + \lambda_2 ((\mathbf{x}(\rho, \mathbf{v}), \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v})).$$

Используя равенство (2.93), получаем

$$L = \lambda_0 |\mathbf{x} - \rho(\mathbf{u})\mathbf{u}|^2 + \lambda_1 ((\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u}), \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u})) + \lambda_2 ((\mathbf{x}(\rho, \mathbf{v}), \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v})).$$

Так как задача выпуклая, то, не ограничивая общности рассуждений, можно считать  $\lambda_0 = -1/2$ . В этом случае

$$\nabla L = -(\mathbf{x} - \rho(\mathbf{u})\mathbf{u}) + \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}$$

и тогда уравнение  $\nabla L = 0$  переписывается в виде

$$\mathbf{x} = \rho(\mathbf{u})\mathbf{u} + \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}. \quad (2.96)$$

Подставляя эти значения в (2.94) – (2.95), получаем

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \lambda_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{u}), \\ \rho(\mathbf{u})(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda_2(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}). \end{cases}$$

Решая систему, находим  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = \rho(\mathbf{v})$ . Таким образом, используя равенство (2.96), координаты точки  $\mathbf{x}^0$  определяются следующим образом

$$\mathbf{x}^0 = \rho(\mathbf{u})\mathbf{u} + \rho(\mathbf{v})\mathbf{v}.$$

Тогда

$$d^2 = |\mathbf{x}^0 - \tilde{\mathbf{x}}|^2 = |\rho(\mathbf{u})\mathbf{u} + \rho(\mathbf{v})\mathbf{v} - \rho(\mathbf{u})\mathbf{u}|^2 = |\rho(\mathbf{v})\mathbf{v}|^2 = \rho^2(\mathbf{v}),$$

то есть  $d = \rho(\mathbf{v})$ , что и завершает доказательство теоремы 2.22.

### 2.6.2. Поверхности равной ширины

В данном разделе приведено определение поверхности равной ширины в  $n$  – мерном пространстве и определены условия для того, чтобы заданная поверхность была поверхностью равной ширины.

Выпуклая поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  ( $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$ ) называется *поверхностью равной ширины  $d$* , если расстояние между любыми ее параллельными опорными плоскостями  $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  и  $\pi_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  равно  $d$ . Отметим, что поверхностью равной ширины может быть только выпуклая поверхность.

**Теорема 2.23.** *Для того чтобы любая гладкая строго выпуклая поверхность была поверхностью равной ширины  $d$ , необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60) и для любого  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$  выполнялось равенство*

$$\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u}) = d. \quad (2.97)$$

Утверждение теоремы следует из того, что в силу (2.39) плоскости  $\pi_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  и  $\pi_{-\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  задаются уравнениями  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u})$  и  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(-\mathbf{u})$  и того факта, что, в силу предложения 2.12, расстояние между этими плоскостями равно  $\rho(\mathbf{u}) + \rho(-\mathbf{u})$ .

Если функция  $\rho(\mathbf{u})$  непрерывна на сфере и

$$\rho(\mathbf{u}) = R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{k,i}(\rho) R_{n,k,i}(\mathbf{u})$$

её разложение в гармонический ряд, то учитывая тот факт, что при нечетном  $k$  все  $R_{n,k,i}(\mathbf{u})$  нечетные, а при четном  $k$  – четные, заключаем, что равенство (2.97) выполняется тогда и только тогда, когда  $a_{k,i} = 0$  для всех  $i$  и нечетных  $k$ .

Таким образом, для того, чтобы поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  была поверхностью равной ширины  $2R_0(\rho)$ , необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60), где функция  $\rho(\mathbf{u})$  имеет следующее разложение в гармонический ряд

$$\rho(\mathbf{u}) = R_0(\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\xi_{n,k}} a_{2k-1,i}(\rho) R_{n,2k-1,i}(\mathbf{u}).$$

Рассмотрим два примера поверхностей равной ширины. Пусть

$$\rho(\mathbf{u}) = a + \prod_{i=1}^n u^i.$$

Тогда при нечетных  $n$  поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  будет поверхностью равной ширины  $2a$  и при этом  $\rho_{u^i u^j} = 0$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Следовательно, (см. (2.58))

$$r(\rho, \mathbf{u}) = \lambda^{n-1}(\rho, \mathbf{u}) = \left( a + (n-1) \prod_{i=1}^{n-1} u^i \right)^{n-1}.$$

Минимальное значение  $a$ , при котором выполняется условие  $r(\rho, \mathbf{u})|_{\mathbb{S}_n} \geq 0$ , равно  $(n-1)/(\sqrt{n})^n$ . Пример такой поверхность при  $n=3$  представлен на рисунке 2.3.

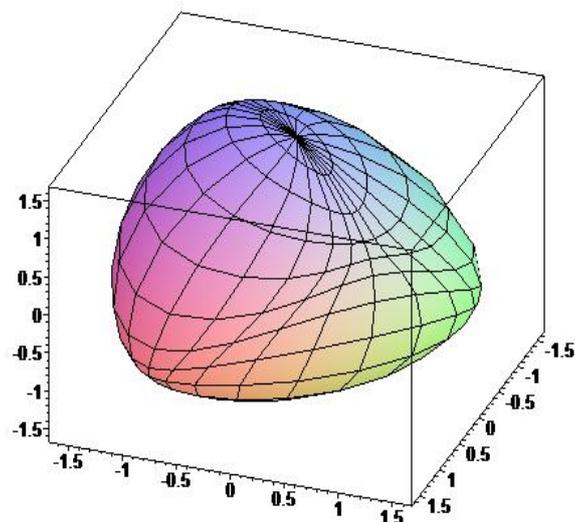


Рис. 2.3. Поверхность равной ширины с опорной функцией

$$\rho = \sqrt{3} + u^1 u^2 u^3.$$

Еще один пример поверхности равной ширины с опорной функцией  $\rho(\mathbf{u}) = a + (u^1)^2 \cdot (u^2)^2 \cdot u^3$  приведен на рисунке 2.4.

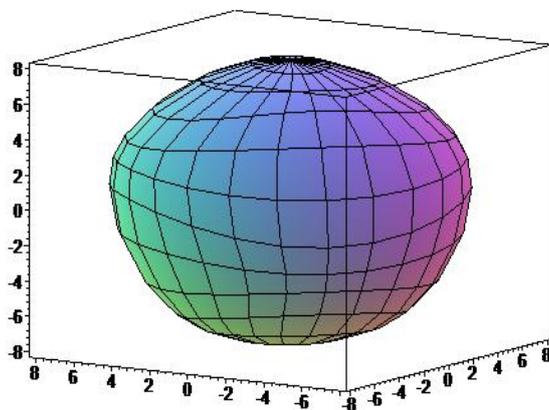


Рис. 2.4. Поверхность равной ширины с опорной функцией

$$\rho = 8 + (u^1)^2 (u^2)^2 u^3$$

### 2.6.3. Дельта – поверхности

Рассмотрим еще одну замечательную поверхность, а именно дельта – поверхность в  $n$  – мерном пространстве. Получены условия, при которых гладкая строго выпуклая поверхность будет дельта – поверхностью.

**Определение 2.24.** Если  $x(\rho, \mathbf{u})$  строго выпуклая поверхность, то для любых  $n+1$  векторов  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{S}_n$  таких, что

$$(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = -\frac{1}{n}, \quad (i, j = 1, \dots, n, i \neq j), \quad \mathbf{u}_{n+1} = -\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i, \quad (2.98)$$

существует единственный правильный симплекс, описанный возле поверхности  $x(\rho, \mathbf{u})$ , грани которого имеют нормальные вектора  $\mathbf{u}_i$  ( $i, j = 1, \dots, n+1$ ) соответственно.

Если линейные размеры симплекса не меняются для любого такого набора векторов  $\mathbf{u}_i$ , то такую выпуклую поверхность будем называть *дельта – поверхностью*.

**Теорема 2.25.** *Для того, чтобы гладкая строго выпуклая поверхность была дельта – поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60) и для любых  $n+1$  векторов  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{S}_n$  таких, что имеет место соотношение (2.98) и для любого вектора  $\mathbf{u} \in \mathbb{S}_n$  выполнялось равенство*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \rho(\mathbf{u}_i) = d. \quad (2.99)$$

**Доказательство.** Рассмотрим сначала вспомогательную задачу.

Пусть  $\mathbf{u}_i = \{u_i^j\}_{j=1}^n$  ( $i=1, \dots, n$ ) произвольный набор линейно независимых векторов из  $S_n$  и  $M^*$  – точка пересечения плоскостей  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = c_i$  ( $M^* \in R_n$ ). Тогда расстояние  $d(M^*, \pi_{n+1})$  от точки  $M^*$  до плоскости  $\pi_{n+1}$  определяется соотношением

$$d(M^*, \pi_{n+1}) = \left| \frac{A_c(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1})}{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]} \right|,$$

где

$$A_c(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1}) = \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1^2 & \dots & u_1^n & c_1 \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n & c_2 \\ & & \dots & & \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n & c_n \\ u_{n+1}^1 & u_{n+1}^2 & \dots & u_{n+1}^n & c_{n+1} \end{vmatrix}$$

и

$$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] = \begin{vmatrix} u_1^1 & u_1^2 & \dots & u_1^n \\ u_2^1 & u_2^2 & \dots & u_2^n \\ & & \dots & \\ u_n^1 & u_n^2 & \dots & u_n^n \end{vmatrix}.$$

Действительно, так как

$$d(M^*, \pi_{n+1}) = \left| (\mathbf{x}^*, \mathbf{u}_{n+1}) - c_{n+1} \right| = \left| \sum_{i=1}^n x_i^* u_{n+1}^i - c_{n+1} \right|,$$

то, согласно правилу Крамера,

$$x_i^* = \frac{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, c^*, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n]}{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]} \quad (c^* = (c_1, \dots, c_n)).$$

Тогда получим, что

$$d(M^*, \pi_{n+1}) = \left| \frac{\sum_{i=1}^n [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}, c^*, \mathbf{u}_{i+1}, \dots, \mathbf{u}_n] u_{n+1}^i - c_{n+1} [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]}{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]} \right| =$$

$$= \left| \frac{A_c(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1})}{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]} \right|.$$

Пусть  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{S}_n$  ( $i=1, \dots, n$ ) – набор векторов и вектор  $\mathbf{u}_{n+1} \in \mathbb{S}_n$  не равен ни одному из них. Тогда поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  вписана в симплекс с гранями

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = \rho(\mathbf{u}_i) \quad (i=1, \dots, n+1)$$

и, согласно предыдущему, высота, опущенная из точки пересечения плоскостей  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = \rho(\mathbf{u}_i)$  ( $i=1, \dots, n$ ) на плоскость  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{n+1}) = \rho(\mathbf{u}_{n+1})$ , будет равна

$$d_{n+1} = \left| \frac{A_\rho(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+1})}{[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]} \right|,$$

где  $\rho = \rho(\rho(\mathbf{u}_1), \rho(\mathbf{u}_2), \dots, \rho(\mathbf{u}_{n+1}))$ .

Если симплекс правильный, то есть  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = -n^{-1}$ , ( $i, j=1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ) и  $\mathbf{u}_{n+1} = -\sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i$ , то выражение

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n] = \frac{1}{n!}$$

определяет объем симплекса (при условии, что векторы  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$  образуют правую тройку).

Тогда

$$A_\rho(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n+1}) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n+1} \rho(\mathbf{u}_i),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Покажем, что для  $n = 3$  функция

$$\rho(\mathbf{u}) = c_0 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u}) + (\mathbf{u}, \mathbf{u}C), \quad (2.100)$$

где  $c_0$  – скаляр,  $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}_n$  и  $C$  самосопряженная матрица третьего порядка, удовлетворяет условию (2.99) тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^3 c_{i,i} = 0$ , то есть когда она является гармоникой.

Действительно, в силу предложения 2.12, равенство (2.99) достаточно проверить для любого конкретного набора элементов  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \in \mathbb{S}_3$  ( $\mathbf{u}_4 = -\sum_{i=1}^3 \mathbf{u}_i$ ) таких, что  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = -1/3$ , ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Для  $\rho(\mathbf{u}) = c_0 + (\mathbf{c}_1, \mathbf{u})$  условия теоремы 2.25 выполняются. Остается убедиться в справедливости теоремы для функции

$$\rho(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{u}C) = \sum_{i,j=1}^3 c_{i,j} u^i u^j.$$

Векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 & \left( -\frac{1}{3}; \sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{3} \right), & \mathbf{u}_2 & \left( -\frac{1}{3}; -\sqrt{\frac{2}{3}}; -\frac{\sqrt{2}}{3} \right), \\ \mathbf{u}_3 & \left( -\frac{1}{3}; 0; \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), & \mathbf{u}_4 & (1; 0; 0) \end{aligned}$$

удовлетворяют нашим условиям.

Тогда

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{u}_1) &= \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{2}{3}c_{2,2} + \frac{2}{9}c_{3,3} - \\ &- (c_{1,2} + c_{2,1})\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{\sqrt{2}}{9} - (c_{2,3} + c_{3,2})\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ \rho(\mathbf{u}_2) &= \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{2}{3}c_{2,2} + \frac{2}{9}c_{3,3} + \\ &+ (c_{1,2} + c_{2,1})\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} + (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{\sqrt{2}}{9} + (c_{2,3} + c_{3,2})\frac{2}{3\sqrt{3}}, \\ \rho(\mathbf{u}_3) &= \frac{1}{9}c_{1,1} + \frac{8}{9}c_{3,3} - (c_{1,3} + c_{3,1})\frac{2\sqrt{2}}{9}, \\ \rho(\mathbf{u}_4) &= c_{1,1}. \end{aligned}$$

Таким образом, суммируя полученные выражения, получаем

$$\rho(\mathbf{u}_1) + \rho(\mathbf{u}_2) + \rho(\mathbf{u}_3) + \rho(\mathbf{u}_4) = \frac{4}{3}(c_{1,1} + c_{2,2} + c_{3,3}).$$

Остается заметить, что  $\sum_{i=1}^3 c_{i,i}$  одна из основных инвариантов поворота.

Приведем два примера дельта – поверхностей. Пусть опорная функция  $\rho(\mathbf{u}) = a + u^1 u^2$ , тогда в силу (2.58)

$$r(\rho, \mathbf{u}) = \lambda^{n-1}(\rho, \mathbf{u}) = \left( a - u^1 u^2 \right)^{n-1}.$$

Минимальное значение  $a$ , при котором величина  $r(\rho, \mathbf{u})$  будет неотрицательной на сфере, равна  $a = 1/3$ . На рисунке 2.5 изображена дельта – поверхность с опорной функцией  $\rho(\mathbf{u}) = 1,8 + u^1 u^2$ .

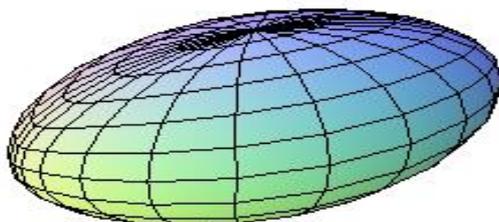


Рис. 2.5. Дельта – поверхность с опорной функцией  $\rho = 1,8 + u^1 u^2$

Пусть теперь  $\rho(\mathbf{u}) = a + (u^1)^2 - (u^2)^2$ , тогда поверхность  $\mathbf{x}(\rho, \mathbf{u})$  будет дельта – поверхностью радиус кривизны которой находится по формуле

$$r(\rho, \mathbf{u}) = (\lambda^2 - 4)(u^3)^2 = \left( \left( a - (u^1)^2 - (u^2)^2 \right)^2 - 4 \right) (u^3)^2.$$

Минимальное значение  $a$ , при котором  $r(\rho, \mathbf{u}) \geq 0$  равно 3. На рисунке 2.6 изображена такая поверхность с опорной функцией  $\rho(\mathbf{u}) = 3,4 + (u^1)^2 - (u^2)^2$ .

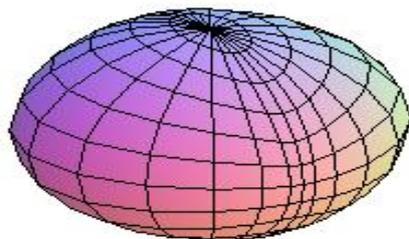


Рис. 2.6. Дельта – поверхность с опорной функцией  $\rho = 3,4 + (u^1)^2 - (u^2)^2$

#### 2.6.4. Некоторые свойства выпуклой поверхности, связанные со свойствами опорной функции этой поверхности

Сфера обладает тем свойством, что сумма расстояний от ее центра до любых двух опорных плоскостей с фиксированным углом между нормальными векторами, есть величина постоянная. Естественно возникает вопрос – существуют ли выпуклые поверхности, отличные от сферы, которые обладают этим свойством.

Непосредственно из следствия 2.10 вытекает следующее утверждение:

**Предложение 2.26.** *Для того, чтобы строго выпуклая поверхность обладала тем свойством, что сумма расстояний от начала координат до любых двух опорных плоскостей с фиксированным углом между нормальными векторами, есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60) и функция  $\rho(\mathbf{u})$  обладала следующим свойством: для произвольных векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_n$  таких, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k$  выполняется условие*

$$\rho(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{v}) = d. \quad (2.101)$$

В частном случае, для  $n = 2$  это предложение будет иметь следующий вид. Для того, чтобы выпуклая кривая была такой, что сумма расстояний от начала координат до любых двух опорных прямых с фиксированным углом между нормальными векторами, есть величина постоянная, необходимо и достаточно,

чтобы функция  $\rho(\varphi)$  обладала следующим свойством: для любого  $\varphi$

$$\rho(\varphi) + \rho(\varphi + \pi) = d.$$

Заметим, что для того, чтобы такая кривая существовала, необходимо и достаточно, чтобы угол  $\varphi$  был соизмерим с углом  $\pi$ .

Рассмотрим еще один частный случай когда  $k = 0$ , то есть  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ . Если хотя бы один из коэффициентов Фурье  $n$ -го порядка не равен 0, то условие (2.101) не выполняется. Действительно, для того, чтобы равенство (2.101) выполнялось необходимо и достаточно, чтобы гармоники первого порядка

$$H_1(\rho, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n c_{n,1,i}(\rho) u^i$$

удовлетворяли условию

$$H_1(\rho, \mathbf{u}) + H_1(\rho, \mathbf{v}) = d \quad ((\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0).$$

Но тогда, в частности, должны быть одинаковыми и величины

$$H_1(\rho, i^\mu) + H_1(\rho, i^\nu) \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n),$$

то есть для всех  $\mu, \nu$  должны выполняться равенства

$$c_{n,1,\nu} + c_{n,1,\mu} = c_{n,1,1} + c_{n,1,2}.$$

Это возможно тогда и только тогда, когда все  $c_{n,1,\mu} = 0$ .

Таким образом, если начало координат не совпадает с точкой Штейнера поверхности, то свойство (2.101) не выполняется ни для какой функции  $\rho(\mathbf{u})$ . Если же начало координат совпадает с точкой Штейнера поверхности, то при  $k = 0$  этому условию удовлетворяет, например, функция  $\rho(\mathbf{u}) = a + \rho_1(\mathbf{u})$ , где

$$\rho_1(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^n u^j u^i \quad (u^{n+1} = u^1). \quad (2.102)$$

Действительно, циклический полином (2.102) инвариантен относительно поворота и потому достаточно проверить, что условие

$$\rho(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{v}) = 0$$

выполняется для любой пары ортов, а этот факт очевиден.

Сфера обладает тем свойством, что расстояние от ее центра до гиперплоскости пересечения двух опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом, постоянно.

**Предложение 2.27.** *Для того, чтобы строго выпуклая поверхность обладала свойством, что расстояние от ее центра до гиперплоскости пересечения двух опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом, есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде (2.60) и функция  $\rho(\mathbf{u})$  имела следующее свойство: для любых векторов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}_n$  таких, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k$  ( $k < 1$ ) выполняется условие*

$$\rho^2(\mathbf{u}) + \rho^2(\mathbf{v}) - 2 \cdot k \cdot \rho(\mathbf{u}) \cdot \rho(\mathbf{v}) = (1 - k^2) \cdot d. \quad (2.103)$$

**Доказательство.** Ясно, что гиперплоскость пересечения опорных плоскостей определяется следующим соотношением

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \rho(\mathbf{u}), \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v}), \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k. \end{cases}$$

Тогда расстояние от начала координат до этой гиперплоскости является решением следующей экстремальной задачи:

$$|\mathbf{x}|^2 \rightarrow \min \quad (2.104)$$

при условии

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u}) = 0, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}) = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

В силу выпуклости функционала цели и линейности ограничений, функция Лагранжа этой экстремальной задачи может быть записана в виде

$$L = |\mathbf{x}|^2 - 2\lambda_1 ((\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u})) - 2\lambda_2 ((\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v})).$$

В этом случае необходимое и достаточное условия экстремума принимают вид

$$\begin{cases} \mathbf{x} - \lambda_1 \mathbf{u} - \lambda_2 \mathbf{v} = 0, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \rho(\mathbf{u}) = 0, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{v}) = 0. \end{cases}$$

Исключая  $\mathbf{x}$  и учитывая, что  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = k$ , получаем

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 k = \rho(\mathbf{u}), \\ \lambda_1 k + \lambda_2 = \rho(\mathbf{v}). \end{cases}$$

Отсюда следует, что если  $\mathbf{x}^*$  есть решение экстремальной задачи (2.104), (2.105), то

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1^* \mathbf{u} + \lambda_2^* \mathbf{v},$$

где

$$\lambda_1^* = \frac{\rho(\mathbf{u}) - \rho(\mathbf{v}) \cdot k}{(1 - k^2)^2}, \quad \lambda_2^* = \frac{\rho(\mathbf{u}) \cdot k - \rho(\mathbf{v})}{(1 - k^2)^2}.$$

При этом

$$|\mathbf{x}|^2 = \frac{\rho^2(\mathbf{u}) + \rho^2(\mathbf{v}) - 2 \cdot k \cdot \rho(\mathbf{u}) \cdot \rho(\mathbf{v})}{(1 - k^2)} = d,$$

что и заканчивает доказательство предложения 2.27.

В частности, если плоскости ортогональны, то есть  $k = 0$ , то условие (2.103) будет иметь вид

$$\rho^2(\mathbf{u}) + \rho^2(\mathbf{v}) = d, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0.$$

Рассмотрим еще одну подобную задачу. Сфера обладает тем свойством, что расстояние от ее центра до точки пересечения трех опорных плоскостей, нормальные векторы которых пересекаются под одним и тем же углом, постоянно. Возникает вопрос про описание выпуклых поверхностей, обладающих этим же свойством. Имеет место следующее утверждение.

**Предложение 2.28.** *Для того, чтобы строго выпуклая гладкая поверхность обладала тем свойством, что расстояние от ее центра до точки пересечения трех опорных плоскостей, нормальные векторы  $\mathbf{u}_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), которых таковы, что  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = k$ , ( $i \neq j$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ),  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{S}_n$ , есть величина постоянная, необходимо и достаточно, чтобы поверхность была представима в виде (2.60) и функция  $\rho(\mathbf{u})$  имела следующее свойство: для любых векторов  $\mathbf{u}_i \in \mathbb{S}_n$  таких, что  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = k$  ( $i \neq j$ ,  $i, j=1, \dots, n$ ), выполнялось равенство*

$$\frac{k \left( \sum_{i=1}^n \rho_{u^i} \right)^2 - (2k(n-1) + 1) \sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{((n-1)k^2 - (n-2)k - 1)^n} = d.$$

*Доказательство.* В силу предложения 2.27, если  $\mathbf{u}_i$  ( $\mathbf{u}_i \in S_n$ ) ( $i=1, \dots, n$ ) – произвольные линейно независимые векторы, то точка их пересечения  $\mathbf{x}^{**}$  есть решение системы

$$(\mathbf{x}, \mathbf{u}_i) = \rho(\mathbf{u}_i) \quad (i=1, \dots, n). \quad (2.106)$$

В силу линейной независимости векторов, найдутся числа  $d_1, d_2, \dots, d_n$  такие, что

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n d_i \mathbf{u}_i.$$

Подставим это выражение в (2.106) и учитывая, что  $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = k$ , ( $i \neq j$ ), получим

$$\left( \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i \right) = \rho(\mathbf{u}_i) \quad (i=1, \dots, n),$$

или

$$\mathbf{d} \mathbf{K} = \rho,$$

где

$$\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n), \quad \rho = (\rho(\mathbf{u}_1), \dots, \rho(\mathbf{u}_n)),$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & k & \dots & k \\ k & 1 & \dots & k \\ & & \dots & \\ k & k & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\mathbf{K}^{-1} = -\frac{1}{((n-1)k^2 - (n-2)k - 1)^n} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -(n-2)k-1 & k & \dots & k \\ k & -(n-2)k-1 & \dots & k \\ & & \dots & \\ k & k & \dots & -(n-2)k-1 \end{pmatrix},$$

то решение  $\mathbf{d}^*$  уравнения  $\mathbf{d} \mathbf{K} = \rho$  будет иметь вид

$$\mathbf{d}^* = \frac{1}{\left((n-1)k^2 - (n-2)k - 1\right)^n} \rho(\mathbf{u}) \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -(n-2)k-1 & k & \dots & k \\ k & -(n-2)k-1 & \dots & k \\ & & \dots & \\ k & k & \dots & -(n-2)k-1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^*\|^2 &= \left| \sum_{i=1}^n d_i^* u^i \right|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_i^* d_j^* (u^i, u^j) = \\ &= (\mathbf{d}^*, \mathbf{d}^* \mathbf{K}) = (\rho \mathbf{K}^{-1}, \rho \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K}) = (\rho, \rho \mathbf{K}^{-1}) = \\ &= \frac{k \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_{u^i} \rho_{u^j} - (2k(n-1) + 1) \cdot \sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{\left((n-1)k^2 - (n-2)k - 1\right)^n} = \\ &= \frac{k \cdot \left(\sum_{i=1}^n \rho_{u^i}\right)^2 - (2k(n-1) + 1) \cdot \sum_{j=1}^n \rho_{u^j}^2}{\left((n-1)k^2 - (n-2)k - 1\right)^n}, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство предложения 2.28.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А.Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – 386 с.
2. **Артоболевский И. И.** Теория механизмов и машин: [Учеб. для втузов. – 4-е изд., перераб. и доп. ] – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.
3. **Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.** Синтез плоских механизмов. – М.: Физматгиз, 1959. – 538 с.
4. **Болтянский В.Г., Яглом И.М.** Выпуклые фигуры и тела // Энциклопедия элементарной математики (ЭЭМ) – М.: Наука, 1966. – книга V – С. 181–269.
5. **Карл де Бор.** Практическое руководство по сплайнам. М., Радио и связь, 1985.
6. **Буземан Г.** Выпуклые поверхности. – М.: Наука – 1964. – 240 с.
7. **Гребенников А.И.** Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Издательство Московского университета, 1983.
8. **Dubuc S.** Interpolation through an Iterative Scheme. Journal of Math. An.and Appl., 1986, 185-204.
9. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн–функций. Москва, Наука, 1980, 350 с.
10. **Завьялов Ю.С., Леус В.А., Скороспелов В.А.** Сплайны в инженерной геометрии. Москва, Наука, 1985.
11. **Корнейчук Н.П.** Сплайны в теории приближения. М., Наука, 1984.

12. **Korneichuk N.P., Ligun A.A., Babenko V.F.** Extremal Properties of Polynomials and Splines. Nova Science Publishers, N.Y., 1996, 433 p.
13. **Кукуруза Д.В., Лісняк А.А., Коваленко А.А.** Дослідження кривих постійної ширини за допомогою диференціального рівняння // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2011. – Вип.87. – С. 225 – 233.
14. **Куценко Л.Н., Росоха С.В., Сулима В.В.** Геометрическое моделирование и некоторые приложения обкатки треугольником Релло // Проблемы машиностроения. – 2001. – т.4, № 3-4. – С. 85 – 94.
15. **Kubota T.** Uber die Schwerpunkte der konvexen geschlossenen Kurven und Fl"achen, T<sup>h</sup>ohoku Math.J.14 (1918), 20 – 27.
16. **Лейхтвейс К.** Выпуклые множества. – М. 1985. – 335 с.
17. **Лигун А.А.** Приближение дифференцируемых периодических функций локальными сплайнами минимального дефекта. Украинский математический журнал, 1981, т.33, N 5, С. 691 – 693.
18. **Лигун А.А., Наконечная Т.В.** О некоторых свойствах выпуклых кривых // «Математическое моделирование», ДДТУ. – 2000, № 2(5). – С. 30 – 34.
19. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Асимптотические методы восстановления кривых. – К.: Изд-во Института математики НАН Украины, 1997. – 358 с.
20. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами.// Журнал вычислительной математики и математической физики. –1984. – 24, №19, с. 1283-1293.

21. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** О геометрии выпуклых кривых // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. – 1998. – 4, вып. 3, – С. 88 – 92.
22. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Метод проектирования кулачковых механизмов с помощью кусочно-окружностных кривых // Кибернетика и системный анализ, – 1999. – вып.6 – С. 1-8.
23. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Проектирование кулачковых механизмов как гладких кусочно-окружностных кривых // Управляющие системы и машины, информационные технологии. – 1999. – № 5, – С.43-53.
24. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Описание выпуклых кривых // Украинский математический журнал. – 2000. – 52, № 7, – С. 908 – 922.
25. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** О характеристике выпуклых кривых. // Доповіді АН України. – 2000. – № 5.
26. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Исследования линейных операторов порожденных методами пополнения данных. // Математичне моделювання, Днепродзержинск, ДГТУ, 2000.
27. **Лигун А.А., Шумейко А.А.** Линейный метод восстановления функций основанный на бинарном пополнении данных. // Украинский математический журнал. – 2001. – 53, № 11, – С.1501-1512.
28. **Ligun A.A., Shumeiko A.A.** Linear method of recovery of function of two variables on a binary lamination. // East Journal of Approximation. – 2001. – v.7, № 3. – P. 1-18.

29. Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А. Решение задачи синтеза для пространственных кулачковых механизмов с плоским толкателем // Системные технологии. – 1998. – вып. 3 – С. 51–54.
30. Лигун А.А., Тимченко С.В., Шумейко А.А. О геометрии выпуклых поверхностей // Вестник ДГУ, Математика, – 1998. – вып. 3 – С. 85–92.
31. Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В. Описание поверхностей равной ширины // «Математичне моделювання», ДДТУ. – 1999. – № 2(3) – С. 67–70.
32. Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В. Общий вид револьвентных кривых механизмов рамочного типа // Вестник ДГУ, Математика, – 1999. – вып. 4 – С. 52 – 60.
33. Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В. Об одном способе описание выпуклых поверхностей // Вестник ДГУ, Математика, – 1999. – вып. 4 – С. 48 – 52.
34. Лигун А.А., Шумейко А.А., Тимченко С.В. Об одном представлении выпуклых поверхностей в  $n$ -мерных пространствах // Доклады Академии наук России. – 2001. – 377, № 1. – С. 1 – 3.
35. Ligun A.A., Timchenko S.V. and Shumeiko A.A. Geometry of convex surfaces. // East journal on approximation. – 2002. – 8, № 1. – P. 15 – 57.
36. Лісняк А.А. Трикутник Релло як фігура постійної ширини та його можливі використання // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Х.: ХДУХТ, 2006. – Вип.14. – С. 180 – 187.

37. **Люстерник Л.А.** Выпуклые тела. – М. – Л.: Гостехиздат, 1941. – 198 с.
38. **Люстерник Л.А.** Выпуклые фигуры и многогранники. – М.– Л.: Гостехиздат, 1956. – 134 с.
39. **Марушкевич А.И.** Замечательные кривые. – М.: Наука, 1978. – 48 с.
40. **Найдиш А.В., Суліма В.В.** Аналітичний опис трикутника Релло та його модифікацій// Прикладна геометрія та інженерна графіка, Мелітополь: ТДАТА. – 1999. вип. 4 – 18 с.
41. **Понтрягин Л.С.** и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Наука, 1976.
42. **Савелов А.А.** Плоские кривые. Систематика, свойства, применение. М. Физматгиз, 1960.
43. **Сендов Б.Х.** Хаусдорфовые приближения.- София, 1979.
44. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 320 с.
45. **Суліма В.В.** Аналітичний опис трикутника Релло та його модифікацій// Прикладна геометрія та інженерна графіка, Мелітополь: ТДАТА, – 1999. вип. 4 – 16 с.
46. **Шварц Л.** Анализ.- М., Мир, 1972, 823 с.
47. **Шумейко А.А.** Тригонометрические и квазитригонометрические сплайны минимального дефекта.// Придніпровський науковий вісник, Інформатика. – 1998. № 101 (168) – С. 59-65.
48. **Шумейко А.А.** О приближении гладких выпуклых кривых.// Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. – 1998. Том 4, вып. 1. – С. 152-155.

49. **Яглом И.М., Болтянский В.Г.** Выпуклые фигуры. – М.: Гостехиздат, 1951. – 343 с.
50. **Hoschek J.** Circular splines. *Computer-aided Design*, Vol. 24, 1992.
51. **Hurwitz A.** О некоторых геометрических приложениях рядов Фурье. // *Ann. De l'ecole normale superieure*. – 1902. – **19** (3). – P. 357 – 408.
52. **Schumaker Larry L.** *Spline functions: Basic theory*. – N.Y., John Wiley & Sons, Inc. – 1981, 556 p.



Лигун Анатолий Александрович,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
Лауреат государственной премии Украины,  
заслуженный деятель науки и техники.



Шумейко Александр Алексеевич,  
доктор технических наук, профессор.



Тимченко Светлана Валентиновна,  
ст.преподаватель.