Міністерство освіти України
Дніпродзержинський державний технічний університет

Навчальний посібник

Методи розв'язання деяких типових задач математичної фізики

для студентів спеціальностей
“Прикладна математика” та “Фізики твердого тіла”

Затверджено редакційно-видавничою
секцією науково-методичної ради ДДТУ
___________199___р., протокол № ___

Дніпродзержинськ ДДТУ 1999 р.

Навчальний посібник Методи розв'язання деяких типових задач математичної фізики для студентів спеціальностей 7.080202 “Прикладна математика” та “Фізики твердого тіла” укл.: Л.О.Олійник - Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1999р, 43с.

Укладач: к.ф.-м.н., доцент Олійник Л.О.

Відповідальний за випуск:
зав.кафедрою ПМКМ Самохвалов С.Є.

Рецензент:
доктор фіз.мат. наук. Стеблянко П.О.
(кафедра вищої математики ДДТУ)

Затверджено на засіданні кафедри ПМКМ
(протокол № 7 від 25 січня 1999 р)

У посібнику наведено матеріал курсу диференціальних рівнянь з частинними похідними. Зведення РЧП до канонічного вигляду, постановка основних граничних задач та методи їх розв'язання (Метод Фурьє, метод Рімана, метод функції Гріна, застосування теорії потенціалів). Наведено також 144 завдання, які можна використовувати як домашні індивідуальні контрольні роботи.

Тема 1. Диференціальні рівняння з частинними похідними. Класифікація. Зведення до канонічного вигляду. Загальний розв'язок.

Диференціальні рівняння математичної фізики – це рівняння з частинними похідними (РЧП), що зустрічаються при розв'язанні фізичних задач механіки, електрики, теплопровідності, магнетизму та ін. Будь-яку задачу математичної фізики можна розглядати як задачу розв'язання деякого диференціального рівняння з частинними похідними при певних додаткових умовах.

Диференціальним рівнянням з частинними похідними порядку *n* від невідомої функції U(*t*,*x*) (де *x* може бути елементом векторного простору R^n) називається рівняння, що містить невідому функцію та її частинні похідні не вище *n*-го порядку.

Приклад: $U_t = U \cdot U_{xxx} + U_x + \sin t$ - РЧП 3-го порядку.

Ми будемо для ілюстрації основних методів математичної фізики розглядати диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку і однією невідомою функцією.

Рівняння з частинними похідними можна класифікувати за різними ознаками, наприклад: за порядком, за кількістю змінних. Серед РЧП виділяють важливий клас лінійних рівнянь.

Рівняння з частинними похідними називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції та її похідних.

Рівняння з частинними похідними називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно всіх похідних вищіх порядків від невідомої функції.

Наприклад: $AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G$ - загальний вигляд лінійного рівняння з частинними похідними другого порядку (A,B,C,D,E,F,G - деякі функції, або константи). Рівняння $U_{xx} + 3U_x^2 + 5U = \sin(t+x)$- квазілінійне, а $U_t = U \cdot U_{xxx} + U_x + \sin t$-нелінійне.

Загальний вигляд квазілінійного рівняння:

$$AU_{xx} + 2BU_{xy} + CU_{yy} = G(x, y, U, U_x, U_y). \tag{1}$$

Квазілінійні, а ,отже, і лінійні, рівняння другого порядку поділяються на три типи. Рівняння (1) є рівнянням гіперболічного типу, якщо $\Delta = B^2 - AC > 0$, пораболічного типу, якщо $\Delta = B^2 - AC = 0$, рівнянням еліптичного типу, якщо $\Delta = B^2 - AC < 0$. Щоб звести (1) до канонічного вигляду, треба скласти звичайне диференціальне рівняння характеристик

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B\frac{dy}{dx} + C = 0, \tag{2}$$

знайти загальні інтеграли останнього рівняння, і ввести нові незалежні зміни в рівнянні (1).

Таким чином маємо такі канонічні форми для РЧП:

- $\Delta = B^2 - AC > 0$ (гіперболічний тип) $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = \Phi$ або $U_{\xi\eta} = \Phi$;
- $\Delta = B^2 - AC < 0$ (еліптичний тип) $U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = \Phi$;
- $\Delta = B^2 - AC = 0$ (параболічний тип) $U_{\eta\eta} = \Phi(\xi, \eta, U, U_\xi, U_\eta)$.

Перейдемо до розгляду прикладів.

Приклад 1. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$tg^2 x U_{xx} - 2ytgxU_{xy} + y^2 U_{yy} + tg^3 x U_x = 0.$$

Розв'язок. У даному разі $\Delta = 0$, отже, рівняння є рівнянням параболічного типу. Рівняння характеристик $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{y}{tgx}\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{tg^2 x} = 0$, його загальний інтеграл $y\sin x = C$. Маємо одну сім'ю дійсних характеристик. Покладемо $\xi = y\sin x$. За $\eta(x,y)$ візьмемо довільну двічі неперервно-диференційовану функцію, але таку, щоб якобіан перетворення $D(\xi,\eta)/D(x,y) \neq 0$ в області, де зводимо рівняння до канонічного вигляду. Візьмемо $\eta = y$. Частинні похідні в нових змінних мають вигляд:

$$U_x = y\cos x U_\xi, \quad U_y = \sin x U_\xi + U_\eta,$$

$$U_{xx} = y^2\cos^2 x U_{\xi\xi} - y\sin x U_\xi, \; U_{yy} = \sin^2 x U_{\xi\xi} + 2\sin x U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$U_{xy} = U_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + U_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + U_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + U_\xi\xi_{xy} + U_\eta\eta_{xy} = y\cos x\sin x U_{\xi\xi} + y\cos x U_{\xi\eta} + \cos x U_\xi.$$

Підставляємо їх у рівняння і дістаємо остаточну відповідь $U_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2}U_\xi = 0$.

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$y^2 U_{xx} + 2yxU_{xy} + 2x^2 U_{yy} + yU_y = 0.$$

Розв'язок. Тут $\Delta = -x^2y^2 < 0$. Рівняння є рівнянням еліптичного типу. Маємо таке рівняння характеристик: $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 2x^2 = 0$, розв'язуємо його: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}(1 \pm i)$, звідси $y^2 = (1 \pm i)x^2 + C$.

Введемо заміну змінних $\xi = x^2 - y^2$, $\eta = x^2$. Підставляємо в рівняння частинні похідні:

$$U_x = 2x(U_\eta - U_\xi), \quad U_y = 2yU_\xi,$$

$$U_{xx} = 4x^2(U_{\eta\eta} - 2U_{\xi\eta} + U_{\xi\xi}) + 2U_\eta - 2U_\xi, \; U_{xy} = -4xyU_{\xi\xi} + 4xyU_{\xi\eta}.$$

Після спрощень дістаємо $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{1}{\xi - \eta}U_\xi + \frac{1}{2\eta}U_\eta = 0$.

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду рівняння Трікомі

$$yU_{xx} + U_{yy} = 0.$$

Розв'язок. У даному разі $\Delta = -y$. При y=0 рівняння є рівнянням параболічного типу. Задана початкова форма вже є канонічною. Маємо таке рівняння характеристик: $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$. При y>0 рівняння є еліптичним. З рівняння характеристик дістаємо $y^{1/2}dy \pm idx = 0$, звідки $\frac{2}{3}y^{3/2} \pm ix = C$. Заміною $\xi = x$, $\eta = \frac{2}{3}y^{3/2}$, дістаємо такий канонічний вигляд рівняння Трікомі в області еліптичності: $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}U_{\eta} = 0$. При y<0 рівняння є гіперболічним. Рівняння характеристик розпадається на два рівняння $(-y)^{1/2}dy \pm dx = 0$, звідки $x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_1$, $x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_2$ Заміною змінних $\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$ надамо рівнянню такого канонічного вигляду в області гіперболічності $U_{\xi\eta} - \frac{1}{6\xi - 6\eta}(U_{\xi} - U_{\eta}) = 0$.

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$U_{xx} + 2U_{xy} + 2U_{yy} + 4U_{yz} + 5U_{zz} + U_x + U_y = 0.$$

Розв'язок. Маємо рівняння із сталими коефіцієнтами для функції від трьох незалежних змінних. Початковому рівнянню поставимо у відповідність квадратичну форму

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2^2 + 4\alpha_2\alpha_3 + 5\alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\alpha_2 + 2\alpha_3)^2 + \alpha_3^2.$$

Щоб знайти перетворення, яке звело б початкове рівняння до канонічного вигляду, треба спочатку знайти перетворення, яке зводить до канонічного вигляду відповідну квадратичну форму. Введемо такі позначення: $\lambda_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $\lambda_3 = \alpha_3$. Звідси $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3$, $\alpha_2 = \lambda_2 - 2\lambda_3$, $\alpha_3 = \lambda_3$. Отже, матриця переходу від нових змінних $\lambda_i, (i = 1,2,3)$ до старих $\alpha_i, (i = 1,2,3)$ в канонічній формі має вигляд $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Тепер матрицю шуканого перетворення дістаємо з матриці A транспонуванням $B = A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

У початковому рівнянні переходимо до нових незалежних змінних за формулами $\xi_1 = x$, $\xi_2 = -x + y$, $\xi_3 = 2x - 2y + z$. Частинні похідні у нових змінних мають вигляд

$U_x = U_{\xi_1} - U_{\xi_2} + 2U_{\xi_3}$, $U_y = U_{\xi_2} - 2U_{\xi_3}$, $U_z = U_{\xi_3}$,

$U_{xx} = U_{\xi_1\xi_1} + U_{\xi_2\xi_2} + 4U_{\xi_3\xi_3} + 4U_{\xi_1\xi_3} - 2U_{\xi_1\xi_2} - 4U_{\xi_2\xi_3}$,

$$U_{yy}=U_{\xi_2\xi_2}+4U_{\xi_3\xi_3}-4U_{\xi_2\xi_3},\ U_{zz}=U_{\xi_3\xi_3},$$
$$U_{xy}=U_{\xi_1\xi_2}-2U_{\xi_1\xi_3}-U_{\xi_2\xi_2}+4U_{\xi_2\xi_3}-4U_{\xi_3\xi_3},\ U_{yz}=U_{\xi_2\xi_3}-2U_{\xi_3\xi_3}$$

Підставимо їх у рівняння, після зведення подібних членів дістаємо шуканий канонічний вигляд $U_{\xi_1\xi_1}+U_{\xi_2\xi_2}+U_{\xi_3\xi_3}+U_{\xi_1}=0$.

Приклад 5. Звести до канонічного вигляду рівняння та знайти загальний розв'зок рівняння $x^2U_{xx}-y^2U_{yy}=0$.

Розв'язок. Оскільки $\Delta=x^2y^2>0$, то рівняння скрізь гіперболічного типу, крім осей координат, які є лініями параболічності. Його можна звести до канонічного вигляду в кожному з координатних кутів. Рівняння характеристик $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^2=0$ має такі два загальні інтеграли: $xy=C,\quad \frac{y}{x}=C$. Отже, треба ввести нові змінні: $\xi=xy,\quad \eta=\frac{y}{x}$. Обчислимо частинні похідні:

$$U_x=U_\xi\xi_x+U_\eta\eta_x=yU_\xi-\frac{y}{x^2}U_\eta,\quad U_y=U_\xi\xi_y+U_\eta\eta_y=xU_\xi+\frac{1}{x^2}U_\eta,$$

$$U_{xx}=U_{\xi\xi}\xi_x^2+2U_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+U_{\eta\eta}\eta_x^2+U_\xi\xi_{xx}+U_\eta\eta_{xx}=y^2U_{\xi\xi}-2\frac{y^2}{x^2}U_{\xi\eta}+\frac{y^2}{x^4}U_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^3}U_\eta,$$

$$U_{yy}=U_{\xi\xi}\xi_y^2+2U_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+U_{\eta\eta}\eta_y^2+U_\xi\xi_{yy}+U_\eta\eta_{yy}=x^2U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}U_{\eta\eta}.$$

Підставимо значення цих частинних похідних у рівняння

$$x^2\left(y^2U_{\xi\xi}-2\frac{y^2}{x^2}U_{\xi\eta}+\frac{y^2}{x^4}U_{\eta\eta}+2\frac{y}{x^3}U_\eta\right)-y^2\left(x^2U_{\xi\xi}+2U_{\xi\eta}+\frac{1}{x^2}U_{\eta\eta}\right)=0$$

Отже, дістаємо канонічну форму даного рівняння $U_{\xi\eta}-\frac{1}{2\xi}U_\eta=0$. Перейдемо до побудови загального розв'язку. Для цього запровадимо нову функцію $V(\xi,\eta)=U_\eta(\xi,\eta)$, тоді останнє рівняння має вигляд $V_\xi-\frac{1}{2\xi}V=0$. Це рівняння можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння з незалежною зміною ξ, оскільки η входить сюди як параметр.

Отже, $\frac{dV}{d\xi}-\frac{V}{2\xi}=0$, $lnV=\frac{1}{2}ln\xi+lnC$, де $C=\varphi(\eta)$, $\varphi(\eta)$ - довільна функція. Маємо $V(\xi,\eta)=\varphi(\eta)\sqrt{\xi}$. З другого боку, $V=U_\eta(\xi,\eta)=\varphi(\eta)\sqrt{\xi}$. Тепер вважаємо η незалежною змінною, а ξ параметром. Проінтегруємо по η: $U(\xi,\eta)=\sqrt{\xi}\int\varphi(\eta)d\eta+\psi(\xi)$, $\psi(\xi)$- довільна функція. Остаточно маємо $U(x,y)=\sqrt{xy}\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+\psi(xy)$, тут $\Phi\left(\frac{y}{x}\right)=\int\varphi(\eta)d\eta$.

Тема 2. Постановка задач математичної фізики.

Поставити крайову задачу, що відповідає розглядуваному фізичному процесові, означає:

1) вибрати вдало функцію (величину), яка характеризувала б даний фізичний процес (при цьому реальний фізичний процес замінюють деяким ідеальним процесом, але так, щоб зберігались основні властивості реального процесу), вибрати систему координат в залежності від умов задачі, але так, щоб шукана функція залежала від мінімальної кількості змінних;

2) використовуючи фізичні закони і співвідношення, скласти диференціальне рівняння для функції, що характеризує даний процес;

3) встановити початкові умови для шуканої функції, тобто записати значення фізичних характеристик, що описують даний процес в початковий момент;

4) сформулювати крайові умови, тобто записати умови процесу на межі тіла, якщо розглядаємо нескінченний об'єм, то записуємо умови поведінки процесу на нескінченності.

Приклад 1. Верхній кінець пружного однорідного вертикально підвішеного важкого стрижня жорстко прикріпленого до стелі ліфту, який вільно падає, причому, досягнувши швидкості *V*, він миттєво зупиняється. Поставити задачу про малі поздовжні коливання цього стрижня.

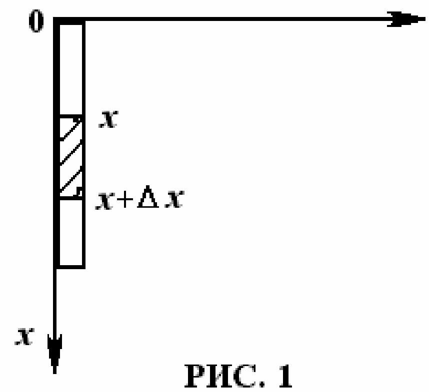

РИС. 1

Розв'язок. Нехай зміщення поперечного перерізу вдовж осі OX є функцією U(x,t), яка характеризує даний процес. Верхній кінець стрижня в момент зупинки вибираємо за початок координат, вісь OX направляємо вертикально вниз (рис.1). Розглянемо елемент стрижня Δx. Для визначення пружних сил, які діють на цей елемент, використаємо закон Гука $X = ESU_x(x,t)$, де X - проекція на вісь OX сили $\overline{F}$, з якою частина стрижня, що лежить нижче розглядуваного перерізу, діє на частину, що лежить вище цього перерізу; S - площа перерізу; E - модуль пружності. На основі закону Гука маємо $X = -ESU_x(x,t) + ESU_x(x+\Delta x,t) = ESU_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\cdot\Delta x\ (0<\theta<1)$. Тут було використано теорему Лагранжа про скінченні прирости. Застосовуючи другий закон Ньютона для розглядуваного елемента та враховуючи принцип Даламбера, записуємо $-\rho_0 S\Delta x U_{tt}(x_c,t) + \rho_0 g S\Delta x + ESU_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x = 0$, де g - прискорення сили тяжіння; ρ_0 - щільність стрижня; x_c - координата центру тяжіння. Після скорочення на $S\Delta x$ і переходу до границі при $\Delta x \to 0$ дістаємо диференціальне рівняння малих повздовжних коливань стрижня $-\rho_0 U_{tt}(x,t) + \rho_0 g + EU_{xx}(x,t) = 0$, і остаточно маємо:

$$U_{xx}-\frac{1}{a^2}U_{tt}=-\frac{g}{a^2},\quad a=\sqrt{E/\rho_0},\quad 0<x<l,\quad t>0.$$

Оскільки в момент зупинки стрижня (при t=0) його поперечні перерізи перебувають у стані спокою і їм надається стала швидкість V, то початкові умови мають вигляд $U(x,0)=0,\quad U_t(x,0)=V$.

Запишемо тепер граничні умови. Верхній кінець стрижня (x=0) нерухомий, тому гранична умова має вигляд $U(0,t)=0$. Нижній кінець стрижня ($x=l$) вільний. Для одержання граничної умови застосуємо міркування, аналогічні наведеним при виведенні рівняння, тільки тепер будемо розглядати елемент $(l-\Delta x,l)$.

Запишемо другий закон Ньютона для цього елемента $\rho_0 S\Delta x U_{tt}=-ESU_x(l-\Delta x,t)$, звідки, переходячи до границі при $\Delta x\to 0$, дістанемо крайову умову для кінця $x=l$: $U_x(l,t)=0$.

Приклад 2. Поставити крайову задачу для поперечних коливань важкої струни, якщо вона обертається з кутовою швидкістю $\omega=const$ відносно вертикального положення рівноваги, верхній кінець жорстко закріплено, а нижній - вільний (рис.2).

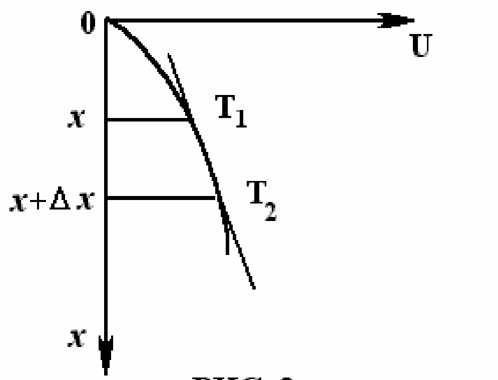

РИС. 2

Розв'язок. Вісь ОХ спрямуємо по струні в положенні рівноваги, причому початок осі сумістимо із закріпленим кінцем струни. Нехай U(x,t) - поперечне відхилення точок струни від положення рівноваги. Вважаємо, що струна однорідна, а коливання малі. Виділяємо елемент струни $\Delta S\quad (\Delta S\approx\Delta x)$.

У даному разі маємо справу із складним рухом. Коливання струни щодо осі буде відносним рухом, обертання – переносним. Складаємо для розглядуванного елемента струни диференціальне рівняння динаміки відносного руху $\rho\Delta x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=F+S_l+S_c$. Тут F - рівнодійна сил натягу, викликаних вагою струни $T_2=(l-x-\Delta x)g\rho,\quad T_1=-(l-x)g\rho$, g - прискорення сили тяжіння. Проекція на вісь U рівнодійної цих сил є $(l-x-\Delta x)g\rho\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-(l-x)g\rho\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x}$; $I=-\rho\Delta x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$ - сили інерції, $S_l=\rho\Delta x\omega^2 U$ - доцентрова сила, спрямована по осі U; $S_c=-2m\left[\overline{\omega}\cdot\overline{V}_{відн.}\right]$ – сили Каріоліса, проекція їх на вісь U дорівнює нулеві. Отже за принципом Даламбера маємо:

$$(l-x-\Delta x)g\rho\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-(l-x)g\rho\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x}-\rho\Delta x\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\rho\Delta x\omega^2 U=0.$$

Використовуючи теорему про середнє значення, скорочуючи на $\rho\Delta x$ і переходячи до границі при $\Delta x \to 0$, дістаємо шукане рівняння

$$g\frac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]+\omega^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (0<x<l, 0<t<\infty).$$

Початкові умови довільні: $U(x,0)=\varphi(x)$, $U_t(x,0)=\psi(x)$. Граничні умови: кінець (x=0) - нерухомий, $U(0,t)=0$; нижній кінець $x=l$ - вільний, $U(l,t)$ - обмежна функція.

Зауваження. якщо ж початок осі ОХ сумістити з вільним кінцем, то рівняння має вигляд $g\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial U}{\partial x}\right]+\omega^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$.

Приклад 3. Поставити крайову задачу для визначення температури однорідного ізотропного стрижня $0\le x\le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією *x*. Стрижень має сталий поперечний переріз. Розглянути випадки: а) кінці стрижня підтримуються при заданій температурі; б) на кінці стрижня подається ззовні заданий тепловий потік; в) на кінці стрижня відбувається конвективний теплообмін (за законом Ньютона) з середовищем, температура якого задана.

Розв'язок. За функцією, що характеризує даний процес, візьмемо температуру U(x,t).Складемо для неї диференціальне рівняння. Для цього спочатку треба скласти рівняння теплового балансу. Розглянемо елемент стрижня $(x, x+\Delta x)$. Нехай σ - площа поперечного перерізу, К- коефіцієнт внутрішньої теплепровідності. Використаємо закон внутрішньої теплопровідності в твердих тілах (закон Фур'є) для одновимірного випадку $q=-k\sigma\frac{\partial U}{\partial x}$, де *q*- кількість тепла, що протікає за одиницю часу в напрямку осі *x* через площу σ, перпендикулярну до осі *x*. Згідно з цим законом, сума тепла, що надходить у розглядуваний елемент $(x, x+\Delta x)$ за одиницю часу через перерізи *x* і $x+\Delta x$ є $-\sigma k\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x+\sigma k\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$.

Це тепло іде на приріст кількості тепла в елементі за одиницю часу $c\rho\sigma\Delta x\frac{\partial U}{\partial t}$, де c -питома теплоємність, ρ - щільність маси. Звідси

$$-\sigma k\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_x+\sigma k\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}=c\rho\sigma\Delta x\frac{\partial U}{\partial t},\ \sigma k\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x+\Delta x}\cdot\Delta x=c\rho\sigma\Delta x\frac{\partial U}{\partial t}.$$

Поділимо останню рівність на $\sigma\Delta x$, далі переходимо до границі при $\Delta x\to 0$. Остаточно маємо $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial t}=0, \quad a=\sqrt{k/c\rho}$.

Здобуте рівняння є рівняння теплопровідності. Початкова умова очевидна: $U(x,0)=\varphi(x), \quad 0<x<l$.

Розглянемо крайові умови:

а) кінці стрижня підтримуються при заданій температурі, тобто

$$U(0,t)=\mu_1(t),\ U(l,t)=\mu_2(t),\quad 0<t<\infty.$$

б) використовуючи закон Фур'є, можна одразу записати крайові умови:

$$U_x(0,t)=-\frac{q_1(t)}{k\sigma}=Q_1(t),\ U_x(l,t)=\frac{q_2(t)}{k\sigma}=Q_2(t),\quad 0<t<\infty.$$

Якщо $Q_1(t)=0$, $Q_2(t)=0$, то маємо випадок теплової ізоляції кінців стрижня.

в) у цьому разі використовуємо закон Н'ютона $q=\sigma\alpha(U-U_0)$, де q-кількість тепла, що протікає за одиницю часу через площу σ поверхні тіла у навколишній простір; U_0 -температура навколишнього середовища. На лівому кінці маємо $k\sigma\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0}=\alpha\sigma(U-U_0)\big|_{x=0}$ або $U_x(0,t)=h[U(0,t)-\mu_1(t)],\quad h=\alpha/k$.

Аналогічно на правому кінці - $U_x(l,t)=-h[U(l,t)-\mu_2(t)]$, де $\mu_1(t)$ і $\mu_2(t)$-значення температури навколишнього середовища біля кінців стрижня.

Приклад 4. Дві пластинки завтовшки a_1 і a_2, виготовлені з різних матеріалів і нагріті до температур t_1° і t_2°, в момент $t = 0$ вводяться в дотик одна з другою. Скласти рівняння, яке визначало б процес вирівнювання температур, вважаючи, що вільні грані теплоізольовані від навколишнього простору.

Розв'язок. Позначимо через $t_1(x,y,z,t)$ і $t_2(x,y,z,t)$ температури пластинок у загальному випадку. Але оскільки вільні грані теплоізольовані, то $t_1(x,t)$ і $t_2(x,t)$. Нехай V_1, S_1 і V_2, S_2 - відповідно об'єм і поверхня першої та другої пластинок, k_1 і k_2 - їх коефіцієнти теплопровідності, ρ_1 і ρ_2 - їх щільність, C_1 і C_2 - їх питомі теплоємності.

Припустимо, що $0<x<a_1$. За законом Фур'є, кількість тепла, що надходить в об'єм V_1 через S_1 (з використанням формули Остроградського), знаходимо з виразу

$$Q_{11}=-\iint\limits_{S_1}k_1\frac{\partial t_1}{\partial \bar{n}}ds=\iiint\limits_{V_1}div(k_1\nabla t_1)dv=k_1\iiint\limits_{V_1}\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}dv.$$

Для підвищення температури об'єму dv на величину dt_1 за час dt потрібно таку кількість тепла: $C_1\rho_1 dv dt_1=C_1\rho_1\frac{\partial t_1}{\partial t}dv dt$, а для підвищення температури всього об'єму $Q_{21}=C_1\rho_1\iiint\limits_{V_1}\frac{\partial t_1}{\partial t}dv$. Оскільки $Q_{21}=Q_{11}$, то $k_1\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}=C_1\rho_1\frac{\partial t_1}{\partial t}$, або $\frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2}=\frac{C_1\rho_1}{k_1}\frac{\partial t_1}{\partial t}\quad (0<x<a_1)$.

Аналогічно дістаємо рівняння при $a_1<x<a_1+a_2$: $\frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2}=\frac{C_2\rho_2}{k_2}\frac{\partial t_2}{\partial t}$

Початкові умови: $t_1\big|_{t=0}=t_1^\circ$, $t_2\big|_{t=0}=t_2^\circ$.

Для визначення граничних умов скористаємось законом Фур'є, вважаючи, що він справедливий аж до самих границь, $\frac{\partial Q_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} ds$, але тепловий потік на межі дорівнює нулеві. Звідси $\left.\frac{\partial t_1}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$, $\left.\frac{\partial t_2}{\partial x}\right|_{x=a_1+a_2} = 0$.

Аналогічно вважаючи, що закон Фур'є справедливий аж до самих границь взаємного дотику пластинок, маємо $k_1 \left.\frac{\partial t_1}{\partial x}\right|_{x\to a_1-0} = k_2 \left.\frac{\partial t_2}{\partial x}\right|_{x\to a_1+0}$.

Оскількі між пластинами відсутній теплоізольований шар, то $\left.t_1\right|_{x=a_1} = \left.t_2\right|_{x=a_2}$.

Приклад 5. Вивести рівняння стаціонарного процесу дифузії: а) в однорідному ізотропному середовищі, яке перебуває в стані спокою, б) в однорідному ізотропному середовищі, яке рухається із заданою швидкістю (наприклад, вздовж осі x).

Розв'язок. Нехай U(x,y,z) - концентрація. Використовуємо закон Нернста: $q = -DgradU$, де q - вектор щільності потоку речовини, D - коефіцієнт дифузії. Крім цього дифузійного потоку речовини, врахуємо потік переносу, так званий трансляційний потік $Q = U\overline{V}$, $\overline{V} = (V_x, V_y, V_z)$- швидкість руху середовища. Сумарний потік речовини: - $-DgradU + U\overline{V}$. Спроектуємо його на напрям $\overline{n}$. Використовуючи закон зберігання речовини для нерухомої поверхні S, маємо $\iint\limits_S \left(-D\frac{\partial U}{\partial n} + \overline{V_n}U \right) ds = 0$. Застасовуючи формулу Остроградського, дістаємо $\iiint\limits_\Omega [div(DgradU) - div(VU)] d\tau = 0$. Оскільки об'єм Ω - довільний, а $divV = 0$, то рівняння стаціонарного процесу дифузії остаточно має вигляд $div(DgradU) - div(VU) = 0$ або $D\Delta U - V_x \frac{\partial U}{\partial x} - V_y \frac{\partial U}{\partial y} - V_z \frac{\partial U}{\partial z} = 0$. Звідси, очевидно, маємо такі частинні випадки:

а) рівняння стаціонарного процесу дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке перебуває в стані спокою (V=0): $\Delta U = 0$.

б) рівняння стаціонарного процесу в дифузії в однорідному ізотропному середовищі, яке рухається із заданою швидкістю V (наприклад, вздовж осі x, $V_x = V$, $V_y = V_z = 0$): $\Delta U - \frac{V}{D}\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, яке називають рівнянням газової атаки.

Приклад 6. Показати, виходячи з рівнянь Максвелла, що потенціал електростатичного поля задовольняє рівняння Пуассона.

Розв'язок. Запишемо рівняння Максвелла для електромагнітного поля в однорідному ізотропному середовищі

$$rot\overline{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{j} \quad (1), \quad rot\overline{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} \quad (2), \; div\overline{E} = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} \quad (3), \; dib\overline{H} = 0 \quad (4),$$

де $\overline{E}$, $\overline{H}$ - вектори відповідно електричного та магнітного полів;

ε - діелектрична стала; μ - магнітна проникливість; c - швидкість світла в порожнечі; ρ і $\overline{j}$ - щільності зарядів і струмів, які є джерелами поля. У випадку електростатичного поля $rot\overline{E} = 0$, звідки випливає, що $\overline{E}$ - потенціальний вектор, який можна зобразити у вигляді $\overline{E} = -gradU$, де $U = U(M)$ - потенціал поля в точці *M*. Підставимо $\overline{E} = -gradU$ у рівняння (3) $div(gradU) = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$, $\Delta U = -\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}$. У порожнечі $\varepsilon = 1$, тоді $\Delta U = -4\pi\rho$.

Тема 3. Метод Фур'є.

Ефективний та простий метод Фур'є (метод відокремлення змінних) є одним з найпоширеніших при розв'язанні задач математичної фізики.

Суть методу: розв'язок певного класу задач математичної фізики будують за допомогою суперпозиції частинних розв'язків розглядуванного рівняння, що мають вигляд добутку множників, кожен із яких є функцією тільки однієї змінної чи однієї групи змінних, від яких решта множників не залежить. Цей метод застосовується в основному для випадків, коли криві (поверхні), на яких задані крайові умови, є координатними кривими (поверхнями) в декартовій чи в іншій системі координат.

Приклад 1. Знайти розподіл потенціалу електростатичного поля $U(x,y)$ всередині прямокутника ОАСВ, у якого вздовж сторони ОВ потенціал дорівнює U_0, а три інші сторони заземлені. Електричні заряди всередині прямокутника відсутні.

Розв'язок. Оскільки електричні заряди всередині прямокутника відсутні, то задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа $\Delta U = 0$ при таких крайових умовах:

$$U(0,y) = U_0, \quad U(a,y) = 0 \tag{1}$$

$$U(x,0) = 0, \quad U(x,b) = 0 \tag{2}$$

Шукаємо розв'зок рівняння $\Delta U = 0$ у вигляді $U(x,y) = X(x)Y(y)$, підставляємо в рівняння і відокремлюємо змінні

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda .$$

Дістаємо рівняння

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0 \tag{3}$$

$$Y''(y) + \lambda Y(y) = 0 . \tag{4}$$

Враховуючи умови (2), маємо:

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0 . \tag{5}$$

Розв'язуємо тепер найпростішу задачу Штурма-Ліувілля (4), (5). Вважаємо, що $\lambda > 0$. Роз'язок рівняння (4) є

$$Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}y + B\sin\sqrt{\lambda}y,$$

а із (5) знаходимо власні значення $\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $n = 1,2,\ldots$ Відповідними власними функціями є $Y_n(y) = B_n \sin\frac{n\pi}{b}y$. Оскільки потрібно брати лінійно-незалежні функції, то n=1,2,…, а не $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Розв'язком рівняння (3) є

$$X_n(x) = C_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + D_n e^{-\frac{n\pi}{b}x},$$

а частинний розв'язок початкової задачі $U_n(x,y) = X_n(x)Y_n(y)$. Із частинних сум будуємо загальний розв'язок

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n e^{\frac{n\pi}{b}x} + \tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

Вважаємо, що цей ряд можна почленно диференціювати двічі, тоді він задовольнятиме рівнянню Лапласа.

Задовольняємо умови (1)

$$U(0,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n + \tilde{B}_n\right)\sin\frac{n\pi}{b}y = U_0,$$

$$U(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n e^{\frac{n\pi}{b}a} + \tilde{B}_n e^{-\frac{n\pi}{b}a}\right)\sin\frac{n\pi}{b}y = 0.$$

Тоді $U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{b}y$, де $\tilde{A}_n + \tilde{B}_n = a_n$. Коефіцієнти Фур'є обчислюємо за формулою

$$a_n = \frac{2}{b}\int_0^b U_0 \sin\frac{n\pi}{b}y\,dy = \frac{2U_0}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1,2,\ldots \\ \frac{4U_0}{n\pi}, & n = 2k+1, \quad k = 0,1,2,\ldots \end{cases}.$$

Коли n - парне, $\tilde{A}_n = \tilde{B}_n = 0$. Для непарного n маємо $\tilde{A}_n = -\tilde{B}_n e^{-\frac{2n\pi}{b}a}$, тобто

$\tilde{B}_n = \dfrac{4U_0}{n\pi\left(1 - e^{-\frac{2n\pi}{b}a}\right)}$, звідки $\tilde{B}_n = \dfrac{4U_0 e^{\frac{n\pi}{b}a}}{n\pi\left(e^{\frac{n\pi}{b}a} - e^{-\frac{n\pi}{b}a}\right)} = -\tilde{A}_n$, . Остаточно маємо:

$$U(x,y) = \frac{4U_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{sh\frac{2k+1}{b}\pi(a-x)}{(2k+1)sh\frac{2k+1}{b}\pi a}\sin\frac{(2k+1)\pi}{b}y.$$

Приклад 2. Визначити стаціонарний розподіл температури всередині твердого тіла, яке має форму обмеженого циліндра радіуса a висоти l, якщо до нижньої основи підведено сталий тепловий потік q, бічна поверхня і верхня основа підтримуються при нульовій температурі. Розглянути випадок напівобмеженого циліндра.

Розв’язок. Виберемо циліндричну систему координат так, щоб нижня основа лежала на площині ρ, φ (тобто при $z = 0$), а вісь z співпадала з віссю циліндра. Тоді задача зводиться до розв'язання рівняння Лапласа

$$\Delta U \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2} = 0,$$

при таких крайових умовах:

$$-k\frac{\partial U}{\partial z}\bigg|_{z=0} = q, \quad U\big|_{\rho=a} = 0, \quad U\big|_{z=l} = 0.$$

В силу симетрії розподіл температури не залежить від φ, тоді $U = U(\rho, z)$. Застосовуємо метод Фур'є безпосередньо. Шукаємо розв'язок задачі у вигляді $U(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$. Підставляємо в рівняння і відокремлюємо змінні

$$\frac{\rho R'' + R'}{\rho R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda.$$

Дістаємо два рівняння:

$$\rho R'' + R' + \lambda\rho R = 0, \qquad (1)$$

$$Z'' - \lambda Z = 0. \qquad (2)$$

Перше рівняння - є рівняння Бесселя. Справді, зробивши заміну $\zeta = \sqrt{\lambda}\rho$, $\left(\rho = \frac{\zeta}{\sqrt{\lambda}}, \quad \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{d\zeta}\sqrt{\lambda}, \quad \frac{d^2R}{d\rho^2} = \lambda\frac{d^2R}{d\zeta^2}\right)$, дістаємо рівняння Бесселя

$$\frac{d^2R}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{dR}{d\zeta} + R = 0,$$

розв’язком якого є функції Бесселя нульового порядку.

Розв'язок цього рівняння є $R(\zeta) = AJ_0(\zeta) + BN_0(\zeta)$. Шукаємо обмежений розв'язок, тому покладемо B=0. Отже, $R(\zeta) = AJ_0(\zeta)$, або $R(\rho) = AJ_0(\sqrt{\lambda}\,\rho)$. Використавши граничну умову $U\big|_{\rho=a} = 0$, дістаємо $J_0(\sqrt{\lambda}\,a) = 0$. Корені останнього рівняння позначимо через μ_n, тоді $\sqrt{\lambda}a = \mu_n$, $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2$, і $R_n(\rho) = A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)$. Ця система функцій ортогональна з вагою ρ на $[\rho, a]$.

Розв'язок другого рівняння є $Z_n(z) = B_n ch\frac{\mu_n}{a}z + C_n sh\frac{\mu_n}{a}z$. Загальний розв'язок задачі записуємо у вигляді $U(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\tilde{A}_n ch\frac{\mu_n}{a}z + \tilde{B}_n sh\frac{\mu_n}{a}z\right)J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)$.

Для знаходження $\tilde{A}_n$ і $\tilde{B}_n$ використовуємо інші дві крайові умови

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\frac{\mu_n}{a}J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)=-\frac{q}{k}.$$

Позначивши $\frac{\rho}{a}=\xi$, маємо $\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}_n\frac{\mu_n}{a}J_0(\mu_n\xi)=-\frac{q}{k}$ тоді

$$\frac{\mu_n}{a}\widetilde{B}_n=\frac{-q}{kN_n^2}\int_0^1\xi J_0(\mu_n\xi)d\xi,\quad N_n^2=\int_0^1\xi J_0^2(\mu_n\xi)d\xi=\frac{1}{2}J_1^2(\mu_n).$$

Отже, $\frac{\mu_n}{a}\widetilde{B}_n=\frac{-2q}{kJ_1^2(\mu_n)}\int_0^1\xi J_0(\mu_n\xi)d\xi=\frac{-2q}{k\mu_n J_1(\mu_n)}$, звідки $\widetilde{B}_n=\frac{-2aq}{k\mu_n^2J_1(\mu_n)}$.

Використовуючи умову $\left.U\right|_{z=l}=0$, маємо $\widetilde{A}_n=-\widetilde{B}_n\frac{sh\frac{\mu_n}{a}l}{ch\frac{\mu_n}{a}l}=\frac{2aqsh\frac{\mu_n}{a}l}{\mu_n^2kJ_1(\mu_n)ch\frac{\mu_n}{a}l}$.

Остаточно $U(\rho,z)=\frac{2aq}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sh\frac{\mu_n}{a}(l-z)J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)}{\mu_n^2kJ_1(\mu_n)ch\frac{\mu_n}{a}l}$.

При $l\to\infty$ із останньої формули дістаємо $U(\rho,z)=\frac{2aq}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right)}{\mu_n^2J_1(\mu_n)}e^{-\frac{\mu_n}{a}z}$.

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння Пуассона $\Delta u=-2$ у прямокутнику $D: 0\le x\le a,\ -\frac{b}{2}\le y\le\frac{b}{2}$, якщо цей розв'язок на контурі цієї області дорівнює нулеві.

Розв'язок. Шукаємо розв'язок у вигляді суми двох функцій: $u=v+w$, де v- розв'язок рівняння Пуассона, що задовольняє умови: $v(0,y)=0$, $v(a,y)=0$ (можна v шукати у вигляді Ax^2+Bx+C), а w - розв'язок рівняння Лапласса, який на контурі набуває таких значень: $w(0,y)=0$, $w(a,y)=0$ $w\left(x,-\frac{b}{2}\right)=-v(x)$, $w\left(x,\frac{b}{2}\right)=-v(x)$. Отже, враховуючи умови для функції $v(x,y)$ та її вигляд, маємо $v(x)=-x^2+ax=x(a-x)$. Для знаходження w використовуємо метод Фур'є:

$$w=X(x)Y(y),$$

$$X''+\lambda X=0,\quad X(0)=X(a)=0,\quad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,\quad X_n=\widetilde{C}_n\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

$$Y''-\lambda_nY=0,\quad Y_n(y)=\widetilde{A}_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+\widetilde{B}_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}$$

Отже, $w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi}{b}x}+B_n e^{-\frac{n\pi}{b}x}\right)sin\frac{n\pi}{a}x$. Враховуючи граничні умови для *w*, дістаємо $A_n = B_n$. Тоді остаточно:

$$u(x,y)=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{0}^{\infty}\frac{ch\frac{(2n+1)\pi y}{a}sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}}{(2n+1)^3 ch\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Приклад 4. Один кінець стрижня закріплений пружно, а другий - вільний. Знайти поздовжні коливання стрижня при довільних початкових даних.

Розв'язок. Потрібно проінтегрувати рівняння $u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$, при таких граничних та початкових умовах:

$$u_x(0,t)=0,\quad u_x(l,t)+hu(l,t)=0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=\varphi_1(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_2(x),\quad 0\le x\le l.$$

Тут $h=\frac{k}{E\sigma}$, *k* - коефіцієнт, що характеризує жорсткість закріплення.

За схемою методу Фур'є маємо:

$$u(x,t)=X(x)T(t),\quad X''+\lambda X=0,\quad T''+a^2T=0.$$

Використовуючи граничні умови, дістаємо :

$$X=Acos\sqrt{\lambda}x+B\,sin\sqrt{\lambda}x,\quad X=B\sqrt{\lambda}\,cos\sqrt{\lambda}x,\quad h\,cos\sqrt{\lambda}l-\sqrt{\lambda}\,sin\sqrt{\lambda}l=0,$$

звідки $tg\mu=\frac{hl}{\mu}$, $\left(\mu=\sqrt{\lambda}l\right)$. Нехай μ_k (*k*=1,2,…) - додатні корені рівняння $\mu\, tg\mu=hl$. Тоді $\lambda_k=\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2$, а відповідні власні функції $X_k=cos\frac{\mu_k}{l}x$. Розв'язок другого рівняння $T''+a^2T=0$ при тих самих λ має вигляд:

$$T_k=A_k\,cos\frac{a\mu_k}{l}t+B_k\,sin\frac{a\mu_k}{l}t,$$

λ=0 - не є власним значенням.

Загальний розв'язок початкової задачі запишемо у вигляді

$$u(x,t)=\sum_{0}^{\infty}\left[A_k\,cos\frac{a\mu_k}{l}t+B_k\,sin\frac{a\mu_k}{l}t\right]cos\frac{\mu_k}{l}x.$$

Коефіцієнти A_k і B_k визначаємо з початкових умов:

$$u(x,0)=\varphi_1(x)=\sum_{1}^{\infty}A_k\,cos\frac{\mu_k}{l}x\quad\Rightarrow\quad A_k=\frac{1}{N_k^2}\int_0^l\varphi_1(x)cos\frac{\mu_k}{l}xdx$$

$$u_t(x,0)=\varphi_2(x)=\sum_{1}^{\infty}B_k\frac{a\mu_k}{l}cos\frac{\mu_k}{l}x\quad\Rightarrow\quad B_k=\frac{l}{a\mu_k N_k^2}\int_0^l\varphi_2(x)cos\frac{\mu_k}{l}xdx$$

Тут $N_k^2=\int_0^l cos^2\frac{\mu_k}{l}xdx=\frac{1}{2}\int_0^l\left(1+cos\frac{2\mu_k}{l}x\right)dx=\frac{l}{2}\frac{\mu_k^2+hl+h^2l^2}{\mu_k^2+h^2l^2}.$

Приклад 5. Вивчити вимушені поперечні коливання струни, яка на кінці x=0 закріплена, а на кінці x=l зазнає дію збурювальної гармонічної сили. Ця сила викликає зміщення $A sin\omega t$.

Розв'язок. Потрібно розв'язати рівняння $u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$, за таких початкових та граничних умов: $\begin{matrix} u(0,t)=0, & u(l,t)=A sin\omega t, & t>0 \\ u(x,0)=0, & u_t(x,0)=0, & 0\le x\le l. \end{matrix}$.

Оскільки крайові умови ненульові, то шукаємо розв'язок задачі у вигляді суми $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$, де $w(x,t)$ - розв'язок початкового рівняння, що задовольняє такі граничні умови: $w(0,t)=0,\ w(l,t)=A sin\omega t$, а $v(x,t)$ задовольняє рівняння $v_{xx}-\frac{1}{a^2}v_{tt}=0$ і умови $v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0,\quad v(x,0)=0,\quad$.

Підберемо $w(x,t)$ таким чином: $w(x,t)=X(x)sin\omega t$. Підставляючи $w(x,t)$ у рівняння, дістаємо $X''+\frac{\omega^2}{a^2}X=0$. Тоді $X=C_1 cos\frac{\omega}{a}x+C_2 sin\frac{\omega}{a}x$. Отже, $w(x,t)=\left(C_1 cos\frac{\omega}{a}x+C_2 sin\frac{\omega}{a}x\right)sin\omega t$. Враховуючи умови для $w(x,t)$, маємо

$C_1=0$, $C_2=\dfrac{A}{sin\frac{\omega}{a}l}$ тоді $w(x,t)=\dfrac{A sin\frac{\omega}{a}x}{sin\frac{\omega}{a}l}sin\omega\, t$.

Для знаходження функції $v(x,t)$ застосовуємо метод Фур'є

$$\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2,\quad X_n=sin\frac{\pi n}{l}x,\quad T_n=A_n cos\frac{a\pi n}{l}t+B_n sin\frac{a\pi n}{l}t.$$

Тоді $V(x,t)=\sum_1^\infty\left(A_n cos\frac{a\pi n}{l}t+B_n sin\frac{a\pi n}{l}t\right)sin\frac{\pi n}{l}x$. Оскільки $u_t(x,0)=w_t(x,0)+v_t(x,0)$, $v_t(x,o)=\dfrac{\omega A sin\frac{\omega}{a}x}{sin\frac{\omega}{a}l}$. Вважаємо, що ω не збігається із власною частотою коливань. Остаточно записуємо:

$$u(x,t)=\frac{A sin\frac{\omega}{a}x}{sin\frac{\omega}{a}l}sin\omega t+\frac{2A\omega a}{l}\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{\omega^2-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2}sin\frac{n\pi a}{l}t\,sin\frac{n\pi}{l}x,\left(\omega\ne\frac{n\pi a}{l},n=1,2,\ldots\right)$$

Приклад 6. Дано необмежену пластинку завтовшки 2R при нульовій температурі. Пластинка нагрівається з обох сторін однаково сталим тепловим потоком q. Знайти розподіл температури за товщиною пластинки в будь-який момент часу t>0.

Розв'язок. Оскільки пластинка нагрівається однаково з обох сторін, то нам достатньо вивчити розподіл температури лише при $0 \le x \le R$. Для $-R \le x \le 0$ розподіл температури буде аналогічним. Отже, треба знайти розв'язок рівняння $u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_t = 0$, при таких умовах: $u_x(0,t) = 0, \quad ku_x(R,t) = q, \quad ku_x(-R,t) = -q, \quad u(x,0) = 0$. Шукаємо розв'язок у вигляді суми двох функцій $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, де $u_2(x,t)$ підбираємо так, щоб вона задовольняла заданим граничним умовам. Очевидно, що $u_2(x,t) = \frac{q}{2Rk}x^2$. Для $u_1(x,t)$ маємо задачу:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{q}{Rk}, \quad u_1(x,0) = -\frac{qx^2}{2Rk}, \quad \frac{\partial u_1(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_1(R,t)}{\partial x} = 0.$$

Розв'язок останньої знову шукаємо у вигляді суми двох функцій $u_1(x,t) = v(x,t) + w(t), \quad w(t) = \frac{a^2 q}{Rk}t$, а $v(x,t)$ визначаємо як розв'язок задачі для однорідного рівняння :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad v(x,0) = -\frac{qx^2}{2Rk}, \quad \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(R,t)}{\partial x} = 0.$$

Тепер можна безпосередньо використати метод Фур'є $v(x,t) = X(x)T(t)$.

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(R) = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2, \quad X_n = cos\frac{n\pi}{R}x,$$

$$T' + a^2 T\lambda = 0, \quad T_n = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \quad v(x,t) = \sum_0^\infty C_n e^{-a^2\frac{n^2\pi^2}{R^2}t} cos\frac{n\pi}{R}x,$$

$$C_n = -\frac{2}{R}\int_0^R \frac{q}{2Rk}x^2 cos\frac{n\pi}{R}x dx = -\frac{2qR}{k\pi^2}\frac{(-1)^n}{n^2}, \quad C_0 = \left(-\frac{1}{R}\int_0^R x^2 dx\right)\frac{q}{2Rk} = -\frac{qR}{6k}.$$

Тепер шуканий розв'язок записуємо у вигляді:

$$u(x,t) = \frac{q}{2Rk}x^2 + \frac{a^2 q}{Rk}t - \frac{qR}{6k} - \frac{2qR}{k\pi^2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{a^2 n^2\pi^2}{R^2}t} cos\frac{n\pi}{R}x =$$

$$= \frac{a^2 q}{Rk}\left(t - \frac{R^2 - 3x^2}{6a^2}\right) - \frac{2qR}{k\pi^2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} e^{-\frac{a^2 n^2\pi^2}{R^2}t} cos\frac{n\pi}{R}x.$$

Приклад 7. Початкова температура тонкого однорідного стрижня довжиною l дорівнює нулеві. На кінці x=0 температура росте лінійно з часом $u(0,t) = At$ (A-const). На кінці $x=l$ підтримується нульова температура. Знайти розподіл температури вздовж стрижня при $t>0$.

Розв'язок. Потрібно проінтегрувати однорідне рівняння теплопровідності $u_{xx} - \frac{1}{a^2}u_t = 0$, при $u(0,t) = At, \quad u(x,0) = 0, \quad u(l,t) = 0$.

Оскільки маємо неоднорідність у крайовій умові, то шукатимемо розв'язок у вигляді $u(x,t)=w(x,t)+At\left(1-\frac{x}{l}\right)$. Підставимо у початкове рівняння $w_t(x,t)+A\left(1-\frac{x}{l}\right)=a^2w_{xx}(x,t)$. Маємо такі умови для функції w: $w(0,t)=0,\quad w(x,0)=0,\quad w(l,t)=0$.

Розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності з нульовими умовами шукаємо у вигляді $w(x,t)=v_1(x,t)+v_2(x)$, де для $v_2(x)$: $At\left(1-\frac{x}{l}\right)=a^2(v_2)_{xx},\quad v_2(0)=0,\quad v_2(l)=0$. Звідси $v_2=-\frac{l^2A}{6a^2}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\frac{x}{l}\right)$.

Для $v_1(x,t)$ маємо задачу $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial v_1}{\partial t}=0,\quad v_1(0,t)=0,\quad v_1(l,t)=0$, $v_1(x,0)=-\frac{l^2A}{6a^2}\left(\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\frac{x}{l}\right)$. Останню розв'язуємо за методом Фур'є.

Дістаємо $v_1(x,t)=\frac{2l^2A}{\pi^3a^2}\sum_1^\infty\frac{1}{n^3}e^{-a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}t}sin\frac{n\pi}{l}x$. Остаточно маємо

$$u(x,t)=At\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{l^2A}{6a^2}\left(\frac{x^3}{l^3}-3\frac{x^2}{l^2}2\frac{x}{l}\right)+\frac{2l^2A}{a^2\pi^3}\sum_1^\infty\frac{1}{n^3}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Приклад 8. Знайти температуру стрижня $0\le x\le l$ із теплоізольованою бічною поверхнею, якщо на його кінцях відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, яке має сталу температуру. Початкова температура стрижня довільна.

Розв'язок. Задача зводиться до інтегрування рівняння теплопровідності

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_t=0,$$

при $u_x(0,t)-H(u(0,t)-u_1)=0,\quad u(x,0)=f(x),\quad u_x(l,t)+H(u(l,t)-u_2)=0$.

Шукатимемо розв'язок у вигляді $u=w(x)+v(x,t),\quad 0<x<l, 0<t<\infty$, де $w(x)$ задовольняє рівняння $w''(x)=0$ та умови

$$w'(0)-H(w(0)-u_1)=0,\quad w'(l)+H(w(l)-u_2)=0,$$

а $v(x,t)$- рівняння $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{1}{a^2}\frac{\partial v}{\partial t}=0$ та умови:

$$v_x(0,t)-Hv(0,t)=0,\quad v(x,0)=f(x)-w(x),\quad v_x(l,t)+Hv(l,t)=0.$$

Функцію $w(x,t)$ знаходимо безпосереднім інтегруванням рівняння $w''(x)=0$. Маємо $w(x,t)=C_1x+C_2$. Використовуючи умови для $w(x,t)$, знаходимо сталі C_1 і C_2: $C_1=H\frac{u_2-u_1}{2+Hl},\quad C_2=\frac{u_2+(1+Hl)u_1}{2+Hl}$.

Функцію $v(x,t)$ знаходимо, користуючись методом Фур'є:

$$v(x,t)=X(x)T(t),$$

$$T' + T\lambda = 0,\ X'' + \frac{\lambda}{a^2} X = 0,\ X'(0) - HX(0) = 0, \quad X'(l) + HX(l) = 0,$$
$$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

Використовуємо граничні умови для $X(x)$: $B\sqrt{\lambda} - HA = 0$,
$$-\sqrt{\lambda}A\sin\sqrt{\lambda}l + \sqrt{\lambda}B\cos\sqrt{\lambda}l + H\left(B\sin\sqrt{\lambda}l + A\cos\sqrt{\lambda}l\right) = 0.$$

Звідси $ctg\mu = \frac{\mu}{2Hl} - \frac{lH}{2\mu}$, де $\mu = \lambda l$. Нехай μ_n - додатні корені цього трансцендентного рівняння. Тоді $X_n = \cos\frac{\mu_n}{l}x + \frac{HL}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{l}x, \quad T_n = C_n e^{-\left(\frac{\mu_n at}{l}\right)^2}$,

$$v(x,t) = \sum_1^\infty C_n e^{-\left(\frac{\mu_n at}{l}\right)^2}\left(\cos\frac{\mu_n}{l}x + \frac{HL}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{l}x\right),$$

де
$$C_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l [f(x) - w(x)]\left(\cos\frac{\mu_n}{l}x - \frac{HL}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{l}x\right)dx,$$

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l\left(\cos\frac{\mu_n}{l}x + \frac{HL}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n}{l}x\right)^2 dx = \frac{\left[\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2 + H^2\right]l + 2H}{2\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2}.$$

Тема 4. Метод Рімана.

При дослідженні задач, пов'язаних з більш загальним гіперболічним рівнянням другого порядку: $L(u) \equiv \sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n+1} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = -f$, де $a_{ik} = a_{ki}, b_i$, f - функції незалежних змінних, важливими є інтегральні формули, що встановлюють зв'язок між інтегралом по області з інтегралом по межі цієї області.

Ліву частину останнього рівняння $L(u)$ називають лінійним диференціальним оператором другого порядку, а диференціальний оператор $M(v) \equiv \sum_{i,k=1}^{n+1}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(a_{ik}v) - \sum_{i=1}^{n+1}\frac{\partial}{\partial x_i}(b_i v) + cv$ - спряженим з оператором $L(u)$.

Розглянемо рівняння
$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y). \quad (1)$$

Оператором, спряженим до $L(u)$, є оператор
$$L^*(u) \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial(av)}{\partial x} - \frac{\partial(bv)}{\partial y} + cv.$$

Функції $a(x,y)$ і $b(x,y)$ мають неперервні перші похідні. На площині XOY беремо довільну точку $M(x_0,y_0)$ і проводимо через неї характеристики $x=x_0$, $y=y_0$, останні перетинають криву AB, відповідно в точках P і Q (рис.3). Формула Рімана

$$u(M)=\frac{(uV)_P+(uV)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int_{QP}\left(V\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial V}{\partial x}+2buV\right)dx-\left(V\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial V}{\partial y}+2auV\right)dy-$$
$$-\iint_D Vf(x,y)dxdy \qquad (2)$$

дає розв'язок задачі Коші, якщо він існує, для рівняння (1) при таких умовах на кривій AB:

$$u\big|_{AB}=\varphi,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AB}=\psi. \qquad (3)$$

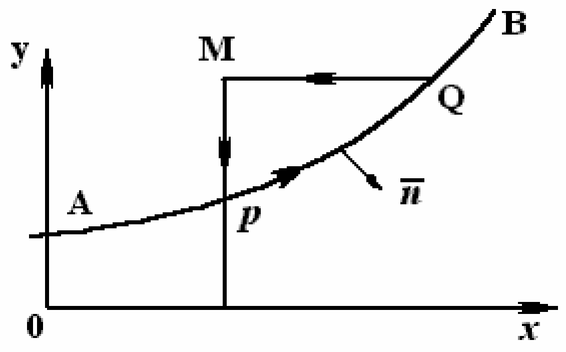

РИС. 3

До (2) входить функція Рімана $V(x,y;x_0,y_0)$, яка є функцією двох пар змінних: (x,y) і фіксованих координат (x_0,y_0) точки M. Вона є розв'язком однорідного спряженого рівняння і задовольняє умови:

1) $\dfrac{\partial V(x,y_0;x_0,y_0)}{\partial x}=b(x,y_0)V(x,y_0;x_0,y_0)$ на характеристиці QM;

2) $\dfrac{\partial V(x_0,y;x_0,y_0)}{\partial y}=a(x_0,y)V(x_0,y;x_0,y_0)$ на характеристиці MP;

3) $V(x_0,y_0;x_0,y_0)=1$, або

$$V(x,y_0;x_0,y_0)=e^{\int_{x_0}^{x}b(x,y_0)dx},\quad V(x_0,y;x_0,y_0)=e^{\int_{y_0}^{y}a(x_0,y)dy}.$$

Зауважимо, що функція Рімана не залежить ні від данних Коші (3) на кривій AB, ні від вигляду цієї кривої, ні від правої частини рівняння (1). Отже, метод Рімана зводить розв'язання задачі Коші до знаходження функції Рімана $V(x,y;x_0,y_0)$. Якщо функцію Рімана для гіперболічного оператора $L(u)$ чи $L^*(u)$ знайдено, то можна одразу написати в інтегральній формі розв'язок досить широкого класу задач, пов'язаних із цим гіперболічним оператором.

Приклад 1. Розв'язати граничну задачу:

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad 1<y<+\infty;$$

$$u\big|_{y=1}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1}=\psi(x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

Розв'язок. Побудуємо функцію Рімана. У рівнянні виконаємо заміну $\xi = xy, \quad \eta = \dfrac{y}{x}$. Дістанемо рівняння вигляду $u_{\xi\eta} - \dfrac{1}{2\xi}u_{\eta} = 0$. Згідно з теорією, функція Рімана повинні задовольняти однорідне спряжене рівняння $V_{\xi\eta} + \dfrac{1}{2\xi}V_{\eta} = 0$ і такі умови на характеристиках:

$$V(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = e^{-\int\limits_{\xi_0}^{\xi}(2\xi)^{-1}d\xi} = \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi}} \text{ (MQ)}, \quad V(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = e^{\int\limits_{\eta_0}^{\eta}d\eta} = 1 \text{ (MP)}.$$

У данному разі такою функцією є $V(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \sqrt{\dfrac{\xi_0}{\xi}}$. Формула Рімана (2) при $a = 0, \quad b = -\dfrac{1}{2\xi}, \quad f = 0$ має вигляд:

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{(uV)_P + (uV)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{QP}\left(V\frac{\partial u}{\partial \xi} - u\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{uV}{\xi}\right)d\xi - \left(V\frac{\partial u}{\partial \eta} - u\frac{\partial V}{\partial \eta}\right)d\eta =$$

$$= \frac{(uV)_P + (uV)_Q}{2} + \int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{1}{2}V\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)d\xi - \int\limits_{\xi_0}^{1/\eta_0}\frac{1}{2}u\left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{V}{\xi}\right)d\xi$$

Використавши задані додаткові умови, маємо:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\xi\eta=1} = \sqrt{\frac{\eta}{\xi}}\Bigg|_{\xi\eta=1}\frac{\partial u}{\partial y}\Bigg|_{y=1} = \xi^{-1}\psi(\xi), \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{V}{\xi}\right) = \frac{\sqrt{\xi_0}}{2\xi^{3/2}}.$$

Врахувавши, що $u(P) = \varphi(\xi_0), \quad u(Q) = \varphi\left(\dfrac{1}{\eta_0}\right), \quad V(P) = 1, \quad V(Q) = \sqrt{\xi_0\eta_0}$ із формули Рімана дістаємо:

$$u(\xi_0,\eta_0) = \frac{\varphi(\xi_0)}{2} + \frac{\sqrt{\xi_0\eta_0}}{2}\varphi\left(\frac{1}{\eta_0}\right) - \frac{\sqrt{\xi_0}}{4}\int\limits_{1/\eta_0}^{\xi_0}\frac{\varphi(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi + \frac{\sqrt{\xi_0}}{2}\int\limits_{1/\eta_0}^{\xi_0}\frac{\psi(\xi)}{\xi^{3/2}}d\xi.$$

Повернувшись до старих змінних маємо:

$$u(x,y) = \frac{\varphi(xy)}{2} + \frac{y}{2}\varphi\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\sqrt{xy}}{4}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{\varphi(z)}{z^{3/2}}dz + \frac{\sqrt{xy}}{2}\int\limits_{xy}^{x/y}\frac{\varphi(z)}{z^{3/2}}dz.$$

Приклад 2. Знайти функцію Рімана для оператора

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 u, \quad a = const,$$

і розв'язати за її допомогою таку крайову задачу (рис.4):

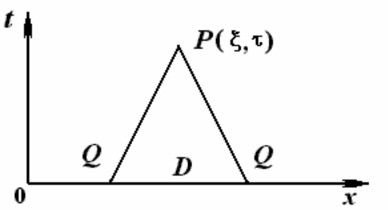

РИС. 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c^2 u + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty;$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u_t(x,0)=\psi(x),\quad -\infty<x<+\infty .$$

Розв'язок. Формула Рімана в данному разі має вигляд

$$u(P)=\frac{(u)_{Q_1}+(u)_{Q_2}}{2}+\frac{1}{2a}\int_{Q_1}^{Q_2}\left\{V\left(\frac{\partial u}{\partial t}dx+a^2\frac{\partial u}{\partial x}dt\right)-u\left(\frac{\partial V}{\partial t}dx+a^2\frac{\partial V}{\partial x}dt\right)\right\}+\frac{1}{2a}\iint_D Vfds,$$

оскільки вздовж характеристик $t-\tau=\frac{1}{a}(x-\xi)$, $t-\tau=-\frac{1}{a}(x-\xi)$ функція Рімана V=1.

Враховуючи задані умови, спростимо формулу Рімана

$$u(P)=\frac{\varphi(\xi-a\tau)+\varphi(\xi+a\tau)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau}\varphi(x)\frac{\partial V(x,0)}{\partial t}dx+$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{\xi-a\tau}^{\xi+a\tau}\psi(x)V(x,0)dx+\frac{1}{2a}\iint_D V(x,t)f(x,t)ds.$$

Цікавим є фізичний зміст останньой формули: перший член є розв'язком задачі поширення початкової деформації $\varphi(x)$, другий член - розв'язок задачі поширення початкової швидкості, третій член розв'язок задачі про випромінювання.

Шукаємо функцію Рімана у вигляді $V=F(z),\quad z=\sqrt{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}$, де ця функція, очевидно, дорівнює нулеві вздовж обох характеристик, дійсна в трикутнику D, при цьому $F(0)=1$. Запишемо рівняння, яке має задовольняти функція Рімана. Для цього треба обчислити похідні:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=F''\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+F'\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\frac{(t-\tau)^2}{z^2}F''-\frac{(x-\xi)^2}{a^2z^3}F',$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=F''\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+F'\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{(t-\tau)^2}{a^2z^3}F'+\frac{(x-\xi)^2}{a^4z^2}F'',$$

тоді

$$L^*(V)\equiv\frac{(t-\tau)^2-\frac{(a-\xi)^2}{a^2}}{z^2}F''+\frac{(t-\tau)^2-\frac{(x-\xi)^2}{a^2}}{z^3}F'-c^2F=F''+\frac{1}{z}F'-c^2F .$$

Отже, для функції F маємо звичайне диференціальне рівняння $F''+\frac{1}{z}F'-c^2F=0$ - рівняння циліндричних функцій нульового порядку. Його розв'язком, що задовольняє умову $F(0)=1$, є $F(z)=J_0\left(z\sqrt{-c^2}\right)=I_0(zc)$. Функція

Рімана розглядуваного оператора має вигляд $V = I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)$.

Враховуємо, що $\frac{\partial V}{\partial x} = -J_0'\left(z\sqrt{-c^2}\right)\sqrt{-c^2}\,\frac{x-\xi}{a^2 z} = I_0{}'(zc)c\frac{x-\xi}{a^2 z} = -I_1(zc)c\frac{x-\xi}{a^2 z}$,

$\frac{\partial V}{\partial t} = J_0'\left(z\sqrt{-c^2}\right)\left(\sqrt{-c^2}\,\frac{t-\tau}{z}\right) = I_0{}'(zc)c\frac{t-\tau}{z} = I_1(zc)c\frac{t-\tau}{z}$.

Підставимо значення функції V та її похідних у формулу Рімана. Остаточно дістаємо розв'язок поставленої задачі

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{ct}{2}\int_{x-at}^{x+at} I_1\left(c\sqrt{t^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right)d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} I_0\left(c\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\xi)^2}{a^2}}\right) f(\xi,\tau)d\xi$$

Зауваження. Коли *c=o*, формули значно спрощуються. Оскільки $J_0(0) = I_0(0) = 1$, то $V \equiv 1$. Розв'язок задачі Коші має вигляд

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\iint_D f ds,$$

при *f=0* остання формула збігається із формулою Даламбера.

Тема 5. Метод функції Гріна для рівняння Лапласа.

Метод функції Гріна найчастіше застосовується при розв'язанні граничних задач для рівнянь еліптичного типу. Він дає змогу записати в явному вигляді розв'язок граничної задачі з довільними крайовими умовами, якщо відома функція Гріна.

Означення. Функцією Гріна першої крайової задачі для рівняння Лапласа називається функція *G*(*M,P*), що задовольнєя умовам:

1. *G*(*M,P*) як функція точки $P(\xi,\eta,\zeta)$ при фіксованій точці $M(x,y,z)$ задовольняє рівняння Лапласа в усіх точках області *T,* окрім *P*=*M*.
2. *G*(*M,P*) при співпаданні аргументів (*P*=*M*) обертається в нескінченність і представляється у вигляді $G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$, де *v*=*v*(*M,P*) -гармонічна скрізь у *T* функція.
3. *G*(*M,P*) на границі Σ області обертається в нуль: *G*(*M,P*)=0, якщо $P \in \Sigma$.

Розв'язок першої граничної задачі для рівняння Лапласа має вигляд:

$$u(M_0) = -\iint_\Sigma f\frac{\partial G}{\partial n}d\sigma.$$

Для випадку двох вимірів в означенні необхідно змінити пункт 2, а саме: $G(M,P)$ при співпаданні аргументів ($P=M$) обертається в нескінченність і представляється у вигляді $G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{R_{MM_0}}+v$, де $v=v(M,P)$ -гармонічна скрізь у T функція.

Основні методи побудови функції Гріна оператора Лапласа для канонічних областей такі: метод дзеркальних відображень (або метод електростатичних відображень), метод конформних відображень та деякі спеціальні методи. Тут ми розглянемо застосування методу електростатичних відображень.

Ідея методу електростатичних відображень полягає в тому, що при побудові функції Гріна $G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}+v$ індуковане поле v - представляється як поле зарядів, що розташовані зовні поверхні Σ і вибираються так, що виконується умова $v|_{\Sigma}=\frac{1}{4\pi R}$. Ці заряди називаються електростатичним зображенням одиничного заряду, що розміщений в точці M_0 і створює при відсутності поверхні Σ потенціал $\frac{1}{4\pi R}$.

Приклад 1. Побудувати функцію Гріна першої граничної задачі для верхньої півплощини.

Розв'язок. Скористаємось *методом електростатичних* відображень. У точку області $z_0(x_0,y_0)$ помістимо додатній заряд. Дія цього заряду на межі області буде ліквідована, очевидно, таким самим від'ємним зарядом, який помістимо в точці $\bar{z}_0(x_0,-y_0)$, що є дзеркальним відображенням точки z_0 щодо межі (рис.5).

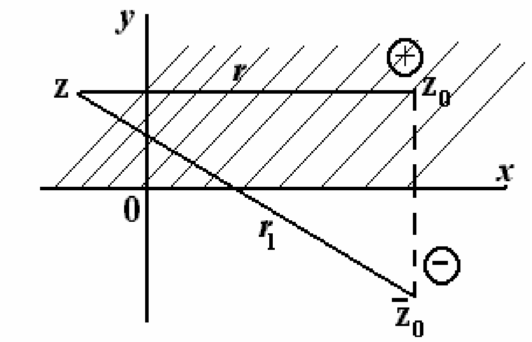

РИС. 5

Потенціал поля, створеного зарядом в $\bar{z}_0$, є $g(z,z_0)=-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_1}$, а функція Гріна $G(z,z_0)=\delta(z,z_0)+g(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_1}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$.

Приклад 2. Знайти функцію Гріна першої граничної задачі для верхнього півпростору та записати розв'язок першої граничної задачі.

Розв'язок. Нехай P_0 - особлива точка функції Гріна. Оскільки $G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi r}+g(P,P_0)$, то задача зводиться до відшукання функції $g(P,P_0)$, гармонічної в розглядуваному просторі z>0 і рівної $-\dfrac{1}{4\pi\, r}$ на його межі. Такою функцією, очевидно, є функція $g(P,P_0)=-\dfrac{1}{4\pi\, r_1}$, де $r_1=|P-P_1|$, P_1 - точка, симетрична точці P_0 щодо площини z=0. Отже,

$$G(P,P_0)=\frac{r_1-r}{4\pi\, rr_1}. \tag{1}$$

Розв'язок першої крайової задачі дає формула:

$$u(P_0)=-\iint_S \Phi(P)\frac{\partial G(P,P_0)}{\partial n}ds. \tag{2}$$

У даному разі z=0, $\Phi(P)=u|_{z=0}$, $\dfrac{\partial G}{\partial n}=-\dfrac{\partial G}{\partial n}$. Обчислимо

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}.$$

Маємо

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=\frac{1}{4\pi}\left.\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right]'\right|_{z=0}=$$

$$=z_0\left(2\pi\sqrt{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^3}\right)^{-1}.$$

Тоді

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(x,y)dxdy}{\left[(x-x_0)^2+(x-x_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

Останній інтеграл називається інтегралом Пуассона для півпростору. Якщо запровадити у просторі циліндричні координати, поклавши $x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,\quad z=z$, то формулу (3) можна записати у вигляді:

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{z_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{+\infty}\frac{\tilde{\Phi}(r,\varphi)rdr}{\left[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Обидва ці інтеграли невласні, і для їх збіжності потрібно задати додаткові умови для $\Phi(x,y)$ на нескінченності.

Ядро Пуассона

$$\frac{z_0}{2\pi}\frac{1}{\left[(x-x_0)^2+(x-x_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{z_0}{2\pi}\frac{1}{\left[r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\varphi-\varphi_0)+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

фізично можна інтерпретувати як стаціонарний розподіл температури в однорідному півпросторі z>0, на межі якого (площині z=0) підтримується температура 0° скрізь, крім точки (x,y) цієї площини де вона нескінченна.

Приклад 3. Побудувати функцію Гріна першої крайової задачі для круга радіуса R (рис.6).

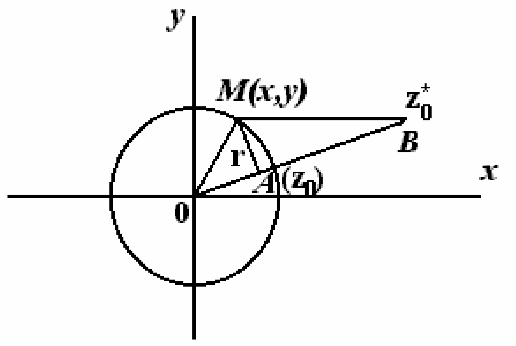

РИС. 6

Розв'язок. Функція Гріна має вигляд $G(z,z_0)=\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_1}+g(z,z_0)$, де $r=|z-z_0|$.

Задача зводиться до побудови функції $g(z,z_0)$, яка гармонічна у крузі і дорівнює $-\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r}$ на його межі. Нехай z_0 - особлива точка функції Гріна. Для компенсації потенціалу на колі, створеного одиничним джерелом в точці z_0, помістимо в точку $z_0^*=\dfrac{R^2}{\bar{z}_0}$, симетричну з z_0 щодо кола $|z|=R$, джерело інтенсивності - 1.

Позначимо $MB=r^*=|z-z_0^*|$, $MA=r=|z-z_0|$, $OA=r_0=|z_0|$. Із подібності ΔOMB і ΔOMA маємо $\dfrac{OM}{MB}=\dfrac{OA}{MA}$, $\dfrac{R}{r^*}=\dfrac{r_0}{r}$, $r^*=\dfrac{R}{r_0}r$. Функція $g(z,z_0)=-\dfrac{1}{2\pi}ln\dfrac{R}{r_0r^*}$ є шуканою.

Справді, вона гармонічна в крузі і дорівнює $-\dfrac{1}{2\pi}ln\dfrac{1}{r}$- на колі $|z|=R$.

Отже, шукана функція Гріна для круга має вигляд:

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}ln\frac{R}{r_0r^*}=\frac{1}{2\pi}ln\frac{r_0r^*}{rR}=\frac{1}{2\pi}ln\frac{r_0}{R}\frac{|z-z_0^*|}{|z-z_0|}.$$

Приклад 4. Побудувати функцію Гріна у півпросторі при крайовій умові III роду $\dfrac{\partial u}{\partial z}+\alpha u=0$, при z=0.

Розв'язок. Шукаємо функцію Гріна у вигляді $G(P,P_0)=\dfrac{1}{4\pi r}+g(P,P_0)$, де $g(P,P_0)$ має вигляд $g(P,P_0)=\dfrac{1}{4\pi r^*}+f(x-x_0,y-y_0,z+z_0)$ де $r^*=|P-P_0^*|$, $P_0^*=P_0^*(x_0,y_0,-z_0)$.

Оскільки для $G(P,P_0)$($\dfrac{\partial G}{\partial n}+\alpha G=0$), тут $\dfrac{\partial}{\partial n}=-\dfrac{\partial}{\partial z}$, а $\alpha>0$, то для знаходження функції f маємо рівняння

$$0=\left(\frac{\partial G}{\partial n}-\alpha G\right)\Bigg|_{z=0}=-\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^*}\right)_{z=0}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\alpha f\right)\Bigg|_{z=0},$$

звідки

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\alpha f\right)\right|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0{}^2}},\ \text{але}\ \frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z_0},\ \text{тоді:}$$

$$\left.\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}-\alpha f\right)\right|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0{}^2}},\ f=e^{\alpha z_0}.$$

Методом варіації сталих знаходимо:

$$C'(z_0)e^{\alpha z}=\frac{1}{2\pi}\frac{\alpha}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0{}^2}},\ C(z_0)=\frac{\alpha}{2\pi}\int_{z_0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha t}dt}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+t^2}}.$$

Тоді $f(P,P_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{z_0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha(z_0-t)}dt}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+t)^2}}$. Отже,

$$G(P,P_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r^*}-2\int_{z_0}^{\infty}\frac{e^{-\alpha(z_0-t)}dt}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+t)^2}}\right).$$

Зауваження. У наведених прикладах (1-4) додатково щоразу потрібно перевіряти: 1) що функція Гріна задовольняє рівняння Лапласа, 2) що вона задовольняє нульову граничну умову відповідної задачі.

Приклад 8. Розв'язати за допомогою функції Гріна граничну задачу для рівняння Лапласа у півплощині y>0, якщо $u\big|_{y=0}=\begin{cases}0, & x<0\\ v, & x>0\end{cases}$.

Розв'язок. Розв'язок задачі згідно з основною інтегральною формулою для еліптичних рівнянь шукаємо у вигляді $u(z_0)=-\int_0^{\infty}v\left(\frac{\partial G(z,z_0)}{\partial n}\right)dx=\int_0^{\infty}v\left(\frac{\partial G(z,z_0)}{\partial y}\right)dx$, де $G(z,z_0)$ - функція Гріна задачі Діріхле для півплощини. Вона має вигляд (див. приклад 1) $G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{|z-\bar z_0|}{|z-z_0|}$. Тоді $u(z_0)=\int_0^{\infty}v\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2\pi}ln\left|\frac{z-z_0}{z-\bar z_0}\right|\right)dx=\frac{v}{2}+\frac{v}{\pi}arctg\frac{x_0}{y_0}$.

Цей розв'язок і є шуканим.

Справді, функція $arctgz$ є гармонічна функція, оскільки вона становить уявну частину гармонічної функції - логарифму. Тоді і $u(z_0)$ буде гармонічною.

Перевіримо, чи має місце виконання крайових умов

$$\lim_{\substack{y_0\to0\\x_0<0}}u(z_0)=\lim_{\substack{y_0\to0\\x_0<0}}u\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{\pi}arctg\frac{x_0}{y_0}\right)=\frac{v}{2}-\frac{v}{2}=0,$$

.

$$\lim_{\substack{y_0\to0\\x_0<0}}u(z_0)=\lim_{\substack{y_0\to0\\x_0<0}}u\left(\frac{v}{2}+\frac{v}{\pi}arctg\frac{x_0}{y_0}\right)=\frac{v}{2}-\frac{v}{2}=0.$$

Розв'язок в околі початку координат обмежений.

Зауваження. Рлзглянута задача є прикладом задачі із розривними крайовими умовами. Розв'язок задачі має бути: 1) гармонічним в області, 2) неперервним продовженням на межі в точках неперервності крайових значень, 3) обмеженим в замкненій області. Метод функції Гріна застосовний, лише кожного разу потрібно виконувати перевірку розв'язку.

Зауваження. Використовуючи метод джерел (метод електростатичних відображень), легко знайти ще деякі функції Гріна для інших областей:

1) функція Гріна другої граничної задачі для півплощини *Imz*>0

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{|z-z_0||z-\bar{z}_0|};$$

2) функція Гріна другої граничної задачі для чверті площини *Imz*>0, *x*>0

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{|z^2-z_0{}^2||z^2-\bar{z}_0{}^2|};$$

3) функція Гріна першої граничної задачі для $|z|\geq R,\quad Im\,z\geq 0$

$$G(z,z_0)=-\frac{1}{2\pi}ln\frac{\left|\frac{z}{R}+\frac{R}{z}-\left(\frac{z_0}{R}+\frac{R}{z_0}\right)\right|}{\left|\frac{z}{R}+\frac{R}{z}-\left(\frac{\bar{z}_0}{R}+\frac{R}{\bar{z}_0}\right)\right|};$$

4) функція Гріна першої зовнішньої граничної задачі для круга радіуса R:

$$G(z,z_0)=\frac{1}{2\pi}ln\frac{1}{r}-\frac{1}{2\pi}ln\frac{R}{r_0r_1},$$

де $r=|z-z_0|$, $r_1=|z-z_0^*|$, z_0^* - точка, симетрична точці z_0 відносно кола, r_0- відстань точки z_0 від центра круга.

Зауваження. Питання про існування функції Гріна розглядається в теорії диференціальних рівнянь еліптичного типу. Доведено, що функції Гріна існують, якщо розв'язки відповідних граничних задач існують і єдині.

Тема 6. Застосування теорії потенціала.

Потенціали слугують зручним апаратом при розв'язанні граничних задач не тільки для областей найпростішого вигляду, але й для областей складнішої форми. Цей метод зручний, насамперед, при теоретичному дослідженні питання про існування та єдиність розв'язку граничних задач, а іноді дає змогу ефективно розв'язати задачу чисельними методами.

Розглянемо поле, що створюється масами, розподіленими на поверхні Σ, паотенціал цього поля визначається поверхневим інтегралом

$$V(M)=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mu(P)}{R_{MP}}d\sigma_P,$$

де $\mu(P)$ - поверхнева щільність в точці *P*. Цей інтеграл називається *потенціалом простого шару*.

Потенціалом подвійного шару називається інтеграл:

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)d\sigma_P \,,$$

де $\nu(P)$ - поверхнева щільність моменту, n_P нормаль до поверхні Σ.

Приклад 1. Знайти об'ємний потенціал *v* кулі радіуса *R* при сталій щільності ρ_0, поставивши граничну задачу для *v*, розв'язати її.

Розв'язок. Оскільки $\rho_0 = const$, то потенціал має сферичну симетрію. Зовні кулі потенціал об'єму - гармонічна функція ($\Delta v = 0$), а на ∞: $V = O\left(\frac{1}{r}\right)$, де *r* - відстань від центра кулі до точки спостереження.

Всередині кулі об'ємний потенціал задовольняє рівняння Пуассона $\Delta v = -4\pi\rho$. Отже, зовні кулі маємо таку крайову задачу для *v*: $\Delta v \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv}{dr}\right) = 0$, $v\big|_{r\to\infty} = 0$, звідки $r^2\frac{dv}{dr} = C_1$, $\frac{dv}{dr} = C_1 r^{-2}$, $v = -\frac{C_1}{r} + C_2$, $C_2 = 0$, (з умови при $r \to \infty$). Для $r \le R$, $\Delta v \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv}{dr}\right) = -4\pi\rho_0$, або $\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dv}{dr}\right) = -4\pi\rho_0 r^2$, звідки $v = -\frac{2}{3}\pi r^2\rho_0 + \frac{C_3}{r} + C_4$.

Оскільки об'ємний потенціал обмежений, то $C_3 = 0$. Враховуючи умову неперервності потенціалу і його похідних першого порядку, при *r*=*R* маємо $-\frac{2}{3}\pi R^2\rho_0 + C_4 = \frac{C_1}{R}$, $-\frac{4}{3}\pi R\rho_0 = -\frac{C_1}{R^2}$, звідки $C_1 = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$, $C_4 = 2\pi R^2\rho_0$.

Отже, $v(r) = \begin{cases} \frac{2}{3}\pi\left(3R^2 - r^2\right)\rho_0, & r \le R, \\ \frac{4}{3}\pi\frac{R^3\rho}{r}, & r \ge R. \end{cases}$

Приклад 2._ Знайти потенціал простого шару, розподіленого із сталою щільністю ρ_0 на сфері радіуса *a*.

Розв'язок._*1спосіб*. Беспосередньо обчислюємо

$$U(r_0) = \iint_S \nu_0\frac{ds}{4\pi r} = \frac{\nu_0}{4\pi}a^2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{sin\theta d\theta}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2ar_0\,cos\theta}} =$$

$$= \frac{\nu_0 a^2}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2ar_0 x}} = \begin{cases} \frac{\nu_0 a}{\pi}, & r_0 < a, \\ \frac{\nu_0 a^2}{\pi r_0}, & r_0 > a. \end{cases}$$

2 спосіб. Знайдемо потенціал простого шару, поставивши граничну задачу для u і розв'яжемо її при $\Delta u = 0,\quad r \neq a$. $u = u(r)$ - скрізь неперервна функція, крім *r=a*, а при *r=a* має розривні нормальні похідні $\left.\frac{du_2}{dr}\right|_{r=a} = -\left.\frac{du_1}{dr}\right|_{r=a} = \frac{\nu_0}{\pi}$, де u_1 - розв'язок рівняння $\Delta u = 0$ зовні сфери (*r*>*a*), u_2 - розв'язок всередені сфери (*r*<*a*).

Отже, $\quad \Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{du}{dr}\right) = 0,\quad u_1 = -\frac{C_1}{r} + C_2,\quad u_2 = -\frac{C_3}{r} + C_4,\qquad C_2 = 0$

оскільки при $r \to \infty,\quad u_1 = 0;\quad C_3 = 0$ - в силу обмеженості розв'язку.

Використовуємо умову неперервності функції $u(r)$ і умову розривності нормальної похідної $u(r)$: $-\left.\frac{C_1}{r^2}\right|_{r=a} = \frac{\nu_0}{\pi},\quad -\left.\frac{C_1}{r}\right|_{r=a} = C_4,\ C_1 = -\frac{a^2\nu_0}{\pi},\quad C_4 = a\nu_0$.

Отже,

$$u(r) = \begin{cases} \frac{\nu_0 a}{\pi}, & r < a, \\ \frac{\nu_0 a^2}{\pi r}, & r > a. \end{cases}$$

Приклад 3. За допомогою потенціалу подвійного шару розв'язати задачу Діріхле: а) всередені круга; б) зовні круга.

Розв'язок. Маємо задачу $\Delta u = 0,\quad u|_C = f$. (рис.7)

а) Розв'язок шукаємо у вигляді логарифмічного потенціалу подвійного шару $u(M) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \nu(s)\frac{cos\varphi}{r}ds$, де $\varphi = \angle MPP',\quad r = |MP|$, M - точка в середені круга.

Внутрішня нормаль в точці Р напрямлена вздовж діаметра і $cos\varphi_0 = \frac{r_0}{2a}$. $r_0 = |PP_0|,\quad \varphi_0 = \angle P_0PP'$. Тоді інтегральне рівняння для функції ν має вигляд $\nu(s_0) + \frac{1}{\pi}\int\limits_C \frac{1}{2a}\nu(s)ds = \frac{1}{\pi}f(s_0)$.

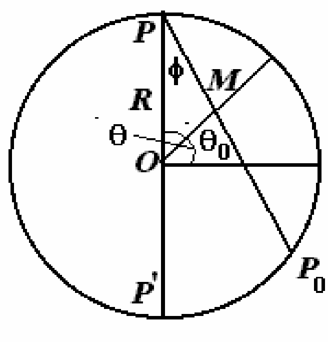

РИС.7

Очевидно, що розв'язком цього рівняння є функція $\nu(s) = \frac{1}{\pi}f(s) + A$, де A - деяка невідома стала. Підставивши цей розв'язок у рівняння знаходимо для сталої A вираз через задану функцію: $A = -\frac{1}{4\pi^2 a}\int\limits_C f(s)ds$.

Отже, $\nu(s)=\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4a\pi^2}\int\limits_C f(s)\,ds$ є розв'язком інтегрального рівняння.

Відповідний потенціал подвійного шару має вигляд

$$u(M)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C \nu(s)\frac{cos\varphi}{r}ds=\int\limits_C\left[\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4a\pi^2}\int\limits_C f(s)\,ds\right]\frac{cos\varphi}{r}ds=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_C f(s)\left[\frac{cos\varphi}{r}-\frac{1}{2a}\right]ds$$

З Δ OPM (рис.7) випливає

$$\frac{cos\varphi}{r}-\frac{1}{2a}=\frac{2ar\,cos\varphi-r^2}{2ar^2}=\frac{a^2-\rho_0^2}{2a\left[a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\,cos(\theta-\theta_0)\right]},$$

так як $\rho_0^2=a^2+r^2-2ar\,cos\varphi$.

Тоді дістаємо остаточний розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для круга у вигляді інтегралу Пуассона: $u(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho_0^2}{\left[a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\,cos(\theta-\theta_0)\right]}f(\theta)\,d\theta$.

б). Для зовнішньої задачі Діріхле для круга маємо:

$$u(\rho_0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\rho_0^2-a^2}{\left[a^2+\rho_0^2-2a\rho_0\,cos(\theta-\theta_0)\right]}f(\theta_0)\,d\theta_0.$$

Приклад 4. Знайти розв'язок задачі Неймана для круга, користуючись потенціалом простого шару (рис.8)

Розв'язок. а). Внутрішня задача Неймана: $\Delta u=0,\quad \left.\frac{\partial u^+}{\partial n}\right|_{r=R}=f(\varphi)$.

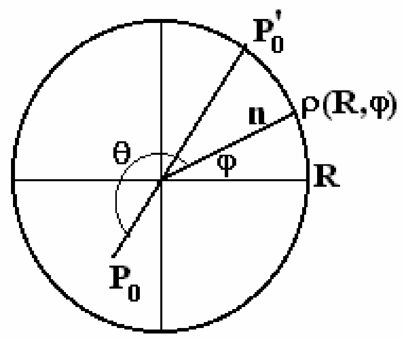

РИС. 8

Шукаємо розв'язок у вигляді $u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r=R}g(\varphi)ln\frac{1}{r}ds$. Інтегральне рівняння для g має вигляд $g(\varphi_0)=-2f(\varphi_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_{r=R}g(\varphi)R\frac{cos\varphi}{r}d\varphi$.

Маємо: $g(\varphi_0)=-2f(\varphi_0)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi)R\frac{cos\varphi}{r}d\varphi=-2f(\varphi_0)+A$,

$A=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi+C$. Отже, так як $\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$, тоді

$$u(r,\theta)=-\frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}ln\frac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\,cos(\theta-\varphi)}}f(\varphi)\,d\varphi+C,$$

де $C=\frac{C_1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}R\,ln\frac{1}{r}d\varphi=const$. Покажемо, що $\int\limits_0^{2\pi}ln\frac{1}{r}ds=const$.

Справді, функція $u_1(r,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_C ln\dfrac{1}{r}ds$ є розв'язком задачі Неймана з граничною умовою $\left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{r=R}=0.$

Тому, в силу єдиності розв'язку задачі Неймана, $\int\limits_0^{2\pi} ln\dfrac{1}{r}ds=const$.

б). Зовнішня задача Неймана. У даному разі інтегральне рівняння має вигляд $g(\varphi_0)=2f(\varphi_0)-\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi)d\varphi=2f(\varphi_0)-A,\ A=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi$

Розв'язком задачі є $u(r,\theta)=\dfrac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} ln\dfrac{1}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\,cos(\theta-\varphi)}}f(\varphi)\,d\varphi$, оскільки $A=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$.

Зауваження. Легко перевірити, що умова $\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(\varphi)d\varphi=0$ забезпечує виконання умови регулярності розв'язку розглядуваної задачі Неймана на нескінченності.

Приклад 5. Знайти розв'язок задачі Діріхле у півплощині (рис.9) $\Delta u=0,\quad u|_{y=0}=\Phi(x).$

Розв'язок. Шукаємо увигляді потенціалу подвійного шару

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\nu(s)\frac{cos\,\varphi}{r}ds.$$

Але $cos\,\varphi=\dfrac{y_0}{r}$, тоді

$$u(x_0,y_0)=\frac{y_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\nu(s)\frac{ds}{(x-x_0)^2+y_0^2}.$$

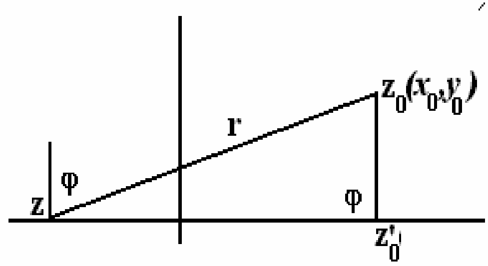

РИС. 9

Скориставшись теоремою про граничні значення потенціалу подвійного шару, дістаємо:

$$\Phi(x_0')=\frac{\nu(x_0')}{2}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\nu(s)\frac{cos\,\varphi_0}{r_0}ds,$$

$cos\,\varphi_0=0$. Тоді $2\Phi(x_0')=\nu(x_0')$

Шуканим розв'язком є $u(x_0,y_0)=\dfrac{y_0}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x)\dfrac{dx}{(x-x_0)^2+y_0^2}$.

Завдання для самостійної індивідуальної роботи.

Розрахункове індивідуальне завдання № 1.

1. Знайти диференціальне рівняння малих поздовжних коливань тонкого стрижня змінного перерізу S=S(x). Розглянути випадок конічного стрижня. Сформулювати початкові і крайові умови для таких випадків:

а) один кінець (x=0) стрижня закріплено, другий (x=l) розтягнуто силою F, в момент t=0 дія сили миттєво припиняється;

б) до кінця x=l стрижня, який перебуває у стані рівноваги, в момент t=0 прикладено розтягувальну силу F(t);

в) стрижень закріплено пружно в точці x=0, а до вільного кінця x=l прикріплено вантаж M_0. Початкові умови довільні.

2. Знайти диференціальне рівняння малих поздовжніх коливань циліндричного стрижня. Сформулювати початкові і крайові умови для випадку, коли один кінець його закріплений, а другий - вільний.

3. Поставити крайову задачу про охолодження тонкого кільця, на поверхні якого відбувається конвективний теплообмін (за законом Ньютона) з навколишнім середовищем, що має задану температуру. Нерівномірністю розподілу температури по товщині кільця нехтувати.

4. Пружний однорідний циліндр виведено з стану спокою тим, що в момент часу t=0 його поперечні перетини отримують малі повороти у своїх площинах відносно вісі циліндру. Поставити граничну задачу для визначення кутів повороту поперечних перетинів циліндру при t>0; розглянути випадки вільних, жорстко закріплених та пружно закріплених кінців.

5. Поставити граничну задачу про поперечні коливання важкої струни відносно вертикального положення рівноваги, якщо її верхній кінець жорстко закріплений, а нижній - вільний.

6. Поставити граничну задачу про нагрівання тонкого циліндричного стрижня, вздовж якого ковзає з постійною швидкістю електрична піч постійної потужності, яка щільно прилягаєдо нього. Зовнішня поверхня печі теплоізольована, а теплоємністю печі можна нехтувати.

7. Вивести рівняння, якому задовольняє температура стаціонарного теплового поля у однорідному середовищі. Врахувати наявність розподілених витоків тепла, що не змінюються з часом. Дати фізичну інтерпретацію граничних умов першого, другого та третього роду.

8. Показати, що потенціал швидкостей стаціонарного потоку нестискуваної рідини задовольняє рівнянню Лапласа. Написати граничну умову на поверхні твердого тіла, що знаходиться в стані спокою або рухається з деякою заданою швидкістю.

9. Впевнитись в тому, що потенціал електричного поля постійного електричного струму задовольняє рівнянню Лапласа. Сформулювати граничні умови: 1) на заземленій ідеально провідній поверхні; 2) на границі з діелектриком.

10. Знайти рівняння стаціонарного розподілу температури в кулі радіуса R. Поставити граничну задачу для випадку, коли частина поверхні якої S_1 має сталу температуру U_0, решта поверхні S_2 має нульову температуру.

11. Абсолютно гнучку однорідну нитку закріплено на одному з кінців. Під дією своєї ваги вона знаходиться у вертикальному положенні рівноваги. Вивести рівняння малих коливань нитки.

12. Важку однорідну нитку довжини l закріплено верхнім кінцем до вертикальної вісі. Нитка обертається навколо цієї вісі з постійною кутовою швидкістю ω. Вивести рівняння малих коливань нитки біля свого вертикального положення рівноваги.

13. Поставити граничну задачу для визначення температури однорідного ізотропного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією *x*. Стрижень має сталий поперечний переріз. Кінці стрижня підтримуються при заданій температурі.

14. Поставити граничну задачу для стаціонарного теплового поля у однорідному середовищі, що знаходиться у замкненому об'ємі з границею Σ. На границі задано тепловий потік q_0. Врахувати наявність розподілених витоків тепла, що не змінюються з часом.

15. Поставити крайову задачу для визначення температури однорідного ізотропного стрижня $0 \le x \le l$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо його початкова температура є довільною функцією *x*. Стрижень має сталий поперечний переріз. На кінці стрижня відбувається конвективний теплообмін (за законом Ньютона) з середовищем, температура якого задана

16. Поставити граничну задачу про розподял температури стрижня, на бічній поверхні якого відбувається конвективний тепловий обмін з середовищем нульової температури, якщо на кінці стрижня подаються зовні сталі теплові потоки, а початкова температура є довільною функцією.

17. Проінтегрувати рівняння малих поздовжніх коливань циліндричного стрижня, коли один кінець його закріплений, а другий - вільний.

18. Знайти поперечні коливання прямокутої мембрани $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$ із закріпленим краєм, викликані початковим відхиленням $u(x, y, 0) = f(x, y)$, нехтуючи реакцією навколишнього середовища.

19. Дано тонку прямокутну пластинку із сторонами *l* і *m* (які збігаються із осями координат). Для цієї пластинки відомим є початковий розподіл температури. Бічні сторони *x*=0, *x*=*l* під час спостереження підтримуються при нульовій температурі, а обидві основи мають заданий розподіл температури $u\big|_{y=0} = \varphi_0(x)$, $u\big|_{y=m} = \varphi_1(x)$ $(0 \le x \le l)$. Знайти температуру будь-якої точки пластинки в момент часу $t > 0$.

20. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному круговому циліндрі радіуса *R*, бічна поверхня якого підтримується при сталій температурі U_0. Початкова температура всередині циліндра дорівнює нулеві.

21. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхлє для пів-кола одиничного радіусу.

22. Побудувати функцю Гріна першої крайової задачі для прямого кута на площині.

23. Побудувати функцію Гріна першої крайової задачі для області *D*, що лежить всередині прямого двогранного кута.

24. Розв'язати за допомогою функції Гріна першу крайову задачу всередині двогранного кута $\alpha = \frac{\pi}{n}$, де n - натуральне число, якщо на його сторонах задано такі крайові умови: $u\big|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad u\big|_{\varphi=0} = V$.

Розрахункове індивідуальне завдання № 2.

Звести до канонічного вигляду наступні рівняння та знайти загальний розв'зок:

1 $U_{xx} + xU_{yy} = 0$

2 $y^2U_{xx} + 2yxU_{xy} + x^2U_{yy} = 0$

3 $x^2U_{xx} + 2yxU_{xy} + y^2U_{yy} = 0$

4 $y^2U_{xx} + x^2U_{yy} = 0$

5 $x^2U_{xx} + y^2U_{yy} = 0$

6 $y^2U_{xx} - x^2U_{yy} = 0$

7 $4y^2U_{xx} - e^{2x}U_{yy} - 4y^2U_x = 0$

8 $sin^2 xU_{xx} - 2y\,sin\,xU_{xy} + y^2U_{yy} = 0$

9 $signyU_{xx} + 2U_{xy} + signxU_{yy} = 0$

10 $U_{xx} + 2U_{xy} + (1 - signy)U_{yy} = 0$

11 $signyU_{xx} + 2U_{xy} + U_{yy} = 0$

12 $U_{xx} + xyU_{yy} = 0$

13 $yU_{xx} + xU_{yy} = 0$

14 $xU_{xx} + yU_{yy} = 0$

15 $U_{xx} + yU_{yy} + 0{,}5U_y = 0$

16 $U_{xx} + yU_{yy} = 0$

17 $(1 + x)U_{xx} + 2xyU_{xy} - y^2U_{yy} = 0$

18 $U_{xx} + 2U_{xy} - U_{yy} + U_x + U_y = 0$

19 $U_{xx} + 4U_{xy} + 4U_{yy} - U_x - 2U_y = 0$

20 $U_{xx} - 2U_{xy} + U_{yy} + 2U_x - 2U_y = 0$

21 $U_{xx} + 6U_{xy} + 9U_{yy} + U_x + 3U_y = 0$

22 $U_{xx} - 6U_{xy} + 9U_{yy} - 2U_x + 6U_y = 0$

23 $4U_{xx} + 8U_{xy} + 3U_{yy} = 0$

24 $12U_{xx} + 8U_{xy} + U_{yy} = 0$

25 $U_{xx} + 3U_{xy} + 2U_{yy} = 0$

Розрахункове індивідуальне завдання № 3.

Розв'язати першу мішану граничну задачу для хвильового рівняння на відрізку.

1. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-2), \quad u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = 0, \quad u(2,t) = 0$

2. $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$

3. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 3/2, \quad 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x - 3/2), \quad u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = 0, \quad u(3/2, t) = 0$

4. $u_{tt} = 4u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$

$u(x,0) = x(x-1), \quad u_t(x,0) = 0,$

$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0$

5. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < t < \infty$

6. $u_{tt} = \frac{4}{9}u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{2}{3}, \quad 0 < t < \infty$

$u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{1}{2},t\right)=0$

$u(x,0)=x\left(x-\frac{2}{3}\right),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{2}{3},t\right)=0$

7. $u_{tt}=4u_{xx},\quad 0<x<\frac{1}{2},\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{1}{2},t\right)=0$

8. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx},\quad 0<x<\frac{1}{2},\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{1}{2},t\right)=0$

9. $u_{tt}=16u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-3),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(3,t)=0$

10. $u_{tt}=16u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0$

11. $u_{tt}=9u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$

12. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0$

13. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-3),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(3,t)=0$

14. $u_{tt}=16u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$

15. $u_{tt}=9u_{xx},\quad 0<x<\frac{3}{2},\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x\left(x-\frac{3}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{3}{2},t\right)=0$

16. $u_{tt}=4u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-3),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(3,t)=0$

17. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0$

18. $u_{tt}=\frac{1}{4}u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$

19. $u_{tt}=\frac{1}{9}u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-1),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0$

20. $u_{tt}=\frac{4}{9}u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<\infty$
$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=0,$
$u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0$

21. $u_{tt}=u_{xx},\quad 0<x<\frac{1}{2},\quad 0<t<\infty$

22. $u_{tt}=\frac{9}{4}u_{xx},\quad 0<x<\frac{3}{2},\quad 0<t<\infty$

$u(x,0)=x\left(x-\frac{1}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{1}{2},t\right)=0$

$u(x,0)=x\left(x-\frac{3}{2}\right),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u\left(\frac{3}{2},t\right)=0$

23. $u_{tt}=\frac{9}{4}u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<\infty$

$u(x,0)=x(x-3),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u(3,t)=0$

24. $u_{tt}=9u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<\infty$

$u(x,0)=x(x-2),\quad u_t(x,0)=0,$

$u(0,t)=0,\quad u(2,t)=0$

Розрахункове індивідуальне завдання № 4.

Розв'язати першу мішану граничну задачу для рівняння теплопровідності на відрізку.

1. $u_t=4u_{xx},\quad 0<x<5,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{5}, & 0\le x\le\frac{5}{2},\\ 5-x, & \frac{5}{2}<x\le 5\end{cases}$$

$u(0,t)=u(5,t)=0$

2. $u_t=16u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}, & 0\le x\le\frac{3}{2}\\ 3-x, & \frac{3}{2}<x\le 3\end{cases},$$

$u(0,t)=u(3,t)=0$

3. $u_t=u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases},$$

$u(0,t)=u(2,t)=0$

4. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<5,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{5}, & 0\le x\le\frac{5}{2},\\ 5-x, & \frac{5}{2}<x\le 5\end{cases}$$

$u(0,t)=u(5,t)=0$

5. $u_t=16u_{xx},\quad 0<x<4,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & 2<x\le 4\end{cases},$$

$u(0,t)=u(4,t)=0$

6. $u_t=u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{3}, & 0\le x\le\frac{3}{2},\\ 3-x, & \frac{3}{2}<x\le 3\end{cases}$$

$u(0,t)=u(3,t)=0$

7. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<8,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{4}, & 0\le x\le 4\\ 8-x, & 4<x\le 8\end{cases},$$

$u(0,t)=u(8,t)=0$

8. $u_t=9u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases},$$

$u(0,t)=u(2,t)=0$

9. $u_t=16u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<+\infty$

10. $u_t=4u_{xx},\quad 0<x<4,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

12. $u_t=9u_{xx},\quad 0<x<10,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{5}, & 0\le x\le 5\\ 10-x, & 5<x\le 10\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(10,t)=0$$

13. $u_t=9u_{xx},\quad 0<x<3,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{3}, & 0\le x\le \frac{3}{2}\\ 3-x, & \frac{3}{2}<x\le 3\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(3,t)=0$$

15. $u_t=4u_{xx},\quad 0<x<7,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{7}, & 0\le x\le \frac{7}{2}\\ 7-x, & \frac{7}{2}<x\le 7\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(7,t)=0$$

17. $u_t=9u_{xx},\quad 0<x<4,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & 2<x\le 4\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(4,t)=0$$

19. $u_t=4u_{xx},\quad 0<x<2,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}x^2, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x\le 2\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(2,t)=0$$

$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & 2<x\le 4\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(4,t)=0$$

12. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<9,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{9}, & 0\le x\le \frac{9}{2}\\ 9-x, & \frac{9}{2}<x\le 9\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(9,t)=0$$

14. $u_t=u_{xx},\quad 0<x<5,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{2x^2}{5}, & 0\le x\le \frac{5}{2}\\ 5-x, & \frac{5}{2}<x\le 5\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(5,t)=0$$

16. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

18. $u_t=u_{xx},\quad 0<x<10,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\frac{x^2}{5}, & 0\le x\le 5\\ 10-x, & 5<x\le 10\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(10,t)=0$$

20. $u_t=u_{xx},\quad 0<x<1,\quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1-x, & \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases},$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0$$

21. $u_t=25u_{xx},\quad 0<x<4,\quad 0<t<+\infty$

22. $u_t=16u_{xx},\quad 0<x<6,\quad 0<t<+\infty$

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & 0\le x\le 2\\ 4-x, & 2<x\le 4\end{cases},$$
$u(0,t)=u(4,t)=0$

$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}, & 0\le x\le 3\\ 6-x, & 3<x\le 6\end{cases},$$
$u(0,t)=u(6,t)=0$

23. $u_t=4u_{xx}, \quad 0<x<1, \quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}2x^2, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 1-x, & \dfrac{1}{2}<x\le 1\end{cases},$$
$u(0,t)=u(1,t)=0$

24. $u_t=9u_{xx}, \quad 0<x<5, \quad 0<t<+\infty$
$$u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{2x^2}{5}, & 0\le x\le \dfrac{5}{2}\\ 5-x, & \dfrac{5}{2}<x\le 5\end{cases},$$
$u(0,t)=u(5,t)=0$

Розрахункове індивідуальне завдання № 5.

Використовуючи формулу Пуассона, знайти розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності.

1. $u_t=u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2+x}$

2. $u_t=4u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2+x}$

3. $u_t=7u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2+x}$

4. $u_t=5u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2-x}$

5. $u_t=u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2+2x}$

6. $u_t=8u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-3x^2}$

7. $u_t=10u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2-2x}$

8. $u_t=11u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-3x^2-x}$

9. $u_t=13u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-3x^2+2x}$

10. $u_t=14u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2+x}$

11. $u_t=16u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2-2x}$

12. $u_t=15u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2+2x}$

13. $u_t=13u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2+4x}$

14. $u_t=12u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2-2x}$

15. $u_t=10u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-2x^2-4x}$

16. $u_t=9u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2+4x}$

17. $u_t=7u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2+2x}$

18. $u_t=4u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2-x}$

19. $u_t=4u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-3x^2+6x}$

20. $u_t=3u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2-6x}$

21. $u_t=u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2-4x}$

22. $u_t=6u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2-x}$

23. $u_t=2u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-x^2}$

24. $u_t=2u_{xx}, \quad u(x,0)=e^{-4x^2+8x}$

Розрахункове індивідуальне завдання № 6.

Розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі.

1. $\Delta u=0, \quad 0\le r<1, \quad u\big|_{r=1}=\varphi^2+\varphi+1$

2. $\Delta u=0, \quad 0\le r<2, \quad u\big|_{r=2}=\varphi^2-\varphi$

3. $\Delta u=0, 0\le r<1, u\big|_{r=1}=2\varphi^2+3\varphi+5$

4. $\Delta u=0, 0\le r<2, \quad u\big|_{r=2}=\varphi^2+5\varphi+7$

5. $\Delta u=0, \quad 0\le r<3, \quad u\big|_{r=3}=\varphi^2$

6. $\Delta u=0, 0\le r<1, \quad u\big|_{r=1}=3\varphi^2+\varphi+2$

7. $\Delta u = 0, 0 \le r < 4, u\big|_{r=4} = 5\varphi^2 + 2\varphi + 2$

8. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = 4\varphi^2 + 3\varphi + 1$

9. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = \varphi^2$

10. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = 3\varphi^2 - \varphi - 1$

11. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = 2\varphi^2 - 5\varphi - 2$

12. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = 4\varphi^2 - 3\varphi + 1$

13 . $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = 5\varphi^2 - 2\varphi + 1$

14. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = \varphi^2 - 5\varphi$

15. $\Delta u = 0, \quad 0 \le r < 3, \quad u\big|_{r=3} = -\varphi^2 + 3\varphi$

16. $\Delta u = 0, 0 \le r < 4, u\big|_{r=4} = -2\varphi^2 + 7$

17. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = \varphi^2 - 3\varphi + 4$

18. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = \varphi^2 + 7\varphi - 1$

19. $\Delta u = 0, 0 \le r < 2, u\big|_{r=2} = 5\varphi^2 - \varphi + \pi$

20. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = 6\varphi^2 - 5\varphi + 3$

21. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = -3\varphi^2 + 5\varphi - 2$

22. $\Delta u = 0, 0 \le r < 3, u\big|_{r=3} = \varphi^2 + 2\varphi$

23. $\Delta u = 0, 0 \le r < 4, u\big|_{r=4} = \varphi^2 - \varphi$

24. $\Delta u = 0, 0 \le r < 1, u\big|_{r=1} = 3\varphi^2 + 2\varphi - 2$

Література

1. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский Уравнения математической физики. - М.: Наука. - 1972.- 736с.
2. С.Фарлоу Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир.- 1985. - 384с.
3. С.Л. Соболев Уравнения математической физики. - М.: Наука. - 1966.- 444с.
4. Сборник задач по уравнениям математической физики (под ред. В.С.Владимирова) - М.-"Наука".-1982.-256 с.
5. А.А.Самарский Сборник задач по уравнениях с частными производными- М.: Наука. - 1972.- 736с.
6. Н.О.Вірченко Деякі типові крайові задачі математичної фізики та методи їх розв'язання - К. "Вища школа", вид. При КДУ. - 1976.-56 с
7. В.Ф.Чудесенко Сборник заданий по специальным курсам высшей математики.- М.- Высшая школа.-1983.-112 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Навчальний посібник Методи розв'язання деяких типових задач математичної фізики для студентів спеціальностей “Прикладна математика” та “Фізики твердого тіла”

Укладач: Леонід Олексійович Олійник

Підписано до друку__________________1999р. Формат_________________
Обсяг_____________д.а. Тираж________________екз. Заказ_____________
322618 м.Дніпродзержинськ, вул Дніпробудівська, 2.