

Міністерство освіти і науки України  
Дніпровський державний технічний університет

# **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

**з дисципліни «ОПР МАТЕРІАЛІВ»**

Частина 2

Затверджено  
редакційно-видавничою секцією  
науково-методичною радою ДДТУ  
(Протокол № \_\_\_\_ від «\_\_» \_\_\_\_\_ 2016 р.)

м. Кам'янське  
2016

Розповсюдження і тиражування без офіційного дозволу Дніпровського державного технічного університету заборонено.

**Опір матеріалів.** Конспект лекцій (напрямку: 6.050502 «Інженерна механіка», 6.050503 «Машинобудування», 6.070106 «Автомобільний транспорт») / укл: Теліпко Л.П. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2016. – 157с.

Укладач: канд. техн. наук, доцент Теліпко Леонід Петрович

Відповідальний за випуск: зав. каф. ТПМ, проф. *Мамаєв Л.М.*

Рецензент: канд. техн. наук, доцент *Чухно С.І.*

Затверджено на засіданні кафедри теоретичної та прикладної механіки ДДТУ  
(Протокол № 15 від 24 травня 2016р.)

Коротка анотація: Конспект лекцій направлений на закріплення, поглиблення та узагальнення теоретичних знань, з таких розділів, як диференціальне рівняння зігнутої осі балки, визначення переміщень.

## ЛЕКЦІЯ 1

### ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ЗІГНУТОЇ ОСІ БАЛКИ ТА ЙОГО ІНТЕГРУВАННЯ

#### 1.1. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

При практичних розрахунках деталей, які працюють на згин, крім розрахунку на міцність необхідно також виконувати розрахунок на жорсткість. Під розрахунком на жорсткість ми розуміємо оцінку пружної податливості балки під дією прикладеного навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не буде перевищувати встановлених нормами границь.

Розглянемо деформацію балки при плоскому згинанні (рис. 1.1) Вісь балки під дією навантаження в одній з головних площин інерції викривлюється в тій самій площині, а поперечні перерізи повертаються і одночасно дістають поступальне переміщення в напрямку осі  $y$ . Викривлену вісь балки називають зігнутою віссю, або пружною лінією, а переміщення точок осі балки в напрямку, перпендикулярному до недеформованої осі балки, називають прогинами балки (прогинами осі балки або прогинами перерізів балки) й позначаються літерою  $y$  (рис. 1.1.)

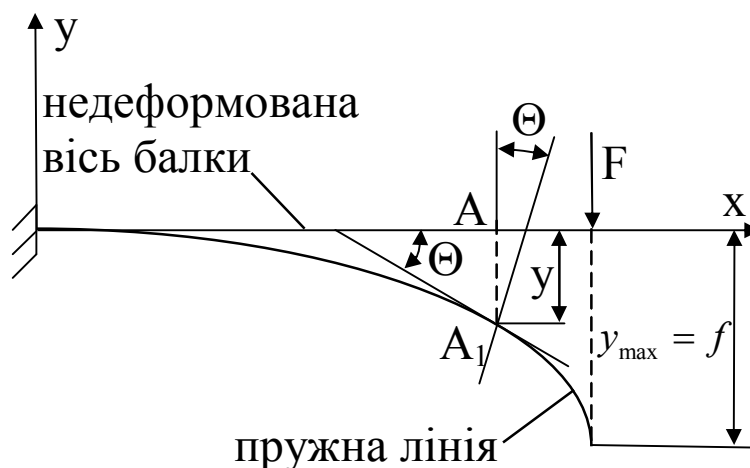


Рис. 1.1

Найбільший прогин балки називається стрілою прогину і позначається літерою  $f$ .

Кут  $\Theta$ , на який кожний переріз повертається відносно свого початкового положення, називається кутом повороту перерізу

Кут повороту може бути визначеним як кут між дотичною до пружної лінії й віссю  $x$  (рис. 1.1).

Необхідно зазначити, що довжина зігнутої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні бруса не змінюється отже, при цьому відбувається зміщення її точок також у напрямі осі  $x$ . Проте ці переміщення такі малі, що ними можна нехтувати.

Прогини балки будемо вважати додатними, якщо точки її осі переміщуються при деформації вгору. Кути повороту  $\Theta$  додатні, якщо поперечні перерізи при деформації повертаються проти годинникової стрілки.

Відтак, знайдемо залежність

$$y = f(x),$$

яка виражає закон зміни прогинів по довжині балки. Для цього скористуємося рівністю

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI}. \quad (1.1)$$

Ця рівність зв'язує кривизну зігнутої осі балки  $K = 1/\rho$  із згинаючим моментом  $M$  та жорсткістю балки  $EI$  в розглядуваному перерізі. Нагадаємо, що добуток  $EI$  характеризує спільну спроможність балки чинити опір згину. Момент інерції  $I$ , який входить у вираз жорсткості, характеризує спроможність балки чинити опір викривленню в залежності від форми та розмірів поперечного перерізу. Модуль пружності  $E$  характеризує ту ж спроможність балки чинити опір викривленню, але вже в залежності від властивостей її матеріалу.

Перейдемо до складання диференціального рівняння зігнутої осі балки. З курсу вищої математики відомо таке рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}, \quad (1.2)$$

Тепер для здобуття диференціального рівняння зігнутої осі балки залишаються прирівняти праві частини рівнянь (1.1) та (1.2), з'ясувавши попередньо питання про знаки.

Якщо згинаючий момент додатний, то пружна лінія своїм угнутих боком повернута вгору (рис. 1.2, а) і, отже, при взятому напрямку координатних осей кривизна  $K = 1/\rho$  вважається додатною. При від'ємному згинаючому моменті кривизна теж від'ємна. Якщо

вісь  $y$  спрямована вниз, то при додатному згинаючому моменті кривизна буде від'ємною, а при від'ємному моменті додатною (рис. 1.2. в).

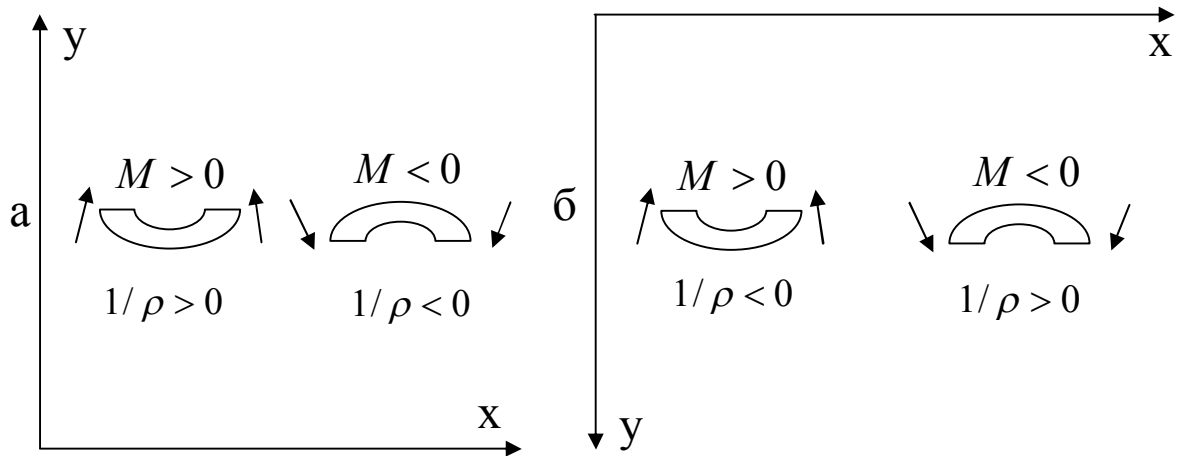


Рис. 1.2.

Зберігаючи вибраний нами напрям осі вгору, маємо відповідність між знаком моменту та знаком кривизни, тому можна просто прирівняти праві частини рівнянь (1.1) та (1.2)

$$\frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.3)$$

Рівняння /1.3/ називають точним рівнянням зігнутої осі балки. Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, інтегрувати яке, як відомо, досить важко. Це рівняння використовується для знаходження прогинів і кутів нахилу в гнучких балках, які мають значні прогини.

Рівняння (1.3) називають точним рівнянням зігнутої осі балки. Воно є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку, інтегрувати яке, як відомо, досить важко. Це рівняння використовується для знаходження прогинів і кутів нахилу в гнучких балках, які мають значні прогини.

Добуте диференціальне рівняння зігнутої осі балки при практичних розрахунках можна значно спростити, так як більшість балок, які застосовуються в будівництві, є досить жорсткими, а їх прогини дуже малі в порівнянні до їх довжини. Наприклад, для вільно обіпертої краями дерев'яної балки прольотом 6 м, звичайні прогини не перевищують, 3 см. Для такої ж сталевий балки, прогини, як правило, не більші 1 см. Таким чином, для більшості балок максимальні прогини не перевершують  $1/200 \div 1/600$  від їх довжини. У знаменнику рівняння /1.3/ стоїть сума двох доданків:

$$1 + (y')^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \Theta$$

При малих прогинах кути нахилу балки рідко коли досягають  $0,3^\circ \dots 0,5^\circ$  та майже ніколи не перевищують  $1^\circ$ . Тангенси таких кутів є малі величини. Для взятих прикладів вони будуть

$$\operatorname{tg}(0,3^\circ) = 0,006; \operatorname{tg}(0,5^\circ) = 0,009; \operatorname{tg}1^\circ = 0,018,$$

а квадрати цих тангенсів

$$0,006^2 = 0,000036; 0,009^2 = 0,000081; 0,018^2 = 0,000324,$$

дуже малі порівняне з одиницею. Тому цими величинами можна знехтувати без відчутної для практичних цілей помилки. Тоді дістанемо спрощене диференціальне рівняння пружної лінії:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (1.4)$$

в якому згинальний момент  $M(x)$  визначається для недеформованої балки. Рівняння (1.4) будемо називати основним диференціальним рівнянням пружної лінії балки (для малих деформацій). За Його допомогою можна обчислювати лінійні та кутові переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

## 1.2. Метод безпосереднього інтегрування

Цей метод є аналітичним. Він заснований на інтегруванні диференціального рівняння /1.4/ зігнутої осі балки:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \\ \Theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)dx}{EI} + C \\ y(x) = \int dx \int \frac{M(x)dx}{EI} + Cx + D \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Інтегрування проводиться по ділянкам. Для цього необхідно спочатку скласти вирази згинального моменту для кожної ділянки балки. Таким чином, зігнута вісь балки може бути знайдена методом безпосереднього інтегрування за умовою, що буде відомим закон зміни згинаючого моменту  $M(x)$  для кожної ділянки балки.

В результаті двократного інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі з'являються дві сталі інтегрування  $C$  та  $D$ . Якщо балка розбита на  $n$  ділянок, то невідомими будуть  $2n$  сталих інтегрування. Їх визначають з граничних умов закріплення кінців балки та умов спряження суміжних ділянок балки. Граничні умови залежать тільки від способу закріплення балки. Якщо кінець балки жорстко закріплений (рис. 1.3, а),

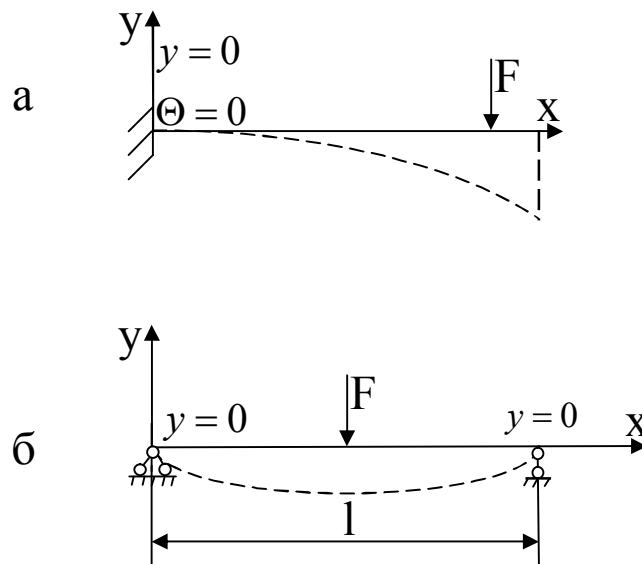


Рис.1.3.

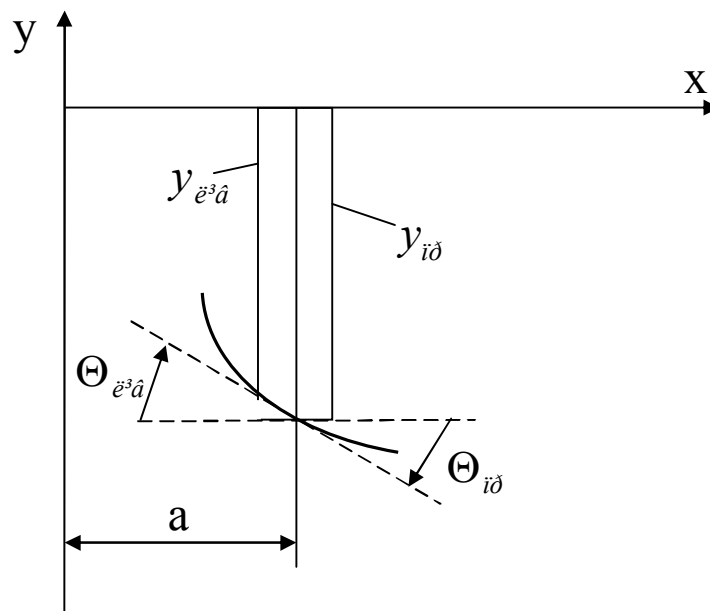


Рис.1.4.

то прогин  $y$  та кут нахилу  $\Theta$  в закріпленні завжди дорівнюють нулю. Якщо ж балка, має шарнірне закріплення (рис. 1.3, б), то прогин  $y$  на цьому місці балки завжди дорівнює нулю, а кут нахилу  $\Theta$  невідомий.

Отже, для консолі (рис. 1.3, а) граничні умови повинні бути записані у вигляді:

$$\text{при } x = 0; y = 0; \Theta = 0; \quad (1.7)$$

для вільно обіпертої кінцями балки (рис.1.3.б) граничні умови при  $x = 0; y(0) = 0;$  при  $x = l; y(l) = 0$  (1.7)

Таким чином, при розв'язанні задачі методом безпосереднього інтегрування для будь-якої статично визначної балки можна поставити дві граничні умови. Ці умови називають геометричними, оскільки вони виражаються через прогин  $y$  та кут нахилу  $\Theta$ .

Якщо балка розбита на декілька ділянок, то граничних умов для визначення сталих інтегрування виявляється недостатньо. До них в цьому випадку необхідно ще приєднати умови спряження суміжних ділянок балки.

Так як зігнута вісь балки повинна бути неперервною плавною кривою (рис. 1.4.) прогини та кути нахилу на межі ділянок повинні бути однаковими як для лівої, так і для правої ділянки. Тому на межі ділянок

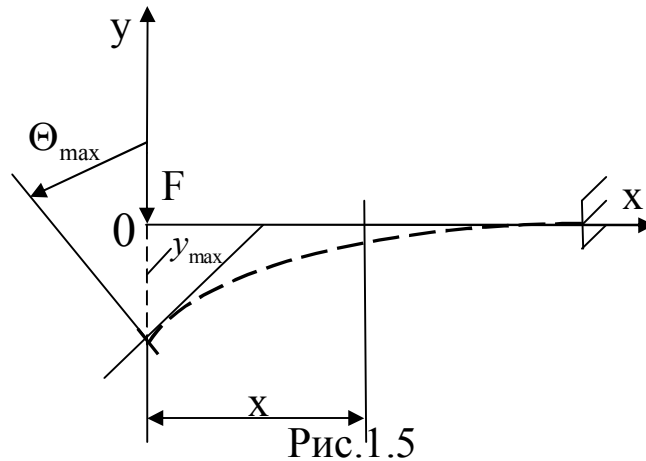
$$\text{при } x = a \begin{cases} y_{\text{ліва}} = y_{\text{права}} \\ \Theta_{\text{ліва}} = \Theta_{\text{права}} \end{cases} \quad (1.8)$$

Таким чином, для балки, яка має  $n$  ділянок, визначаючи  $2n$  сталих інтегрування, завжди можна скласти дві граничні умови, та  $(2n-2)$ умови спряження суміжних ділянок. Кількість рівнянь в цьому випадку буде відповідати числу сталих інтегрування, отже зігнута вісь балки може бути визначена.

Приклад.

Визначити  $y_{\text{max}}$  та  $\Theta_{\text{max}}$  для консолі, навантаженої зосередженою силою на кінці (Рис.1.5.)





**Розв'язування.** Згинаючий момент у перерізі з абсцисою  $x$  визначаємо як момент зовнішніх сил, розташованих між даним перерізом та початком координат

$$M(x) = -Fx$$

Отже,  $EIy'' = -Fx$ .

Інтегруємо перший раз

$$EIy' = EI\Theta = -\frac{Fx^2}{2} + C.$$

Інтегруємо другий раз

$$EIy = -\frac{Fx^3}{6} + Cx + D.$$

Для визначення сталих  $C$  та  $D$  маємо граничні умови

1. при  $x = l$   $\Theta = 0$

2. при  $x = l$   $y = 0$

З першої умови  $EI\Theta = -\frac{Fl^2}{2} + C = 0,$

звідки  $C = \frac{Fl^2}{2}$

Тоді  $EIy = -\frac{Fx^3}{6} + \frac{Fl^2}{2}x + D.$

З другої умови  $EIy = -\frac{Fl^3}{6} + \frac{Fl^3}{2} + D = 0,$

звідки 
$$D = -\frac{Fl^3}{3}$$

Тепер можна визначити  $Y_{\max}$  та  $\Theta_{\max}$ . Цілком очевидно, що  $Y_{\max}$  та  $\Theta_{\max}$  мають місце на лівому кінці балки при ( $x = 0$ )

Отже

$$Y_{\max} = -\frac{Fl^3}{3EI}; \quad \Theta_{\max} = \frac{Fl^2}{2EI}.$$

Звернемо увагу на те, що

$$C = EIy_0; \quad (1.9)$$

$$D = EI\Theta_0, \quad (1.10)$$

де  $y_0$  - прогин на початку координат;

$\Theta_0$  - кут повороту на початку координат.

Залежності (1.9) та (1.10) завжди будуть справедливими для балок, які мають одну ділянку навантаження, якщо обчислювати згинаючі моменти від сил, розташованих між перерізом та початком координат. Це залишається в силі, за деяких умов, також для балок будь-яким числом ділянок навантаження.

## ЛЕКЦІЯ 2

### ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ У БАЛКАХ ЗА МЕТОДОМ ПОЧАТКОВИХ ПАРАМЕТРІВ

#### 2.1. Передумова методу

Якщо не балку діють декілька сил, то в цьому випадку на різних ділянках закон зміни згинаючих моментів буде визначатися різними рівняннями. Диференціальне рівняння зігнутої осі треба складати для кожної ділянки. Так, якщо балка за умовами навантажування розбивається на  $n$  ділянок, то інтегрування диференціальних рівнянь для всіх ділянок балки дає  $2n$  довільних сталих. Додавши до двох основних опорних умов балки  $2(n-1)$  умов

неперервного та плавного сполучення усіх ділянок пружної лінії, можна скласти  $2n$  рівнянь для визначення цих сталих.

Задача визначення довільних сталих при великому числі ділянок стає дуже трудомісткою. Застосовуючи спеціальні заходи, можна число сталих інтегрування зменшити до двох, незалежно від числа ділянок.

Ці заходи полягають в наступному.

Початок координат слід робити загальним для всіх ділянок.

Вираз для згинаючого моменту  $M(x)$  складати, обчислюючи моменти сил, розташованих від початку координат до розглядуваного перерізу.

При включенні в рівняння зовнішнього зосередженого моменту  $M$  його слід множити на множник  $(x-a)$ , що дорівнює одиниці. Тут  $a$  - абсциса точки, де прикладений момент.

4. У разі обривання розподіленого навантаження раніше того перерізу, де визначається прогин або кут повороту, його продовжують до кінця розглядуваного перерізу, а для відновлення дійсних вантажних умов вводять «компенсувальне» навантаження зворотного напрямку. «Додаткове» та «компенсувальне» навантаження будемо показувати на кресленнях штриховими лініями.

5. Інтегрувати рівняння на всіх ділянках слід не розкриваючи дужок.

## **2.2. Виведення загальних рівнянь та приклади їх застосування**

Розглянемо якусь частину балки (рис. 2.1, а), обмежену двома перерізами, які проведено в точках  $D$  та  $K$ .

На рис. 2.1, б зображено цей відрізок з прикладеними до нього найтипівішими навантаженнями.

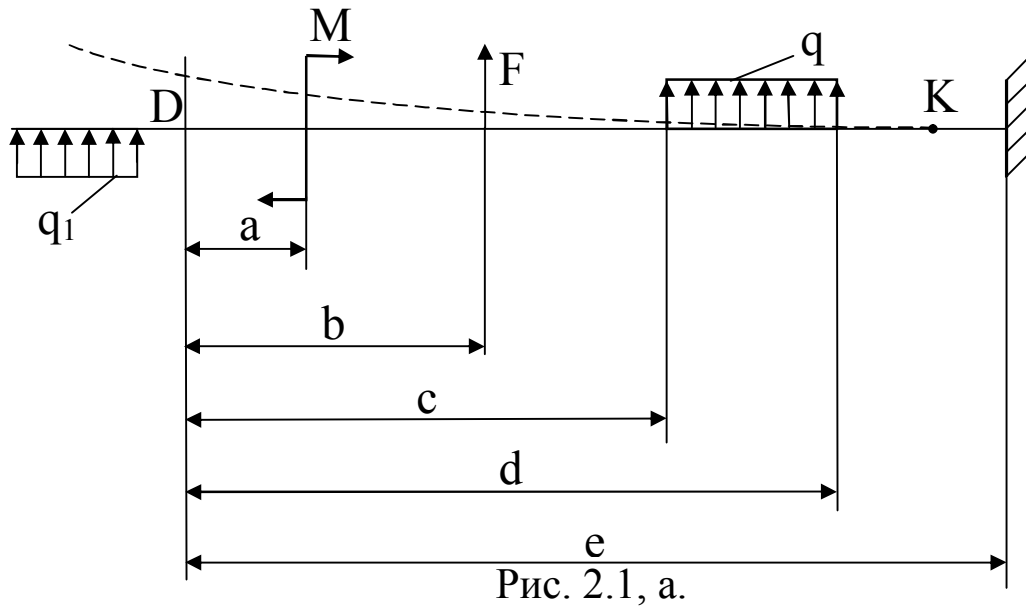


Рис. 2.1, а.

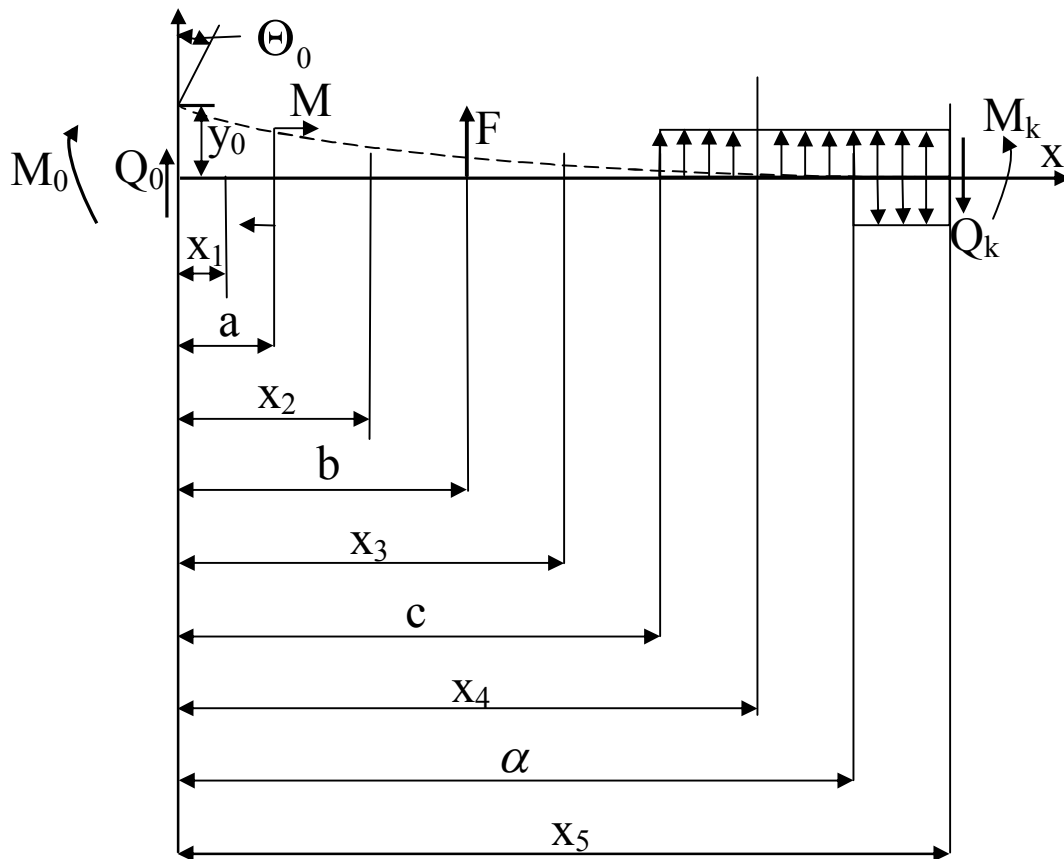


Рис. 2.1, б

Складемо рівняння згинальних моментів та диференціальні рівняння на кожній ділянці, про інтегрувавши їх двічі.

I ділянка  $0 \leq x_1 \leq a$

$$M(x_1) = M_0 + Q_0 x_1;$$

$$EIy_1''(x_1) = M_0 + Q_0 x_1;$$

$$EIy_1'(x_1) = M_0 x_1 + Q_0 \frac{x_1^2}{2} + C_1;$$

II ділянка  $a \leq x_2 \leq b$

$$M(x_2) = M_0 + Q_0 x_2 + M(x_2 - a)^\circ;$$

$$EIy_2''(x_2) = M_0 + Q_0 x_2 + M(x_2 - a)^\circ;$$

$$EIy_2'(x_2) = M_0 x_2 + Q_0 \frac{x_2^2}{2} + M(x_2 - a) + C_2;$$

$$EIy_2(x_2) = M_0 \frac{x_2^2}{2} + Q_0 \frac{x_2^3}{6} + M \frac{(x_2 - a)^2}{2} + C_2 x_2 + D_2$$

III ділянка  $b \leq x_3 \leq c$

$$M(x_3) = M_0 + Q_0 x_3 + M(x_3 - a)^\circ + F(x_3 - b);$$

$$EIy_3''(x_3) = M_0 + Q_0 x_3 + M(x_3 - a)^\circ + F(x_3 - b);$$

$$EIy_3'(x_3) = M_0 x_3 + Q_0 \frac{x_3^2}{2} + M(x_3 - a) + F \frac{(x_3 - b)^2}{2} + C_3;$$

$$EIy_3(x_3) = M_0 \frac{x_3^2}{2} + Q_0 \frac{x_3^3}{6} + M \frac{(x_3 - a)^2}{2} + F \frac{(x_3 - b)^3}{6} + C_3 x_3 + D_3$$

IV ділянка  $c \leq x_4 \leq d$

$$M(x_4) = M_0 + Q_0 x_4 + M(x_4 - a)^\circ + F(x_4 - b) + q \frac{(x_4 - c)^2}{2};$$

$$EIy_4''(x_4) = M_0 + Q_0 x_4 + M(x_4 - a)^\circ + F(x_4 - b) + q \frac{(x_4 - c)^2}{2};$$

$$EIy_4'(x_4) = M_0x_4 + Q_0\frac{x_4^2}{2} + M(x_4 - a) + \frac{F(x_4 - b)^2}{2} + q\frac{(x_4 - c)^3}{6} + C_4$$

$$EIy_4(x_4) = M_0\frac{x_4^2}{2} + Q_0\frac{x_4^3}{6} + M\frac{(x_4 - a)^2}{2} + F\frac{(x_4 - b)^3}{6} + q\frac{(x_4 - c)^4}{24} + C_4x_4 + D_4$$

У ділянці  $d \leq x_5 \leq l$

$$M(x_5) = M_0 + Q_0x_5 + M(x_5 - a) + F(x_5 - b) + q\frac{(x_5 - c)^2}{2} - q\frac{(x_5 - d)^2}{2};$$

$$EIy_5''(x_5) = M_0 + Q_0x_5 + M(x_5 - a) + F(x_5 - b) + q\frac{(x_5 - c)^2}{2} - q\frac{(x_5 - d)^2}{2};$$

$$EIy_5'(x_5) = M_0x_5 + Q_0\frac{x_5^2}{2} + M(x_5 - a) + F\frac{(x_5 - b)^2}{2} + q\frac{(x_5 - c)^3}{6} - q\frac{(x_5 - d)^3}{6} + C_5;$$

$$EIy_5(x_5) = M_0\frac{x_5^2}{2} + Q_0\frac{x_5^3}{6} + M\frac{(x_5 - a)^2}{2} + F\frac{(x_5 - b)^3}{6} + q\frac{(x_5 - c)^4}{24} - q\frac{(x_5 - d)^4}{24} + C_5x_5 + D_5$$

Для визначення десяти сталих інтегрування маємо наступні умови:

1. при  $x_1 = x_2 = a$   $y_1' = y_2'$ ;

2. при  $x_1 = x_2 = a$   $y_1 = y_2$ ;

3. при  $x_2 = x_3 = b$   $y_2' = y_3'$ ;

4. при  $x_2 = x_3 = b$   $y_2 = y_3$ ;

5. при  $x_3 = x_4 = c$   $y_3' = y_4'$ ;

6. при  $x_3 = x_4 = c$   $y_3 = y_4$ ;

7. при  $x_4 = x_5 = d$   $y_4' = y_5'$ ;

8. при  $x_4 = x_5 = d$   $y_4 = y_5$ ;

9. при  $x_5 = l$   $y_5' = 0$ ;

10. при  $x_5 = l$   $y_5 = 0$ ;

Використовуючи ці умови, отримаємо:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C; \quad (2.1)$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D \quad (2.2)$$

Таким чином замість десяти сталих залишаються тільки дві. Геометричний зміст цих двох сталих інтегрування визначаємо, розглядаючи рівняння кутів повороту та прогинів на першій ділянці балки з урахуванням (2.1) та (2.2):

$$EIy_1'(x_1) = EI\Theta(x_1) = M_0x_1 + Q_0 \frac{x_1^2}{2} + C \quad (2.3)$$

$$EIy_1(x_1) = M_0 \frac{x_1^2}{2} + Q_0 \frac{x_1^3}{6} + Cx_1 + D \quad (2.4)$$

Підставивши в ці рівняння  $x_1 = 0$ , знайдемо:

$$C = EI\Theta_0; \quad (2.5)$$

$$D = EIy_0. \quad (2.6)$$

Аналізуючи вирази для прогинів на ділянках балки, приходимо до висновку, що найбільш загальний вигляд має рівняння п'ятої ділянки. Замінивши  $x_5$  на  $x$ , будемо мати:

$$EIy(x) = D + Cx + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + \\ + F \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24} \quad (2.7)$$

Підставивши сталі  $C$  та  $D$  в рівняння (2.7), дістанемо загальне рівняння для прогину в добровільному перерізі балки:

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\Theta_0x + M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + \\ + F \frac{(x-b)^3}{3} + q \frac{(x-c)^4}{24} - q \frac{(x-d)^4}{24} \quad (2.8)$$

Для випадку кількох моментів і сил, з також кількох ділянок з розподіленим навантаженням - рівняння (2.8) можна записати в такому вигляді:

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\Theta_0x + M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \\ + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{4} - \sum q \frac{(x-d)^4}{4!} \quad (2.9)$$

Рівняння (2.9), як правило, називають універсальним рівнянням пружної лінії. При цьому мається на увазі, що це рівняння придатне для будь-яких розрахункових схем балок.

Рівняння кутів повороту перерізів можна записати в такому загальному вигляді:

$$EI\Theta(x) = EI\Theta_0 + M_0 \frac{x}{1!} + Q_0 \frac{x^2}{2!} + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum F \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q \frac{(x-d)^3}{3!}$$

(2.10)

Треба мати на увазі, що в рівняннях (2.9) та (2.10)  $x$  – відстань від початку координат до того перерізу де визначається переміщення(кутове або лінійне);

$a, b, c, d$  - відстань від початку координат до точок де прикладені моменти, зосереджена сила та до початку ділянки, навантаженої рівномірно розподіленим навантаженням;

$M, F, q$  - зовнішні сили та моменти /включаючи реакції опор/, розташованих між розглядуваним перерізом та початком координат.

Знаки доданків в формулах (2.9) та (2.10) визначаються знаками відповідних силових факторів, прийнятих нами раніше.

Таким чином, визначення переміщень за методом початкових параметрів зводиться насамперед до визначення початкових параметрів  $M_0, Q_0, y_0, \Theta_0$ .

Статичні початкові параметри  $M_0$  та  $Q_0$  знаходять з умов рівноваги балки. Геометричні початкові параметри  $y_0$  та  $\Theta_0$  визначають з умов на опорах.

Розглянемо приклад визначення переміщення за методом початкових параметрів.

У консолі, навантаженій рівномірне розподіленим навантаженням (рис. 2.2.a) визначимо прогин вільного кінця консолі.

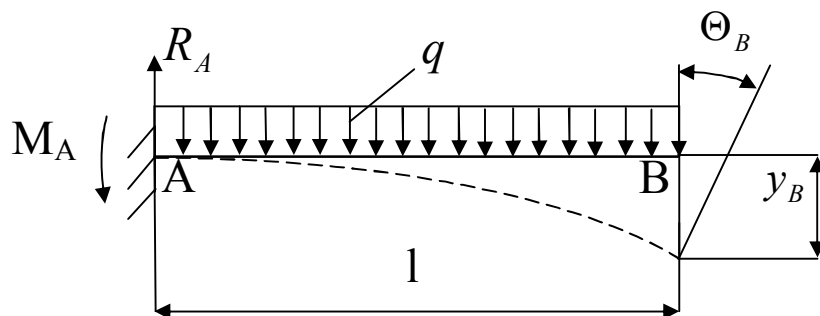




Рис.2.2.а.

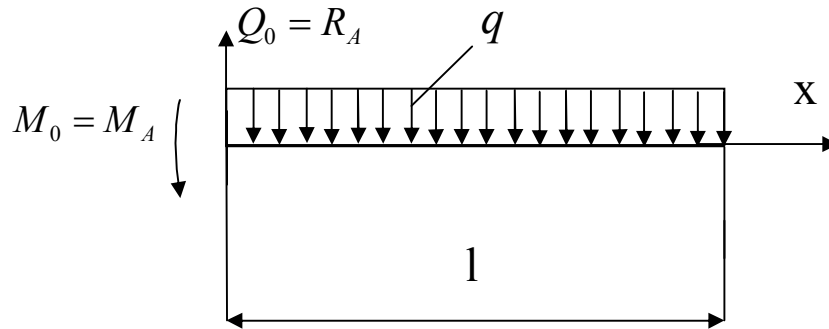


Рис.2.2.б.

Рівняння пружної лінії в загальному випадку буде мати вигляд

$$EIy(x) = EIy_0 + EI\Theta_x - M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24}. \quad (2.11)$$

З умов рівноваги балки визначаємо статичні початкові параметри:

$$M_0 = M_A = \frac{ql^2}{2}; \quad Q_0 = R_A = ql. \quad (2.12)$$

Оскільки початок координат збігається з коротким закріпленням балки, то геометричні початкові параметри - прогин та кут повороту на початку координат - дорівнюють нулю:

$$y_0 = 0; \quad \Theta_0 = 0. \quad (2.13)$$

Підставивши в (2.11) значення початкових параметрів згідно з (2.12) та (2.13), матимемо рівняння пружної лінії в остаточному вигляді:

$$EIy(x) = -q \frac{l^2}{2} \frac{x^2}{2} + ql \frac{x^3}{6} - q \frac{x^4}{24}. \quad (2.14)$$

Поклавши в рівнянні (2.14)  $x = l$ , дістанемо формулу для прогину вільного кінця консолі:

$$y_B = -\frac{ql^4}{8EI} \quad (2.15)$$

### 2.3. Деякі особливості епюр прогинів та кутів повороту

При побудові епюр  $y$  та  $\theta$  слід користуватися правилами, які можна здобути на підставі аналізу диференціальних залежностей, ще

існують між  $y, \Theta, M$  та  $Q$ . Залишимо ці залежності в зручній для аналізу формі.

З рівняння  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$  з урахуванням виразу  $Q(x) = \frac{dy(x)}{dx}$

Знаходимо, що 
$$\frac{d\Theta(x)}{dx} = \frac{M(x)}{EI} \quad (2.16)$$

Продиференціювавши рівняння (2.16) по  $x$  та враховуючи залежність  $dM / dx = Q(x)$ , дістанемо

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI} \quad (2.17)$$

Отже, маємо дві групи диференціальних залежностей

$$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{M(x)}{EI}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x)}{EI}; \quad (2.18)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}; \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}; \quad (2.19)$$

Вирази (2.18), (2.19) а також зіставлення побудованих епюр дає змогу встановити загальні для будь яких балок залежності між  $y; \Theta; Q$  та  $M$ , які можна застосовувати як правила побудови епюр. Зазначимо найголовніші з них:

1. Оскільки  $M(x)$  є діаграмою похідної епюри кутів повороту  $\Theta$ , то ординати епюри  $M$  пропорційні тангенсу кута нахилу дотичної епюри  $\Theta$ .

У перерізі де  $M(x)=0$ , дотичне до кривої  $\Theta = f(x)$  має бути паралельне абсцисі. Стрибку на епюрі моментів відповідає кутова точка на епюрі  $\Theta$ .

2. Якщо згинальний момент дорівнює нулю вздовж якоїсь балки, то на ділянці епюра  $\Theta$  прямокутна, а епюра  $y$  прямолінійна та похила

3. На ділянках, де діє постійний момент епюри  $\Theta$  прямолінійна та похила, а епюра  $y$  у параболічна.

4. Друга похідна прогину  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$ . Коли момент додатний (стиснуті верхні волокна), то угнутість на епюрі  $y$  буде повернута в бік додатних  $y$  (вгору). При від'ємному моменті угнутість параболи повернута вниз. У перерізах, де діє зосереджений момент  $M$ , маємо точку перегину пружної лінії.

5. Друга похідна кута повороту  $\frac{d^2 \Theta}{dx^2} = \frac{Q(x)}{EI}$ , має знак попередиш сили. Якщо  $Q$  додатна, то опуклість на епюрі  $\Theta$  буде повернута вниз. При  $Q < 0$  опуклість спрямована вгору. У перерізі де  $Q$  змінює знак, на епюрі  $\Theta$  є точка перегину.

6. На тих ділянках балки, де епюра  $M$  змінюється за лінійним законом, епюра  $\Theta$  буде мати вигляд квадратичної параболи, а епюра, у параболи третього порядку.

7. Оскільки  $\Theta$  є графіком зміни по довжині балки тангенсів кутів нахилу дотичних до пружної лінії, то можна стверджувати таке:

а) на ділянках, де в напрямі осі  $x$  прогин  $y$  збільшується, кут нахилу  $\Theta$  додатний, при зменшенні  $y$  кути нахилу  $\Theta$  від'ємні;

б) у перерізі, де  $\Theta = 0$  дотична до епюри  $y$  горизонтальна, тобто тут на епюрі  $y$  має місце аналітичний максимум або мінімум.

#### 2.4. Розрахунок на жорсткість при згині

Оволодівши методикою визначення прогинів та кутів повороту, можна перейти до перевірки жорсткості балок, а також до добору розмірів перерізів балок з умови жорсткості.

Позначивши абсолютне значення максимального прогину балки через  $f$ , а допустиму стрілу прогину через  $f_{adm}$ , дістанемо умову жорсткості балки:

$$f \leq f_{adm} \quad (2.20)$$

Допустимий прогин визначають на підставі експериментальних та експлуатаційних даних.

## ЛЕКЦІЯ 3

### СКЛАДНИЙ ОПІР. ПРОСТОРОВИЙ ПОПЕРЕЧНИЙ ЗГИН. КОСЕ ЗГИНАННЯ.

#### 3.1. Основні поняття

Раніше ми вивчали найпростіші види деформації: центральні розтягання та стискання, зсув, вільне кручення і плоске поперечне згинання. В цих випадках в поперечних перерізах стержня виникали: поздовжня сила  $N$ , в другому випадку поперечна сила  $Q$  в третьому - крутний момент  $T$  і в четвертому - згинальний момент  $M$  та поперечна сила  $Q$ .

В практиці найпростіші види деформації в чистому вигляді майже не зустрічаються. Один вид деформації майже завжди супроводжується іншим видом деформації.

Такі випадки опору стержнів, коли ми маємо справу з комбінацією декількох видів деформацій, називається складним опором.

Таким чином, у випадку складного опору в поперечному перерізі стержня можуть виникати декілька внутрішніх зусиль. Поздовжня сила і згинальний момент викликають в точках поперечного перерізу нормальні напруження. Від поперечної сили і крутного момента виникають дотичні напруження.

Якщо в стержні переміщення точок осі в порівнянні до поперечних розмірів малі, а повороти перерізів малі в порівнянні до одиниці, то при визначенні сумарних напружень застосовують принцип незалежності дії сил, згідно якого необхідно визначити напруження від кожного компоненту внутрішніх сил окремо за відомими формулами, а потім їх скласти.

Якщо стержень має малу жорсткість, то зазначені вище умови не виконуються, отже принцип незалежності дії сил не може бути застосованим. В цьому випадку будується спеціальна теорія в якій ураховується взаємний вплив окремих факторів.

#### 3.2. Просторовий поперечний згин

Розглянемо балку закріплену жорстко одним кінцем і навантажену, як показано на рис. 3.1.

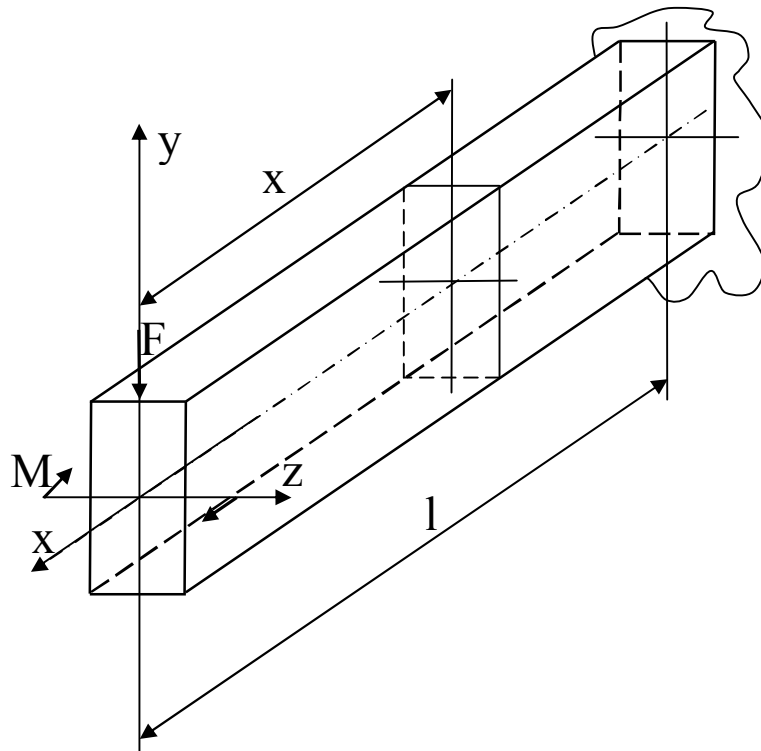


Рис.3.1.

В поперечному перерізі балки з абсцисою  $x$  діє згинальний момент  $M_z = Fx$  в головній площині інерції  $yx$  і згинальний момент  $M_y = M$  в головній площині  $zx$ .

Повний згинальний момент  $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  діє в площині, яка не збігається ні з однією із головних площин балки. Рис. 3.2.

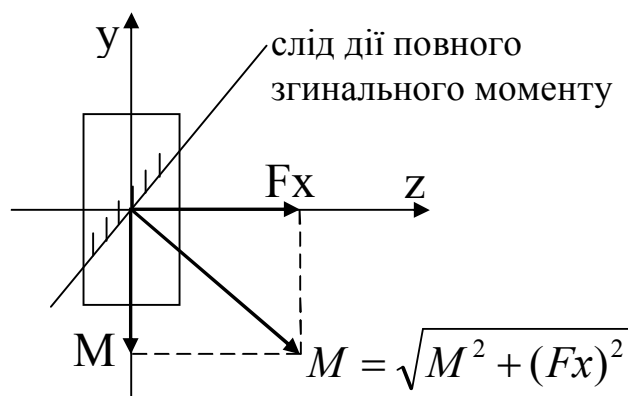


Рис.3.2.

Деформація балки при такому навантаженні називається просторовим поперечним згином, так як зігнута вісь балки і сили розташовуються не в площині, а в просторі.

### 3.3. Косе згинання. Зовнішні сили і внутрішні зусилля

Косий згин є окремим випадком просторового поперечного згину. Він виникає при наступних умовах:

1) все зовнішнє навантаження і реакції опор діють в одній площині, яка називається площиною дії сил і ця площина не збігається з головною площиною інерції перерізу.

2) головні моменти інерції площини поперечного перерізу балки не рівні між собою, тобто  $I_z \neq I_y$ .

Розглянемо консольну балку прямокутного поперечного перерізу, яка навантажена однією силою  $F$  прикладеною в центрі ваги кінцевого перерізу перпендикулярно осі балки під кутом  $\alpha$  до осі  $y$  (Рис. 3.3.) Вісь  $x$  збігається з віссю балки, а осі  $y$  і  $z$  – головні центральні осі інерції поперечного перерізу.

В довільному перерізі, на відстані  $x$  від вільного кінця балки, сила  $F$  викликає згинальний момент  $M = Fx$ , який лежить в площині дії сили  $F$ .

Розкладемо силу  $F$  на складові по осям  $y$  і  $z$ :

$$F_y = F \cos \alpha; F_z = F \sin \alpha$$

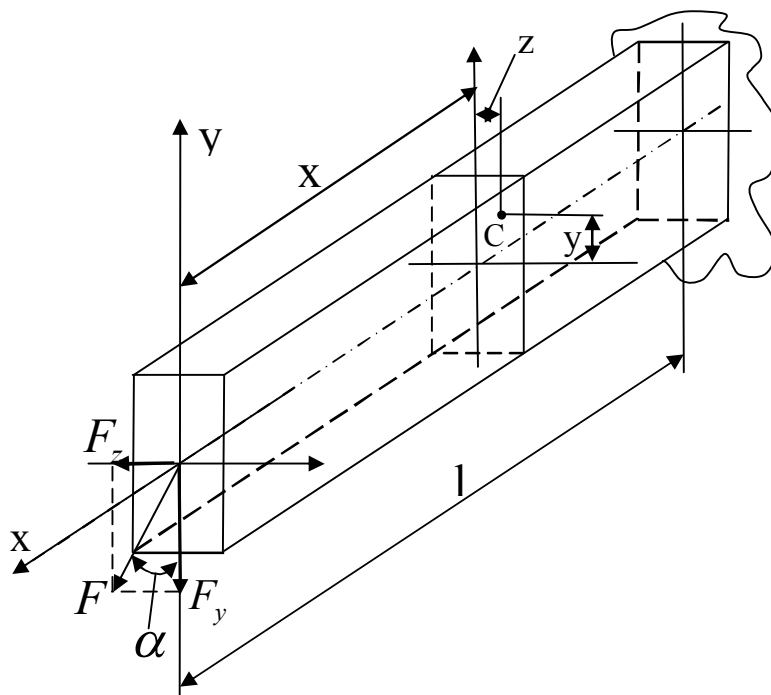


Рис. 3.3.

Таким чином, косий згин розглядаємо як сполучення двох плоских згинів, викликаних силами  $F_y$  і  $F_z$ , розташованих в головних площинах інерції перерізу балки.

Згинальні моменти у перерізі з абсцисою  $x$  від сил  $F_y$  і  $F_z$  будуть:

$$\left. \begin{aligned} |M_z| &= F_y x = Fx \cdot \cos \alpha = M \cos \alpha \\ |M_y| &= F_z x = Fx \cdot \sin \alpha = M \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

### 3.4. Визначення напружень при косому згинанні

Визначимо напруження в деякій точці  $C$  (з координатами  $y$  і  $z$ ) Нормальні напруження в точці  $C$  визначаються як напруження викликані окремо моментами  $M_z$  та  $M_y$ , згинаючими балку в головних площинах  $xy$  і  $xz$ , використовуючи формули нормальних напружень, одержаних для плоского згину.

Нормальне напруження в точці  $C$  від згину моментом  $M_z$  визначаються формулою:

$$\sigma_{M_z} = \frac{M_z \cdot z}{I_z}, \text{ або } \sigma_{M_z} = \frac{M \cdot z}{I_z} \cos \alpha, \quad (3.2)$$

де  $I_z$  - момент інерції відносно осі  $z$ , яка при згинанні моментом  $M_z$  буде нейтральною віссю.

Момент  $M_y$  викликає в точці  $C$  нормальне напруження

$$\sigma_{M_y} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} \text{ або } \sigma_{M_y} = \frac{M \cdot z}{I_y} \sin \alpha, \quad (3.3)$$

де  $I_y$  - момент інерції перерізу відносно осі  $y$ , яка при згинанні моментом  $M_y$  буде нейтральною віссю.

Сумарне напруження в точці  $C$  знаходимо як алгебраїчну суму отриманих напружень:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot z}{I_z} \text{ або } \sigma = M \left( \frac{y \cdot \cos \alpha}{I_z} + \frac{z \cdot \sin \alpha}{I_y} \right) \quad (3.4)$$

Формулою (3.4) можна користуватися при обчисленні напружень у довільній точці кожного перерізу балки, урахувавши знак напружень від згинальних моментів  $M_z$  та  $M_y$  (розтягуючі

нормальні напруження вважають додатними, стискаючі – від’ємними). В розглядуваній балці згинальний момент  $M_z$  викликає розтягання волокон балки, які знаходяться вище осі  $z$  та стискання волокон, які розташовані нижче осі  $z$ . Під дією згинального моменту  $M_y$  волокна, які розташовані праворуч осі  $y$  розтягуються, ліворуч – стискаються. (Рис.3.4.) Розтягнуті волокна моментами  $M_z$  та  $M_y$  заштриховані

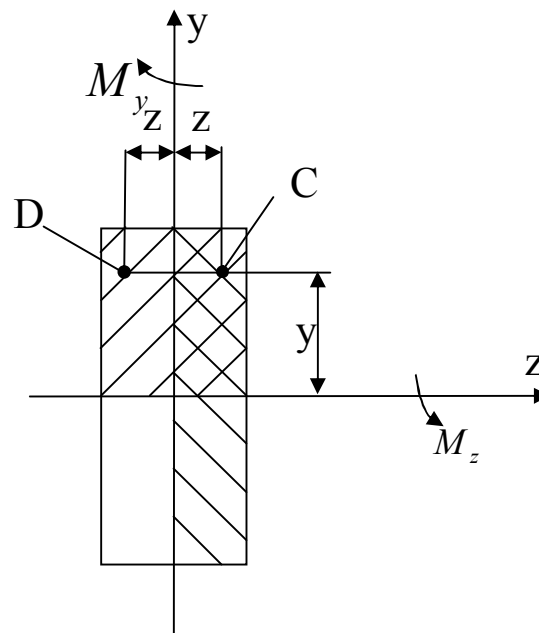


Рис.3.4.

В точці  $C$  моменти  $M_z$  та  $M_y$  викликають розтягаючі напруження. В точці  $D$  момент  $M_z$  – розтягуюче напруження, а момент  $M_y$  – стискаюче ; у відповідності до цього перший доданок в формулі (3.4) має знак «+», а другий – знак «-».

Формулою (3.4) можна користуватись також при визначенні нормальних напружень в будь-якій точці поперечного перерізу стержня при складному (просторовому) згинанні.

### 3.5. Визначення положення нейтральної осі та небезпечних точок перерізу балки при косому згинанні

При косому згинанні, яке є комбінацією двох плоских згинань, ми маємо одночасний відносний поворот перерізів навколо двох осей, які перетинаються в центрі ваги перерізу.

З кінематики відомо, що обертання фігури навколо двох осей, що перетинаються, можна замінити обертанням навколо однієї осі,



яка проходить через точку перетину згаданих осей. При косому згинанні лінія перерізу, навколо якої відбувається поворот перерізу при деформації балки, буде нейтральною. Нормальні напруження в точках нейтральної осі будуть дорівнювати нулю. Максимальні деформації і напруження мають місце в точках найбільш віддалених від нейтральної осі. Необхідно знати: якщо силова площина проходить через одні квадранти поперечного перерізу, то нейтральна вісь – через інші.

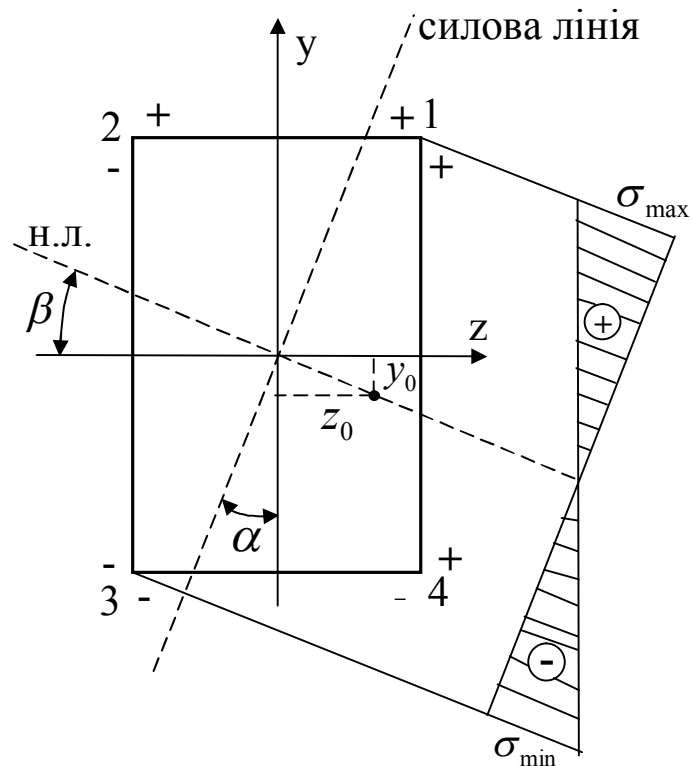


Рис. 3.5

На рис.3.5 нанесене приблизне розташування нейтральної лінії. Так як вона проходить через центр ваги перерізу, то для визначення її положення достатньо знати кут  $\beta$ , складений з віссю  $z$ .

На рис. 3.5 видно, що тангенс цього кута дорівнює абсолютній величині відношення  $y_0$  до  $z_0$ :

$$\operatorname{tg}\beta = \left| \frac{y_0}{z_0} \right|, \quad (3.5)$$

Рівняння нейтральної лінії отримаємо з умови, що нормальні напруження в її точках дорівнюють нулю. Підставивши координати цих точок  $y_0$  та  $z_0$ , замість  $y$  та  $z$  в формулу (3.4. а.) матимемо:

$$0 = M \left( \frac{y_0 \cos \alpha}{I_z} + \frac{z_0 \sin \alpha}{I_y} \right)$$

Розділивши ліву та праву частину рівняння на  $M$ , отримаємо

$$\frac{y_0 \cos \alpha}{I_z} + \frac{z_0 \sin \alpha}{I_y} = 0 \quad (3.6)$$

Це рівняння прямої, яка проходить через центр ваги перерізу (при  $y = 0$  та  $z_0 = 0$ ) і є рівнянням нейтральної лінії.

З рівняння (3.6), розділивши його на  $\frac{z_0 \cos \alpha}{I_z}$ , маємо:

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{y_0}{z_0} \right| = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y} \quad (3.7)$$

Якщо розділити друге рівняння (3.1) на перше, то отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{M_y}{M_z} \right|$$

З урахуванням цього, рівняння 3.7, при допомозі якого визначається положення нейтральної лінії, може бути представлено в вигляді:

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{M_y}{M_z} \right| \frac{I_z}{I_y}. \quad (3.8)$$

Таким чином, положення нейтральної лінії залежить від кута нахилу силової площини, та форми поперечного перерізу.

На рис. 3.5 показані знаки нормальних напружень в кутових точках перерізу; знаки вище і нижче перерізу відносяться до напружень від згинання моментом  $M_z$ , знак з права та зліва від перерізу – до напружень від згинання моментом  $M_y$ . В точках 1 та 3 нормальні напруження підсумовуються. Ці точки, безумовно будуть самими небезпечними.

### 3.6. Розрахунок на міцність при косому згинанні

Перевіряти міцність слід у тих перерізах де згинаючі моменти та одночасно великі.

Таких перерізів у загальному випадку складного згинання може бути кілька. Найбільш напруженими точками перерізу будуть точки,

найвіддаленіші від нейтральної лінії – точки 1 та 3 (рис 3.5). У даному випадку в точці 1 діє найбільше розтягувальне напруження, а в точці 3 - найбільше стискувальне.

Отже, умови міцності для небезпечних точок перерізу мають вигляд:

$$\sigma_{\max} = \sigma_{(1)} = \frac{M_z y_1}{I_z} + \frac{M_y z_1}{I_y} \leq \sigma_{adm}^t; \quad (3.9)$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{(3)} = -\frac{M_z y_3}{I_z} - \frac{M_y z_3}{I_y} \leq \sigma_{adm}^c. \quad (3.10)$$

У загальному випадку неплоского згину умова міцності набирає вигляду:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq \sigma_{adm} \quad (3.11)$$

Аналогічно перевіряється міцність у точці, де діють найбільші стискувальні напруження.

Добір перерізів при неплоскому згинанні - задача більш складна, ніж при простому плоскому згині. При її розв'язуванні треба спочатку задатися відношенням моментів опору  $\frac{W_z}{W_y}$  та знайти перерізи методом підбору.

Так з умов (3.11)

$$W_z = \frac{M_z + M_y \frac{W_z}{W_y}}{\sigma_{adm}} \quad (3.12)$$

Тут відношення  $\frac{W_z}{W_y}$  залежить від форми поперечного перерізу стержня. В першому наближенні для прокатних двотаврів його приймають рівним 8, для швелерів - 7, для прямокутного перерізу  $\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}$ . Після визначення розмірів перерізу виконують перевірку міцності.

### 3.7. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ КОСОМУ ЗГИНАННІ

Визначаючи переміщення, також виходимо з принципу незалежності дії сил та обчислюємо переміщення в кожній з головних площин -  $f_z$  та  $f_y$ .

Повний прогин  $f$  перерізу визначається як геометрична сума прогинів  $f_z$  та  $f_y$ .

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \quad (3.13)$$

Як приклад, обчислимо прогин вільного кінця консолі, навантаженої силою  $F$ , як показано на рис.3.3.

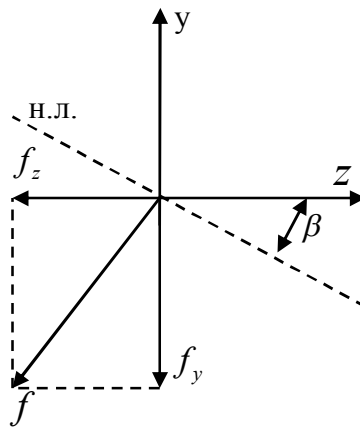


Рис.3.6.

Визначимо прогин в головних площинах:

$$f_z = \frac{F_z l^3}{3EI_y} = \frac{F \sin \alpha \cdot l^3}{3EI_y}; \quad (3.14)$$

$$f_y = \frac{F_y l^3}{3EI_z} = \frac{F \cos \alpha \cdot l^3}{3EI_z}; \quad (3.15)$$

Повне переміщення

$$f = \frac{Fl^3}{3E} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{I_y^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{I_z^2}} \quad (3.16)$$

Визначимо напрям повного прогину  $f$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_z}{f_y} = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y} = \operatorname{tg} \beta \quad (3.17)$$

Звідки випливає, що повний прогин при косому згині перпендикулярний до нейтральної лінії перерізу (рис. 3.6.)

Очевидно, відхилення повного прогину від силової площини тим більше, чим більше відношення  $I_z/I_y$ .

## ЛЕКЦІЯ 4 ПОЗАЦЕНТРОВИЙ СТИСК АБО РОЗТЯГ.

Стержень випробовує позацентровий стиск розтяг коли сила, паралельна осі стержня, прикладена на деякій відстані від центра ваги перерізу.

Відстань між точкою прикладення сили та центром ваги перерізу стержня називається ексцентриситетом сили -  $e$

### I. Визначення внутрішніх зусиль

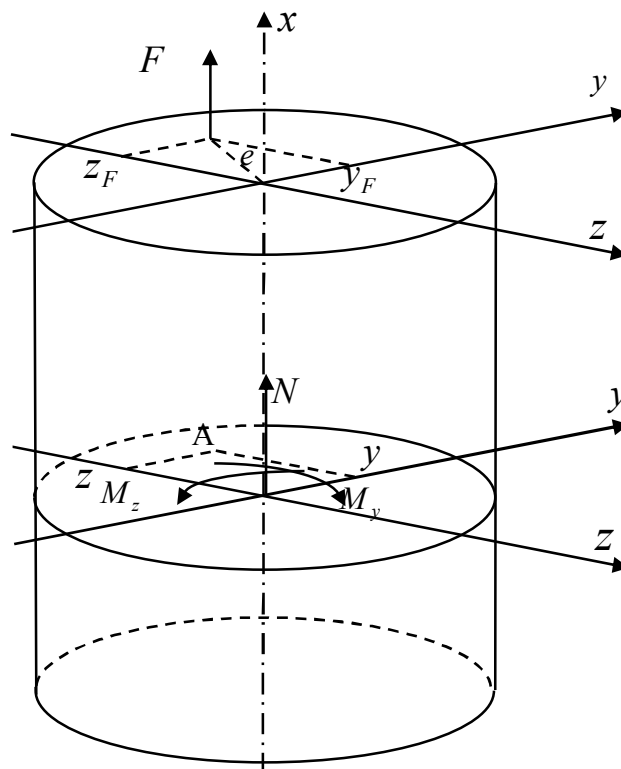


Рис.4.1.

Нехай на брус довільного перерізу діє сила  $F$ , яка паралельна осі бруса й перетинає довільний поперечний переріз у точці  $C$  (рис. 4.1.) Координати цієї точки в системі головних осей перерізу

позначимо через  $y_F$  та  $z_F$ .

У довільному поперечному перерізі при даному навантаженні діють такі внутрішні силові фактори:  $N = F$ ;  $M_y = F \cdot z_F$ ;  
 $M_z = F \cdot y_F$ .

#### 4.2. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ

Напруження в довільній точці перерізу А (рис.4.1.) складаються з напружень осьового розтягу силою  $N$  та напружень від чистого згинання моментами  $M_y$ , та  $M_z$ :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{M_z}{I_z} y \quad (4.1)$$

За допомогою цього рівняння визначається напруження в будь якій точці при позацентровому розтягу або стиску. Проте напруження від  $N$ ,  $M_y$  та  $M_z$  треба підставлять в формулу (4.1) з відповідним знаком, якщо внутрішні зусилля визивають розтягання в точці то вони дають доданок в рівняння (4.1) та навпаки, при стисканні – від’ємний доданок.

#### 4.3. ВИЗНАЧЕННЯ ПОЛОЖЕННЯ НЕЙТРАЛЬНО ЛІНІЇ ТА НЕБЕЗПЕЧНИХ ТОЧОК ПЕРЕРІЗУ

Підставивши в рівняння (4.1) замість  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  їхні значення, дістанемо  $\sigma = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot z_F \cdot z}{I_y} + \frac{F \cdot y_F \cdot y}{I_z}$ , або

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F \cdot z}{I_y} + \frac{y_F \cdot y}{I_z} \right), \text{ де величини, які знаходяться в}$$

знаменниках другого та третього доданків, це квадрати радіусів інерції перерізу:

$$\frac{I_y}{A} = i_y^2; \quad \frac{I_z}{A} = i_z^2$$

Отже,

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_F z}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_z^2} \right) \quad (4.2)$$

Позначимо координати точок на нейтральній лінії  $x_0$  та  $z_0$ . Якщо ці координати підставити в рівняння (4.2) та врахувати, що напруження в точках нейтральної лінії дорівнюють нулю, то після скорочення на величину  $\frac{F}{A}$  одержимо рівняння нейтральної лінії:

$$1 + \frac{z_F z_0}{i_y^2} + \frac{y_F y_0}{i_z^2} = 0 \quad (4.3)$$

За цим рівнянням можна визначити відрізки,  $a_y$  та  $a_z$ , що відсікаються нейтральною лінією на осях координат (рис.4.2).

Поклавши в рівнянні (4.3)  $z_0 = 0$ ;  $y_0 = a_y$ , матимемо

$$1 + \frac{y_F a_y}{i_z^2} = 0$$

звідки

$$a_y = -\frac{i_z^2}{y_F} \quad (4.4)$$

В випадку  $y_0 = 0$ ;  $z_0 = a_z$  маємо

$$1 + \frac{z_F a_z}{i_y^2} = 0,$$

звідки

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F}. \quad (4.5)$$

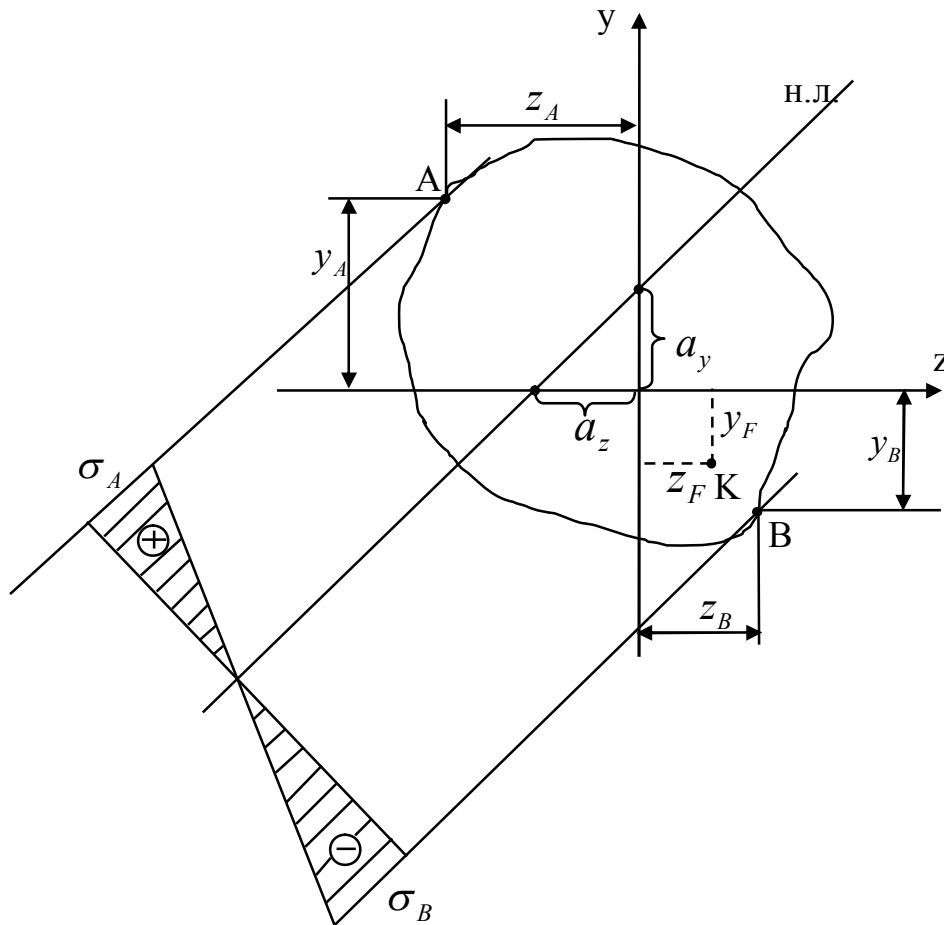


Рис.4.2

Небезпечними в перерізі будуть точки, найвіддаленіші від нейтральної лінії (рис. 4.2 точки А і В). Якщо в точці К діє стискаюча сила, то найбільш напружена точка у розтягнутій зоні - точка А, а в стиснутій зоні - точка В.

Напруження в цих точках та умови міцності мають вигляд:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} + \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y_A + \frac{M_y}{I_y} \cdot z_A \leq \sigma_{adm}^t, \quad (4.6)$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} - \frac{M_Z}{I_Z} \cdot y_B - \frac{M_y}{I_y} \cdot z_B \leq \sigma_{adm}^c. \quad (4.7)$$

Нейтральна лінія не завжди проходить крізь переріз. Вона може проходити й поза перерізом. Дійсно, якщо сила прикладена в центрі ваги, то нейтральна лінія проходить у нескінченності, оскільки



напруження в цьому разі розподілені рівномірно

$$\sigma = \frac{F}{A} (M_z = M_y = 0).$$

Відмітимо цікаву залежність величин  $z_F$  та  $a_z$ , а також  $y_F$  та  $a_y$ . Якщо силу прикласти в точці з координатами  $a_z$  та  $a_y$ , то нейтральна лінія відсікає відрізки на осях координат, рівні відповідно  $z_F$  та  $y_F$ . Якщо сила прикладена в точці I (рис.4.3.), а відповідна нейтральна лінія займає положення I-I, то при силі, поставленій в точці 2, нейтральна лінія займе положення II-II.

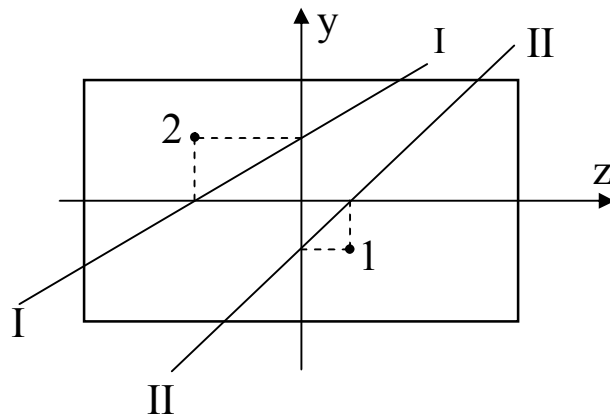


Рис.4.3

Розглянемо тепер деякі характерні особливості, пов'язаних з проведенням нейтральної лінії при різних положеннях сили F.

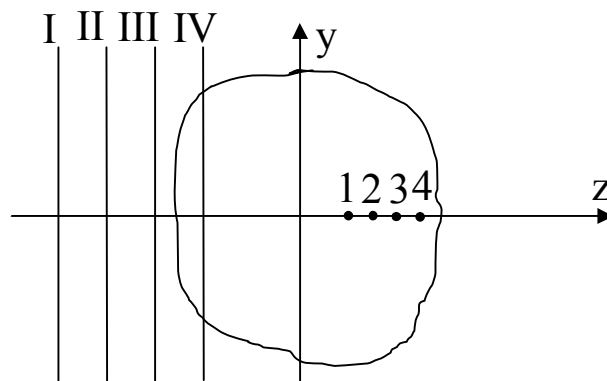


Рис.4.4.

Якщо сила  $F$  прикладена в точці, яка знаходиться на осі  $O_y$ , то нейтральна лінія відсікає на осі  $O_z$  відрізок, рівний нескінченності:

$$a_z = -\frac{i_y^2}{z_F} = -\frac{i_y^2}{0} = \infty.$$

Це означає, що нейтральна лінія буде паралельною осі  $O_z$ .

Якщо сила  $F$  переміщується по осі  $O_z$  від центра ваги до краю перерізу, то нейтральна лінія переміщується з нескінченності в напрямі до перерізу, залишаючись при цьому весь час паралельною осі  $O_y$ .

Так, наприклад, коли сила послідовно прикладена в точках 1,2,3,4, (рис.4.4), нейтральна лінія відповідно займає положення I-I, II - II, III - III, IV - IV і т.д.

Розглянемо ще одну задачу. Нехай сила  $F$  переміщується по деякій прямій  $AB$ , яка не проходить через центр ваги перерізу.

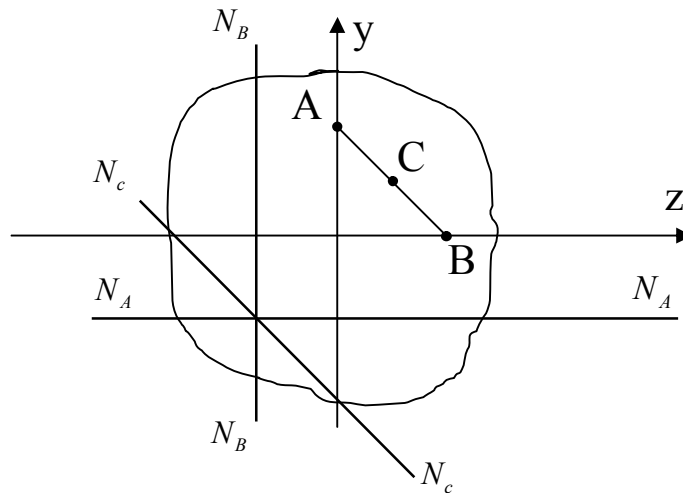


Рис.4.5

Для двох крайніх випадків, коли сила прикладена в точках  $A$  та  $B$ , нейтральні лінії паралельні відповідним осям  $O_z$  та  $O_y$ . Нехай ці лінії перетинаються в деякій точці  $D$ . Так як ця точка належить двом нейтральним лініям, то напруження в ній від двох сил одночасно прикладених в точках  $A$  та  $B$ , дорівнюють нулю. Прикладемо тепер силу в точці  $C$ , яка знаходиться на прямій  $AB$ . Цю силу можна розкласти на дві паралельні складові  $F_A$  та  $F_B$  прикладеним до точок  $A$  та  $B$ . Від цих двох складових та від їх рівнодійної напруження в точці  $D$  буде дорівнювати нулю. Так як

точка  $C$  була взята довільно, то при будь-якому положенні сили  $F$  на прямій  $AB$  напруження в точці  $D$  дорівнює нулю.

Звідси можна зробити висновок, що при русі вантажу по прямій  $AB$  нейтральна лінія обертається навколо точки  $D$ .

#### 4.4. ЯДРО ПЕРЕРІЗУ.

Розглянемо випадок позацентрового стиску масивної колони довільного поперечного перерізу. Вважаємо, що сила  $F$  переміщується з центру ваги поперечного перерізу по прямій  $OA$  (Рис. 4.6), а в цей час нейтральна лінія також буде переміщуватися з нескінченності в напрямі до центру ваги перерізу, залишаючись весь час паралельною її податковому положенню. При деякому положенні сили  $F$  вперше торкнеться контура перерізу та займе положення  $I-I$ .

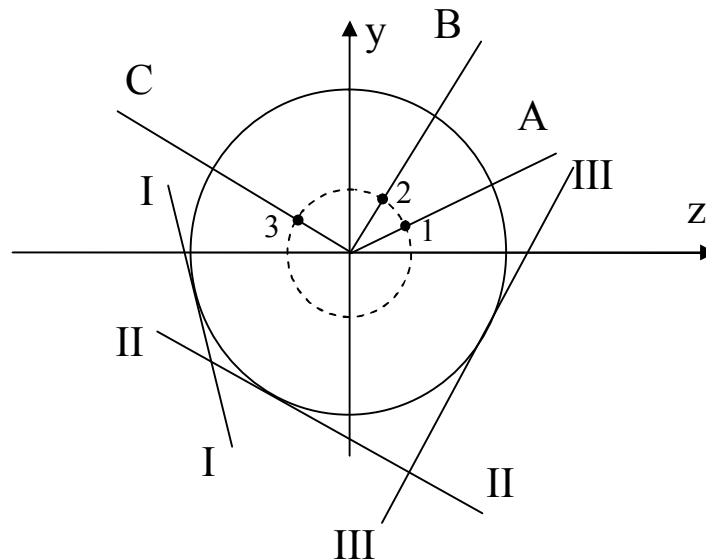


Рис.4.6

Цьому положенню нейтральної лінії на прямій  $OA$  відповідає точка  $I$ . При дальшому переміщенні сили  $F$  нейтральна лінія перетинає переріз, причому нормальні напруження в перерізі будуть обох знаків: по один бік від нейтральної лінії - розтягуючими, по інший - стискаючими. Можна визначити зону таких віддалень сили  $F$  від осі, при яких нормальні напруження по всьому поперечному перерізу будуть одного знаку. Така зона називається ядром перерізу. Це важливо для брусків з матеріалів, що погано чинять опір розтяганню, наприклад, для цегляної кладки, для бетону та сірого чавуну. Отже, ядром перерізу називають зону навколо центра ваги

поперечного перерізу, яка має таку властивість: якщо позацентрово прикладене навантаження розташоване в зоні ядра, то нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу мають один знак.

Для побудови ядра перерізу будемо задаватися різними положеннями нейтральної лінії, дотичними до контура перерізу, й обчислювати координати відповідних точок прикладання сили  $F$  за такими формулами, що випливають з виразів (4.4) та (4.5):

$$y_F = -\frac{i_Z^2}{a_y} ; z_F = -\frac{i_y^2}{a_z} \quad (4.8)$$

Обчислені координати визначають точки, що лежать на межі ядра перерізу.

Побудуємо ядро перерізу для прямокутника АВСД (рис.4.7) Сумістимо спочатку нейтральну лінію зі стороною СД (положення I -I). Очевидно в цьому разі

$$a_z = \frac{b}{2} ; a_y = \infty$$

Тоді із виразів (4.8)

$$z_F = -\frac{i_y^2}{a_z} = -\frac{b}{6} ; y_F = \frac{i_Z^2}{a_y} = 0$$

Тут ураховано, що

$$i_Z^2 = I_Z / A = bh^3 / 12bh = h^2 / 12 ;$$

$$i_y^2 = I_y / A = hb^3 / 12bh = b^2 / 12 .$$

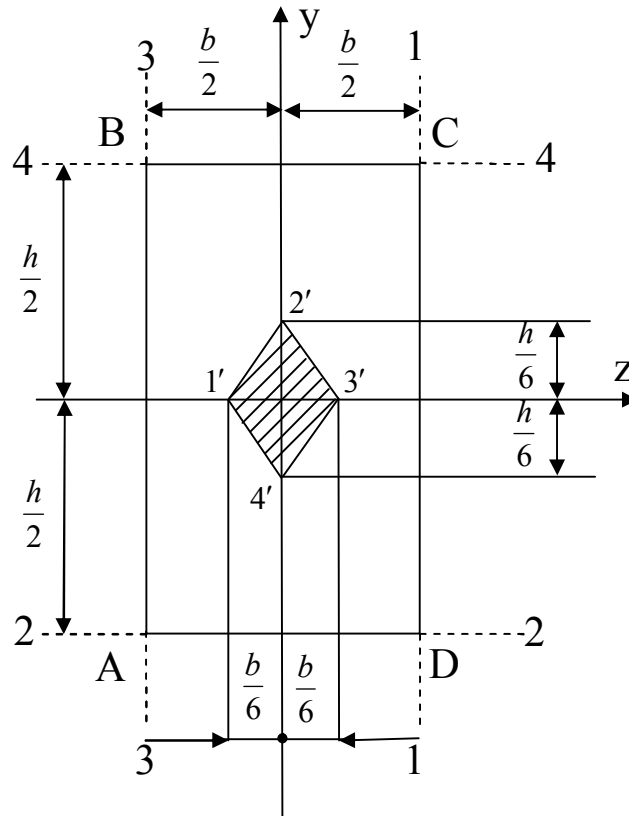


Рис.4.7

Отже, координати точки  $I'$  ядра перерізу визначені.  
Сумістимо тепер нейтральну лінію зі стороною AD(положення 2-2).

Маємо  $a_Z = \infty$ ;  $a_Z = -h/2$ .

Тоді координати точки  $2'$  ядра

$$z_F = 0 ; \quad y_F = -\frac{h^2}{12(-h/2)} = \frac{h}{6}.$$

Аналогічне визначаються координати точок  $3'$  та  $4'$ , ще відповідають положенням 3-3 та 4-4 нейтральної лінії.

## ЛЕКЦІЯ 5

### СУМІСНА ДІЯ ЗГИНАННЯ З КРУЧЕННЯМ

#### 5.1.Визначення згинальних та крутних моментів

Сумісна дія згинання з крученням частіше усього зустрічається в різних деталях машин. Наприклад, колінчатий вал сприймає значні крутні моменти та, крім того, працює на згинання. Осі моторних вагонів електровозів, а також трамвайного вагона працюють на згин з крученням.

Якщо вал або стержень має велику жорсткість, то розрахунок на спільну дію згину з крученням виконується на основі принципу незалежності дії сил.

Так як згинання вала може відбуватися у двох площинах, то виникає необхідність визначення сумарних внутрішніх зусиль. Отже, при розрахунках елементів, які працюють одночасно на згинання та кручення в першу чергу необхідно визначити розрахункові значення згинальних  $M$  та крутних  $T$  моментів.

Покажемо це на прикладі прямого вала круглого перерізу з шківом та кривошипом. Схема вала зображена на рис. 5.1.

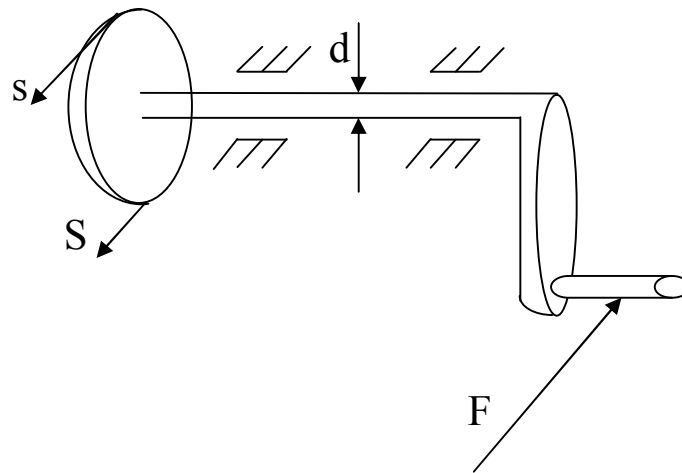


Рис.5.1.

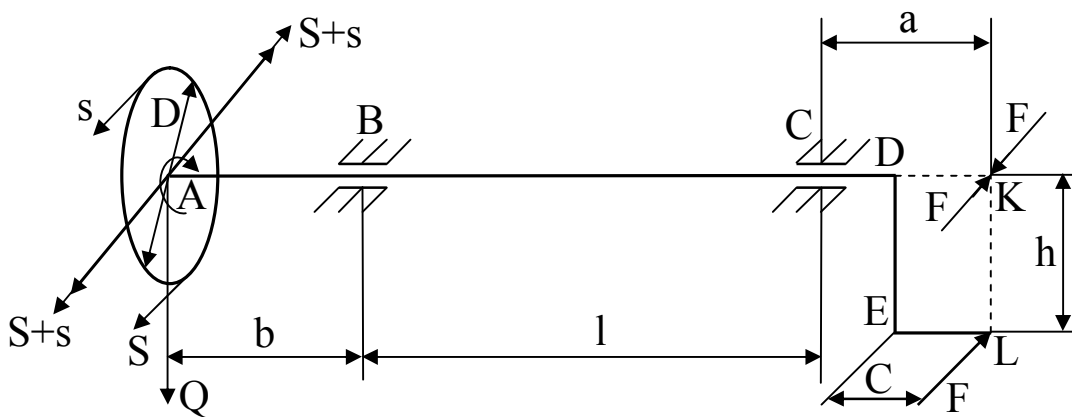


Рис.5.2.

На лівому кінці вала розташований шків вагою  $s$  на нього діє натяг паса  $S$  та  $(S > s)$ ; на правому кінці на палець кривошипа діє горизонтальна сила  $F$ ; Розглянемо випадок коли кривошип розташований вертикально. Визначимо згинальні та крутні моменти, які виникають у перерізах вала. Сили  $S$  та  $s$  (натяги паса), які діють на шків заміняємо силою  $S + s$ , прикладеної в центрі шківа

(рис. 5.2). Сила  $S + s$  разом з вагою шківів  $Q$  викликає згинання вала, пара сил  $(S - s)\frac{D}{2}$ , скручуючи вал, врівноважується парою прикладеною до його правого кінця.

Заміняємо силу  $F$ , яка діє на палець кривошипа, такою ж силою  $F$ , прикладеною до вала на продовженні його осі в точці  $K$ , та парою з моментом  $F \cdot h$ . Таким чином, до кінців вала прикладені пари  $F \cdot h$  та  $(S - s)\frac{D}{2}$ ; при рівновазі або рівномірному русі машин, моменти цих пар рівні між собою та дають скручуючий момент  $M_K = Fh = (S - s)\frac{D}{2}$ .

Якщо відомі число обертів вала за одиницю часу  $n$  та потужність  $P$ , яка передається шківом, то величина скручувального моменту  $M_K$ , може бути знайдена за формулою

$$M_K = 9549 \frac{P(\text{Квт})}{n(\text{об/хв})} \text{Нм}, \text{ або } M_K = 7028 \frac{P(\text{к.с.})}{n(\text{об/хв})} \text{Нм},$$

$$\text{тоді } F = \frac{M_K}{h}; \text{ та } S = \frac{2M_K}{D(1 - m)}, \text{ де } m = \frac{s}{S}.$$

Що до згинання, то на вал діють вертикальні  $Q$  та горизонтальні  $S + s$ ,  $F$  сили. Тому побудуємо епюри згинальних моментів для тих та інших (рис. За та б), вважаючи опори вала в підшипниках  $B$  та  $C$  шарнірними; одна з них має поздовжню рухомість.

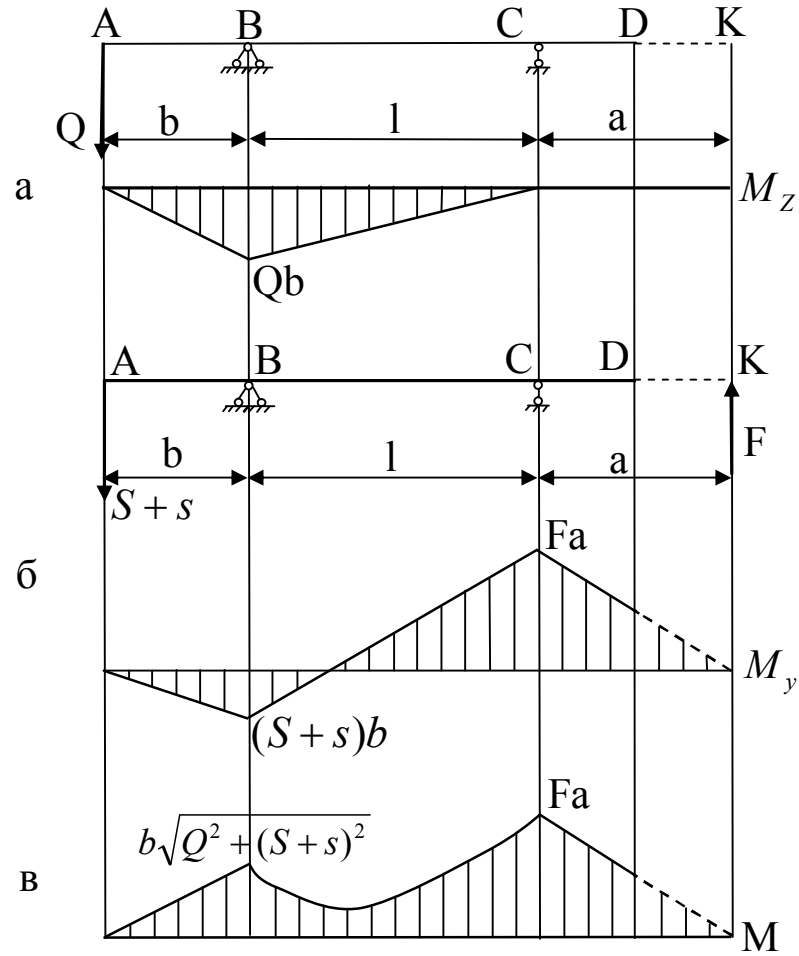


Рис.5.3.

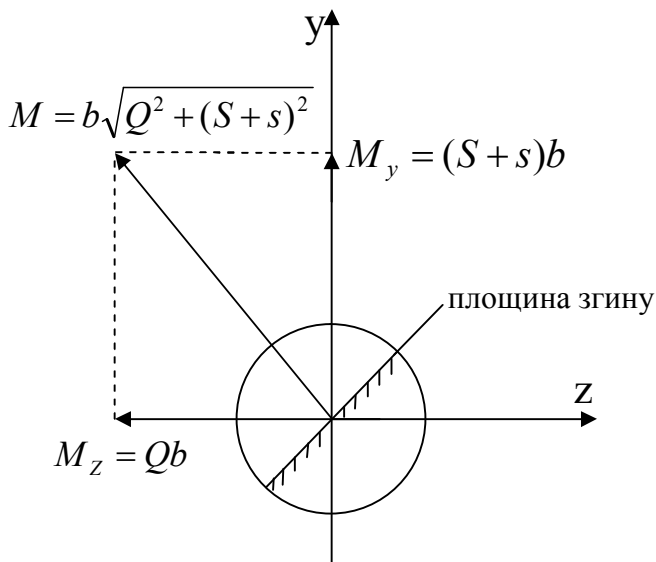


Рис.5.4

Маючи епюри згинальних моментів від вертикальних та горизонтальних навантажень, можна для будь-якого перерізу вала



знайти повний згинальний момент  $M$  як геометричну суму обох складових, тобто  $M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$ .

На рис. 5.4. показано таке геометричне складання векторів для перерізу В;  $M = b\sqrt{Q^2 + (S + s)^2}$ .

Для кожного перерізу будемо мати свою площину дії згинального моменту; але так як вал мав круглий поперечний переріз, у якого моменти опору відносно всіх центральних осей однакові, то без впливу на результати розрахунку можна сумістити площини згинаючих моментів для всіх перерізів та побудувати сумарну епюру, розташовуючи її в одній площині.

На тих ділянках вала, де прямі обмежуючі епюри згинаючих моментів  $M_z$  та  $M_y$  перетинають осі епюр в точках, розташованих на одній вертикалі, епюра  $M$  обмежена прямими лініями, а на решті ділянок вона обмежена кривими, не маючих максимуму (рис.5.3.В)

З обрису епюри  $M$  видно, що небезпечним буде або переріз В, або переріз С в залежності від співвідношення.

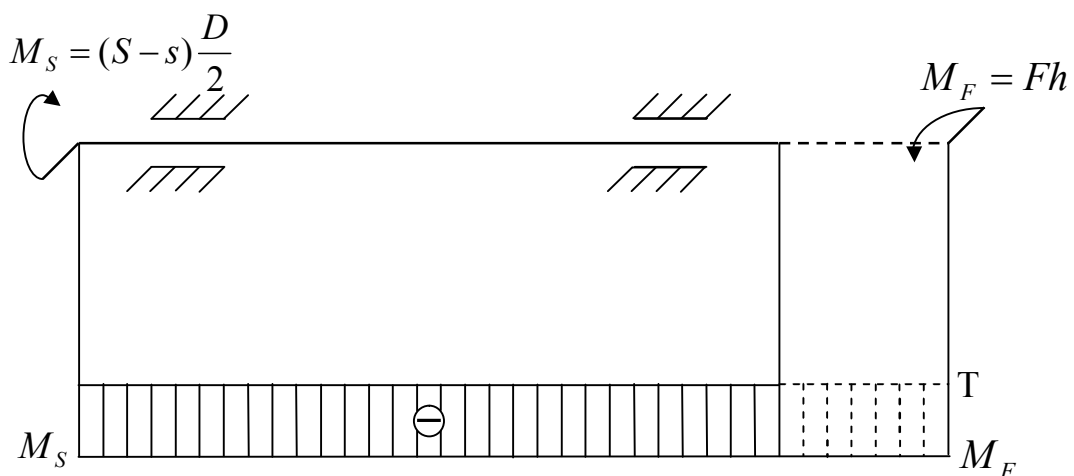


Рис.5.5.

Далі будемо епюру крутних моментів  $T$  (рис. 5.5) та шукаємо небезпечні перерізи. Взагалі небезпечними вважаються ті перерізи у яких одночасно великі  $M$  та  $T$ .

## 5.2. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ ТА ПЕРЕВІРКА МІЦНОСТІ ПРИ ЗГИНАННІ З КРУЧЕННЯМ

Вважаючи, наприклад, що небезпечним є переріз С, розсічемо вал в цьому перерізі та скористаємося способом складання дії сил.

Обчислимо напруження в поперечному перерізі від дії згинального моменту, та додамо до них напруження від кручення.

Згинаючий момент в перерізі  $C$  діє в горизонтальній площині; нейтральна вісь розташована вертикально, а найбільші нормальні напруження  $\sigma$  будуть в точках  $C_I$  та  $C_{II}$  на кінцях

горизонтального діаметра  $\sigma = \frac{M}{W}$  крутячий момент викликає тільки дотичні напруження  $\tau$ , які досягають найбільшого значення в точках біля контуру,  $\tau = \frac{T}{W_P}$ , так як  $W_P = 2W$ , то

$$\tau = \frac{T}{2W} \text{ (рис.5.6)}$$

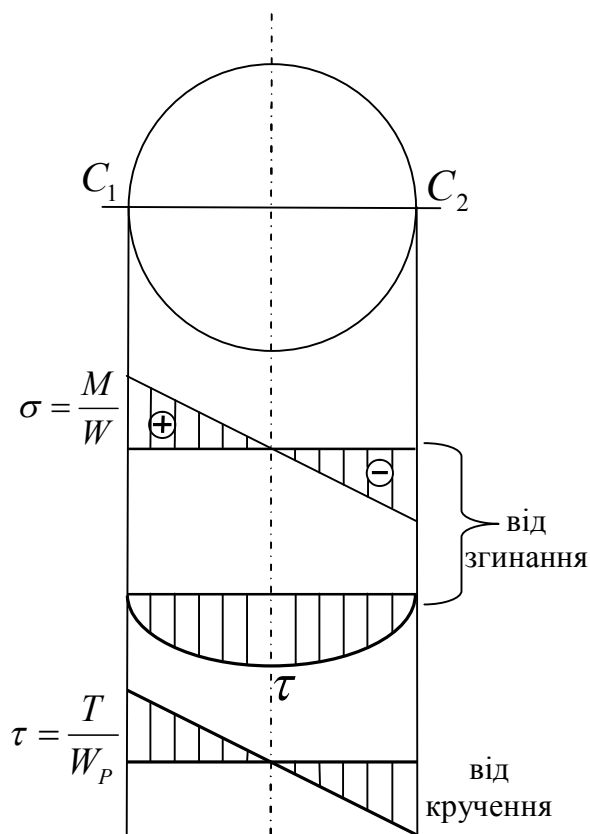


Рис.5.6.

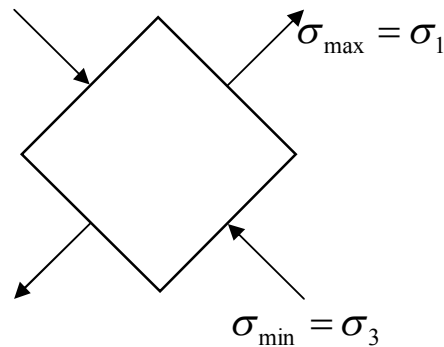
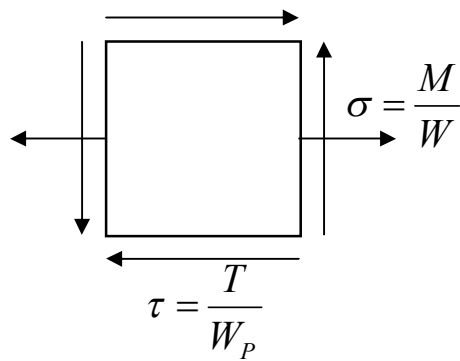


Рис.5.7

Значення дотичних напружень від поперечної сили при згинанні значно менші в порівнянні з дотичними напруженнями від кручення і ними нехтуємо.

Розглянемо напружений стан в небезпечній точці  $C_I$  (Рис.5.7)

На чотирьох гранях елемента, виділеного в точці  $C_I$  діють дотичні напруження, а до двох із цих граней прикладені ще й нормальні напруження. Решта граней вільні від напружень. Отже, при згинанні з крученням елемент у небезпечній точці перебуває в плоскому стані. Аналогічні напруження на гранях ми мали у брусі при плоскому згинанні, тому тут головні напруження треба визначити за тими самими формулами:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \sigma_2 = 0; \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (5.1)$$

Тільки при згинанні дотичні напруження спричинювалися поперечною силою, а в (5.1) вони спричинюються крутним моментом  $T$ .

Для перевірки міцності елемента, який виділений біля небезпечної точки треба вибрати відповідну теорію міцності. Маючи на увазі вали, виготовлені із сталі, застосовуємо третю або четверту теорію міцності.

Умови міцності по третій та четвертій теоріям міцності:

$$\sigma_{екв,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{adm}; \quad (5.2)$$

$$\sigma_{екв,IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq \sigma_{adm}. \quad (5.3)$$

Для матеріалів, які мають відмінну міцність на розтягання та стискання деякі леговані сталі, чавун, деякі сплави, слід користуватися теорією міцності Мора.

За теорією Мора

$$\sigma_{екв,M} = \frac{\sigma_1}{M} - m\sigma_3 \leq \sigma_{adm}^t, \quad (5.4)$$

де  $M = \frac{\sigma^c}{\sigma_{adm}^c}$ .

Підставляючи у формули (5.2), (5.3) та (5.4) вирази (5.1), та враховуючи, що  $\sigma = M/W$ ;  $\tau = T/2W$ , отримаємо

$$\sigma_{екв,III} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_{adm} \quad (5.5)$$

$$\sigma_{екв,IV} = \frac{\sqrt{M^2 + 0,75T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}; \quad (5.6)$$

$$\sigma_{екв,M} = \frac{\frac{1-m}{2}M + \frac{1+m}{2}\sqrt{M^2 + T^2}}{W} \leq \sigma_{adm}^t \quad (5.7)$$

Чисельник цих формул є зведення моментами

$$M_{red,III} = \sqrt{M^2 + T^2}; \quad (5.8)$$

$$M_{red,IV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} \quad (5.9)$$

$$M_{red,M} = \frac{1-m}{2}M + \frac{1+m}{2}\sqrt{M^2 + T^2} \quad (5.10)$$

Неважко помітити, що тепер умови міцності (5.5), (5.6) та (5.7) можна замінити однією простою формулою

$$\sigma_{екв,i} = \frac{M_{red,i}}{W} \leq \sigma_{adm} \quad (5.11)$$

Розв'язуючи нерівність (5.11) відносно  $W$ , дістанемо формули

для визначення моменту опору:  $W = \frac{M_{red,i}}{\sigma_{adm}}$ ,

Та діаметра круглого вала:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red,i}}{\pi\sigma_{adm}}} \approx \sqrt{\frac{10M_{red,i}}{\sigma_{adm}}} \quad (5.13)$$

Зазначимо, що наведені формули цілком придатні також для стержнів кільцевого перерізу.

## ЛЕКЦІЯ 6

### ЗАГАЛЬНИЙ ВИПАДОК ДІЇ СИЛ НА ПРОСТОРОВИЙ БРУС З ЛАМАНОЮ ВІССЮ

#### 6.1. Визначення внутрішніх зусиль

При проектуванні машин часто трапляється розраховувати брус, вісь якого уявляє собою просторову лінію складену із відрізків прямих. Так, наприклад, на рис.6.1 показаний брус, складений з трьох стержнів: АВ, ВС та СД.

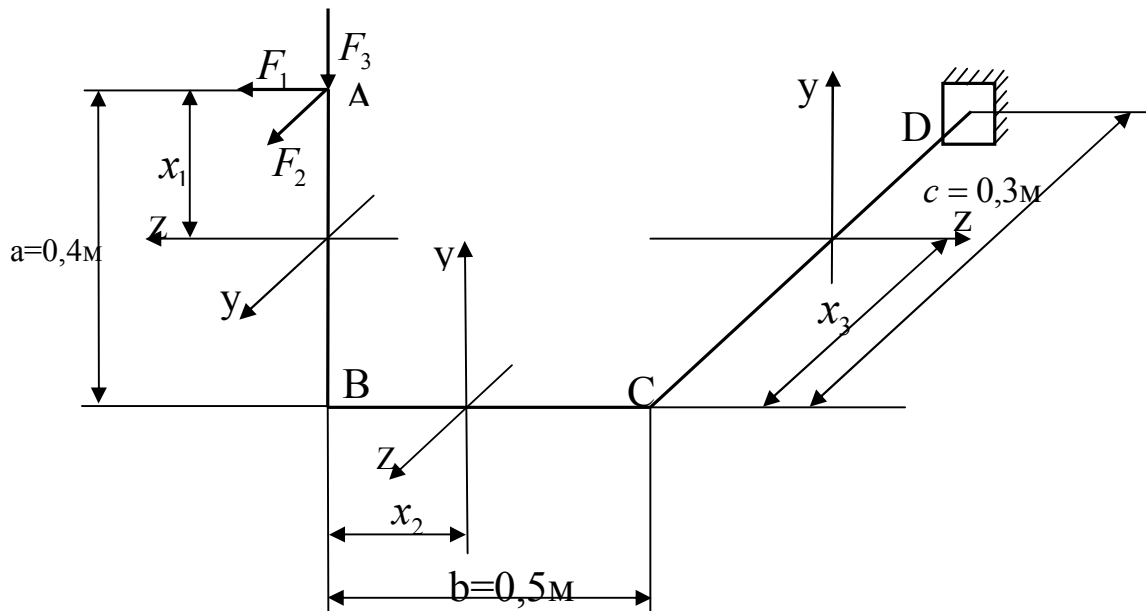


Рис.6.1

Розрахунок таких стержнів починається з визначення внутрішніх силових факторів в ряді перерізів. Для знаходження

більш напруженого (небезпечного) перерізу будують епюри внутрішніх силових факторів:  $N, Q_Z, Q_y, T, M_Z, M_y$ .

В першу чергу необхідно для кожного із стержнів призначити осі координат. Звичайно вісь, яка збігається з віссю бруса позначають віссю  $Ox$  а дві інші сполучають з головними осями інерції перерізу.

Епюри моментів, поперечних та поздовжніх сил для кожного стержня будують, як для плоского бруса, із застосуванням прийнятого раніше правила знаків. При цьому уявно розташовують кожний із стержнів по відношенню до себе так, щоб погляд був направлений в початок координат з боку додатної осі  $O_Z$  (при побудові епюр  $Q_y$  та  $M_Z$ ) або осі  $O_y$  (при побудові епюр  $Q_Z$  та  $M_y$ ).

Розглянемо приклад побудови епюр для бруса, зображеного на рис.6.1, коли на нього діють три сили:

$$F_1 = 5\text{кН}; F_2 = 8\text{кН} \text{ та } F_3 = 10\text{кН}.$$

Визначаємо внутрішні зусилля на ділянках ламаного стержня

$$\text{Ділянка АВ} \quad 0 \leq x_1 \leq a$$

$$N = -F_3 = -10\text{кН}; Q_Z = -F_1 = -5\text{кН}; Q_y = F_2 = 8\text{кН};$$

$$T = 0; M_Z(x_1) = F_2 x_1; M_{Z(0)} = 0; M_{Za} = F_2 a = 8 \cdot 0,4 = 3,2\text{кН}$$

$$M_y(x_1) = F_1 x_1; M_y(0) = 0; M_y(a) = F_1 a = 5 \cdot 0,4 = 2\text{кНм}$$

$$\text{Ділянка ВС} \quad 0 \leq x_2 \leq b$$

$$N = F_1 = 5\text{кН}; Q_Z = -F_2 = -8\text{кН}; Q_y = -F_3 = -10\text{кН};$$

$$T = F_2 a = 8 \cdot 0,4 = 3,2\text{кНм}; M_Z(x_1) = -F_1 a - F_3 x_2;$$

$$M_Z(0) = -F_1 a = -5 \cdot 0,4 = -2\text{кНм}; M_Z(b) = -F_1 a - F_3 b = -2 - 10 \cdot 0,5 = -7\text{кНм};$$

$$M_y(x_2) = F_2 x_2; M_y(0) = 0; M_y(b) = F_2 b = 8 \cdot 0,5 = 4\text{кНм}.$$

$$\text{Ділянка СД} \quad 0 \leq x_3 \leq C$$

$$N = F_2 = 8\text{кН}; Q_Z = F_1 = 5\text{кН}; Q_y = -F_3 = -10\text{кН};$$

$$T = -F_1 a - F_3 b = -5 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,5 = -7 \text{ кНм};$$

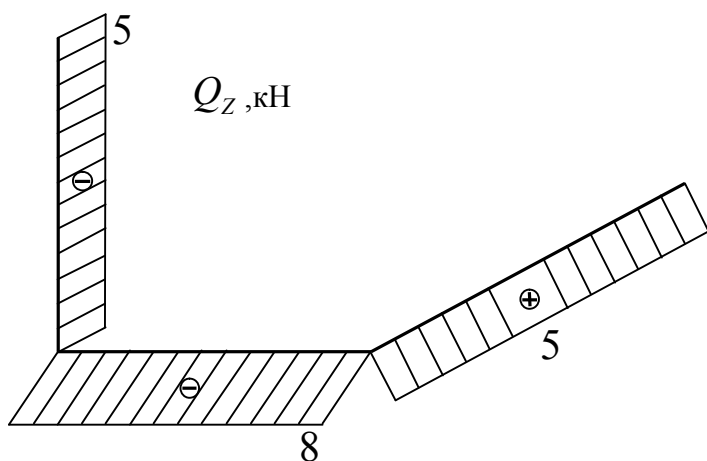
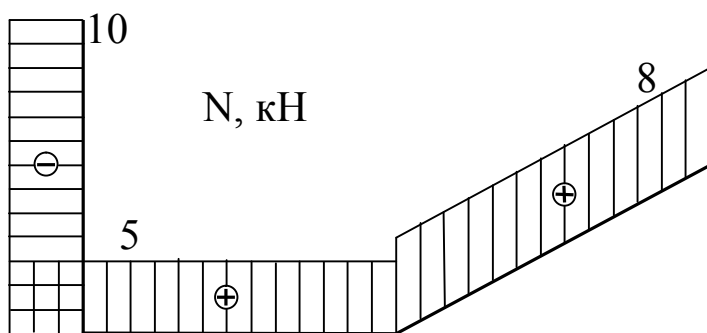
$$M_Z(x_3) = -F_2 a - F_3 x_3; \quad M_Z(0) = -F_2 a = -8 \cdot 0,4 = -3,2 \text{ кНм};$$

$$M_Z(c) = -F_2 a - F_3 c = -8 \cdot 0,4 - 10 \cdot 0,3 = -6,2 \text{ кНм};$$

$$M_y(x) = F_2 b - F_1 x_3; \quad M_y(0) = F_2 b = 8 \cdot 0,5 = 4 \text{ кНм};$$

$$M_y(c) = F_2 b - F_1 c = 8 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,3 = 2,5 \text{ кНм}.$$

Епюри  $N, Q_Z, Q_y, T, M_Z, M_y$  зображено на рис.6.2



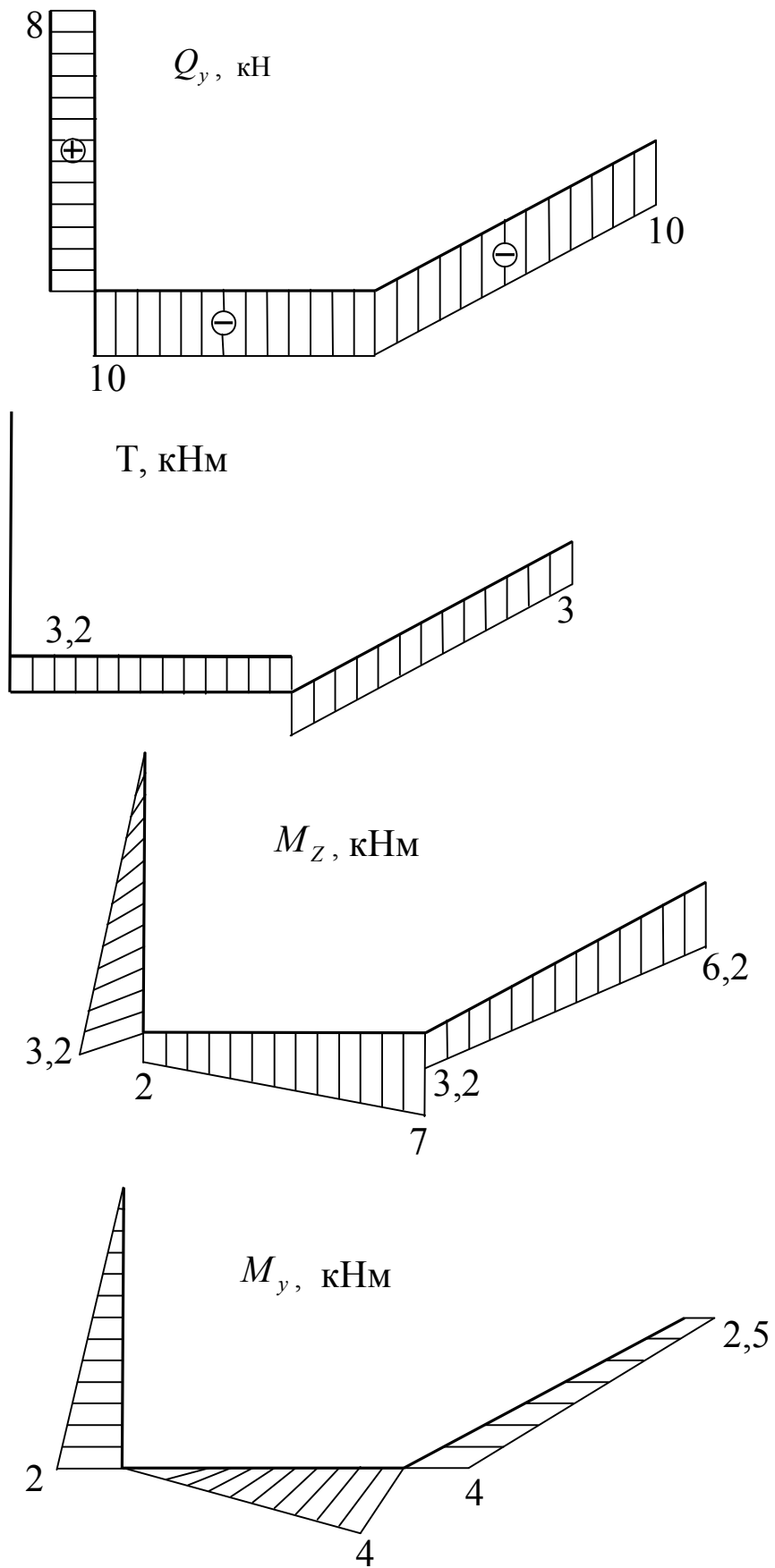


Рис.6.2



## 6.2. НАПРУЖЕННЯ ТА РОЗРАХУНОК НА МІЦНІСТЬ СТЕРЖНІВ ПРОСТОРОВОГО БРУСА.

Стержні просторового бруса, з ламаною віссю можуть зазнавати різних комбінацій простіших видів деформації.

Чогось принципово нового задачі складного опору при достатньо жорстких брусах не вносять, оскільки спільна дія внутрішніх зусиль призводить до напруженого стану, який можна здобути сумуванням напружених станів, спричинених кожним видом простого навантажування окремо. Вміючи визначати нормальні та дотичні напруження в різних точках стержня, а також головні напруження, можна за тією чи іншою теорією міцності перевірити міцність даного стержня.

Принцип сумування дії сил можна застосовувати в усіх випадках коли деформації малі й відповідають закону Гука.

На практиці одночасна дія всіх силових факторів спостерігається нечасто. Частіше доводиться мати справу з різними комбінаціями їх, які й розглянемо нижче.

Спочатку розглянемо випадок спільної дії розтягу (або стиску) і кручення круглого стержня, коли в кожному поперечному перерізі діють тільки поздовжня сила  $N$  та крутний момент  $T$ . Поздовжня сила спричиняє рівномірно розподілені по поперечному перерізі нормальні напруження  $\sigma = N/A$ , а крутний момент - дотичні

напруження  $\tau = \frac{T}{I_p} \cdot \rho$ .

Оскільки нормальні напруження в усіх точках поперечного перерізу однакові, то небезпечними вважаються ті точки перерізу, в

яких діють найбільші дотичні напруження  $\tau = \frac{T}{W_p}$ , тобто точки, які

розташовані біля зовнішньої бокової поверхні бруса. Напружений стан в цих точках не відрізняється від стану, зображеного на рис. 5.7 для випадку роботи бруса на згин з крученням. Тому формули (5.1), (5.2), (5.3) можуть бути застосованими в розглядуваному випадку; в них слід підставляти значення

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad ; \quad \tau = \frac{T}{W_p} \quad (6.1)$$

В загальному випадку навантаження в поперечних перерізах бруса виникають всі шість внутрішніх силових факторів. При розрахунках на міцність, як уже зазначалось, вплив в поперечних сил в переважній більшості випадків не ураховується і, отже, розглядується одночасна робота бруса на згин кручення та розтягання (або стискання)

Для бруса круглого перерізу нормальні напруження від згинання визначаються за сумарним згинаючим моментом

$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}$  Крім цього, в поперечних перерізах виникають рівномірно розподілені нормальні напруження від розтягання стискання. Характер напруженого стану в небезпечній точці в цьому випадку не відрізняється від стану, зображеного на рис 5.7, але нормальні напруження спричиняються не тільки згином, але і розтяганням (стискання). При згинанні з крученням небезпечними вважаються дві точки поперечного перерізу, розташованих на пересіченні площини дії згинального моменту з контуром поперечного перерізу. При наявності ще й поздовжньої сили небезпечною вважається одна з цих точок; при цьому якщо брус виготовлений з пластичного матеріалу, то та точка, в якій напруження від згинання та осевого навантаження мають однакові знаки.

В залежності від прийнятої теорії міцності розрахунок міцності здійснюється за формулами (5.1), (5.2) або (5.3), причому в неї

підставляються значення  $\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}$  та  $\tau = \frac{T}{W_p}$ . Напруження

$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$  є в одній, а  $\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M}{W}$  в другій з точок поперечного перерізу, які можуть бути небезпечними.

При відсутності крутного моменту в небезпечних точках бруса виникає одноосний напружений стан (якщо знехтувати дотичними напруженнями, пов'язаних з поперечними силами. Отже, розрахунок в цьому випадку здійснюється без застосування теорій міцності. Нормальні напруження в небезпечній точці при цьому обчислюються за формулою

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W}, \quad (6.2)$$

Де  $M$ -значення сумарного згинального моменту в небезпечному перерізі бруса. Цей випадок не відрізняється від випадку позацентрового розтягу (або стиску) бруса великої жорсткості.

## ЛЕКЦІЯ 11

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СИЛ

#### 11.1. Статична невизначуваність

Як вже відомо, внутрішні зусилля у деяких системах неможливо визначити за допомогою лише рівнянь рівноваги. Для розрахунку таких систем необхідно скласти додаткові рівняння, що впливають з умов сумісності деформацій елементів системи. Такі системи називаються статично невизначуваними.

Розрахунок статично невизначуваної системи починається з аналізу її схеми, з якого у першу чергу встановлюється ступінь статичної невизначуваності системи.

Статично визначувана система не має жодного зайвого зв'язку. Видалення з неї хоча б одного зв'язку перетворює систему у геометрично змінювану, тобто у механізм.

Наявність зайвих зв'язків є ознакою статично невизначуваної системи. Зайвими такі зв'язки називають лише у тому сенсі, що вони перевищують число зв'язків, необхідних для забезпечення геометричної незмінюваності системи. З точки зору надання системі необхідної міцності та жорсткості такі зайві зв'язки часто бувають суттєво необхідними.

Накладення на систему зайвих зв'язків ускладнює її розрахунок, і чим більше система має таких зв'язків, тим складніше розрахунок.

Ступінь статичної невизначуваності системи дорівнює числу зайвих зв'язків, що їх видалення перетворює її у геометрично незмінювану систему. Задля обчислення ступеню статичної невизначуваності системи спочатку встановлюється число замкнених контурів, що входять до системи. Будь-який же замкнений контур є тричі статично невизначуваним. Дійсно, щоби знайти внутрішні зусилля у стержнях контура, зображеного на рис. II.1.а, його треба розрізати на дві частини, рис. II.1.б. Та при цьому матимемо б

невідомих, у той час як для плоскої системи можна скласти лише 3 рівняння рівноваги.

Встановлення одиночного шарніра (рис.11.1.в) знижує ступінь статичної невизначуваності конструкції на одиницю, що видно з рис.11.1,г.

Встановлення ж подвійного шарніра, тобто такого, що з'єднає три стержні, знижує ступінь статичної невизначуваності системи на дві одиниці і т.д.

Таким чином, ступінь статичної невизначуваності системи можна визначити за формулою

$$СН=3К-Ш, \quad (11.1)$$

де  $K$  – число замкнених контурів у конструкції системи,

$Ш$  – загальне число шарнірів у перерахунку на одиночні.

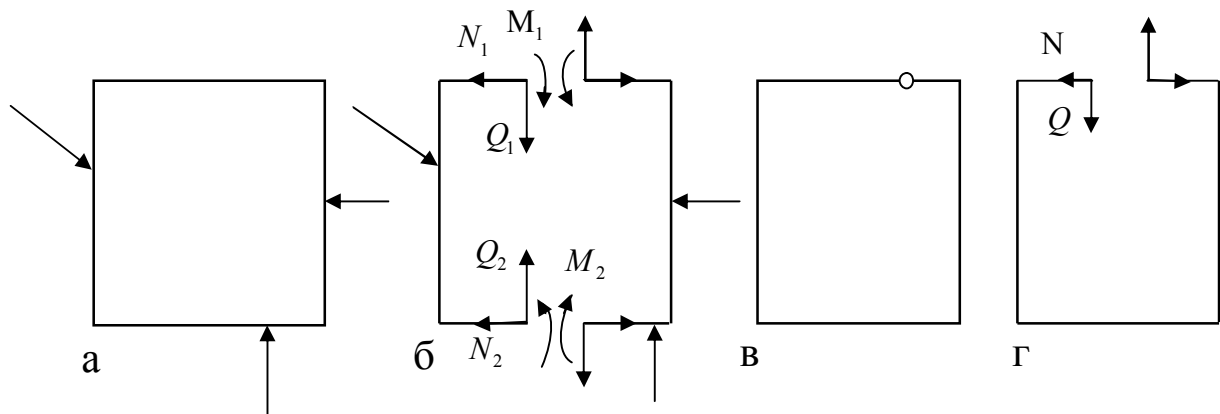


Рис.11.1

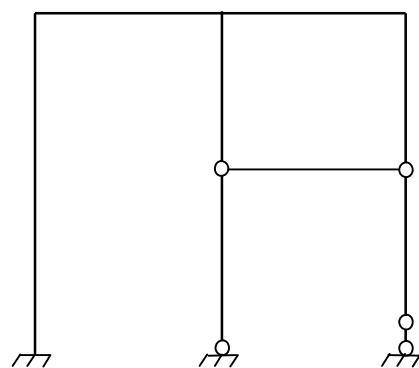


Рис.11.2

Наприклад, рама, зображена на рис11.2, має 3 замкнених контури,але в конструкцію включено 4 одиночних та один подвійний шарніри. Тому ступінь статичної невизначуваності рами дорівнює

$$СН=3*3-6=3$$

Слід також розрізняти умовно та абсолютно необхідні зв'язки. Видалення з системи перших не порушує геометричної незмінюваності її, а видалення других перетворює систему у механізм, тобто цього робити не можна. Так, для рами, зображеної на рис.11.3.а абсолютно необхідними б вертикальні опорні стержні, бо видалення будь-якого з них порушує геометричну незмінюваність системи (рис.11.3.б). Горизонтальні ж опорні стержні є умовно необхідними, бо видалення одного з них таку незмінюваність системи зберігає (рис.11.3.в).

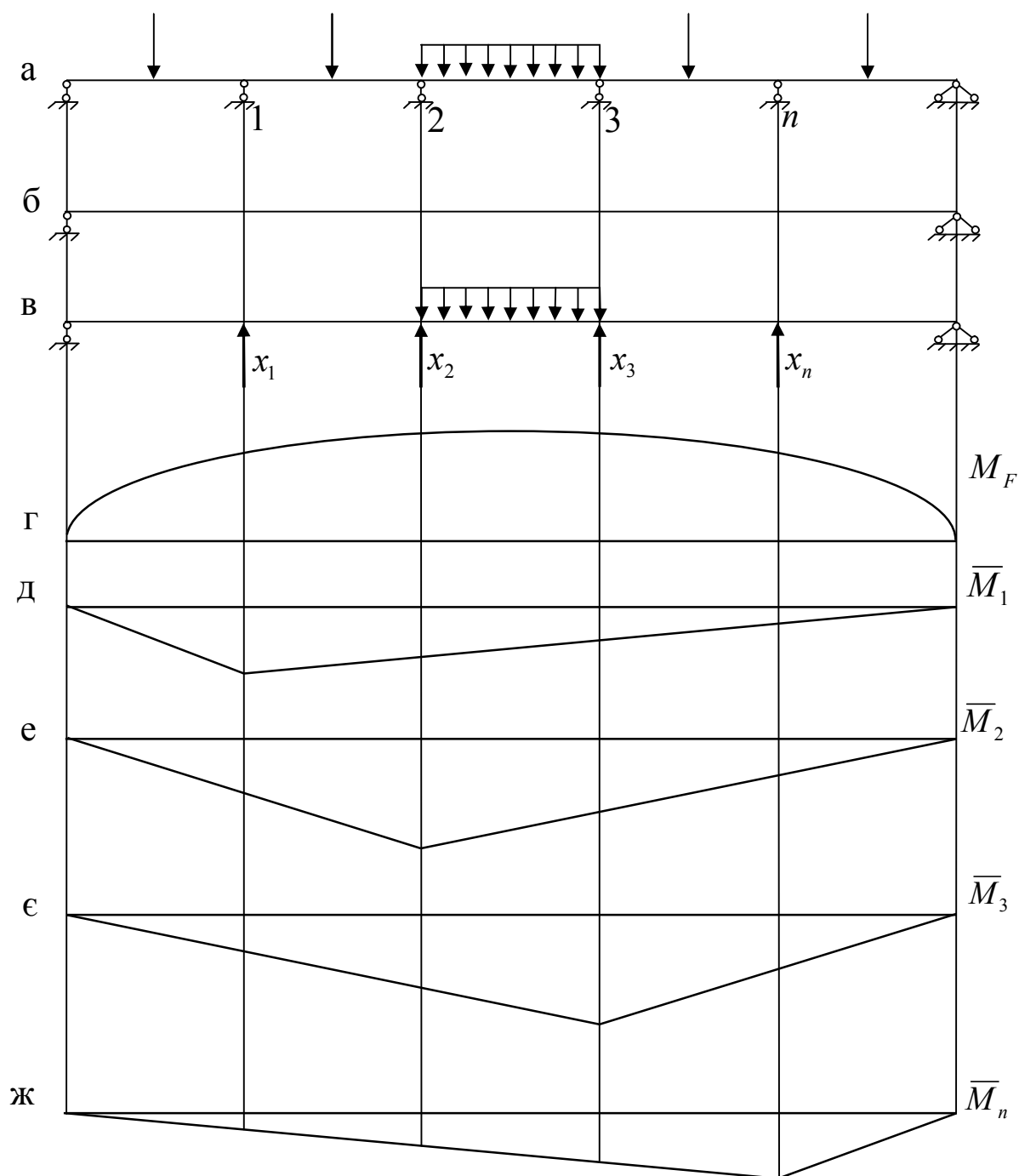


Рис.11.4

Переміщення  $\Delta_{ik}$  виразимо через відповідну силу та коефіцієнт впливу за формулою (7.3), а саме  $\Delta_{ik} = \delta_{ik} \cdot Q_k$ .

Тоді рівняння (11.3) перепишемо у вигляді

$$\Delta_i = \delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \delta_{i3}x_3 + \dots + \delta_{in}x_n + \Delta_{iF} = 0 \quad (11.4)$$

Таким чином, умова еквівалентності заданої та основної систем полягає у задоволенні системи рівнянь (11.4), яка у розгорнутому вигляді записується так:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \dots + \delta_{1n}x_n + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \dots + \delta_{2n}x_n + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \dots + \delta_{3n}x_n + \Delta_{3F} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{n1}x_1 + \delta_{n2}x_2 + \delta_{n3}x_3 + \dots + \delta_{nn}x_n + \Delta_{nF} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

Система (11.5) називається канонічними рівняннями методу сил. Число рівнянь системи дорівнює числу відкинутих зв'язків, тобто ступеню статичної невизначуваності системи. Коефіцієнти  $\delta_{ii}$  зветься головними. Вони розташовані вздовж головної діагоналі системи і завжди є додатними. Інші коефіцієнти називаються побічними. Вони можуть бути як додатними, так і від'ємними, а також рівними нулю. Згідно з теоремою про взаємність переміщень (7.8) побічні коефіцієнти в попарно рівними, тобто  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ , і ця обставина суттєво зменшує обсяг обчислювальної роботи під час розв'язання системи (11.5).

Коефіцієнти  $\Delta_{iF}$  називаються вільними або вантажними членами рівнянь.

## ЛЕКЦІЯ 12

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СИЛ (продовження)

12.1. Визначення та перевірка коефіцієнтів та вільних членів у рівняннях методу сил.

Оскільки будь-який коефіцієнт при невідомій  $\delta_{ik}$  є одиничним переміщенням у напрямку невідомої  $\bar{x}_k = 1$ , використовуючи інтеграл Мора, отримаємо

$$\delta_{ik} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EI} \quad (12.1)$$

Інтеграл (12.1) для систем, що складаються з прямолінійних ділянок сталої жорсткості, звичайно обчислюється способом перемноження епюр. Для цього від кожної невідомої сили, попередньо покладеної рівною одиниці, будуються одиничні епюри, рис.11.4.д-ж. Перемножуючи відповідні епюри, обчислюємо коефіцієнти при невідомих

$$\delta_{ik} = \sum_l \int \frac{\bar{M}_i \bar{M}_k dx}{EI} = \bar{M}_i \cdot \bar{M}_k \quad (12.2)$$

Головні коефіцієнти обчислюються шляхом перемноження відповідних одиничних епюр "самих на себе":

$$\delta_{ii} = \bar{M}_i \cdot \bar{M}_i \quad (12.3)$$

Вільні члени рівнянь є переміщеннями у основній системі від зовнішнього навантаження. Для їх визначення будується вантажна епюра згинаючих моментів  $M_F$  (рис.11.4,г). Перемножуючи цю епюру на відповідну одиничну, обчислюємо вільні члени за формулою

$$\Delta_{iF} = \bar{M}_i \cdot M_F \quad (12.4)$$

Для перевірки коефіцієнтів та вільних членів будується сумарна одинична епюра  $\bar{M}_S$  одночасно від усіх одиничних невідомих сил. Сумарну одиничну епюру можна представити як результат складання усіх одиничних епюр, тобто

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \bar{M}_3 + \dots + \bar{M}_n \quad (12.5)$$

Перемножуючи цю епюру на будь-яку одиничну, отримаємо

$$\overline{M}_i \cdot \overline{M}_S = \overline{M}_i \cdot \overline{M}_1 + \overline{M}_i \cdot \overline{M}_2 + \overline{M}_i \cdot \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_i \cdot \overline{M}_n$$

або

$$\overline{M}_i \cdot \overline{M}_S = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \delta_{i3} + \dots + \delta_{in} = \sum_{k=1}^n \delta_{ik} ,$$

(12.6)

тобто суму коефіцієнтів у даній строчці. Така перевірка називається построчною.

Якщо перемножити одиничну епюру (12.5) "саму на себе", отримаємо суму всіх коефіцієнтів при невідомих. Дійсно,

$$\begin{aligned} \overline{M}_S \cdot \overline{M}_S &= \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_1 + \overline{M}_1 \cdot \overline{M}_2 + \overline{M}_1 \overline{M}_3 + \dots \\ &+ \overline{M}_1 \overline{M}_n + \overline{M}_2 \overline{M}_1 + \overline{M}_2 \overline{M}_2 + \overline{M}_2 \overline{M}_3 + \dots \\ &+ \overline{M}_2 \overline{M}_n + \overline{M}_3 \overline{M}_1 + \overline{M}_3 \overline{M}_2 + \overline{M}_3 \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_3 \overline{M}_n + \dots \\ &+ \overline{M}_n \overline{M}_1 + \overline{M}_n \overline{M}_2 + \overline{M}_n \overline{M}_3 + \dots + \overline{M}_n \overline{M}_n \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} \overline{M}_S \overline{M}_S &= \delta_{11} + \delta_{12} + \delta_{13} + \dots + \delta_{1n} + \delta_{21} + \delta_{22} + \delta_{23} + \dots \\ &+ \delta_{2n} + \delta_{31} + \delta_{32} + \delta_{33} + \dots + \delta_{3n} + \dots + \delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} + \dots + \delta_{nn} \end{aligned}$$

Отже

$$\overline{M}_S \overline{M}_S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_{ik} \quad (12.7)$$

Така перевірка називається універсальною (сумарною).

Нарешті, перемножуючи сумарну одиничну епюру на вантажну, отримаємо суму вільних членів рівнянь, бо



$$\bar{M}_S M_F = \bar{M}_1 M_F + \bar{M}_2 M_F + \bar{M}_3 M_F + \dots$$

$$+ \bar{M}_n M_F = \Delta_{1F} + \Delta_{2F} + \Delta_{3F} + \dots + \Delta_{nF}.$$

або

$$\bar{M}_S M_F = \sum_{i=1}^n \Delta_{iF} \quad (12.8)$$

Після обчислення та перевірки коефіцієнтів та вільних членів розв'язується система (11.5) і визначаються значення усіх невідомих.

## 12.2. Побудова остаточної епюри

Після визначення невідомих система стала статично визначуваною. Внутрішні зусилля для такої системи можна знайти звичайним шляхом. Та більш раціональним буде використання вже побудованих епюр.

Так, остаточної епюри згинаючих моментів будують шляхом складання вантажної та одиничних епюр, ординати яких попередньо слід помножити на значення відповідних невідомих з урахуванням отриманих знаків, тобто

$$M = M_F + \bar{M}_1 x_1 + \bar{M}_2 x_2 + \bar{M}_3 x_3 + \dots + \bar{M}_n \bar{x}_n \quad (12.9)$$

Використовуючи диференціальну залежність між  $Q$  та  $M$ , по епюрі згинаючих моментів можна побудувати епюру поперечних сил. Так, на ділянках без розподіленого навантаження тангенс кута нахилу епюри згинаючого момента дорівнює поперечній силі. У більш загальному випадку використовується схема (рис.12.1), де моменти  $M_1$  та  $M_2$  беруться з епюри згинаючих моментів.

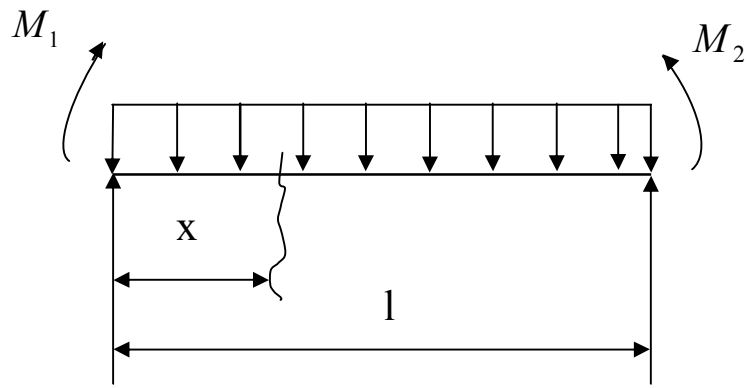


Рис.12.1

За схемою (12.1) поперечна сила на ділянці дорівнює

$$Q(x) = \frac{M_2 - M_1}{l} + \frac{ql}{2} - qx \quad (12.10)$$

Поздовжні сили для рам обчислюються шляхом розглядання умов рівноваги вирізаних вузлів.

### 12.3. Перевірка правильності побудованих епюр $M, Q$ та $N$

Остаточні епюри підлягають перевірці. Деформаційна перевірка рішення полягає у тому, що для еквівалентної системи визначаються переміщення у напрямку відкинутих зв'язків, що повинні дорівнювати нулю. З цією метою кожна одинична епюра перемножується на остаточну епюру згинаючих моментів для підтвердження умов

$$\bar{M}_i M = 0 \quad (12.11)$$

Очевидно, результат перемноження сумарної одиничної епюри на остаточну теж має бути рівним нулю, тобто

$$\bar{M}_s M = 0, \quad (12.12)$$

тож інколи обмежуються виконанням умови (12.12).

Статична перевірка рішення полягає у тому, що конструкція у цілому та окремі її частини повинні знаходитися у рівновазі, тобто перевіряються умови

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M = 0, \quad (12.13)$$

причому значення зусиль беруться з остаточних епюр.

## 12.4. Врахування впливу температури

Якщо крім зовнішніх сил конструкція піддається дії температури, порядок розрахунку її не змінюється. У такому випадку вільні члени рівнянь (II.4) будуть представляти собою переміщення від зовнішніх сил та температури у основній системі. Рівняння (II.4) приймуть вигляд

$$\delta_{i1}x_1 + \delta_{i2}x_2 + \delta_{i3}x_3 + \dots + \delta_{in}x_n + \Delta_{iF} + \Delta_{it} = 0; \quad (12.14)$$

Обчислення температурних переміщень розглянуто у лекції 10.

## 12.5. Використання симетрії системи

Розрахунок статично невизначуваної системи може бути значно спрощений, якщо система є симетричною.

Розглянемо, наприклад, раму, що має вісь симетрії (рис.12.2,а).

Система є тричі статично невизначуваною. Як основну прийемо систему, зображену на рис.12.2,б.

У такому випадку невідомими є симетричні внутрішні зусилля у місті розрізу поздовжня сила  $X_1$  та згинаючий момент  $X_2$ , а також косиметричне зусилля – поперечна сила  $X_3$ .

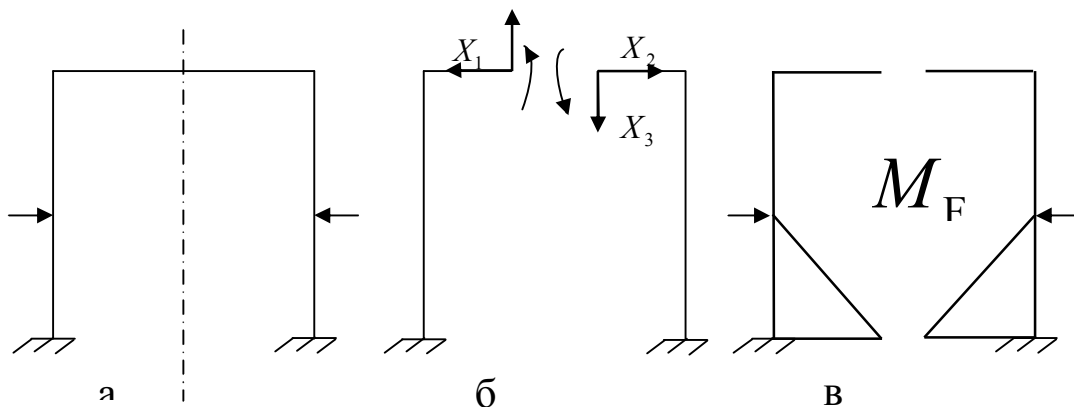


Рис.12.2

Система рівнянь методу сил має вигляд

$$\begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \delta_{13}x_3 + \Delta_{1F} &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \delta_{23}x_3 + \Delta_{2F} &= 0; \\ \delta_{31}x_1 + \delta_{32}x_2 + \delta_{33}x_3 + \Delta_{3F} &= 0. \end{aligned} \quad (12.15)$$

Побудуємо необхідні епюри. Вантажна епюра є симетричною (рис.12.2,в). Симетричними є також одиничні епюри  $\bar{M}_1$  та  $\bar{M}_2$ , а епюра  $\bar{M}_3$  - косиметрична (рис.12.3).

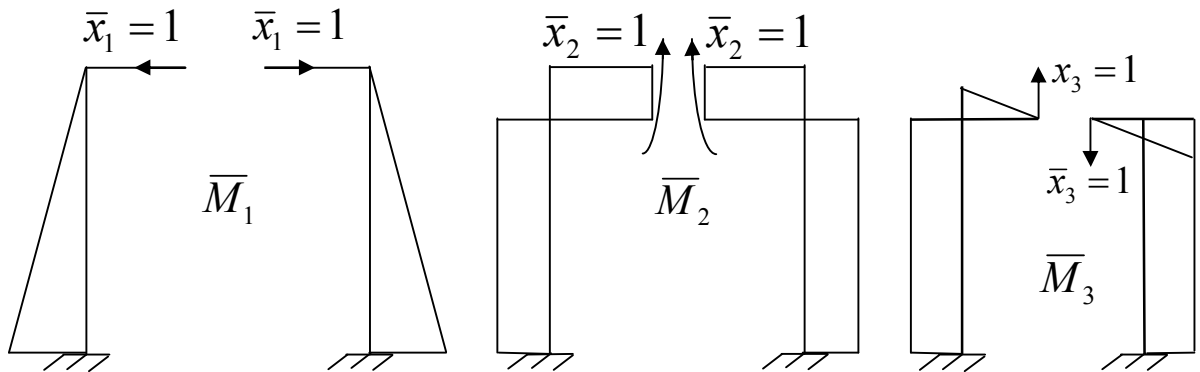


Рис.12.3

Оскільки результат перемноження симетричної епюри на косиметричну дорівнює нулю, у системі (12.15) перетворюються на нулі побічні коефіцієнти  $\delta_{13}, \delta_{23}, \delta_{31}$  та  $\delta_{32}$ , а також вантажний член  $\Delta_{3F}$ . Тоді з третього рівняння системи (12.15) зразу отримаємо, що  $x_3 = 0$ , тобто при симетричному навантаженні системи косиметрична невідома (поперечна сила) на осі симетрії дорівнює нулю. Залишається система з двох рівнянь з двома невідомими

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \Delta_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \Delta_{2F} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

Якщо навантаження на симетричну систему є косиметричним (рис.12.4, а), розв'язання задачі спрощується ще у більшій мірі.

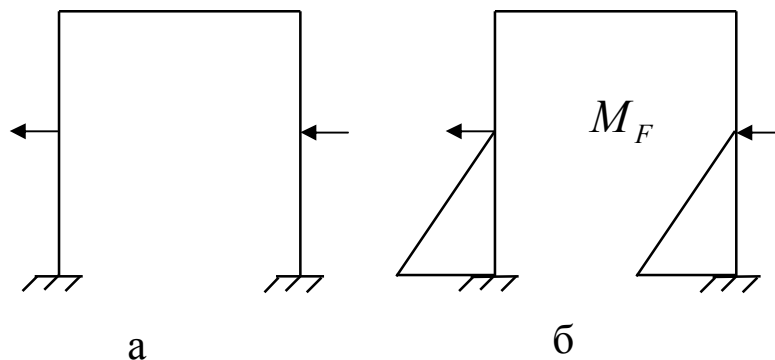


Рис.12.4

Дійсно, у цьому випадку вантажна епюра буде кососиметричною (рис.12.4,б). Тоді система (12.15) розпадається на систему двох рівнянь з двома невідомими

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 &= 0; \\ \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.17)$$

та рівняння

$$\delta_{33}x_3 + \Delta_{3F} = 0 \quad (12.18)$$

З рівняння (12.18) легко визначається невідома  $x_3$ . Оскільки у системі (12.17) вільні члени відсутні, то  $x_1 = 0, x_2 = 0$ .

Тобто при кососиметричному навантаженні симетричної системи симетричні невідомі по осі симетрії дорівнюватимуть нулю.

## ЛЕКЦІЯ 13

### РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ЗА МЕТОДОМ СИЛ (закінчення)

13.1. Визначання переміщень у статично невизначуваних системах

Вихідна статична невизначувана система та отримана з; неї основна система, завантажена зовнішніми силами та знайденими невідомими, повністю тотожні за умовами роботи. Тому, визначаючи переміщення будь-якого перерізу, одинична узагальнена сила може бути прикладеною до основної системи. Остання може бути вибрана за будь-яким можливим варіантом. Якщо, використовується метод перемноження епюр, будуються одинична епюра. Шукане переміщення визначається шляхом перемноження одиничної епюри на остаточну епюру згинаючих моментів, побудовану для даної статично невизначуваної системи (див.приклад 1). Якщо крім зовнішніх сил система піддається дії температури, до отриманого переміщення додається температурна складова, що також визначається для основної системи.

13.2. Порядок розрахунку статично невизначуваної системи за методом сил

Порядок розрахунку розглянемо на прикладі.

Приклад

Розкрити статичну невизначуваність рами (рис.13.1), побудувати епюри згинаючих моментів, поперечних та поздовжніх сил, якщо  $F = 40кН$ ;  $q = 10кН/м$ ,  $l = 2м$ ,  $h = 3м$ ,  $b = 1,5м$ .

Підібрати необхідний розмір двотаврового перерізу, якщо матеріал рами – сталь Ст.3,  $\sigma_{adm} = 160МПа$ . Обчислити зміщення опорного перерізу А.

Рама один раз статично невизначувана.

1. Відкидаючи зайвий зв'язок, наприклад, опору А, отримаємо основну систему. Невідомою буде реакція  $X_1$ , котру направимо, наприклад, управо. Еквівалентну систему зображено на рис.13.2.

2. Для побудови вантажної та одиничної епюр обчислюємо ординати згинаючих моментів у характерних перерізах рами. Вважаючи, що "верх" знаходиться ліворуч вертикального стержня АВ, для вантажної епюри отримаємо:

$$M_A = 0; M_K = q \frac{h}{2} \frac{h}{2} = 10 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = 11,25кНм;$$

$$M_B = q \cdot h \cdot \frac{h}{2} = 10 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 45кНм; M_C = M_B = 45кНм;$$

$$M_D = q \frac{h^2}{2} - Fb = 45 - 40 \cdot 1,5 = -15кНм.$$

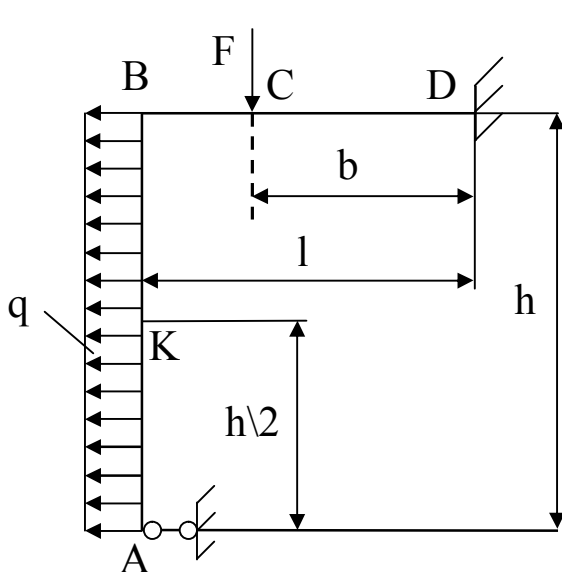


Рис.13.1

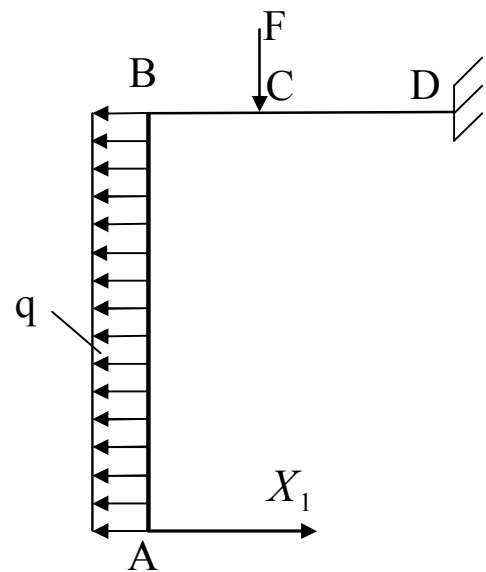


Рис.13.2

З урахуванням характеру епюр на кожній ділянці, будемо вантажну епюру (рис.13.3) на стиснутих волокнах стержнів.

Для одиничної епюри, поклавши попередньо  $\bar{X}_1 = 1$ , маємо:

$$M_A = 0; \bar{M}_K = -1 \cdot \frac{h}{2} = -1,5\text{м}; \quad \bar{M}_B = -1 \cdot h = -3\text{м};$$

$$\bar{M}_C = \bar{M}_D = -1 \cdot h = -3\text{м}.$$

Епюра є лінійною на всіх ділянках (рис.13.4).

3. Визначаємо невідому  $X_1$  з рівнянням методу сил

$$\delta_{11} = \bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EI} \left( \frac{3}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 3 \right) = \frac{27}{EI}.$$

Вантажний член рівняння знайдемо, перемноживши вантажну епюру на одиничну:

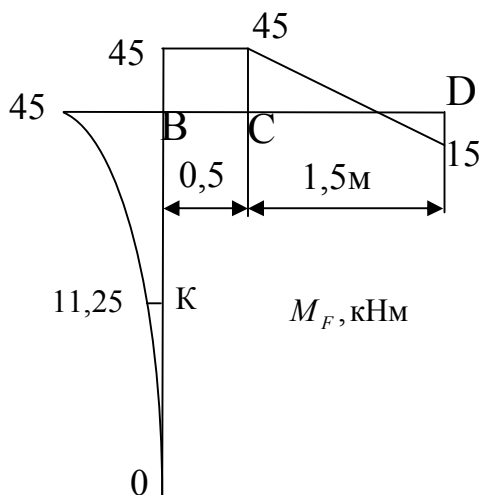


Рис.13.3.

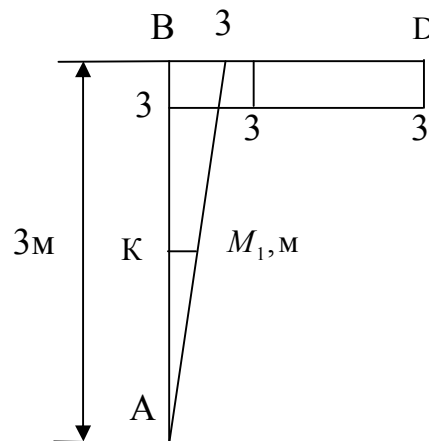


Рис.13.4.

$$\Delta_{1F} = M_F \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EI} \left[ -\frac{3}{6} (45 \cdot 3 + 4 \cdot 11,25 \cdot 1,5) - 45 \cdot 0,5 \cdot 3 - \frac{45-15}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \right] = -\frac{236,25}{EI}$$

Шукана невідома дорівнює

$$x_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{236,25 \cdot EI}{EI \cdot 27} = 8,75\text{кН}.$$

Додатній знак отриманого результату вказує на те, що напрям  $X_1$  відповідає прийнятому. У противному разі при подальших

розрахунках слід враховувати, що напрям реакції протилежний, ніж було прийнято.

4. Остаточну епюру згинаючих моментів будемо шляхом складання грузової з одиничною, ординати якої попередньо множаться на значення  $X_1$ :  $M = M_F + \bar{M}_1 \cdot x_1$ .

Обчислюємо: зважаючи моменти зверху і справа додатні, а знизу і зліва – від’ємні:

$$M_A = 0; M_K = -11,25 + 1,5 \cdot 8,75 = 1,875 \text{кНм};$$

$$M_B = 45 - 3 \cdot 8,75 = 18,75 \text{кНм}; M_C = 18,75 \text{кНм};$$

$$M_D = -15 - 3 \cdot 8,75 = -41,25 \text{кНм}.$$

Слід пам'ятати, що при складанні лінійних епюр сумарна еюра буде лінійною, а при складанні параболічної епюри з лінійною - параболічною.

Остаточну епюру згинаючих моментів зображено на рис.13.5.

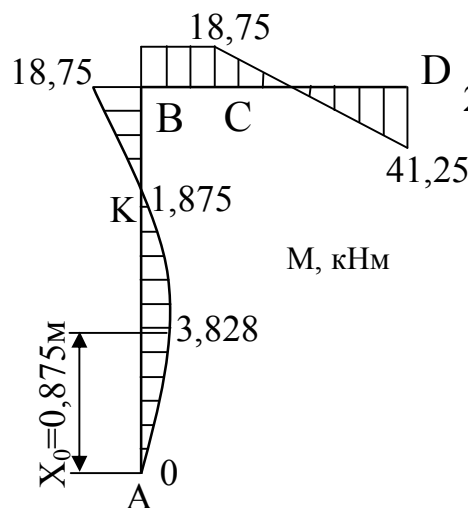


Рис.13.5

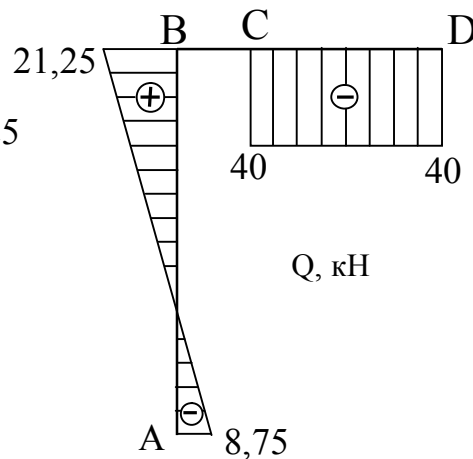


Рис.13.6

5.Проводимо деформаційну перевірку розв'язання:

$$\Delta_1 = M \cdot \bar{M}_1 = \frac{1}{EY} \left[ \frac{3}{6} (-18,75 \cdot 3 + 4 \cdot 1,875 \cdot 1,5) - 18,75 \cdot 0,5 \cdot 3 + \frac{41,25 - 18,75}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 \right] =$$

$$= \frac{1}{EY} (-22,5 - 28,125 + 50,625) = 0(!).$$

6. Обчислюємо поперечні сили на ділянках рами, використовуючи приведені у лекції 12 схему, рис.12.10, та формулу 12.10. Тоді для ділянки АВ поперечна сила визначається так:



$$Q_{AB}(x) = \frac{18,75}{9} - \frac{10 \cdot 3}{2} + 10X = -8,75 + 10X;$$

$$Q_{AB}(0) = -8,75 \text{кН}; Q_{AB}(3) = -8,75 + 10 \cdot 3 = 21,25 \text{кН}.$$

Оскільки у межах ділянки поперечна сила змінює знак, слід уточнити епюру згинаючих моментів, знайшовши ординату, що відповідає мінімуму параболи.

З умови  $Q_{AB}(x_0) = 0$  знаходимо  $x_0 = \frac{8,75}{10} = 0,875 \text{м}$ , а потім обчислюємо :

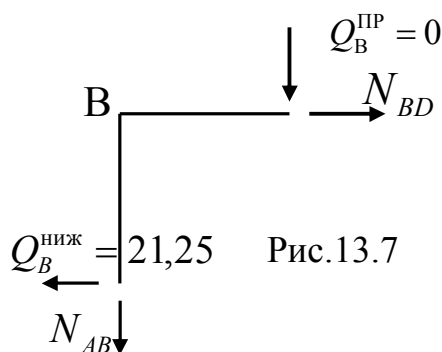
$$M_{AB}(x_0) = -X_1 x_0 + q \frac{x_0^2}{2} = -8,75 \cdot 0,875 + 10 \cdot \frac{0,875^2}{2} = -3,828 \text{кНм}$$

(рис.13.5)

Далі визначаємо:

$$Q_{BC} = \frac{18,75 - 18,75}{0,5} = 0; Q_{CD} = \frac{-41,25 - 18,75}{1,5} = -40 \text{кН}.$$

7. Поздовжні зусилля у стержнях рами визначимо, розглянувши рівновагу вирізаного вузла В. У місцях розрізів прикладаємо поперечні сили, що взяті з епюри  $Q$  з урахуванням знаків, та поздовжні сили (згинаючі моменти, що не впливають на величину поздовжніх сил, можна не показувати), рис.13.7.



З умов рівноваги вузла випливає, що

$$N_{AB} = Q_B^{ПП} = 0; N_{BD} = Q_B^H = 21,25 \text{кН}.$$

Епюру поздовжніх сил зображено на рис.13.8.

8. Проводимо статичну перевірку розв'язання задачі. З побудованих епюр  $M, Q$  та  $N$  визначаємо значення та напрям реакцій у епюрі  $D$  (рис.13.9):

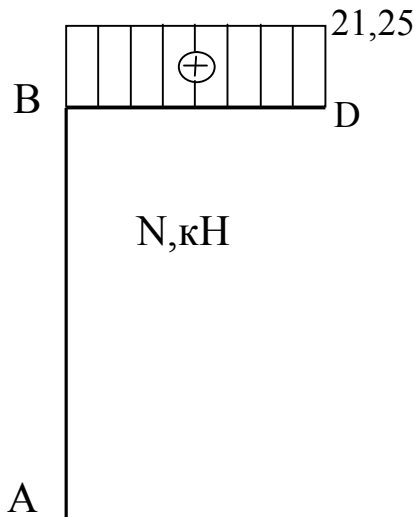


Рис.13.8

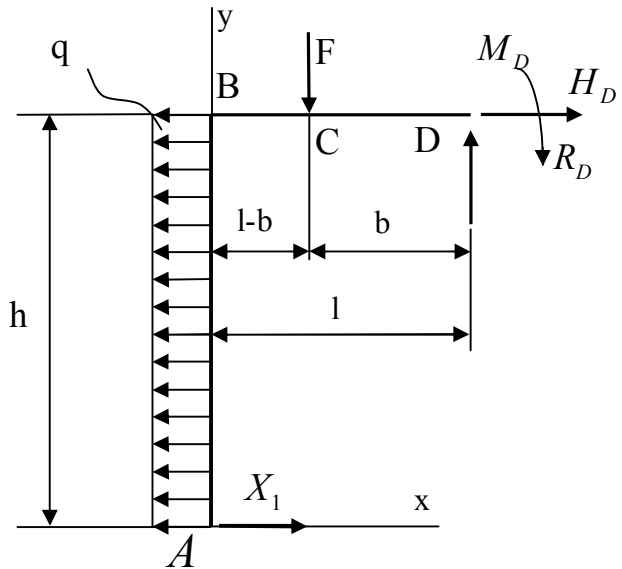


Рис.13.9

$$H_D = 21,25 \text{кН}; R_D = 40 \text{кН}; M_D = 41,25 \text{кНм}.$$

Маємо:

$$\sum F_x = H_D + X_1 - gh = 21,25 + 8,75 - 10 \cdot 3 = 0(!);$$

$$\sum F_y = R_D - F = 40 - 40 = 0(!);$$

$$\begin{aligned} \sum M_B &= X_1 \cdot h - gh \cdot \frac{h}{2} - F(l-b) + R_D \cdot l - M_D = \\ &= 8,75 \cdot 3 - 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - 40 \cdot 0,5 + 40 \cdot 2 - 41,25 = 0(!). \end{aligned}$$

Усі рівняння рівноваги задовольняються, то ж задачу розв'язано вірно .

9.3 умов міцності підбираємо необхідний профіль двотаврового перерізу рами:

$$W = \frac{M_{\max}}{\sigma_{adm}} = \frac{41,25 \cdot 10^3}{160} = 0,257 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 257 \text{ см}^3.$$

Згідно з ГОСТ 8239-72 беремо двотавр №24, для якого  $W = 289 \text{ см}^3$ ,  $I = 3460 \text{ см}^4$ ,  $A = 34,8 \text{ см}^2$ .

Перевіримо додатково міцність обраного профілю на сумісну дію згину та розтягу у небезпечному перерізі  $D$ :

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} + \frac{N_D}{A} = \frac{41,25 \cdot 10^3}{289 \cdot 10^{-6}} + \frac{21,25 \cdot 10^{-3}}{34,8 \cdot 10^{-4}} = 149 \text{ МПа}.$$

Сумарне максимальне напруження не перевищує допустимого, міцність профілю достатня.

10. Визначаймо зміщення опорного перерізу  $A$  рами. З розрахункової схеми видно, що це зміщення можливе тільки по вертикалі.

Приклавши до перерізу  $A$  у основній системі спрямовану, наприклад, угору одиничну силу, будемо одиничну епюру згинаючих моментів (рис.13.10)

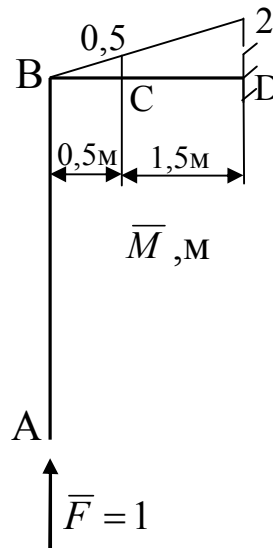


Рис.13.10

Шукане зміщення отримаємо, перемножуючи остаточно епюру згинаючих моментів, рис.13.5, на одиничну:

$$\Delta_A = M \cdot \bar{M} = \frac{1}{EI} \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 18,75 + \frac{1,5}{6} (2 \cdot 18,75 \cdot 0,5 + 18,75 \cdot 2 - 41,25 \cdot 2) \right] =$$

$$= -\frac{30}{EI} = -\frac{30 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 3460 \cdot 10^{-8}} = -0,00433 \text{ м} = -0,433 \text{ см.}$$

Таким чином, переріз А зміщується на 0,433см униз.

## ЛЕКЦІЯ 14

### СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

Поняття стійкої, байдужої та нестійкої рівноваги тіла відомі з механіки. Наприклад, кулька у заглибленні (рис. 14.Іа) , або стержень , підвішений за верхній кінець ( рис. 14. Іб) , перебувають у стані стійкої рівноваги. Це означає, що коли їх вивести зі стану рівноваги, а потім звільнити, після певної кількості коливань вони займуть своє початкове положення.

Кулька на площині (рис. 14.Іа), або стержень, підвішений у його центрі ваги ( рис. 14.Іб,) перебувають у стані байдужої рівноваги, в якому вони можуть займати довільне положення.

Кулька на опуклості, або стержень, шарнірно обіпертий у нижньому кінці (рис. 14.Іб) , перебувають у стані нестійкої рівноваги і будь яка невелика бічна сила виведе їх зі стану рівноваги .

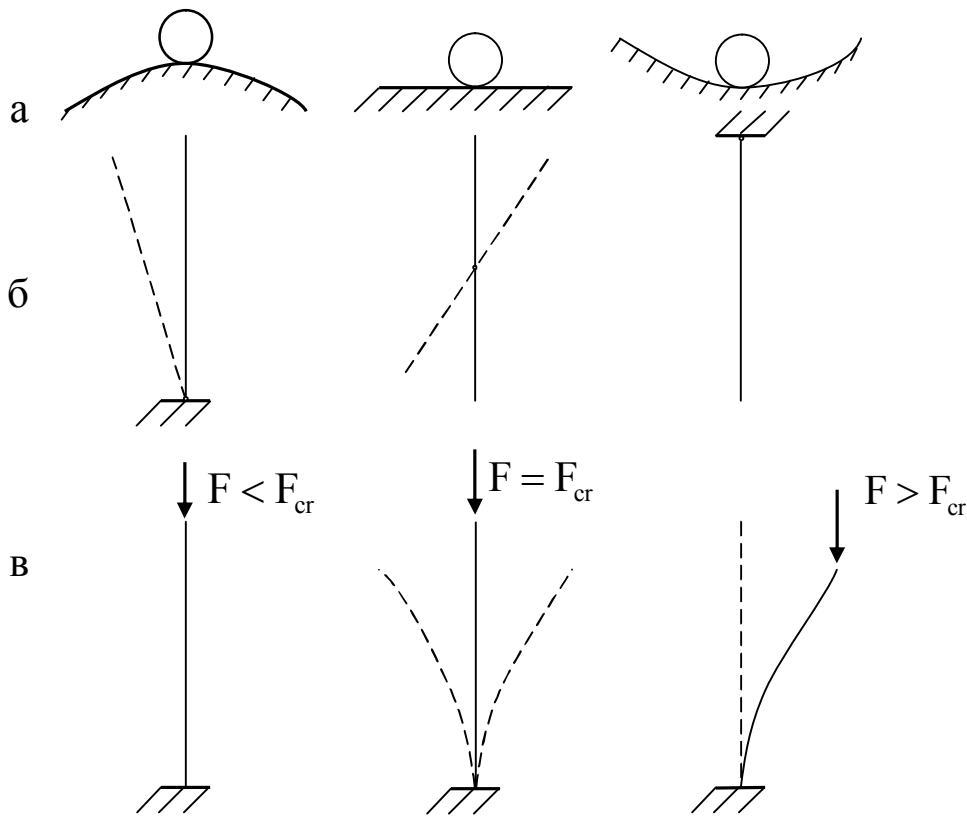


Рис.14.1.

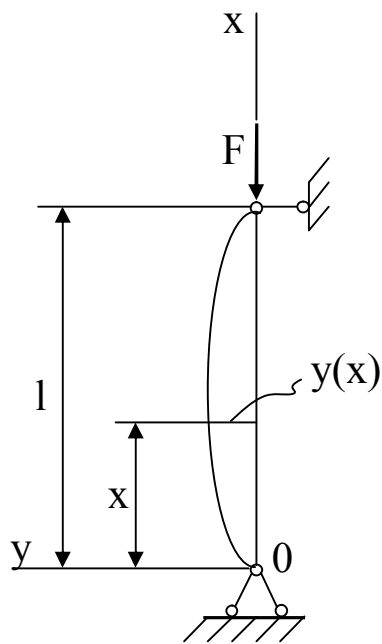


Рис.14.2

З аналогічними випадками рівноваги ми зустрічаємось при дії стискаючих сил на пружні стержні (рис. 14,І,в).

Пружна рівновага буде стійкою, якщо деформований стержень намагається повернутися до початкового стану й повертається до нього після припинення зовнішнього впливу.

Пружна рівновага нестійка, якщо деформоване тіло, виведене з неї будь якою зовнішньою дією, продовжує деформуватися й після припинення зовнішньої дії і у вихідний стан не повертається.

Між стійким і нестійким станами рівноваги наявний перехідний, так званий критичний стан, у якому може зберігатися ще початкова форма рівноваги, але вона може бути і втраченою від будь-якої причини. Навантаження у такому випадку називається критичним. Для прямого стержня критичною силою  $F_{cr}$  є найменша стискаюча сила, при якій прямолінійна форма рівноваги стержня стає нестійкою. Згин стержня, що відбувається після втрати стійкості його прямої форми під дією осьових стискуючих сил, називається поздовжнім згином прямого стержня.

Для забезпечення певного запасу стійкості необхідно, щоб задовольнялася умова

$$F \leq F_{adm}^S = \frac{F_{cr}}{k_S},$$

Де  $F$  – діюче навантаження;  $k_S$  - коефіцієнт запасу стійкості.

#### 14.1. ВИЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ

(формула Ейлера)

Розглянемо прямий стержень з шарнірними опорами.

Нехай осьова стискаюча сила досягає величини  $F_{cr}$ , при якій стержень перебуває у зігнутому стані (рис. 14.2)

У поперечних перерізах виникають згинальні моменти, пропорціональні його прогинам

$$M(x) = F \cdot y(x) \quad (14.1)$$

Припустимо, що  $F_{cr}$  не спричинює у стержні напружень, що перевищують границю пропорційності; тоді можна скористатися наближеним диференціальним рівнянням пружності лінії:

$$EI_{\min} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \pm M(x) \quad (14.2)$$

Тут ураховується найменша жорсткість стержня  $EI_{\min}$ , оскільки прогин відбудеться перпендикулярно до осі найменшої жорсткості, якщо решта умов для згинання в усіх площинах однакові.

Відносно знаків. У правій частині цього рівняння слід прийняти знак "мінус", оскільки абсолютне значення згинального моменту

$$M = F \cdot y \quad (14.3)$$

і знак прогина завжди є протилежним знаку другої похідної, тобто знаки моменту  $M$  та другої похідної  $d^2y/dx^2$  протилежні при будь-якому напрямку осі  $y$ .

Підставивши (14.3) у (14.2) дістанемо

$$EI_{\min} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -Fy,$$

Або

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F}{EI_{\min}} \cdot y = 0 \quad (14.4)$$

Ввівши позначення

$$\frac{F}{EI_{\min}} = k^2, \quad (14.5)$$

Перепишемо рівняння (14.4)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad (14.6)$$

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння, інтеграл якого можна виразити гармонійною функцією:

$$y = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \quad (14.7)$$

Сталі інтегрування  $A$  та  $B$  повинні задовольняти граничним умовам

$$1. y(0)=0; \quad 2. y(1)=0$$

З першої граничної умови впливає, що  $V = 0$ , тобто

$$y = A \sin kx \quad (14.8)$$

Із другої умови знайдемо  $A \sin kl = 0$ .

Випадок, коли  $A = 0$ , відповідає прямолінійній формі рівноваги, але нас цікавить криволінійна форма, тобто  $A \neq 0$ . Це означає, що  $\sin kl = 0$ .

Корені цього рівняння

$$kl = n\pi,$$

Де  $n$  – довільне ціле число ( $n=1,2,3,\dots$ ).

Отже,

$$k^2 l^2 = n^2 \pi^2.$$

Тоді з рівняння (14.5) маємо

$$F = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}.$$

Однак нас цікавить найменше значення поздовжньої стискуючої сили, при якому стає можливим поздовжнє згинання; найменше значення критичної сили  $F_{cr}$  дістанемо при  $n = 1$ :

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (14.9)$$

Рівняння (14.9) є формулою Ейлера.

## 14.2. ВПЛИВ УМОВ ЗАКРІПЛЕННЯ КІНЦІВ СТЕРЖНЯ НА ЗНАЧЕННЯ КРИТИЧНОЇ СИЛИ.

Було показано, що після втрати стійкості стержня з шарнірно обпертими кінцями на довжині стержня укладається тільки одна півхвиля синусоїди. Розглянемо стержні з іншими опорами.

I. Стержень закріплений жорстко одним кінцем рис. 14.3. Порівнюючи рис. 14.3, а та б, бачимо, що зігнута вісь стержня, закріпленого одним кінцем, перебуває в тих самих умовах, що і половина стержня завдовжки  $2l$  з шарнірно закріпленими кінцями, відкіля критична сила буде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(2l)^2}. \quad (14.10)$$



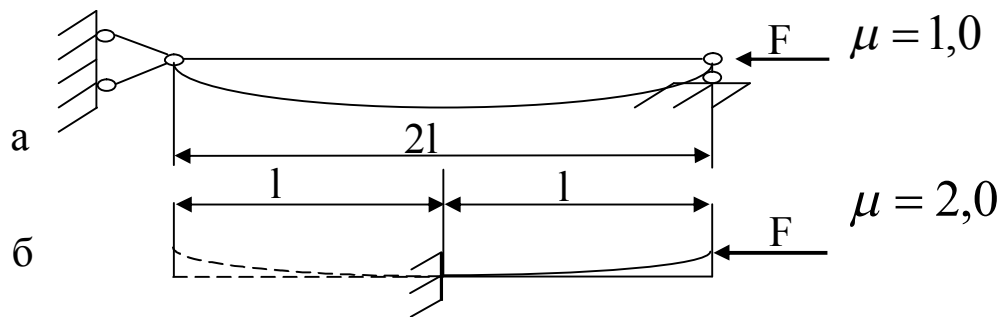


Рис.14.3

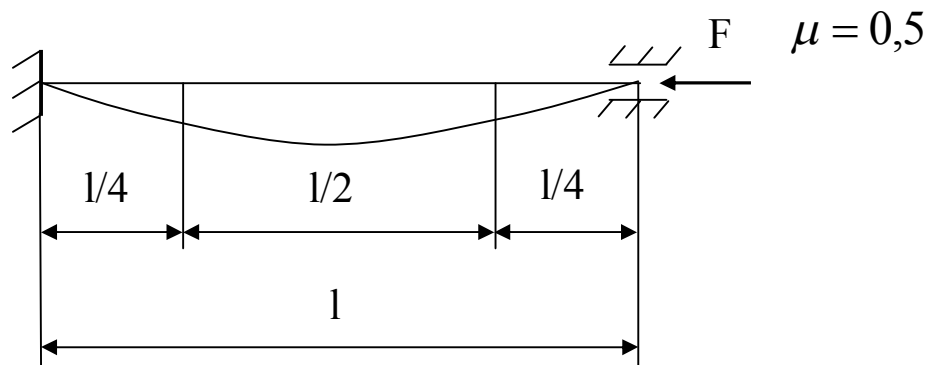


Рис.14.4

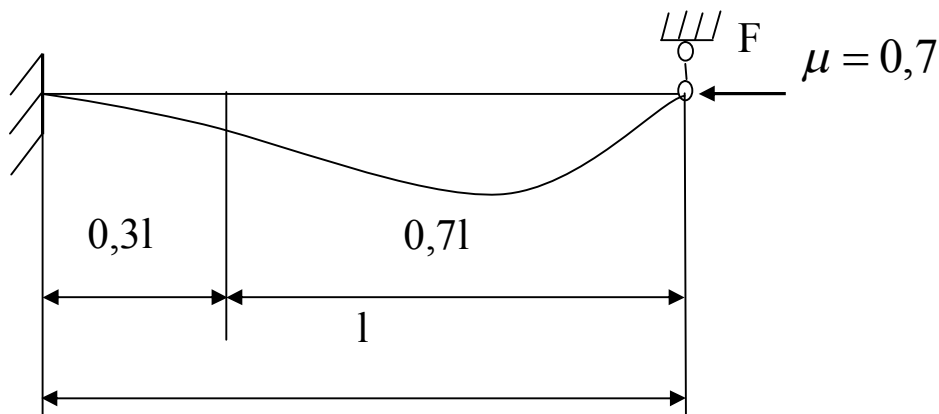


Рис.14.5

При цьому зігнута вісь стержня (рис.14.3,а) має вигляд половини півхвилі синусоїди.

2. Стержень з жорстко закріпленими кінцями (рис. 14.4). Після втрати стійкості стержня внаслідок симетрії його середня частина довжиною  $l/2$  працює в тих самих умовах, що і стержень при шарнірно обпертих кінцях. При цьому утворюються дві півхвилі : середня зав дошки  $l/2$  та дві крайні половинки півхвилі зав дошки  $l/4$ . Критична сила у цьому випадку буде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(l/2)^2} \quad (14.11)$$

3. На рис.14.5 показано стержень завдошки  $l$ , жорстко зацеплений одним кінцем та шарнірно обпертим другим. Після втрати стійкості довжина півхвилі синусоїди дорівнює  $0,7l$ .

Отже

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(0,7l)^2} \quad (14.12)$$

Співвідношення (14.9), (14.10), (14.11), (14.12) можна об'єднати в одну формулу.

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (14.13)$$

Де  $\mu l = l_{red}$  - зведена довжина стержня;  $l$  - фактична довжина стержня;  $\mu$  - коефіцієнт зведення довжини.

## ЛЕКЦІЯ 15

### СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ (ПРОДОВЖЕННЯ).

15.1. ВТРАТА СТІЙКОСТІ ПРИ НАПРУЖЕННЯХ, ШО ПЕРЕВИЦЮЮТЬ ГРАНИЦЮ ПРОПОРЦІЙНОСТІ (формула Ясинського).

Формула Ейлера ґрунтується на застосуванні диференціального рівняння пружної лінії, коли справедливий закон Гука. Це означає, що критичне напруження не перевищує границі пропорційності

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{pr} \quad (15.1)$$

Відповідно з (14.13)

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{A(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l / i_{\min})^2} \quad (15.2)$$

Тут  $i_{\min}^2 = I_{\min} / A$  - квадрат найменшого з головних радіусів інерції стержня.

Ввівши безрозмірну величину

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}, \quad (15.3)$$

Що називається гнучкістю стержня, остаточно маємо

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (15.4)$$

У системі координат  $\sigma_{cr} - \lambda$  залежність (15.4) має вигляд кривої, що зветься гіперболою Ейлера (рис.15.1).

Бачимо, що в міру зростання гнучкості  $\lambda$  критичне напруження прямує до нуля, і навпаки, в міру наближення  $\lambda$

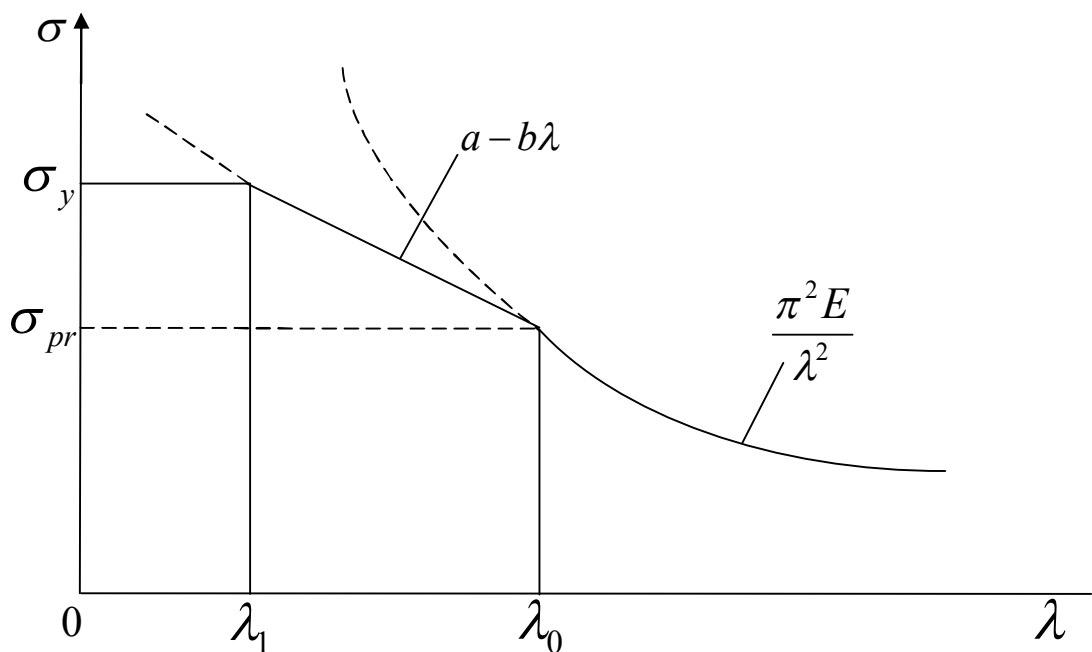


Рис.15.1

до нуля критичне напруження прямує до нескінченності.

Однак з умов (15.1) маємо

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{pr}$$

і, отже,

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (15.5)$$

Це означає, що формула Ейлера стає непридатною при гнучкості стержня, меншій за граничне значення  $\lambda_0$ , яка залежить тільки від властивостей матеріалу. Встановлено, що дійсні критичні напруження для стержнів з  $\lambda < \lambda_0$  менші, ніж визначені за формулою Ейлера. Отже, в цьому разі формула Ейлера дає завищені значення  $F_{cr}$ . Тому використання формули Ейлера для стержнів, що втрачають стійкість за границею пружності, дуже небезпечно за своїми наслідками.

Ф.С.Ясинський обробив великий дослідний матеріал щодо поздовжнього згинання стержнів і запропонував емпіричну формулу для обчислення критичних напружень за границею пропорційності

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (15.6)$$

Значення коефіцієнтів наведено в табл.15.1.

Таблиці 15.1

Матеріал		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
		МПа		
Ст 3	100	310	1,14	0
Ст 5	100	464	3,26	0
Деревина	110	29,3	0,194	0
Чавун	80	776	12	0,53

Залежність критичних напружень при  $\lambda < \lambda_0$  на рис.15.1 має вигляд трохи нахиленої прямої (пряма Ясинського), що лежить між границею пропорційності  $\sigma_{pr}$  та границею текучості  $\sigma_y$ .

Горизонтальна пряма відповідає напруженню, що дорівнює границі текучості. Графік на рис.15.1 називається графіком критичних напружень.

## 15.2. ПРАКТИЧНИЙ МЕТОД РОЗРАХУНКУ НА СТІЙКІСТЬ

Центрально стиснуті стержні втрачають свою несучу здатність від втрати стійкості раніше, ніж від втрати міцності, оскільки

критичне напруження завжди менше від границі текучості або границі міцності  $\sigma_{cr} < \sigma_y; \sigma_{cr} < \sigma_u$ .

Щоб визначити допустиме напруження на стійкість, треба вибрати коефіцієнт запасу  $k_S$ , бо не можна припустити виникнення у стержні критичного напруження. Тоді

$$\sigma_{adm}^S = \frac{\sigma_{cr}}{k_S} \quad (15.7)$$

Допустиме напруження на стійкість та допустиме напруження на міцність при стисканні

$$\sigma_{adm} = \sigma_y / k,$$

Де  $k$  – основний коефіцієнт запасу на міцність, взаємно пов'язані.

Складемо відношення їх:

$$\frac{\sigma_{adm}^S}{\sigma_{adm}} = \frac{\sigma_{cr}}{k_S} \cdot \frac{k}{\sigma_y}; \quad \sigma_{adm}^S = \frac{\sigma_{cr} \cdot k}{\sigma_y \cdot k_S} \cdot \sigma_{adm}.$$

Позначивши

$$\frac{\sigma_{cr} \cdot k}{\sigma_y \cdot k_S} = \varphi, \quad (15.8)$$

Матимемо допустиме напруження на стійкість:

$$\sigma_{adm}^S = \varphi \cdot \sigma_{adm} \quad (15.9)$$

Тут  $\varphi$  - коефіцієнт зменшення основного допустимого напруження при розрахунку на стійкість. Цей коефіцієнт для кожного матеріалу можна обчислити при всіх значеннях гнучкості  $\lambda$  й подати у вигляді таблиці. Значення  $\varphi$  для сталей та чавуну наведено у табл.15.2.

Таблиця 15.2

Гнучкість	Ст 2	Ст 5	Чавун	Гнучкість	Ст 2	Ст 3	Ст 5	Чавун
	Ст 3				Ст 4			
	Ст 4							
0	1,00	1,00	1,00	110	0,52		0,43	
10	0,99	0,98	0,97	120	0,45		0,36	
20	0,96	0,95	0,91	130	0,40		0,33	
30	0,94	0,92	0,81	140	0,36		0,29	
40	0,92	0,84	0,69	150	0,32		0,26	
50	0,84	0,86	0,57	160	0,29		0,24	
60	0,86	0,82	0,44	170	0,26		0,21	
70	0,81	0,76	0,34	180	0,23		0,19	
80	0,75	0,70	0,26	190	0,21		0,17	
90	0,69	0,62	0,20	200	0,19		0,16	
100	0,60	0,51	0,16					

Умова стійкості стиснутих стержнів має вигляд

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \sigma_{adm}^s \quad (15.10)$$

Оскільки при розрахунку на стійкість місцеві ослаблення перерізу практично не змінюють значення критичної сили, то в розрахункові формули вводиться повна площа  $A$  поперечного перерізу стержня.

Перевірний розрахунок стиснутих стержнів проводиться таким чином.

Виходячи з відомих розмірів та форми поперечного перерізу, визначаємо площу  $A$ , найменший осьовий момент інерції  $I_{\min}$ , обчислюємо найменший радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A}$$

та гнучкість

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}$$

За таблицею знаходимо коефіцієнт  $\varphi$  та порівнюємо дійсне напруження з допустимим на стійкість

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi \sigma_{adm}$$

Проектувальний розрахунок проводиться у такий спосіб. З (15.10) маємо шукану площу поперечного перерізу

$$A = \frac{F}{\varphi \sigma_{adm}}$$

Тут є дві невідомі величини -  $\varphi$  та  $A$ . Тому слід користуватися методом послідовних наближень.

В першій спробі беруть  $\varphi_1 = 0,5 - 0,6$ , визначають потрібну площу  $A$  та добирають переріз, для якого визначають фактичне  $\varphi'_1$ . Якщо  $\varphi'_1$  значно відрізняється від  $\varphi_1$ , то слід повторити розрахунок, тобто зробити другу спробу для

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

У результаті другої спроби визначають  $\varphi'_2$ . Якщо потрібна

третя спроба, то  $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2}$  і т.д.

## ЛЕКЦІЯ 16

### ПОЗДОВЖНЬО-ПОПЕРЕЧНЕ ЗГИНАННЯ

Поздовжньо-поперечним називається згинання бруса, коли в його поперечних перерізах виникають згинальні моменти як від поздовжніх, так і від поперечних навантажень (рис.16.1). При розрахунку на поздовжньо-поперечне згинання, згинальні моменти обчислюють з урахуванням прогинів осі бруса

$$M_{\pi} = M + S * y_{\pi} \quad (16.1)$$

де  $M_{\pi}$  – повний згинальний момент;  $M$  – момент від поперечного навантаження;  $S * y_{\pi}$  – додатковий згинальний момент від дії осьової сили  $S$ .

Обчислення повного згинального моменту  $M_{\pi}$  ускладнюється тим, що в цьому разі принцип незалежності дії сил застосувати неможна, тому що повний прогин  $y_{\pi}$  можна розглядати

як такий, що складається з прогину  $y$ , спричиненого дією тільки одного поперечного навантаження, та додаткового прогину  $y_{\Pi} - y$ , спричиненого силою  $S$ .

Очевидно, що коло осьова сила є стискуючою,

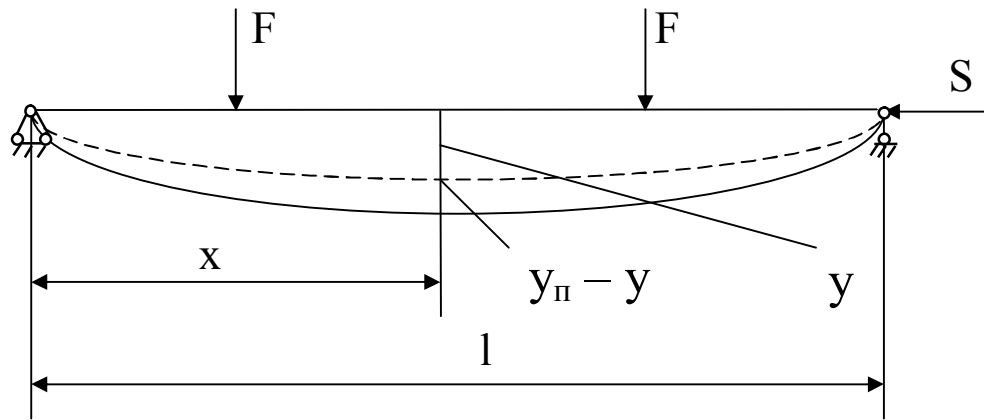


рис.16.1

повний прогин більший за прогин від одного тільки поперечного навантаження.

У практичних розрахунках поширені наближені способи розв'язання, які ґрунтуються на припущенні, що зігнута вісь бруса при поперечному навантаженні набуває форм синусоїди, тобто

$$y(x) = f \sin \frac{\pi x}{l} \quad (16.3)$$

при наявності поздовжньої сили також наближено вважають, що

$$y_i(x) = f_i \sin \frac{\pi x}{l} \quad (16.4)$$

Це припущення дає змогу добути практично досить точні результати для шарнірно обпертих балок при дії поперечних навантажень, спрямованих в один бік, особливо якщо деформація балки виявляється симетричною відносно її середини, де

$$y_n \left( \frac{l}{2} \right) = f_n$$

Диференціальне рівняння пружної лінії



$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \quad (16.5)$$

при поздовжньо-поперечному згинанні балки з урахуванням виразу (16.1) має вигляд:

$$\frac{d^2 y_i}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} - \frac{S y_i}{EI}$$

Виключивши із рівнянь (16.5) та (16.6)  $M(x)$  та врахувавши припущення (16.3) та (16.4), знаходимо, що

$$(f_i - f) \frac{d^2}{dx^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{S}{E \cdot I} \cdot f_i \sin \frac{\pi x}{l} \quad (16.7)$$

Тоді після диференціювання маємо

$$\frac{\pi^2}{l^2} (f_i - f) = \frac{S}{E \cdot I} \cdot f_i \quad (16.8)$$

Введемо позначення

$$F_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (16.9)$$

та назвемо  $F_e$  Ейлеровою силою. Це сила чисельно дорівнює  $F_{cr}$ , яка визначається за формулою (14.9). Із рівняння (16.8) знайдемо вираз для прогину посередині прольоту балки при спільній дії поздовжнього та поперечного навантажень:

$$f_i = \frac{f}{1 - S/F_e} \quad (16.10)$$

Слід мати на увазі, що Ейлерова сила  $F_e$  введена формально. На відміну від критичної сили  $F_{cr}$  сила  $F_e$  повинна обчислюватися при будь-якій гнучкості стержня.

Момент інерції у виразі (16.9) слід брати відносно тієї з головних осей інерції перерізу, яка перпендикулярна до площини дії поперечного навантаження.

Вираз (16.10) застосовують й при інших типах опорних закріплень балок. У цьому разі Ейлерова сила має обчислюватися за формулою (14.13):

$$F_{\dot{a}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu \cdot l)^2}$$

Вираз (16.10) дає задовільні результати, якщо стискаюча сила  $S$  не перевищує  $0,8F_e$ .

Припускаючи, що згинальні моменти пропорційні прогинам, дістанемо просту формулу для наближеного визначення найбільшого моменту при поздовжньо - поперечному згинанні:

$$M_n = \frac{M}{1 - S/F_e} \quad (16.11)$$

Знаючи згинальні моменти, можемо обчислити найбільше нормальне напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{A} + \frac{M^{\max}_n}{W} = \frac{S}{A} + \frac{M^{\max}_n}{W(1 - S/F_e)}$$

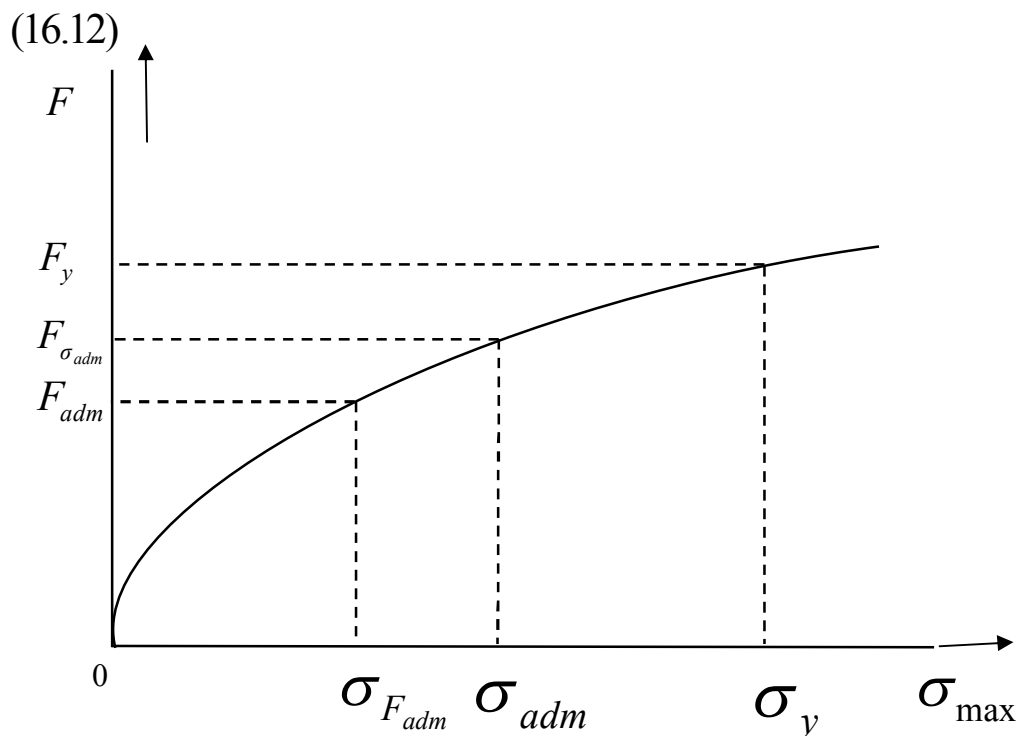


Рис.16.2

Розрахунок на поздовжньо-поперечне згинання має ту особливість, що напруження при збільшенні навантаження зростає значно швидше, ніж останнє (рис. 16.2).

Має місце нелінійна залежність напружень від навантажень.

Із графіка випливає: якщо для пластичного матеріалу напруження  $\sigma_{\max}$  у стержні дорівнюють допустимим  $\sigma_{adm}$ , то забезпечено запас міцності за напруженнями:

$$i_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma_{adm}} = i$$

Здавалося б, що при цьому міцність стиснуто-зігнутої балки забезпечено. Проте з графіка також випливає, що в цьому разі коефіцієнт запасу за навантаженнями значно менший ніж  $i$ ,

$$i_F = \frac{F_y}{F_{adm}} \triangleleft n$$

Це означає, що достатньо незначного збільшення навантаження, щоб напруження досягли границі текучості, а це практично відповідає руйнуванню балки. Звідси висновок: стиснуто-зігнути балки слід розраховувати за допустимим навантаженням

$$F_{adm} = \frac{F_y}{n}$$

при цьому напруження  $\sigma_{\max}$  будуть значно менші за допустимі  $\sigma_{adm}$ .

## ЛЕКЦІЯ 17

### РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ НА ІНЕРЦІЙНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

#### 17.1. Сили інерції. Динамічне навантаження.

До цих пір ми вирішували основну задачу опору матеріалів визначали розміри перерізів частин конструкцій та вибирали для них матеріал лише при статичному навантаженні.

Як відомо статичним називається навантаження яке дуже повільно зростає від нуля до свого кінцевого значення, а потім зостається незмінним. Швидкість зростання деформацій конструкцій від такого навантаження незначна, тому можна зневажати виникаючими при цьому силами інерції.

При швидкому зростаючому навантаженні у результаті деформації конструкції виникають сили інерції. Вони складаються з іншими навантаженнями і впливають на значення напружень і деформацій. Сили інерції необхідно ураховувати також при дії навантаження з деяким прискоренням.

Навантаження яке викликає рух тіла супроводжуваний появою сил інерції називається динамічним. К динамічним також відносяться ударні навантаження, хоча при розрахунку на удар у ряді випадків нехтують силами інерції, виникаючими в конструкції.

Сили інерції зв'язані з переміщеннями точок тіла (з їх прискореннями). Отож, сили інерції деформованого тіла залежать від його деформації навіть у тому випадку, коли не враховується деформована схема системи, тому задача визначення зусиль є статично невизначувана.

Розрахунок на дію динамічного навантаження виконують при проектуванні частин конструкцій, які знаходяться під дією ударного чи вібраційного навантаження, створюємого станками, двигунами, молотами та іншими механізмами.

Що ж розуміють під силою інерції? Під силою інерції матеріальної точки, яка рухається з прискоренням, розуміють силу, що дорівнює за модулем добутку маси точки на її прискорення. Напрямок сили інерції протилежний напрямку прискорення. У реальному тілі, яке можна розглядати як сукупність матеріальних точок, сили інерції розподілені по об'єму тіла і тому представляють собою об'ємні сили.

Величина елементарної сили інерції, яка діє на кожну матеріальну частину тіла дорівнює

$$dF_i = dm \cdot a$$

де  $dm$  - маса цієї частини,  $a$  – прискорення.

Маса елементарної частини дорівнює відношенню її ваги  $dG$

до прискорення  $g$  сили важкості

$$dm = \frac{dG}{g}$$

Отож

$$dF_i = \frac{dG}{g} \cdot a = \frac{\gamma dV}{g} \cdot a$$

де  $\gamma$  - питома вага матеріалу,  $dV$  - об'єм елементарної частини.

При розрахунку стержневих систем об'ємні сили інерції замінюються силами інерції розподіленими по довжині осі кожного стержня, тобто розподіленим погонним інерційним навантаженням.

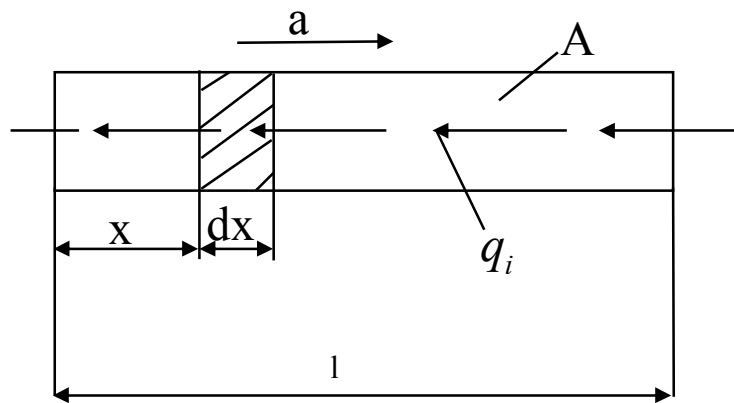


рис.17.1

Розглянемо стержень, площа перерізу, якого дорівнює  $A$ , рухається з прискоренням  $a$

Об'єм елемента стержня довжиною  $dx$  дорівнює

$$dV = A \cdot dx$$

Тоді елементарна сила інерції елемента стержня довжиною  $dx$  дорівнює

$$q_i = \frac{dF_i}{dx} = \frac{\gamma A}{g} \cdot a$$

Отож погонне інерційне навантаження дорівнює

$$dF_i = \frac{\gamma dV}{g} \cdot a = \frac{\gamma A \cdot dx}{g} \cdot a$$

При рішенні задач з урахуванням сил інерції користуються принципом Д'Алембера відповідно до якого кожний елемент конструкції можна розглядати як перебуваючий в стані рівноваги під дією зовнішніх сил, внутрішніх зусиль та сил інерції.

### 17.2 Обчислення напружень при рівноприскореному русі.

Рішення задач о перевірці міцності при динамічних напруженнях почнемо з найпростішого випадку коли точки, розглядаємої частини конструкції мають постійне прискорення.

Розглянемо рівноприскорене підняття вантажу вагою  $Q$ , підвішеного на сталевому тросі, площа поперечного перерізу якого  $A$ . Питома вага матеріалу троса  $\gamma$ , прискорення  $a$  (рис 17.2).

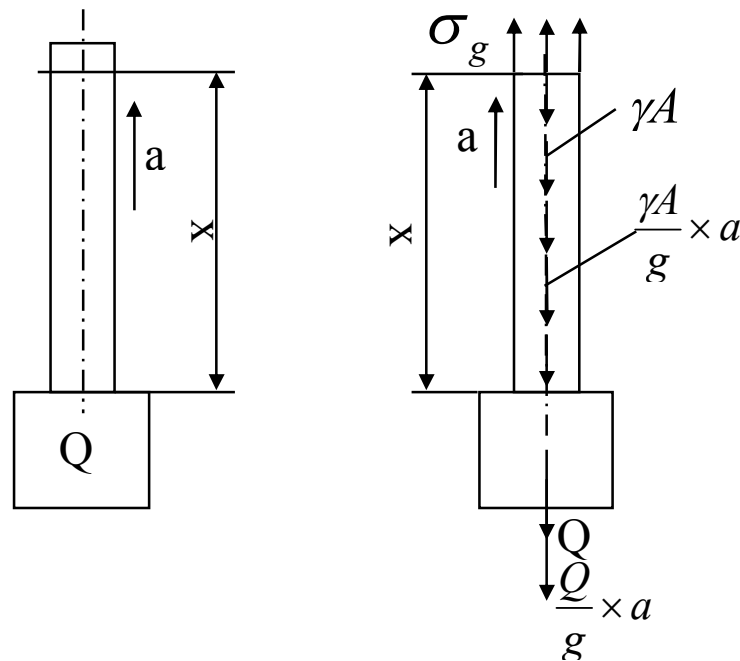


рис.17.2

Знайдемо напруження в будь якому перерізі на відстані  $x$  від нижнього кінця троса. Розріжемо в цьому перерізі трос і розглянемо нижню відсічену частину. На трос окрім ваги вантажу  $Q$  та сил інерції цього груза діють рівномірно розподілено по довжині навантаження інтенсивністю  $\gamma A$  та інерційне навантаження інтенсивністю

$$\frac{\gamma A}{g} \cdot a$$

Динамічні напруження  $\sigma_g$ , які діють по проведеному перерізі будуть урівнювати статичне навантаження від ваги троса довжиною  $X$  та груза, а також силу інерції направлену донизу.

$$\frac{Q + \gamma Ax}{gA} \cdot a$$

Тоді

$$\sigma_g = \frac{Q + \gamma Ax}{A} + \frac{Q + \gamma Ax}{gA} \cdot a = \frac{Q + \gamma Ax}{A} \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

$\frac{Q + \gamma Ax}{A} = \sigma_{\tilde{\sigma}}$  статичне напруження у проведеному перерізі від віги троса та вантажу  $Q$ .

Тому

$$\sigma_g = \sigma_{\tilde{\sigma}} \left(1 + \frac{a}{g}\right) = \sigma_{\tilde{\sigma}} \cdot K_g$$

Величина  $K_{\ddot{a}} = \left(1 + \frac{a}{g}\right)$  називається динамічним коефіцієнтом.

В дуже багатьох випадках динамічні напруження можуть бути виражені через статичні шляхом помноження на відповідний динамічний коефіцієнт.

Умова міцності має вигляд

$$\sigma_g = \sigma_{\tilde{\sigma} \cdot \max} \cdot K_{\ddot{a}} \leq \sigma_{adm}$$

У випадку проектного розрахунку умова міцності залишиться у вигляді

$$A \geq \frac{Q}{\frac{\sigma_{adm}}{K_{\ddot{a}}} - \gamma l},$$

де  $l$  – довжина троса.

Приклад. Вантаж вагою 30кН (рис.17.3) рівноприскорено за допомогою сталевого троса , причому за перші дві секунди він піднімається на висоту 4м. Площа перерізу троса дорівнює 5 см<sup>2</sup>, його довжина  $l = 90$  м, об'ємна вага матеріалу  $\gamma = 72$ кН/м<sup>3</sup>. Знайти найбільші нормальні напруження у тросі з урахуванням та без урахування його власної ваги.

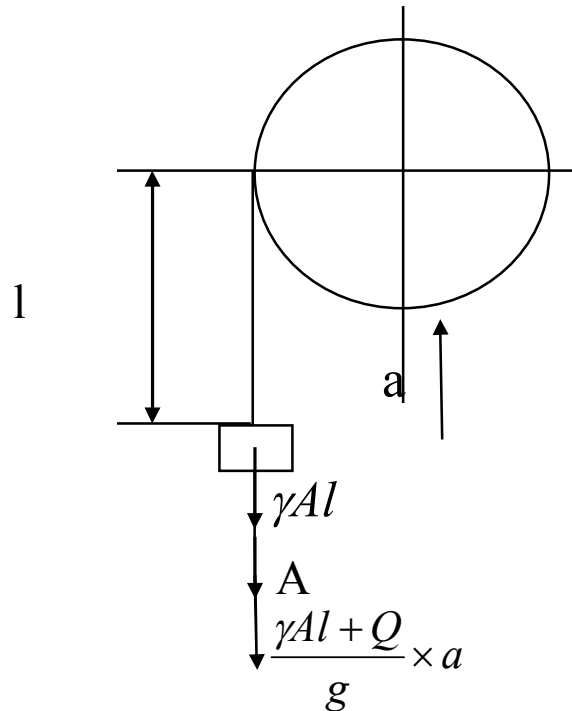


Рис.17.3.

$$a = \frac{2S}{t^2} = \frac{2 \cdot 4}{2^2} = 2 \text{ м/сек}^2$$

Вага троса дорівнює

$$Q = \gamma A l = 72 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 90 = 3,24 \text{ кН}$$

Статистичні напруження дорівнюють:

З урахуванням власної ваги троса

$$\sigma_{cm} = \frac{Q_1 + Q}{A} = \frac{(30 + 3,24) \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 66,7 \text{ МПа}$$

без урахування власної ваги троса

$$\sigma'_{cm} = \frac{Q}{A} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-4}} = 60 \text{ МПа}$$

Динамічний коефіцієнт дорівнює



$$K_{\ddot{a}} = 1 + \frac{a}{g} = 1 + \frac{2}{9,81} = 1,2$$

Динамічні напруження дорівнюють:

з урахуванням власної ваги троса

$$\sigma_g = \sigma_{c\dot{o}} \cdot K_{\ddot{a}} = 66,7 \cdot 1,2 = 80 \text{ Н/м}^2$$

без урахування власної ваги троса

$$\sigma'_g = \sigma'_{\ddot{n}\dot{o}} \cdot K_{\ddot{a}} = 60 \cdot 1,2 = 72 \text{ Н/м}^2$$

Розглянемо балку постійного перерізу, підвішену на тросі крана /Рис. 17.4/ Ця балка зогнута у наслідку дії її особистої ваги. При включенні двигуна крана переріз А балки, в якому

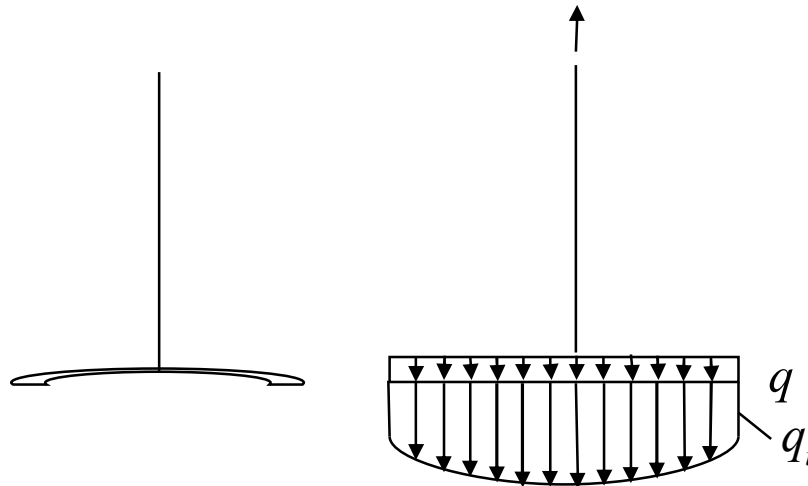


рис.17.4

прикріплен трос, почне підніматися з деяким прискоренням. При цьому виникають сили інерції, розподілені по довжині осі балки

інтенсивністю  $q_i = \frac{\gamma A}{g} \cdot a$

Сили інерції, які виникають після вмикання двигуна, визивають додатковий згин балки. У результаті згину різні перерізи балки переміщуються при підйомі з різними прискореннями. Тому у

загальному випадку інтенсивність  $q_i = \frac{\gamma A}{g} \cdot a$  інерційного

навантаження перемінна по довжині балки.

У окремих випадках, коли жорсткість балки при згині дуже велика, впливом деформацій балки можна нехтувати і в цих випадках

вважають, що прискорення усіх перерізів балки однакові, а навантаження  $q_i$  рівномірно розподілено по довжині балки /рис. 17.5/. Інтенсивність повного погонного навантаження, яке складається з власної ваги балки  $q$  та інерційного навантаження  $q_i$  дорівнює  $\bar{q} = q + q_i$

Сила  $S$  та розподілене навантаження  $\bar{q}$  викликають згин балки: епюри  $Q$  та  $M$  показані на /рис.17.5/.

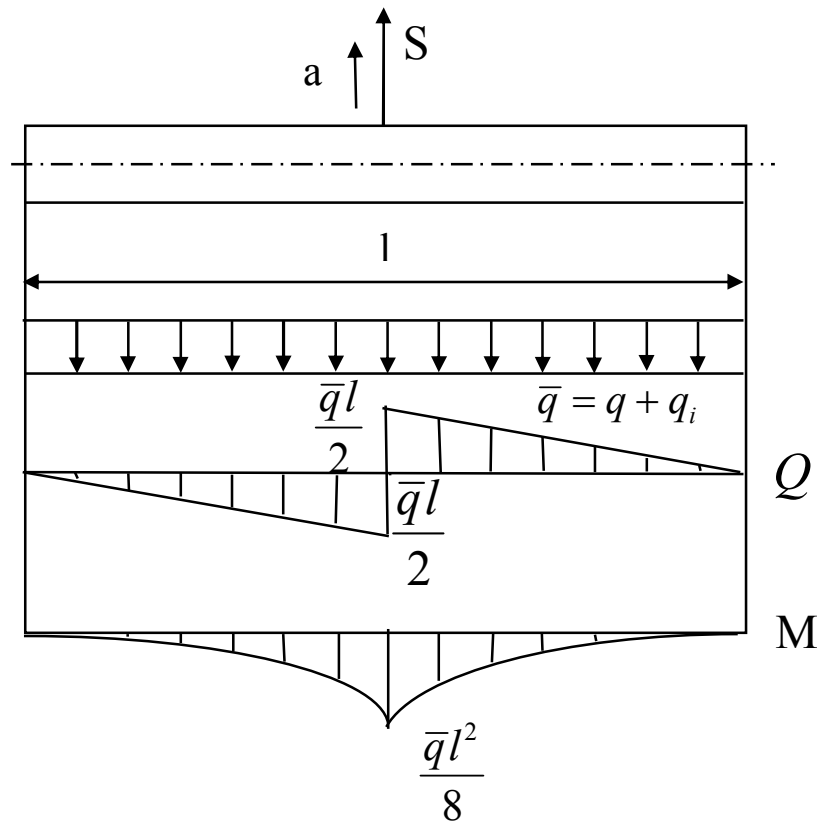


Рис.17.5

### 17.3. Напруження при обертанні кілець та стержневих конструкцій

Розглянемо задачу про знаходження напружень у швидкообертаючому кільці постійного перерізу. З відомим наближенням у подібних умовах, якщо зневажати впливом спиць, знаходиться ободі маховика. Позначимо через  $A$  площу поперечного перерізу кільця,  $\gamma$  - об'ємну вагу матеріалу,  $i$  - число обертів у хвилину,  $D$  - діаметр осі кільця,  $\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$  - кутова швидкість обертання кільця. Для тонкого кільця можна рахувати, що усі точки кільця

знаходяться на однаковій відстані від осі  $D/2 = r$  /рис.17.6/ Виділим елемент кільця довжиною  $dS$ . При обертанні цей елемент рухається по колу з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Кутове прискорення  $E$  дорівнює нулю, тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює

$$\omega_t = \frac{E \cdot D}{2} = 0 \quad . \text{Радіальне/доцентрове/ прискорення елемента}$$

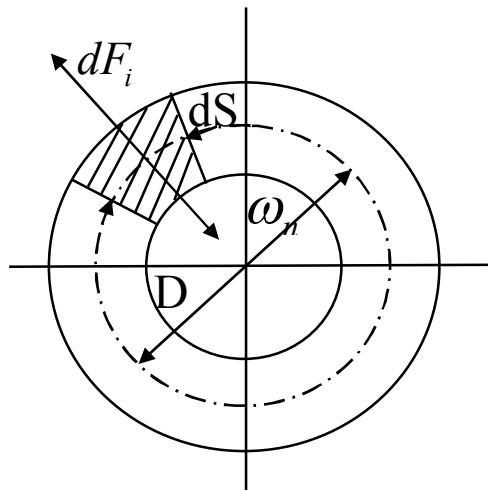
дорівнює  $\omega_r = \frac{\omega^2 D}{2}$  і спрямоване до центру обертання. На цей елемент діє сила інерції цього елемента, спрямована від осі обертання

$$dF_i = \omega_n \frac{\gamma A}{g} dS = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 r dS$$

На одиницю довжини елемента діє інерційна сила

$$q_i = \frac{dF_i}{dS} = \frac{\gamma A}{g} \omega^2 r$$

(17.1)



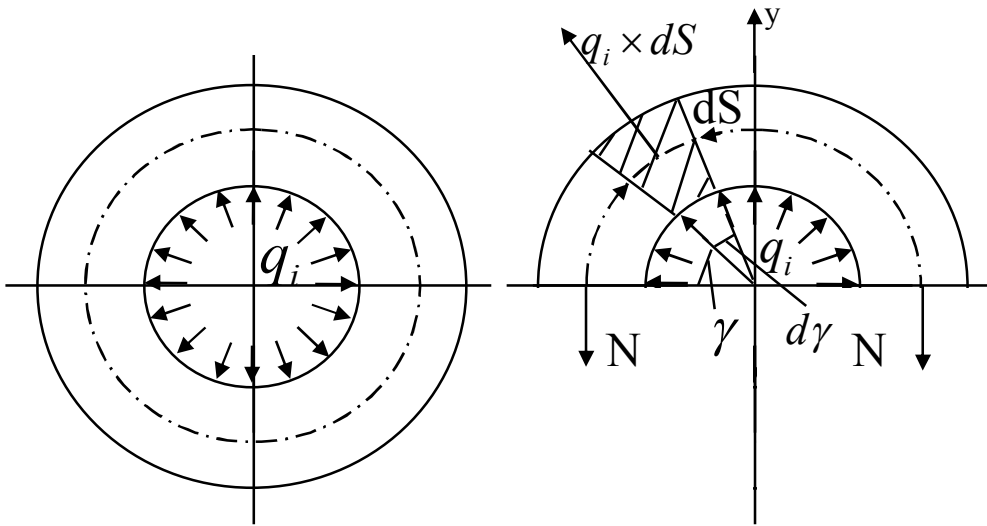


рис.17.6

рис.17.7

Таким чином, дія на кільце інерційних сил аналогічна дії відцентровому навантаженні інтенсивністю  $q_i$  /Рис. 17.7/ Для визначення зусиль у кільці розглянемо рівновагу половини кільця. Із симетрії кільця та навантаження  $q_i$  відносно осі обертання витікає, що в усіх поперечних перерізах кільця виникають тільки поздовжні сили  $N$  і ці сили однакові. Складемо умову рівноваги проекцію чи всі сили на вісь  $y$ . На елемент довжиною  $dS$  діє сила

$$q_i \cdot dS, \text{ її проекція на вісь } y \text{ дорівнює } q_i \cdot dS \cdot \sin \varphi = q_i r d\varphi \cdot \sin \varphi$$

Умова рівноваги  $\sum Y = 0$  приймає вигляд

$$\int_0^{\pi} q_i r \sin \varphi \cdot d\varphi - 2N = 0 \quad \text{або} \quad 2N - q_i r \int_0^{\pi} \sin \varphi \cdot d\varphi = 0$$

Звідки

$$2N - q \cdot 2r = 0, \text{ та } N = q_i r = q_i \frac{D}{2}$$

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця дорівнюють

$$\sigma_s = \frac{N}{A} = \frac{q_i \cdot r}{A} \quad (17.2)$$

Підставляючи в /17.2/ значення  $q_i$ , по виразу /17.1/ будемо мати

$$\sigma_g = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2 D^2}{4} \quad (17.3)$$

Напруження у кільці можна виразити також через його лінійну швидкість. Враховуючи, що  $v = \omega r$  будемо мати

$$\sigma_g = \frac{\gamma}{g} v^2 \quad (17.4)$$

Таким чином, напруження у ободі маховика залежать від об'ємної ваги матеріалу та лінійної швидкості кільця. Із умови міцності

$$\sigma_g = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot r^2 = \frac{\gamma}{g} v^2 \leq \sigma_{adm} \quad (17.5)$$

можна визначити допустиму величину лінійної швидкості

$$v \leq \sqrt{\frac{\sigma_{adm} \cdot g}{\gamma}} \quad (17.6)$$

або кутової швидкості

$$\omega \leq \sqrt{\frac{\sigma_{adm} \cdot g}{\gamma \cdot r^2}}, \quad \text{або} \quad n \leq \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{adm} \cdot g}{\gamma \cdot r^2}} \quad (17.7)$$

Відносне подовження по колу відповідно до закону Гука та з урахуванням виразу (17.3) дорівнює

$$\epsilon = \frac{\sigma_g}{E} = \frac{\gamma}{gE} \omega^2 r^2 \quad (17.8)$$

Із розгляду геометричної сторони деформації переконуємось, що відносне подовження по колу кільця дорівнює відносному подовженню радіуса (рис. 17.8)

$$\epsilon = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{v}{r} \quad (17.9)$$

Визначимо радіальне переміщення точок осі кільця. На підставі (17.9) на (17.8)

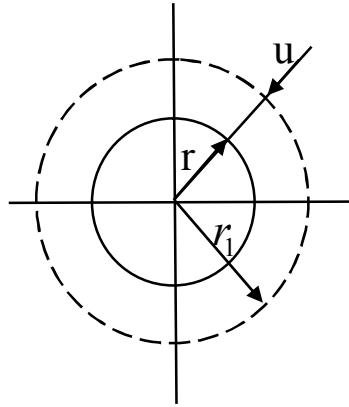


Рис.17.8

$$u = \varepsilon \cdot r = \frac{\gamma}{g \cdot E} \cdot \omega^2 \cdot r^3 \quad (17.10)$$

Розглянемо ломаний стержень ABC постійного перерізу  $A$ , довжиною  $l$  що обертається з постійною кутовою швидкістю /рис.17.9/ При рівномірному обертю прискорення частки стержня, розташованих на відстані  $r$  від осі обертання/доцентрові прискорення /, направлені к цій осі і дорівнюють  $w_n = \omega^2 \cdot r$ .

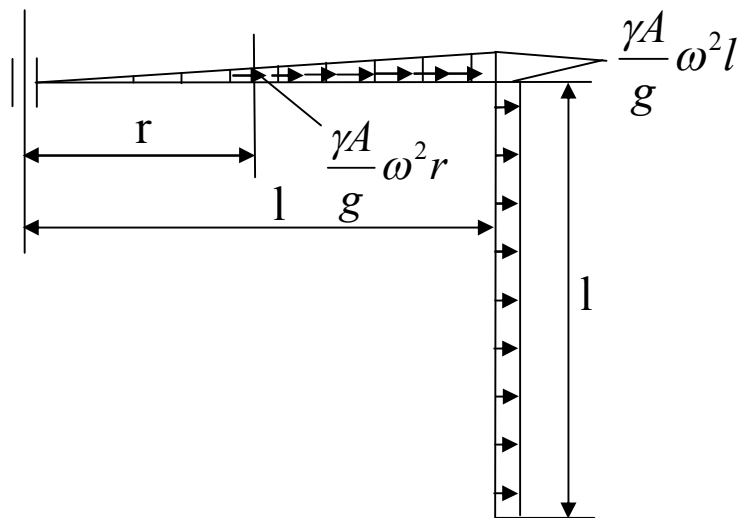


Рис.17.9

Інерційні сили /відцентрові сили/ направлені по радіусам від осі обертання. Інтенсивність сил інерції у перерізі на відстані  $r$  дорівнює

$$q_i = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot w_n = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot r$$

Із цього виразу виходить, що інтенсивність сил інерції, діючих на ділянці АВ змінюється по довжині цієї ділянці по лінійному закону: у точці А вона дорівнює нулю, а у точці В

$$q_{i(B)} = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot l$$

Сили інерції, що діють на ділянці АВ направлені уздовж осі стержня. Інтенсивність сил інерції на ділянці ВС дорівнює

$$q_i = \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot l$$

Ці сили направлені по нормалі до прямої ВС. Епюра  $q_i$  наведена на рис.17.9.

Стержень ВС зазнав поперечний згин, а АВ - згин з розтягом.

Епюри  $Q$  та  $M$  будуюмо звичайним засобом /рис. 17.10/

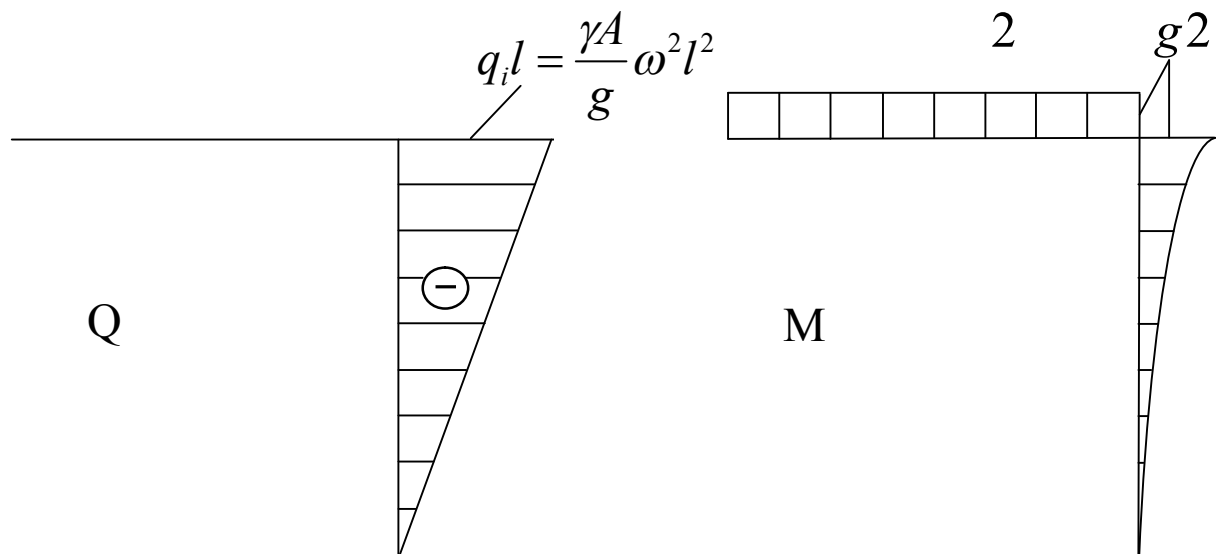


Рис.17.10

Поздовжня сил  $N$  в перерізі стержня АВ, розташованому на відстані  $r$  від осі обертання дорівнює площині епюри  $q_i$  на ділянці від цього перерізу до кінця стержня та площині епюри  $q_i$  на ділянці ВС. При побудові епюр для стержня АВ внутрішні зусилля,

що діють в перерізі В стержня можна розглядувати як зовнішнє зосереджене навантаження на стержень АВ /рис.17.11/

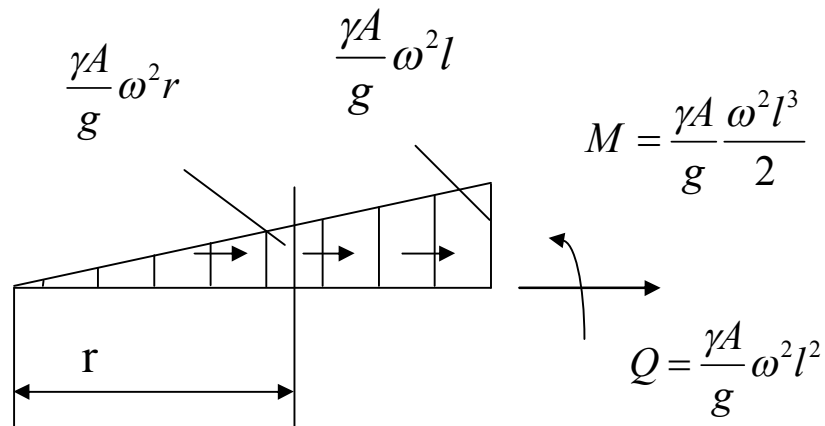


Рис.17.11

$$N = \left( \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot r + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot l \right) \cdot \frac{l-r}{l} + \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \omega^2 \cdot l^2 = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \left( \frac{l^2 - r^2}{2} \right)$$

Найбільше значення поздовжня сила має в началі стержня при  $r = 0$

$$N = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2}{g} \cdot \frac{3 \cdot l^2}{2}$$

Епюри поздовжніх сил наведені на рис, 17.11

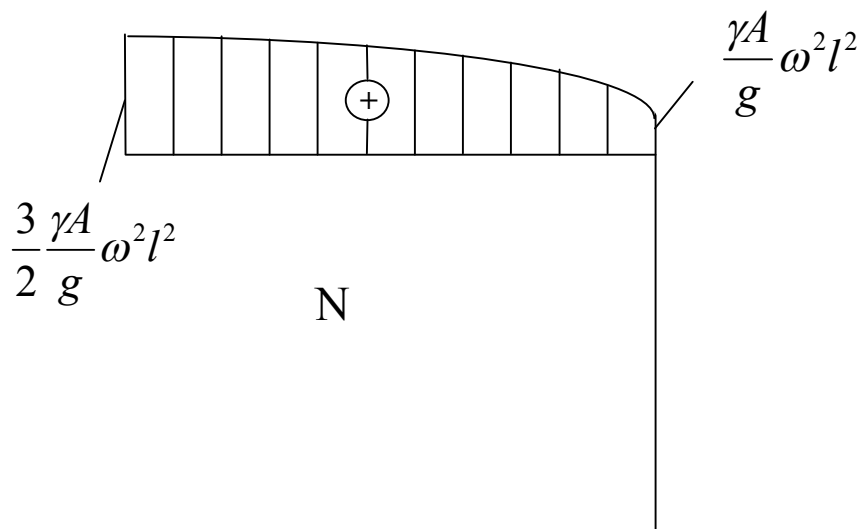


рис.17.11



## ЛЕКЦІЯ 18

### УДАРНЕ НАВАНТАЖЕННЯ

#### 18.1. Основні положення інженерної теорії удару

Явище удару виникає у тому випадку, коли швидкість розглядаємої частини конструкції або стискаючих з нею частин у дуже короткий проміжок часу змінюється на кінцеву величину.

При вивченні удару будемо припускати, що удар буде не пружним, тобто ударяюче тіло не відскакує від конструкції, а переміщується разом з нею.

Розглянемо будь-яку закріплену пружного систему на яку з висоти  $h$  падає вантаж  $F$

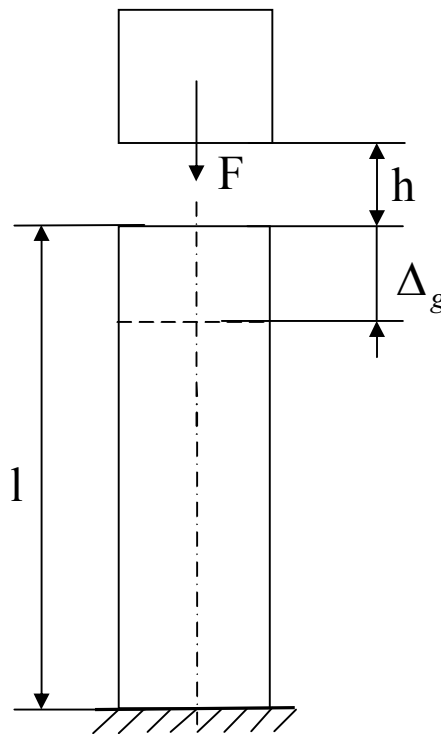


Рис. 18.1.

Після проходження шляху  $h$ , вантаж  $F$ , який посувається з якоюсь швидкістю, приходить у стикання з нерухомою системою. Після удару у деякий момент часу швидкість переміщення вантажу становить рівною нулю. У цей момент деформації конструкції та напруження у неї досягнуть своїх найбільших значень.

Потім відбуваються поступово затухаючі коливання системи та вантажу і встановлюється стан статичної рівноваги, при якому

деформації конструкції та напруження у неї дорівнюють деформаціям та напруженням, які виникають від статичної дії вантажу  $F$ .

У випадку падаючого вантажу величина сили удару може бути обчислена по формулі

$$F_g(t) = \frac{F}{g} \cdot a(t)$$

де  $F$  - вага падаючого вантажу,  $a(t)$  - прискорення падаючого вантажу після стикання його з перешкодою.

Проте визначити силу удару  $F_g(t)$  по формулі важко, так як невідома тривалість удару, тобто величини того проміжку часу у ході якого відбувається падіння швидкості до нуля. Тому залишається невідомою величина прискорення  $a(t)$ , отже і сили  $F_g$ .

Тому для визначення напружень в елементах конструкцій від ударного навантаження в інженерній практиці користуються енергетичним методом, заснованим на законі збереження енергії.

Відповідно цьому методу припускають:

- кінетична енергія ударяючого тіла повністю переходить у потенціальну енергію деформації тіла що підвергається удару;
- закон розподілу напружень та деформацій по об'єму тіла, що підвертається удару зостається таким же як і при статичній дії сил;
- напруження, що виникають у системі при ударі не перевищують межі пропорційності і тому справедлив закон Гука; модулі пружності однакові при статичному та ударному навантаженні.

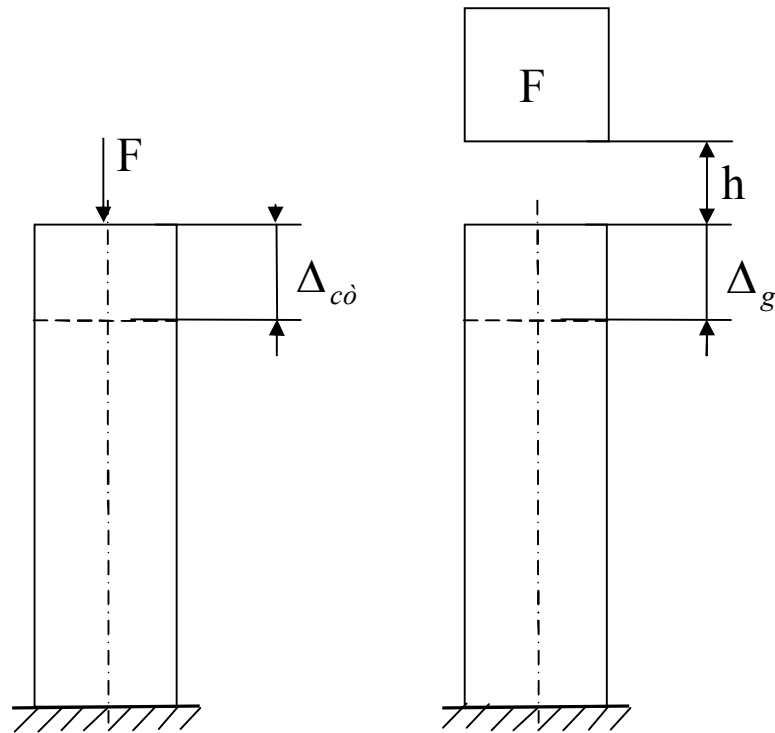


Рис.18.2

Відповідно другому припущенню, змінювання деформації при ударній дії навантаження порівнюючи з деформацією при статичній дії того ж навантаження /рис. 18.2/ може бути характеризоване динамічним коефіцієнтом

$$\frac{\Delta_g}{\Delta_{\tilde{n}\tilde{o}}} = K_{\ddot{a}} \quad (18.2)$$

Звідки

$$\Delta_g = \Delta_{\tilde{n}\tilde{o}} \cdot K_{\ddot{a}} \quad (18.3)$$

Відповідно третьому припущенню по аналогії з формулою /18.3/ можна написати

$$\sigma_g = \sigma_{\tilde{n}\tilde{o}} \cdot K_{\ddot{a}} \quad (18.4)$$

Таким чином задача зводиться до визначення коефіцієнта динамічності.

18.2. Розрахунок на удар без урахування маси пружного тіла.

Розглянемо розрахунок на удар без урахування маси пружного тіла /Рис. 18.2/.

На підставі закона збереження енергії

$$T = U_{\dot{a}} \quad (18.5)$$

де  $T$  - кінетична енергія ударяючого тіла,  $U_{\dot{a}}$  - потенціальна енергія деформації пружної системи.

Зміна кінетичної енергії падаючого груза чисельно дорівнює роботі вантажу  $F$  здійснюваної їм при падінні та деформації стержня

$$T = F(h + \Delta_g)$$

Потенціальна енергія деформації пружного тіла, припускаючи, що зв'язок між зусиллями та деформаціями як при статичному так і при динамічному навантаженні однаковий, дорівнює

$$U_{\dot{a}} = \frac{1}{2} F_g \Delta_g = \frac{1}{2} F \cdot K_{\dot{a}} \cdot \Delta_g \quad (18.7)$$

$$\text{де } F_g = F \cdot K_{\dot{a}}$$

Підставляючи (18.6) та (18.7) у (18.5), отримуємо

$$F(h + \Delta_g) = \frac{1}{2} F \cdot K_{\dot{a}} \cdot \Delta_g$$

або

$$2(h + \Delta_g) = K_{\dot{a}} \cdot \Delta_g$$

Враховуючи вираз (18.2), будемо мати

$$\Delta_{\dot{a}}^2 = 2\Delta_{\dot{n}\dot{o}} (h + \Delta_{\dot{a}})$$

або

$$\Delta_g^2 - 2\Delta_{\dot{n}\dot{o}} \Delta_g - 2h\Delta_{\dot{n}\dot{o}} = 0$$

Із одержаного рівняння визначаємо

$$\Delta_g = \Delta_{\dot{n}\dot{o}} \pm \sqrt{\Delta_{\dot{n}\dot{o}}^2 + 2\Delta_{\dot{n}\dot{o}} \cdot h} \quad (18.8)$$

Знак мінус не відповідає фізичній стороні задачі, тому у формулі (18.8) зберігаємо знак плюс. Запишемо її у вигляді

$$\Delta_g = \Delta_{\tilde{n}\tilde{d}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cn}}}\right) \quad (18.9)$$

Швидкість  $v$  падаючого вантажу у момент стикання з системою, зазнаваючої удару зв'язана з висотою падіння співвідношенням

$$v = \sqrt{2gh}, \text{ або } 2h = \frac{v^2}{g}$$

Тоді формулу /18.9/ можна подати у такому вигляді

$$\Delta_g = \Delta_{\tilde{n}\tilde{d}} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{\tilde{n}\tilde{d}}}}\right) \quad (18.10)$$

На підставі формул (18.2), (18.9) та (18.10) знаходимо значення динамічного коефіцієнта

$$K_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\tilde{n}\tilde{d}}}}, \quad (18.11)$$

або

$$K_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{c\tilde{d}}}} \quad (18.12)$$

Таким чином, для визначення найбільших напружень при ударі напруження та деформації, знайдені від статичної дії сили  $F$ , що дорівнює вазі падаючого вантажу, треба помножити на динамічний коефіцієнт  $\hat{E}_{\ddot{a}}$  або розрахувати систему на дію якоїсь статичної сили, яка дорівнює добутку  $F \cdot K_{\ddot{a}}$ .

Розглянемо випадок коли висота падіння вантажу дорівнює нулю. Такий випадок несе назву раптової дії навантаження ( $h=0$ )

$$K_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + 0} = 2 \quad (18.13)$$

Якщо висота падіння вантажу у багато разів більше переміщення  $\Delta_{\tilde{n}\tilde{d}}$ , то у формулах (18.11) та (18.12) можна зневажити одиницями та прийняти

$$K_{\ddot{a}} = \sqrt{\frac{2h}{\Delta_{\tilde{n}\tilde{d}}}} = \frac{v}{\sqrt{g\Delta_{\tilde{n}\tilde{d}}}} \quad (18.14)$$

Розглянемо декілька прикладів ударної дії сили  $F$ .

Приклад № I Випадок поздовжнього удару, викликаючий стиск стержня постійного перерізу

$$\Delta_{\dot{n}\dot{o}} = \frac{Fl}{EA}; K_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Fl}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2 EA}{gFl}}$$

(18.15)

Найбільші напруження при такому ударі

$$\sigma_g = \sigma_{\dot{n}\dot{o}} \cdot K_{\ddot{a}} = -\frac{F}{A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hEA}{Fl}}\right)$$

(18.16)

Якщо висота падіння  $h$  або швидкість  $v$  великі, то

$$\sigma_g = -\sqrt{\frac{2hEA}{lA}} = -v \sqrt{\frac{EF}{glA}}$$

(18.17)

З останньої формули видно, що напруження від удару обернено пропорційно квадратному кореню із об'єму  $lA$  стержня.

Для зменшення динамічних напружень слід збільшити податливість /зменшити жорсткість/ системи, наприклад шляхом застосуванням пружин пом'якшуючих удар /рис.18.3/

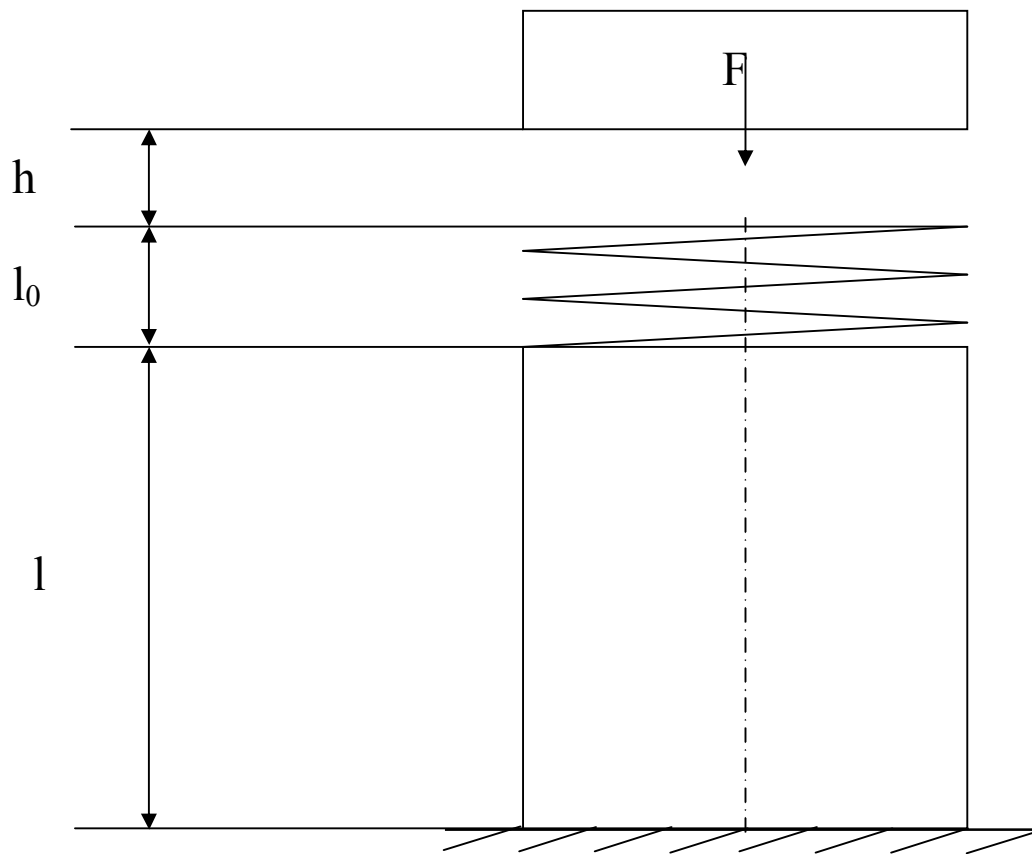


рис.18.3.

У цьому випадку

$$\Delta_{\dot{n}\delta} = F \left( \frac{8D^3n}{Gd^4} + \frac{l}{EA} \right)$$

де  $d$  - діаметр проволочки пружини,  $D$  - середній діаметр пружини,  $n$  - кількість витків пружини.

У цьому випадку  $K_{\dot{a}}$  дорівнює

$$K_{\dot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{F \left( \frac{8D^3n}{Gd^4} + \frac{l}{EA} \right)}} \quad (18.18)$$

Зіставлення цього виразу з формулою (18.15) показує, що застосування пружини приведе к зменшенню динамічного коефіцієнту.

Приклад № 2. Зрівняємо міцність двох стержнів підлягаючих поздовжньому удару /Рис. 18.4/

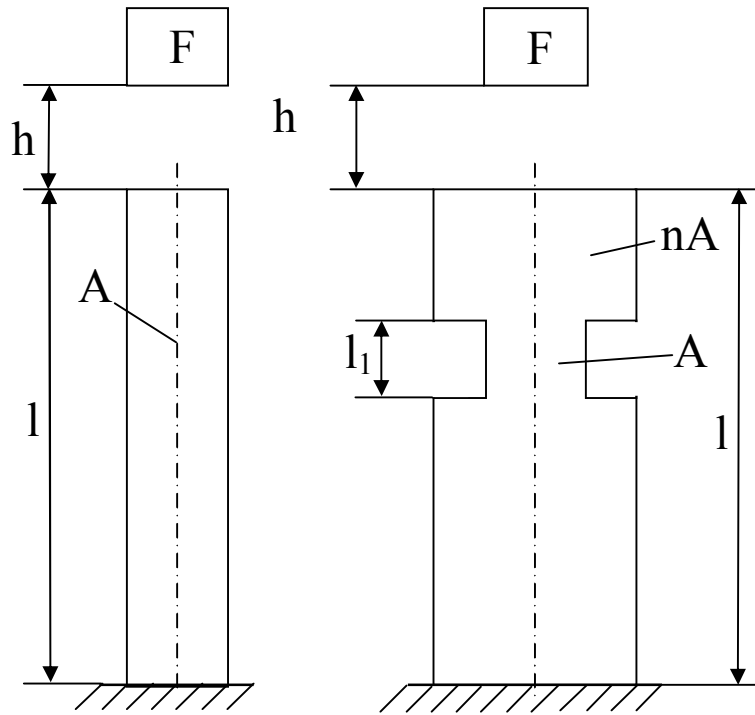


Рис.18.4

Для першого стержня

$$\Delta_{\dot{\sigma}}^I = \frac{Fl}{EA}$$

Для другого стержня

$$\Delta_{\dot{\sigma}}^{II} = \frac{F(l-l_1)}{EnA} + \frac{Fl_1}{EA}$$

Якщо довжина  $l_1$  дуже мала, наприклад при наяві поперечних виточок, то приблизно можна прийняти

$$\Delta_{\dot{\sigma}}^{II} = \frac{Fl}{EnA}$$

При статичній дії сили оба стержня будуть однакової міцності, так як найбільші напруження /при розрахунку без урахування концентрації напружень/ у кожному з них  $\sigma_{\dot{\sigma}} = F/A$  При ударної дії навантаження динамічний коефіцієнт дорівнює

$$K_{\dot{a}}^I = \sqrt{\frac{2hEA}{Fl}} ; \quad K_{\dot{a}}^{II} = \sqrt{\frac{2hnEA}{Fl}} = K_{\dot{a}}^I \sqrt{n}$$



тобто у  $\sqrt{n}$  раз більший ніж для першого стержня.

### 18.3 Горизонтальний удар

Розглянемо розрахунок пружної системи /рис, 18.5/ на горизонтальний удар тілом масою  $F/g$ .

Позначимо через  $\Delta_{\ddot{a}}$  найбільше горизонтальне переміщення системи у місті удару, а через  $V$  - швидкість тіла у момент удару. Кінетична енергія ударяючого тіла у момент стискання з пружної системи дорівнює

$$T = \frac{F}{g} \cdot \frac{v^2}{2} \quad (18.19)$$

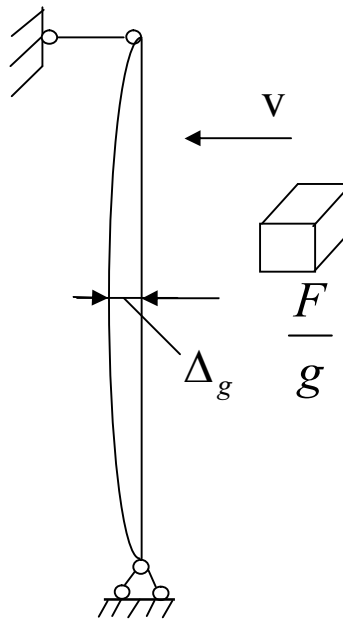


Рис.18.5

Потенціальна енергія деформації пружної системи буде дорівнювати

$$U_{\ddot{a}} = \frac{1}{2} F_{\ddot{a}} \Delta_{\ddot{a}} = \frac{1}{2} F \cdot K_{\ddot{a}} \cdot \Delta_{\ddot{a}} = \frac{1}{2} \cdot F \cdot \Delta_{c\ddot{o}} \cdot K_{\ddot{a}}^2 \quad (18.20)$$

де  $\Delta_{c\ddot{o}}$  - переміщення міста удару по горизонталі, що викликане горизонтальною статично діючою силою  $F$ , яка дорівнює вазі ударяючого тіла.

Підставляючи вирази (18.19) та (18.20) у рівняння енергетичного балансу (18.5) отримуємо

$$\frac{F}{g} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{F \cdot \Delta_{\dot{n}o} \cdot K_{\ddot{a}}^2}{2}$$

звідки динамічний коефіцієнт буде дорівнювати

$$K_{\ddot{a}} = \sqrt{\frac{v^2}{g \cdot \Delta_{\dot{n}o}}} = \frac{v}{\sqrt{g \cdot \Delta_{\dot{n}o}}}$$

(18.21)

#### 18.4. Розрахунок на удар з урахуванням маси пружної системи

Розглянемо випадок коли маса  $Q/g$  системи зосереджена у місті падіння вантажу  $F$ . При цьому будемо відзначати три моменти.

1. Момент перед стиканням вантажу  $F$  з пружною системою; швидкість вантажу  $F$  дорівнює  $v$ , швидкість маси  $Q/g$  дорівнює нулю.

2. Момент стискання вантажу  $F$  з системою; при цьому швидкість  $\bar{v}$  вантажу  $F$  дорівнює швидкості руху пружної системи у місті удару.

3. Момент коли пружна система одержує найбільше переміщення, а швидкості  $F$  вантажу і пружної системи дорівнюють нулю.

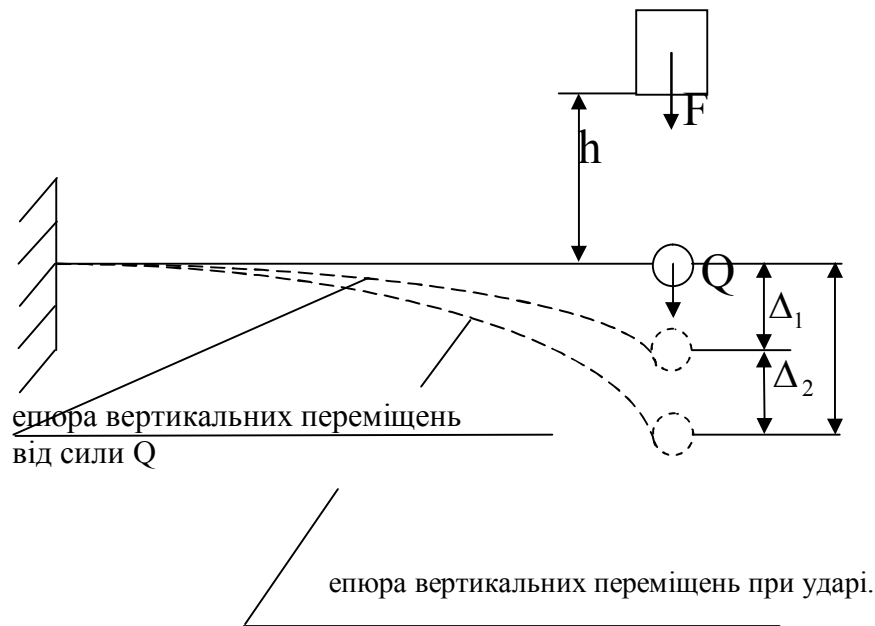
Швидкість  $\bar{v}$  визначається з умови, що при не пружному ударі кількість руху до удару дорівнює кількості руху після удару, тобто

$$\frac{F \cdot v}{g} = \frac{(F + Q) \cdot \bar{v}}{g}$$

звідки

$$\bar{v} = \frac{F}{F + Q} \cdot v \quad (18.22)$$

Система під дією власної ваги  $Q$  ще до удару деформується  
/рис.18.6/



Якщо  $\Delta_1$  прогин системи під дією  $Q$ , викликаний дією цієї сили, то кількість потенціальної енергії, накопиченої системою до удару буде дорівнювати

$$U_1 = \frac{Q \cdot \Delta_1}{2} \quad (18.23)$$

Позначимо через  $\Delta$  найбільше переміщення у місті падіння вантажу  $F$ , викликане його ударною дією та силою  $Q$ .

У момент коли система одержує таке переміщення вантажі  $F$  та  $Q$

чинять на систему найбільший тиск, що дорівнює

$$F_g = F \cdot K_{\ddot{a}} + Q \quad (18.24)$$

де  $K_{\ddot{a}}$  - динамічний коефіцієнт, враховуючий вагу вантажу  $F$ , інерцію цього вантажу та інерцію вантажу  $Q$ .

Розглядаємому моменту часу відповідає найбільше значення потенціальної енергії системи /кінетична енергія у цей момент дорівнює нулю, так як швидкості  $v$  і  $\bar{v}$  дорівнюють нулю/

$$U = \frac{Q \cdot \Delta_1}{2} + \frac{(F + Q) \cdot v^2}{2g} + (F + Q)(\Delta - \Delta_1) \quad (18.25)$$

Де  $U_1 = \frac{Q \cdot \Delta_1}{2}$  – потенціальна енергія системи до удару;

$\frac{(F + Q)v^2}{2g}$  - кінетична енергія вантажу  $F$  та системи у момент їх стикання;

$(F + Q)(\Delta - \Delta_1)$  - робота сил  $F$  та  $Q$  на додатковому переміщенні  $\Delta_2 = \Delta - \Delta_1$  системи після удару.

Потенціальну енергію можна виразити також через силу  $F_g$  то повне переміщення  $\Delta$

$$U = \frac{F \cdot K_{\delta} + Q}{2} \cdot \Delta \quad (18.23)$$

Прирівнюючи вирази (18.25) та (18.26) получимо

$$\frac{Q \cdot \Delta_1}{2} + \frac{(F + Q)\bar{v}^2}{2g} + (F + Q)(\Delta - \Delta_1) = \frac{F \cdot K_{\delta} + Q}{2} \cdot \Delta$$

або з урахуванням (18.22)

$$\frac{Q \cdot \Delta_1}{2} + \frac{(F + Q)}{2g} \left( \frac{F}{F + Q} v \right)^2 + (F + Q)(\Delta - \Delta_1) = \frac{F \cdot K_{\delta} + Q}{2} \Delta \quad (18.24)$$

Після перетворень запишемо

$$Q \cdot \Delta_1 + \frac{F^2 v^2}{g(F + Q)} + 2(F + Q)(\Delta - \Delta_1) - (FK_{\delta} + Q)\Delta = 0 \quad (18.25)$$

Позначимо через  $\Delta_{\tilde{n}\delta}$  прогин системи під вантажем  $F$  від статичної дії цієї сили. Залежність між переміщеннями  $\Delta_{\tilde{n}\delta}$ ,  $\Delta_1$  /від сили  $Q$ / та  $(\Delta_{\tilde{n}\delta}$ ,  $\Delta_1)$  від сили  $F \cdot K_{\delta}$  визначаються формулами

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_{\tilde{n}\delta}} = \frac{Q}{F} \quad \text{та} \quad \frac{\Delta - \Delta_1}{\Delta_{\tilde{n}\delta}} = \frac{F \cdot K_{\delta}}{F} = K_{\delta}$$

$$\text{Звідки} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \frac{Q}{F} \cdot \Delta_{\dot{n}\dot{o}} \\ \Delta - \Delta_1 = K_{\ddot{a}} \cdot \Delta_{\dot{n}\dot{o}} \\ \Delta = \left( \frac{Q}{F} + K_{\ddot{a}} \right) \cdot \Delta_{c\dot{o}} \end{array} \right. \quad (18.26)$$

Підставимо ці вирази у рівняння (18.25) та перетворимо його

$$K_{\delta}^2 - 2K_{\delta} - \frac{v^2}{g\Delta_{cm} \left(1 + \frac{Q}{F}\right)} = 0$$

Звідки

$$K_{\delta} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\Delta_{cm} \left(1 + \frac{Q}{F}\right)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{cm} \left(1 + \frac{Q}{F}\right)}}$$

Для визначення викликаних ударом найбільших динамічних напружень та переміщень з урахуванням маси пружної системи, також як і при розрахунку без урахування маси, напруження і деформації знайдені шляхом розрахунку системи на статичну дію сили  $F$ , треба помножити на динамічний коефіцієнт  $K_{\ddot{a}}$ . Додавши до знайдених значень напруження і деформації від власної ваги пружної системи /якщо за умови задачі їх треба враховувати/ получимо повні напруження і переміщення які виникають при ударі.

### 18.5.Скручувальний удар

При ударному крученні рис. 18.7 можна, виходячи з енергетичного балансу (18.5), получить формулу для визначення максимальних дотичних напружень, аналогічно тій, що була здобута при поздовжньому ударі

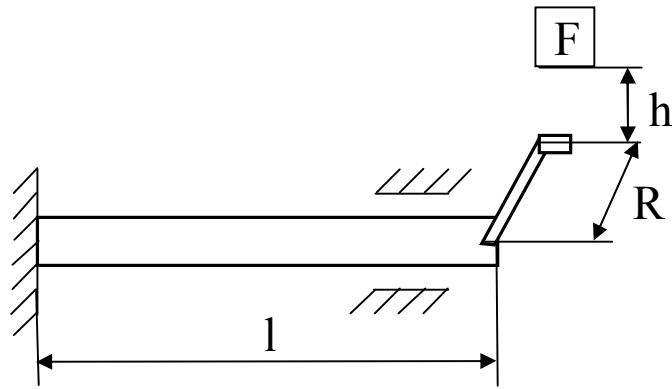


рис.18.7

$$\tau_g = K_{\ddot{a}} \cdot \tau_{c\dot{o}}$$

$$K_{\ddot{a}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{\ddot{n}\dot{o}}}} \quad (18.28)$$

$\Delta_{c\dot{o}}$  - переміщення точки співудару в напрямі удару під дією статично прикладеної сили  $F$ .

Нехтуючи деформацією кривошипа і вважаючи, що внаслідок малості переміщення точки співудару його проекція на вертикаль дорівнює довжині дуги, маємо

$$\Delta_{c\dot{o}} = \varphi \cdot R = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_{\rho}} \cdot R = \frac{FR \cdot l}{G \cdot I_{\rho}} \cdot R = \frac{FR^2 l}{G \cdot I_{\rho}}$$

де  $F$  - вага падаючого вантажу.

Дуже часто ударне кручення спричинюється не падінням вантажів, а силами інерції мас, що обертається з великими прискореннями. Це має місце в основному при гальмуванні швидкообертючих валів, що несуть маховики.

Розглянемо вал із закріпленням на одному кінці, а на другому - тормозом, що обертається із сталою кутовою швидкістю  $\omega$  рис.18.8.

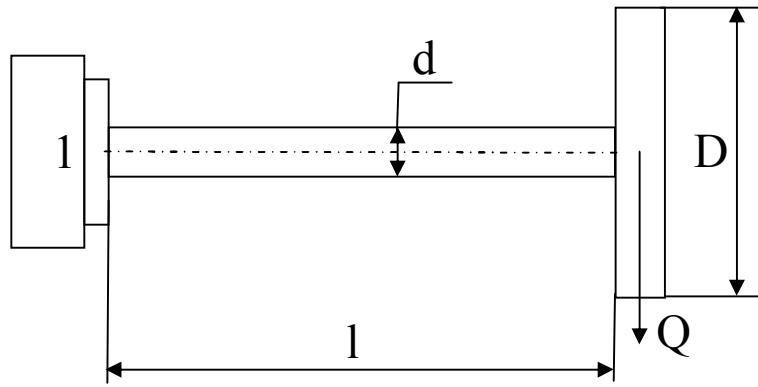


рис.18.8

При раптовому гальмуванні гальмом 1, яке створює момент  $M_g$ , маховик завдяки запасу кінетичної енергії продовжує рух, скручуючи вал. Отже, ділянки вала завдовжки  $l$  скручується моментами  $M_g$  (момент гальмування і момент сил інерції маховика).

Кінетична енергія маховика при обертальному русі

$$T = \frac{I \cdot \omega^2}{2} \quad (18.29)$$

Де  $I = \frac{Q \cdot D^2}{8g}$  – полярний момент інерції маси маховика,  $D$  -

його діаметр,  $Q$  - вага маховика

Потенціальна енергія деформації кручення

$$U = \frac{1}{2} T_g \cdot \varphi_g = \frac{1}{2} T_g \cdot \frac{T_g \cdot l}{G \cdot I_\rho} = \frac{T_g^2 \cdot l}{2G \cdot I_\rho} \quad (18.30)$$

де  $T_g = M_g$  - крутний момент в перерізах валу,  $I_\rho$  полярний момент інерції круглого перерізу вала. Підставляючи вирази (18.29) і (18.30) в умову збереження енергії (18.5), знайдемо динамічний крутний момент

$$\frac{I \cdot \omega^2}{2} = \frac{T_g^2 \cdot l}{2G \cdot I_\rho} \quad T_g = \sqrt{\frac{G \cdot I_\rho \cdot \omega^2 \cdot I}{l}} = \frac{\omega \cdot d^2 \cdot D}{16} \sqrt{\frac{G \cdot \Pi \cdot Q}{g \cdot l}}$$

Максимальне дотичне напруження та динамічний кут закручення

$$\tau_g = \frac{T_g}{W_\rho} = \frac{\omega D}{\Pi d} \sqrt{\frac{G \Pi Q}{g l}} \quad (18.31)$$

$$\varphi_g = \frac{T_g \cdot l}{G \cdot I_\rho} = \frac{2 \omega D}{d^2} \sqrt{\frac{Q \cdot l}{\Pi \cdot G \cdot g}} \quad (18.32)$$

Якщо задано частоту обертання вала перед початком гальмування, то формули (18.31) і (18.32) набирають вигляду

$$\tau_{g \max} = 0,033 \frac{nD}{d} \sqrt{\frac{G \cdot \Pi \cdot Q}{g \cdot l}} \quad (18.33)$$

$$\varphi_g = 0,21 \frac{nD}{d^2} \sqrt{\frac{Q \cdot l}{\Pi \cdot G \cdot g}} \quad (18.34)$$

## ЛЕКЦІЯ 19

### РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ПРИ КОЛИВАННЯХ

#### 19.І. Основні положення теорії коливань

Теорія коливань становить собою великий розділ сучасної фізики охоплюючий дуже широкий діапазон питань механіки, електротехніки, радіотехніки і т.д. Особливе значення має теорія коливань для прикладних задач, які зустрічаються в інженерній практиці, зокрема у питань міцності машин та споруд. Відомі випадки, коли будівельна споруда, яка розрахована з великим запасом на статичне навантаження руйнувалась під дією порівняльно невеликих періодично діючих сил. В багатьох випадках жорстка і дуже міцна конструкція виявляється непридатною при наяві змінних сил, в той час як така ж більш легка, і на перший погляд менш міцна, сприймає ці зусилля зовсім безболісно.

При вивченні коливань пружних систем останні прийнято розподіляти, перш усього, по числу ступенів вільності.

Числом ступенів вільності механічної системи називається кількість незалежних параметрів, які визначають положення системи в кожний даний момент часу.



В простішому випадку положення системи може бути визначено тільки однією величиною. Такі системи називаються системами з одною ступінню вільності.

Наприклад, система яка складається з жорсткої маси і пружини /рис. 19.1/ має одну ступінь вільності, оскільки положення маси визначається однією координатою  $X$ , яка відраховується від деякої точки, тобто вертикальним переміщенням вантажу.

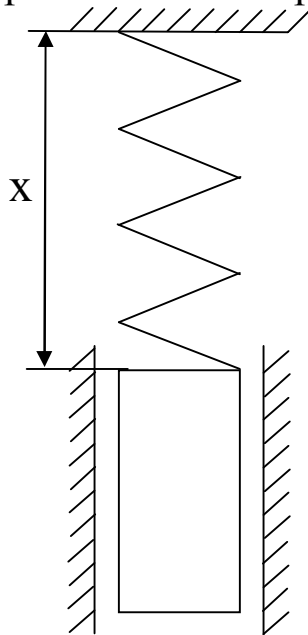


рис.19.3

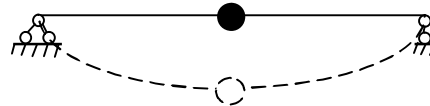


рис.19.4

Розглянемо зараз пружну балку до котрої в одному перерізі прикріплений вантаж  $F$ , у багато разів перевищуючий вагу

балки; у зв'язку з цим масою балки можна понехтувати» тобто розглянути балку як невагому /рис. 19.2/, Положення зігнутої осі балки визначається положенням вантажу і тому цю балку можна розглядати як таку, що має одну ступінь вільності. Балка з двома вантажами є система з двома ступенями вільності /рис. 19.3/, так як за незалежні параметри які визначають положення системи можуть бути прийняті переміщення мас відносно положення статичної рівноваги балки.

Розглядаючи поперечні коливання балок можна поступово збільшувати кількість зосереджених мас доти, доки не утвориться балка з розподіленою по всій довжині масою, тобто балки перетвориться на вагому /рис. 19.4/. У результаті матимемо балку з нескінченним числом ступенів вільності. При цьому прогин у будь-якому перерізі балки змінюється за певним законом. З одного

боку прогин балки при коливаннях є функцією абсциси  $x$ , а  $z$  іншою – непереривною функцією часу  $t$ .



рис. 19.3

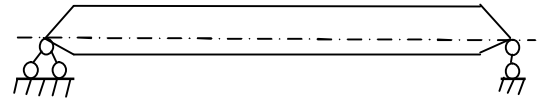


рис. 19.4

При дослідженні механічних пружних коливань розрізняють такі чотири типи можливих коливань: власні, вимушені, параметричні та автоколивання.

Коливання системи які відбуваються при відсутності зовнішніх сил, називаються власними або вільними.

У наслідок того, що в усіх реальних механічних системах діють сили опору коливальному руху /опір середовища, в якому відбуваються коливання, тертя в підшипниках і з'єднаннях конструкції, сили внутрішнього тертя в матеріалі/, власні коливання завжди затухають і припиняються. В цьому полягає важлива особливість власних коливань порівняно з іншими типами коливальних рухів. Прикладом власних коливань пружної системи є вертикальні коливання вантажу, підвішеного до кінця пружини, якщо верхній кінець її закріплений, а вантаж спочатку відтягнутий вниз, а потім відпущений.

Вимушеними називають коливання пружної системи, які відбуваються при дії на неї перемінних зовнішніх сил.

Прикладом вимушених коливань механічної системи можуть бути поперечні коливання балки, що править за опору для електродвигуна, якщо в нього обертові маси не повністю зрівноважені /рис. 19.5/

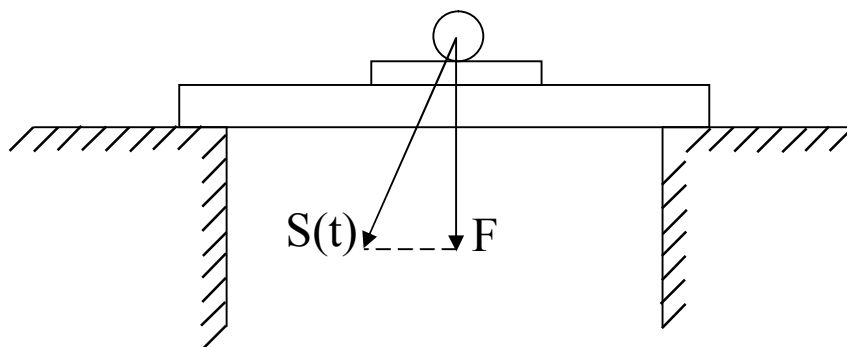


рис. 19.6

Параметричними називають коливання пружної системи, в процесі яких періодично змінюються фізичні параметри системи, тобто величини, що характеризують масу системи або її жорсткість. Важливою особливістю параметричних коливань є те, що зовнішні сили впливають не безпосередньо на коливальний рух, а на фізичні параметри системи. Наприклад, у обертовому валу не круглого перерізу, який має відносно різних осей перерізу різні моменти інерції, що входять до характеристики жорсткості при згинанні, виникають поперечні коливання у певній площині внаслідок згинальної жорсткості вала, яка періодично змінюється за кожний оберт вала.

Автоколиваннями, або самоколиваннями, пружної системи називаються незатухаючі коливання, що підтримуються такими зовнішніми силами, характер дій яких визначається самими коливальними процесами механічної системи.

Автоколивання виникають у системі без зовнішньої періодичної дії. Характер цих коливань визначається виключно будовою системи.

19.2. Вільні коливання системи з одним ступенем вільності без затухання.

Розглянемо вільні коливання системи з одним ступенем вільності, наприклад, невагомої балки з прикріпленим до неї вантажем, вага якого  $F$ . /рис. 19.6/.

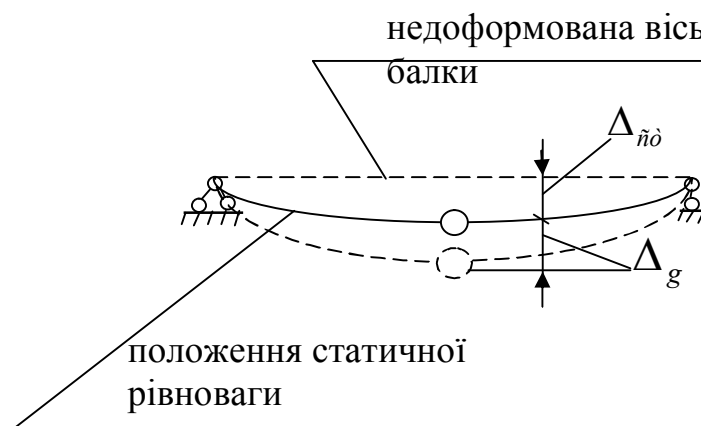


рис.19.7

На підставі принципу Д'Аламбера, можна рахувати, що в будь-який момент часу на балку з боку вантажу діє сила  $F + F_i$ . Вона викликає прогин балки

$$\Delta_{\tilde{n}\delta} + \Delta_g = (F + F_i)\delta$$

Тут  $F_i$  - сила інерції вантажу в розглядаємий момент часу;

$\delta$  - прогин балки під вантажем від сили  $\bar{F} = 1$ .

Прогин і сили приймаємо додатними, коли вони направлені вниз.

Прогин балки  $\Delta_g$ , відраховуємо від положення статичної рівноваги дорівнює

$$\Delta_g = F_i \cdot \delta \tag{19.1}$$

Звідки сила інерції

$$F_i = \frac{\Delta_g}{\delta} \tag{19.2}$$

Сила інерції вантажу, як відомо, дорівнює добутку його маси на прискорення і направлена в бік, протилежний прискоренню. Отож

$$F_i = -m \cdot a = -\frac{F}{g} \cdot \frac{d^2 \cdot \Delta_g}{d \cdot t^2} \tag{19.3}$$

Підставляючи (19.2) у (19.3) отримаємо

$$\frac{F}{g} \cdot \frac{d^2 \Delta_g}{d \cdot t^2} + \frac{\Delta_g}{\delta} = 0$$

Або

$$\frac{d^2 \Delta_g}{dt^2} + \varphi^2 \Delta_g = 0$$

(19.4)

де

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{F \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{1}{m \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\tilde{n}\delta}}} \tag{19.3}$$

Рівняння (19.4) являє собою диференціальне рівняння вільних коливань системи з одним ступенем вільності. Це лінійне однорідне диференціальне рівняння. Загальний розв'язок цього рівняння

$$\Delta_g(t) = A \cdot \cos \varphi \cdot t + B \cdot \sin \varphi \cdot t \quad (19.5)$$

де  $A$  і  $B$  – сталі інтегрування, які визначаються із початкових умов.

Вираз для  $\Delta_g$  можна записати також у вигляді

$$\Delta_g = D \cdot \sin(\varphi \cdot t + \lambda) \quad (19.6)$$

де  $D \cdot \sin \lambda = A$  ;  $D \cdot \cos \lambda = B$

$D$  і  $\lambda$  – сталі інтегрування.

Величини  $(\varphi \cdot t + \lambda)$  називається миттєвою фазою коливань;  $\lambda$  - початковою фазою коливань.

Вирази (19.5) і (19.6) показують, що вільні коливання відбуваються по гармонійному закону; графік цих коливань в системі координат  $\Delta_g$ ,  $t$  має вигляд /рис.19.8/.

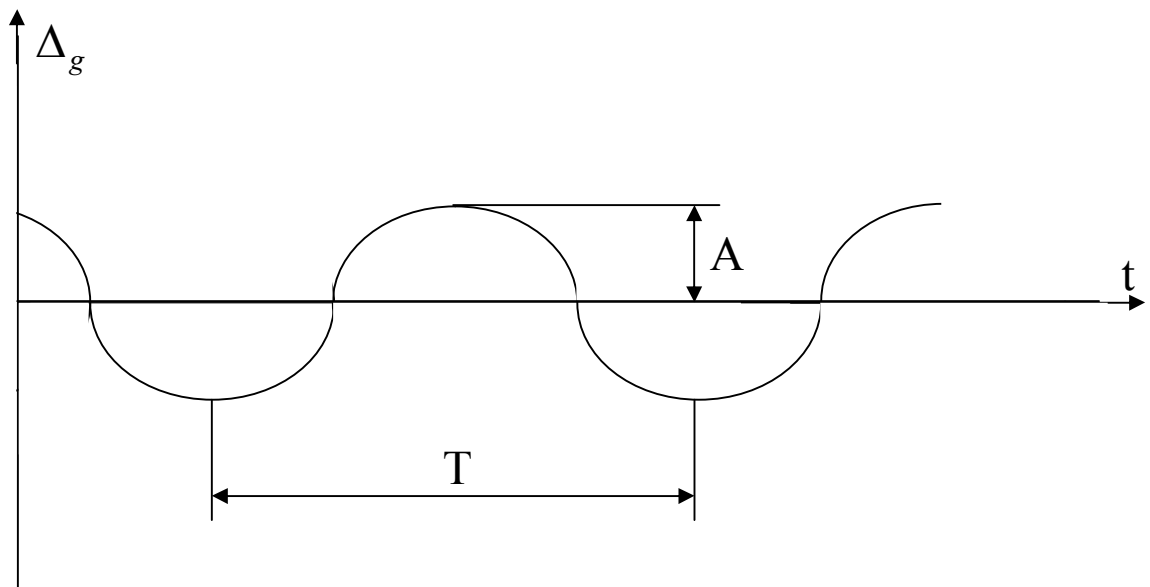


рис.19.8

Із рівняння (19.6) видно, що значення прогинів повторюються через кожні  $\frac{2\pi}{\varphi}$  сек. Отож система за  $\frac{2\pi}{\varphi}$  сек робить одне коливання, а за  $2\pi$  сек -  $\varphi$  коливань. Таким чином величина  $\varphi$  - уявляє собою число вільних коливань, які робить система за  $2\pi$  сек, і називається коловою частотою вільних коливань.

Проміжок часу, за котрий система робить одне вільне коливання, називається періодом вільних коливань. Величина періоду визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\varphi} = 2\pi \sqrt{\frac{F \cdot \delta}{g}} \quad (19.7)$$

Величина зворотна періоду коливань, визначає кількість коливань за одиницю часу /секунду/ і має назву секундної частоти

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\varphi}{2\pi} \quad (19.8)$$

Секундна частота коливань, як правило, виражається в герцах, число герц дорівнює кількості коливань за секунду.

Найбільший прогин /переміщення/  $A$  від положення статичної рівноваги називається амплитудою коливань.

Визначимо сталі інтегрування  $A$  і  $B$ . Хай при  $t = 0$  початкове переміщення вантажу  $\Delta_0$  і початкова швидкість  $v_0$

Із рівняння (19.5) визначасмо

$$A = \Delta_0; \quad B = \frac{v_0}{\varphi}$$

Тоді рух вантажу буде описуватися рівнянням

$$\Delta_g(t) = \Delta_0 \cdot \cos \varphi \cdot t + \frac{v_0}{\varphi} \sin \varphi \cdot t \quad (19.9)$$

Приклад. Складемо вираз прогинів при коливанні невагомої балки з вантажем  $F$ , викликаних тим, що вантаж був відтягнутий на величину  $C$  /від положення статичної рівноваги/, а потім в момент часу  $t = 0$  відпущений /рис. 19.9/.

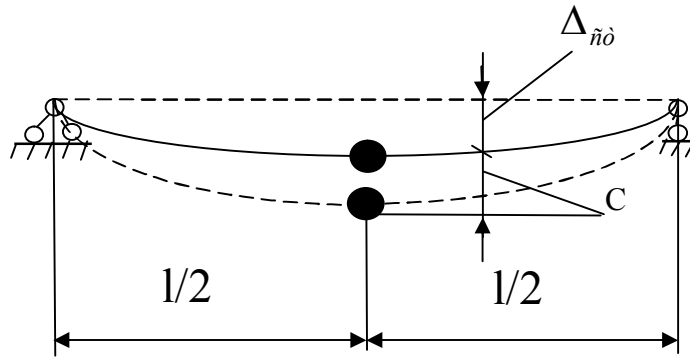


Рис.19.9

Отже при  $t = 0$ , прогин  $\Delta_0 = C$ , а швидкість руху дорівнює  $v_0 = 0$ . Тоді з виразу (19.9) маємо

$$\Delta_g(t) = C \cdot \cos \varphi \cdot t$$

Найбільший прогин дорівнює

$$\Delta_{g, \max} = C$$

Частота коливань балки

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{F \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\tilde{n}\delta}}} = \sqrt{\frac{g48EI}{F \cdot l^3}}$$

Найбільший повний прогин під вантажем

$$\Delta_{\tilde{I}, \max} = \Delta_{g, \max} + \Delta_{\tilde{n}\delta} = \tilde{N} + \frac{Fl^3}{48EI}$$

Визначимо тепер найбільші повні нормальні напруження які виникають в розглядаємій балці при коливаннях. Вони виникають у той момент часу, коли балки під вантажем має найбільший прогин

$\Delta_{\tilde{I}, \max}$ . В цей момент на балку діє сила  $F + F_{i, \max}$ ,

де

$$F_{i, \max} = \frac{\Delta_{g, \max}}{\delta} = \frac{C}{\delta} = \frac{C}{\frac{l^3}{48EI}} = \frac{48CEI}{l^3}$$

$$\text{Отже } F + F_{i, \max} = F + \frac{48CEI}{l^3} .$$

Найбільший згинаючий момент діє в середньому перерізі балки і він дорівнює

$$M_{\max} = \left( \frac{48CEI}{l^3} + F \right) \frac{l}{4}$$

Найбільші повні нормальні напруження в балці

$$\sigma_{I, \max} = \frac{M_{\max}}{W} = \left( \frac{48CEI}{l^3} + F \right) \frac{l}{4W}$$

19.3. Власні коливання системи з одним ступенем вільності з урахуванням сил затухання.

Дуже часто сили опору  $R$ , які діють на систему в кожний момент часу, приймаються пропорційними швидкості переміщення / при коливаннях/ в цей момент тобто

$$R(t) = -\alpha \frac{d\Delta}{dt} \quad (19.10)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт опору.

Знак мінус означає, що сила опору направлена обернено швидкості переміщення.

Допущення (19.10) належить Фогту і носить його ім'я.

Прогин балки  $\Delta_g$  /рис.19.7/, відраховується від положення статичної рівноваги

$$\Delta_g = (F_i + R(t))\delta$$

Звідки

$$F_i = \frac{\Delta_g}{\delta} - R(t) \quad (19.11)$$

Підставляючи (19.11) в (19.3) і враховуючи (19.10) після деяких перетворень будемо мати

$$\frac{d^2 \Delta_g}{dt^2} + \varphi^2 \Delta_g + 2h \frac{d\Delta_g}{dt} = 0 \quad (19.12)$$

де  $2h = \frac{\alpha \cdot g}{F}$



Розв'язок рівняння /19.12/ знаходимо за допомогою підстановки Ейлера  $\Delta_g = A \cdot e^{st}$ . Тоді отримаємо для  $S$  характеристичне рівняння

$$S^2 + 2hS + \varphi^2 = 0,$$

Звідки

$$S_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 - \varphi^2},$$

Отже

$$\Delta_g(t) = A_1 \cdot l^{s_1 t} + A_2 \cdot l^{s_2 t} \quad (19.13)$$

Цей інтеграл буде мати різну форму в залежності від значень  $S_{1,2}$  тобто від співвідношення величин  $h$  і  $\varphi$

Може бути наступні випадки.

1.  $h > \varphi$  тобто випадок великого опору. Тоді  $S_{1,2}$  - дійсні від'ємні числа і  $\Delta_g$  представляє собою експоненціальну функцію, значення котрої убувають з бігом часу. Отже виведена із стану рівноваги маса поступово повертається до початкового стану. Такий рух називається аперіодичним. Так улаштовані амортизатори артилерійських гармат, які не допускають коливання ствола коло його початкового положення рівноваги.

2.  $h < \varphi$ . В цьому випадку /випадок малого опору/  $S_{1,2}$  - комплексні числа

$$S_{1,2} = -h \pm i\varphi_1 \quad (19.14)$$

де  $\varphi_1 = \sqrt{\varphi^2 - h^2}$  - частота вільних коливань при наявності опору.

Рівняння (19.13) отримає вигляд

$$\Delta_g = A_1 l^{(-h+i\varphi_1)t} + A_2 l^{(-h-i\varphi_1)t}$$

Після введення тригонометричних функцій

$$\Delta_g(t) = l^{-ht} (A \cdot \cos \varphi_1 t + \sin \varphi_1 t), \quad (19.15)$$

або

$$\Delta_g(t) = l^{-ht} \cdot D \cdot \sin(\varphi_1 t + \lambda) \quad (19.16)$$

В цьому випадку отримуємо затухаючі коливання, графік яких показаний на рис.19.10

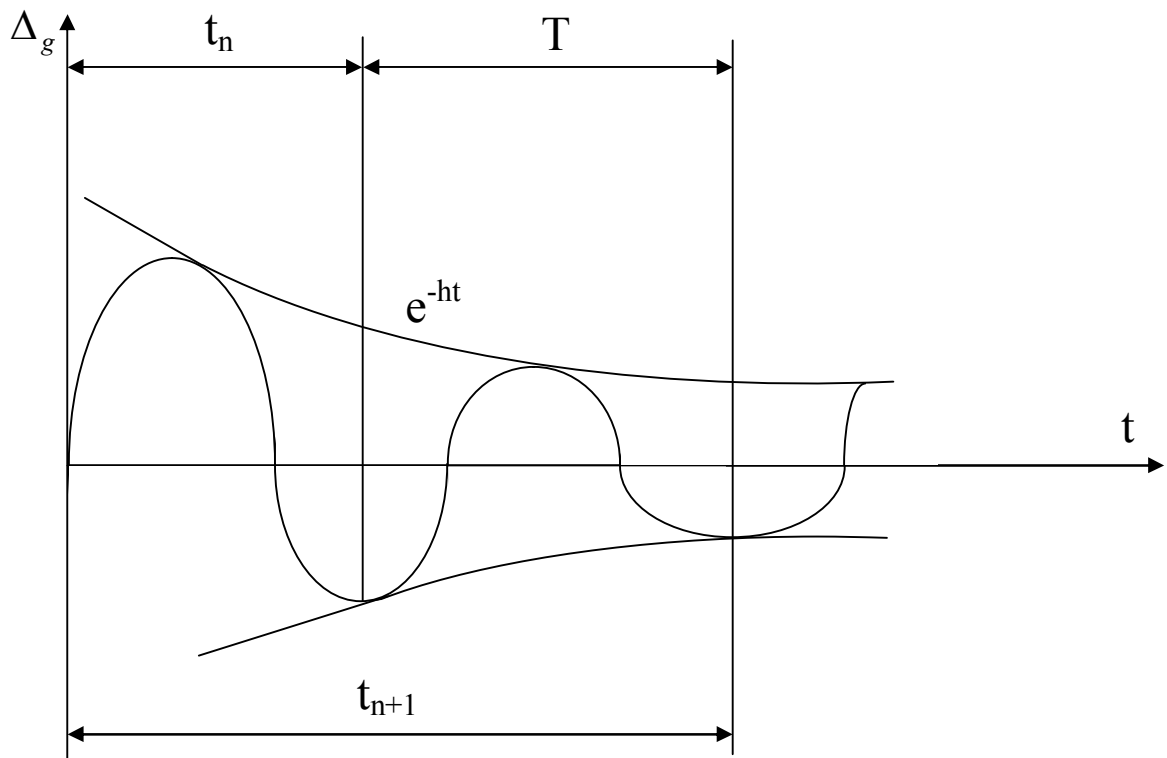


Рис.19.10

Коефіцієнт  $h$  називається коефіцієнтом затухання.

Період затухаючих коливань

$$T^* = \frac{2\pi}{\varphi_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi^2 - h^2}} = \frac{2\pi}{\varphi \sqrt{1 - \left(\frac{h}{\varphi}\right)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{\varphi}\right)^2}}$$

$T = \frac{2\pi}{\varphi}$  - період вільних коливань системи при відсутності

опору.

Якщо  $t_{n+1} - t_n = T^*$  і амплітуди коливань в момент часу  $t_n$  і  $t_{n+1}$  мають значення

$$\Delta_n = Dl^{-ht_n} \text{ і } \Delta_{n+1} = Dl^{-ht_{n+1}}$$

то відношення

$$\eta = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} = \frac{l^{-ht_{n+1}}}{l^{-ht_n}} = l^{-h(t_{n+1}-t_n)} = l^{-hT^*} = \text{const}$$

(19.17)

є величина постійна.

Із (19.17) знаходимо

$$\left| hT^* \right| = \ln \frac{\Delta_n}{\Delta_{n+1}} = \delta$$

Величина  $\delta$  називається логарифмічним декрементом затухання і взагалі є основною характеристикою затухань коливань. У техніці, зокрема в машинобудуванні, значення декременту істотно відрізняється від одиниці й становить, наприклад для таких коливальних систем, як турбінні лопатки, приблизно 0,03, тобто 3%.

## ЛЕКЦІЯ 20

### РОЗРАХУНОК КОНСТРУКЦІЙ ПРИ КОЛИВАННЯХ (закінчення).

20.1 Вимушені коливання пружної системи з одним ступенем вільності без затухання.

Розглянемо коливання невагомої системи з прикріпленням до неї вантажем  $F$ , які викликані дією зовнішньою збуджувальною силою  $S(t)$ , тобто вимушені коливання системи /рис. 20.1/.

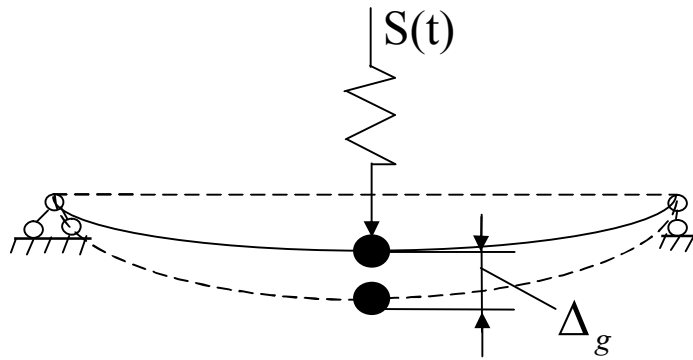


Рис.20.1

Будемо вважати, що зовнішня сила прикладена до системи у тому ж перерізі де прикріплений вантаж  $F$ , і що її величина змінюється по періодичному закону

$$S(t) = S_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.1)$$

де  $S_0$  - найбільше значення збуджувальної сили ;

$\omega$  - колова частота вимушених коливань.

Прогин  $\Delta_g$  системи від положення статичної рівноваги в будь-який момент часу є результатом дії на неї сили інерції  $F_i$  і збуджувальної сили  $S(t)$

$$\Delta_g = (F_i + S_0 \cdot \cos \omega \cdot t) \cdot \delta \quad (20.2)$$

звідки

$$F_i = \frac{\Delta_g}{\delta} - S_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.3)$$

Підставляючи (20.3) у (19.3) будемо мати

$$-\frac{F}{g} \cdot \frac{d^2 \Delta_g}{dt^2} = \frac{\Delta_g}{\delta} - S_0 \cdot \cos \omega \cdot t,$$

звідки

$$\frac{d^2 \Delta_g}{dt^2} + \varphi^2 \Delta_g = \frac{g}{F} S_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.4)$$

Рівняння (20.4) являє собою диференціальне рівняння вимушених коливань системи з одним ступенем вільності.

Розв'язок однорідного рівняння, відповідного рівнянню (20.4), яке описує вільні коливання, має вигляд (19.5)

$$\Delta_g = C \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.5)$$

Підставляючи окремий розв'язок (20.5) у диференціальне рівняння (20.4) отримуємо

$$-\omega^2 C \cdot \cos \omega \cdot t + \varphi^2 C \cdot \cos \omega \cdot t = \frac{g}{F} S_0 \cdot \cos \omega \cdot t$$

звідки після скорочення на  $\cos \omega \cdot t$  будемо мати

$$C(\varphi^2 - \omega^2) = \frac{g}{F} S_0$$

Амплітуда вимушених коливань дорівнює

$$C = \frac{\frac{g}{F} \cdot S_0}{\varphi^2 - \omega^2} \quad (20.6)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (20.4) остаточно має вигляд

$$\Delta_g(t) = A \cdot \cos \varphi \cdot t + B \sin \varphi \cdot t + \frac{g \cdot S_0}{F(\varphi^2 - \omega^2)} \cos \omega \cdot t \quad (20.7)$$

Перші два доданки правої частини рівняння (20.8) характеризують власні коливання, що, як правило згасають; останній доданок характеризує вимушені усталені коливання системи, які відбуваються з частотою зовнішньої збуджувальної сили  $S(t)$ .

Амплітуда вимушених коливань дорівнює

$$C = \frac{g S_0}{F(\varphi^2 - \omega^2)}$$

Враховуючи, що  $\varphi^2 = \frac{g}{F\delta}$ , звідки  $\frac{g}{F} = \varphi^2 \cdot \delta$  будемо мати

$$C = S_0 \delta \frac{\varphi^2}{\varphi^2 - \omega^2} = S_0 \delta \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}} = \Delta_{\tilde{n}\delta}^{(S_0)} \cdot \beta$$

або

$$\tilde{N} = \Delta_{\tilde{n}\delta}^{(S_0)} \cdot \beta \quad (20.8)$$

де  $\Delta_{\tilde{n}\delta}^{(S_0)}$  - статичний прогин системи у напрямку сили від дії цієї сили

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}} \quad (20.9)$$

Таким чином остаточно для стадії сталих вимушених коливань можемо записати

$$\Delta_g(t) = \Delta_{\tilde{n}\delta}^{(S_0)} \cdot \beta \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.10)$$

В наслідок прямо пропорційній залежності між деформаціями та напруженнями, динамічні напруження від сили  $S(t)$  при вимушених коливаннях можна визначати таким чином: знайдені напруження від статично діючої сили  $S_0$  треба помножити на коефіцієнт наростання коливань  $\beta$ , тобто

$$\sigma_g(t) = \sigma_{\tilde{n}\delta}^{(S_0)} \cdot \beta \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.11)$$

Розглянемо залежність коефіцієнта  $\beta$  від співвідношення

частот  $\frac{\omega}{\varphi}$  /рис.20.2/.

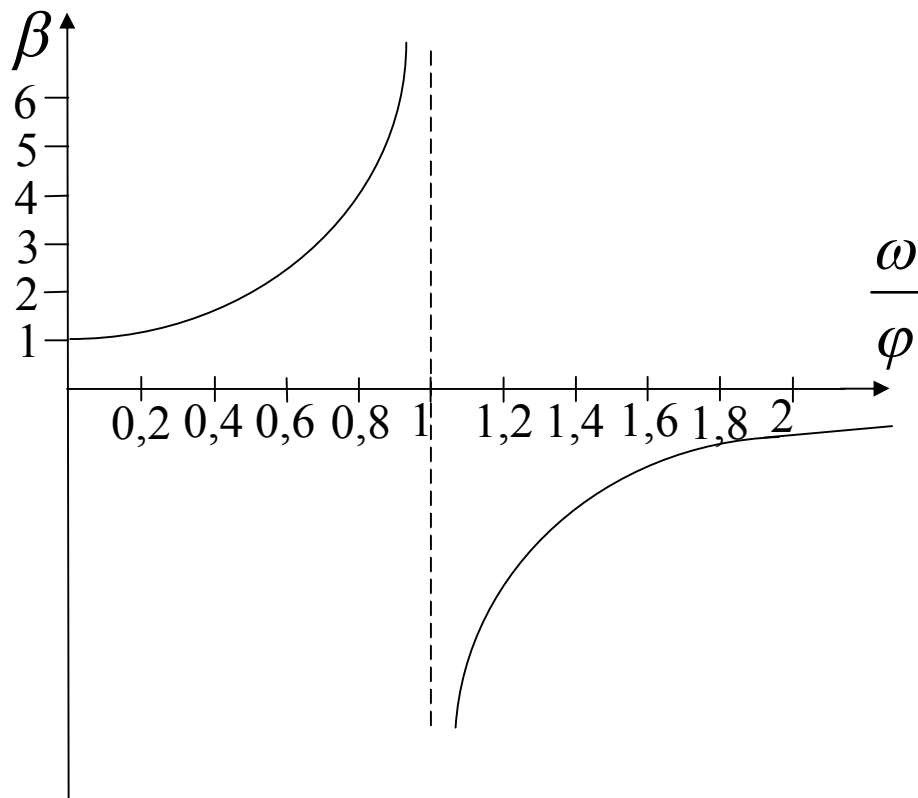


Рис.20.2

З /рис20.2/ видно , що коли частота  $\omega$  мала по зрівнянню з  $\varphi$  , то коефіцієнт  $\beta$  наближається до 1. При збільшенні частоти  $\omega$  величина коефіцієнта збільшується. Коли ж частота вимушених коливань наближається до частоти власних коливань системи  $\varphi$  амплітуда вимушених коливань прямує до нескінченності, тобто при  $\omega/\varphi \rightarrow 1$  амплітуда  $C \rightarrow \infty$  . При  $\omega = \varphi$  має місце стан резонансу. Відповідна частота збуджувальної сили називається критичною.

При частоті  $\omega$  більшій за частоту вільних коливань  $\varphi$  коефіцієнт  $\beta$  від'ємний і зсув фаз складає  $\Pi$  тобто  $180^\circ$ . Це означає, що знак збуджувальної сили протилежний знаку переміщень; наприклад, в той час , коли сила  $S(t)$  додатна, тобто направлена вниз, прогин перерізу від'ємний, тобто направлений вгору.

В цьому випадку амплітуда вимушених коливань визначається шляхом помноження абсолютного значення коефіцієнта наростання коливань  $\beta$  на  $\Delta_{\tilde{n}\dot{o}}^{(S_0)}$  або  $\sigma_{\tilde{n}\dot{o}}^{(S_0)}$

При  $\omega \triangleright \varphi$  амплітуда  $C$  динамічного переміщення зменшується і при  $\omega \triangleright \varphi$  робиться дуже малою порівняно із статичним переміщенням.

У цьому разі збуджувальна сила практично не викликає коливань системи.

20.2. Вимушені коливання системи з одним ступенем вільності з урахуванням сил затухання.

Диференціальне рівняння вимушених коливань системи з одним ступенем вільності, якщо сили опору пропорційні швидкості, дістанемо, якщо додамо в праву частину рівняння вільних коливань із затуханням (19.12) член  $\frac{g}{F} S_0 \cdot \cos \omega \cdot t$ . При цьому

$$\frac{d^2 \Delta_g}{dt^2} + \varphi^2 \Delta_g + 2h \frac{d\Delta_g}{dt} = \frac{g}{F} S_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (20.12)$$

Розв'язок однорідного диференціального рівняння, відповідного рівнянню (20.12) має вигляд (19.15). Окремий розв'язок диференціального рівняння (20.12) будемо знаходити у вигляді

$$\Delta = C_1 \cdot \cos \omega \cdot t + C_2 \cdot \sin \omega \cdot t \quad (20.13)$$

Підставляючи (20.13) в (20.12) матимемо  $-\omega^2 C_1 \cos \omega \cdot t - \omega^2 C_2 \sin \omega \cdot t + 2h(-\omega C_1 \sin \omega \cdot t + \omega C_2 \cos \omega \cdot t) + \varphi^2 (C_1 \cos \omega \cdot t + C_2 \sin \omega \cdot t) = \bar{S} \cos \omega \cdot t$

$$\text{де } \bar{S} = \frac{g}{F} \cdot S \cos \omega \cdot t$$

Забираючи доданки з  $\cos \omega \cdot t$  та  $\sin \omega \cdot t$  отримаємо два рівняння

$$\begin{aligned} C_1(\varphi^2 - \omega^2) + 2h\omega C_2 &= \bar{S}, \\ -2h\omega C_1 + (\varphi^2 - \omega^2)C_2 &= 0 \end{aligned}$$

Звідки



$$C_1 = \frac{\bar{S}(\varphi^2 - \omega^2)}{(\varphi^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega)^2}; C_2 = \frac{2h\omega \cdot \bar{S}}{(\varphi^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega)^2}$$

Тоді вираз (20.13) буде мати вигляд

$$\Delta = \frac{\bar{S}}{(\varphi^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega)^2} [(\omega^2 - \varphi^2) \cos \omega \cdot t + 2h\omega \cdot \sin \omega \cdot t]$$

(20.14)

Загальний розв'язок рівняння (20.12) з урахуванням (19.15) можна записати у вигляді

$$\Delta(t) = l^{-ht} (A \cos \varphi_1 t + B \sin \varphi_1 t) + \frac{\bar{S}}{(\varphi^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega)^2} [(\omega^2 - \varphi^2) \cos \omega \cdot t + 2h\omega \cdot \sin \omega \cdot t]$$

(20.15)

З часом вільні коливання затухають і сталі вимушені коливання системи будуть характеризуватись виразом (20.14). Із виразу (20.14) видно, що при  $\omega = \varphi$  амплітуди вимушених коливань не перетворюються в нескінченність.

Вираз (20.14) легко зводиться до вигляду

$$\Delta = \tilde{N} \cdot \sin(\omega \cdot t + \lambda)$$

(20.16)

де

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{(\varphi^2 - \omega^2)^2 + (2h\omega)^2}}; \operatorname{tg} \lambda = \frac{2h\omega}{\varphi^2 - \omega^2}$$

Із (20.16) видно, що вимушені сталі коливання при затуханні відбуваються з зсувом початкової фази відносно початкової фази коливань збуджувальної сили.

Вираз (20.16) дозволяє також встановити коефіцієнт наростання коливань при урахуванні сил опору.

Подамо  $C$  у вигляді

$$\tilde{N} = \bar{S} \frac{1}{\varphi^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\varphi^2}\right)^2}}$$

Враховуючи, що  $\bar{S} = \frac{g}{F} \cdot S$ ,  $\varphi^2 = \frac{g}{F \cdot \delta}$  і  $\delta = \frac{g}{\varphi^2 F}$

отримаємо

$$C = \frac{S \cdot \delta}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\varphi^2}\right)^2}} = \frac{\Delta_{\tilde{n}\dot{o}}^{(S)}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\varphi^2}\right)^2}} = \Delta_{\tilde{n}\dot{o}}^{(S)} \cdot \beta$$

Таким чином

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2h\omega}{\varphi^2}\right)^2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\omega^2}{\varphi^2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 \cdot g^2 \cdot \omega^2}{F^2 \cdot \varphi^4}}$$

$$2h = \frac{\alpha g}{F}$$

$\omega$  - частота збуджувальної сили;  $\varphi$  - частота власних коливань;  $F$  - вага вантажу, що коливається;  $g$  - прискорення вільного падіння.

На рис.20.3 показані криві, які показують залежність  $\beta$  від

відношення  $\frac{\omega}{\varphi}$  : при різних значеннях  $\frac{\alpha \cdot g}{F \cdot \varphi}$ .

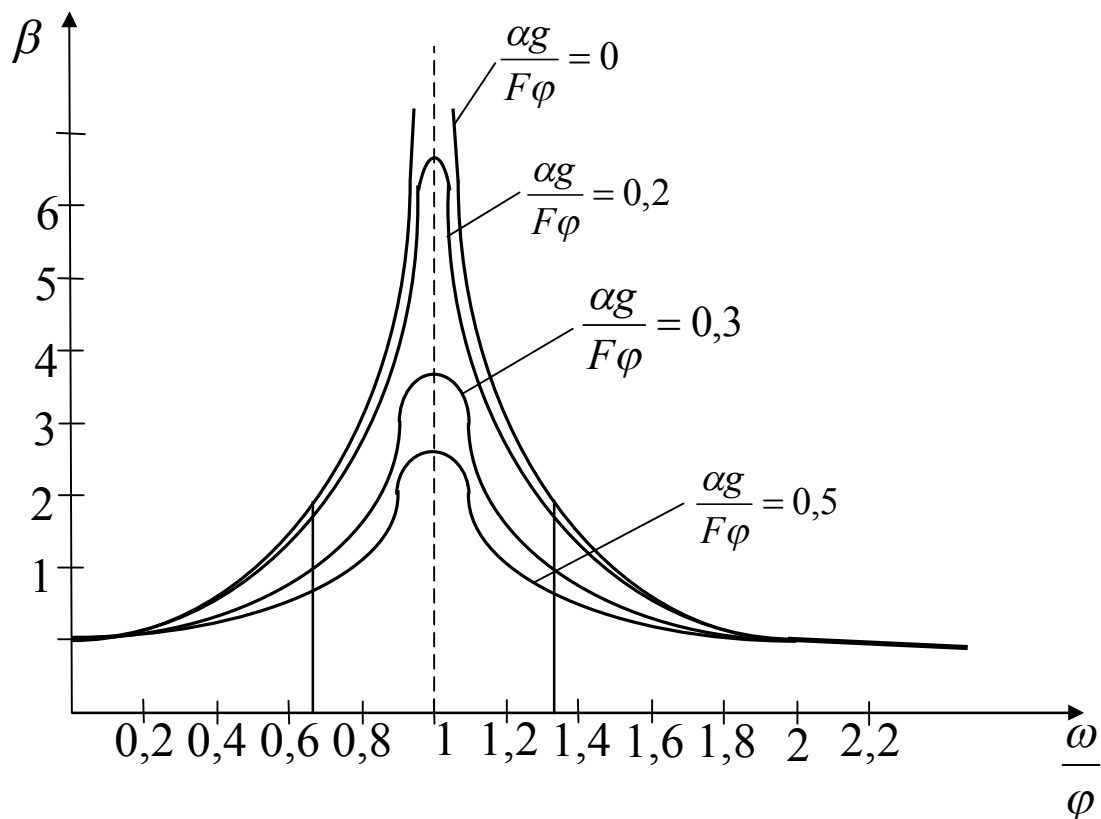


Рис.20.3

При  $\frac{\alpha \cdot g}{F \cdot \varphi}$  крива збігається з кривою без урахування сил опору. Інші криві мають такий же характер, але їх ординати не дорівнюють нескінченності, а мають кінцеві значення. Коли частота  $\omega$  значно відрізняється від частоти  $\varphi$  /наприклад в два та більш разів/ величини  $\beta$  практично не залежить від наявності сил опору.

При розрахунку споруд, що знаходяться під дією періодичних збуджувальних сил, основним завданням у більшості випадків є відстрой від резонансу, тобто забезпечення достатньої різниці між частотою  $\varphi$  власних коливань та частотою  $\omega$  збуджувальної сили. Як правило приймають  $1,3\varphi \leq \omega \leq 0,7\varphi$

Таким чином, розрахунок споруди на вимушені коливання по суті є розрахунком на жорсткість, так як частота  $\varphi$  залежить від жорсткості системи.

## ЛЕКЦІЯ 21

### РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ

В інженерних конструкціях зустрічаються стержні, вісь яких є плоскою кривою, а переріз має бути сталим або змінним /рис. 21.1/.

Розрізняють стержні великої і малої кривизни, мірою кривизни стержня вважається відношення радіуса кривизни  $R$  його осі до висоти  $h$  поперечного перерізу. Стержні з відношенням

$R/h \gg 5$  вважаються стержнями малої кривизни, з відношенням  $R/h \ll 5$  - стержнями великої кривизни. У практичних розрахунках напруження у поперечних перерізах стержнів малої кривизни можна обчислювати за формулами для прямого стержня.

У поперечному перерізі кривого стержня виникають, як і у плоскій рамі, згинальні моменти, поздовжні та поперечні сили /рис. 21.2/.

Коли згинальні моменти намагаються збільшити кривизну стержня, їх прийнято вважати додатними. Для поперечних і поздовжніх сил використовуються такі самі правила знаків, як для прямого стержня.

Кривизна стержня має вплив на величину та розподіл нормальних напружень від згину. Для стержнів великої кривизни нормальні при дії поздовжньої сили і дотичні напруження при дії поперечної сили можна обчислити як для прямого стержня по відомим

формулам 
$$\sigma = \frac{N}{A}, \tau = \frac{QS}{bI}$$

#### 21.1 Напруження при чистому згині .

Як і при розгляді чистого згину прямого стержня використаємо гіпотезу плоских поперечних перерізів і гіпотезу про відсутність тиску між поздовжніми волокнами стержня. Неточність, яка через це виникає, допустима в інженерних розрахунках .

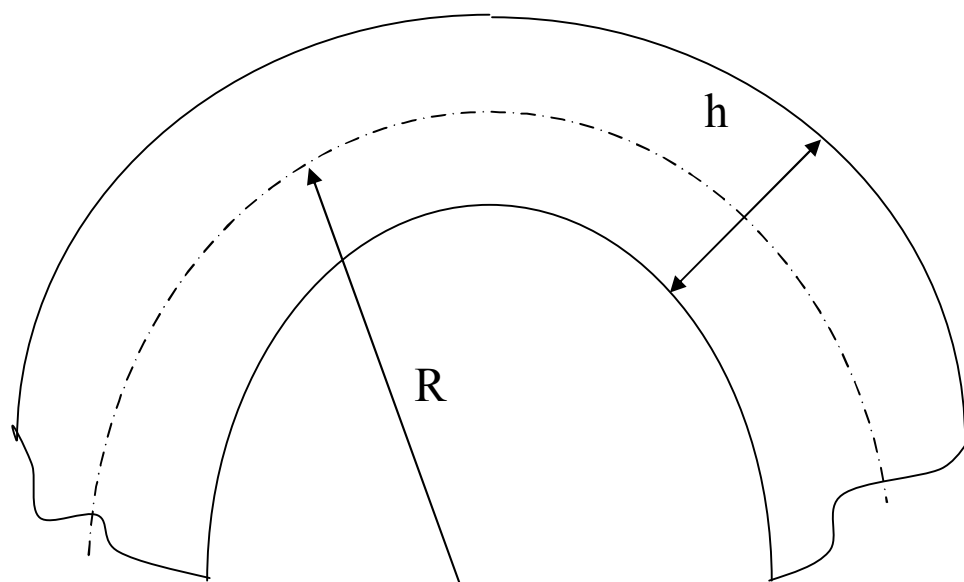


Рис.21.1

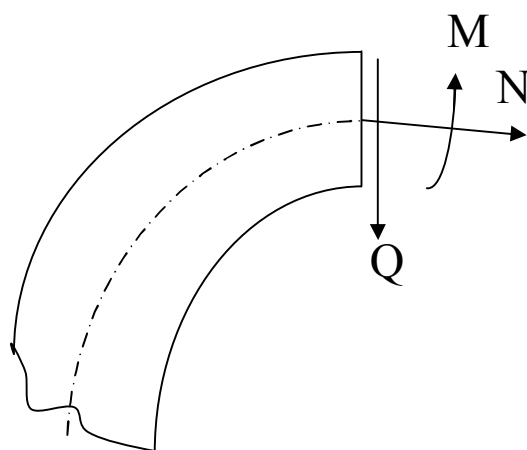


Рис.21.2

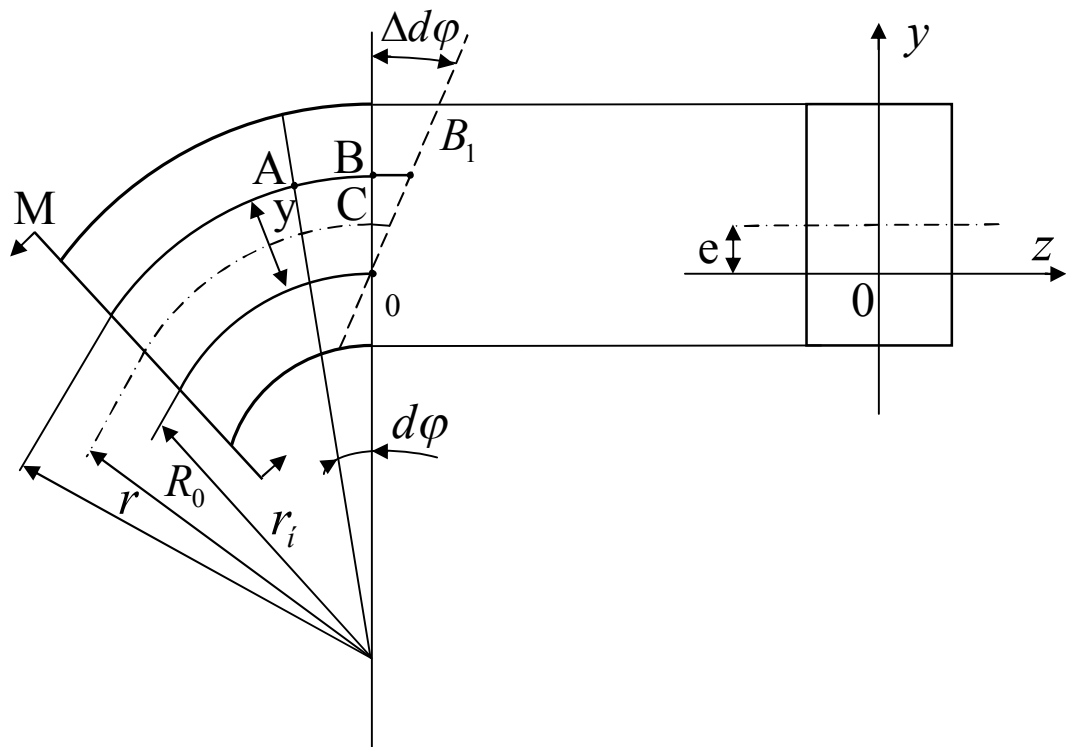


Рис.21.3

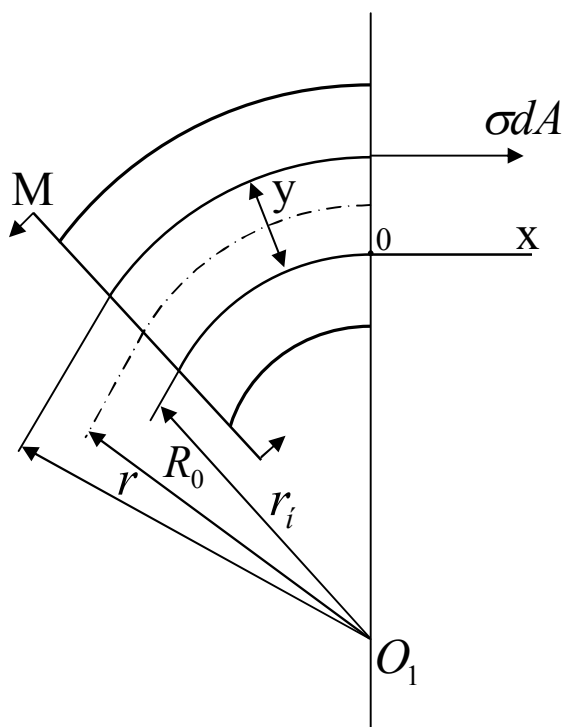


Рис.21.4

На частину стержня /Рис. 21.4/ діє система внутрішніх зусиль : згинаючий момент  $M$  та напруження  $\sigma$ . Не знаючи ще розташування нейтрального шару, приймемо, що він зміщений на

величину  $l$  від центра ваги перерізу  $S$  у бік центра кривизни стержня / рис. 21.3/.

Полнос координатної системи розміщуємо у нейтральному шарі, вісь  $u$  поєднуємо з віссю симетрії перерізу, вісь  $z$  збігається з нейтральною віссю.

Умови рівноваги мають вигляд

$$\sum F_x = 0; \int_A \sigma \cdot d \cdot A = 0 \quad (21.1)$$

$$\sum M_z = 0; \int_A \sigma \cdot y \cdot dA = 0 \quad (21.2)$$

Визначимо розподіл напружень  $\sigma$ , розглянувши геометричні та фізичні співвідношення.

Виділимо зі стержня малий елемент /рис.21.3/ двома поперечними перерізами, що проходять через кривизни стержня і утворюють між собою кут  $d\varphi$ .

Нехай правий переріз виділеного елемента повернеться на кут  $\Delta d\varphi$ , тоді абсолютна поздовжня деформація довільного волокна  $AB$  буде  $BB_1$ , а його відносна деформація

$$\varepsilon = \frac{BB_1}{AB} = \frac{y \cdot \Delta d\varphi}{r \cdot d\varphi}$$

Відсутність тиску між поздовжніми волокнами дозволяє виразити нормальне напруження у довільному волокні через закон Гука для лінійного напруженого стану

$$\sigma = E\varepsilon = E \cdot \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r}$$

(21.3)

Підставляючи це значення у рівняння (21.1), одержуємо

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{y}{r} dA = 0$$

або

$$\int_A \frac{y}{r} dA = 0$$

(21.4)

Враховуючи, що  $y = r - r_i$ ,  $r_i$  - радіус кривизни нейтрального шару стержня, одержимо рівняння, з якого цей радіус визначається:

$$\int_A \frac{r - r_i}{r} dA = 0$$

Звідки

$$r_i = A / \int_A \frac{dA}{r}$$

(21.5) Підставимо тепер (21.3) в (21.2):

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \int_A \frac{y^2}{r} \cdot dA = M$$

(21.6) Інтеграл, що входить до цього рівняння можна перетворити так:

$$\int_A \frac{y^2}{r} \cdot dA = \int_A y dA - r_i \int_A \frac{y}{r} \cdot dA$$

Внаслідок (21.4) останній із двох інтегралів дорівнює нулю, а перший інтеграл є статичним моментом площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі

$$S_z = A \cdot l$$

(21.7) Рівняння (21.6) приймає вигляд

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \cdot S_z = M$$

звідки

$$E \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{S_z}$$



Підставляючи останній вираз у формулу (21.3) одержуємо остаточно

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{S_z r}$$

(21.8)

Отже, нормальні напруження при чистому згині кривого стержня великої кривизни змінюються за гіперболічним законом /рис. 21.5/.

Екстремальні напруження виникають у крайніх точках перерізу, координати яких позначені через  $h_1, h_2$ , а радіуси кривизни відповідних волокон - через  $R_1$  і  $R_2$ .

Ці напруження дорівнюють

$$\sigma_2 = \frac{M h_2}{S_z \cdot R_2}; \sigma_1 = \frac{M h_1}{S_z R_1}$$

(21.9)

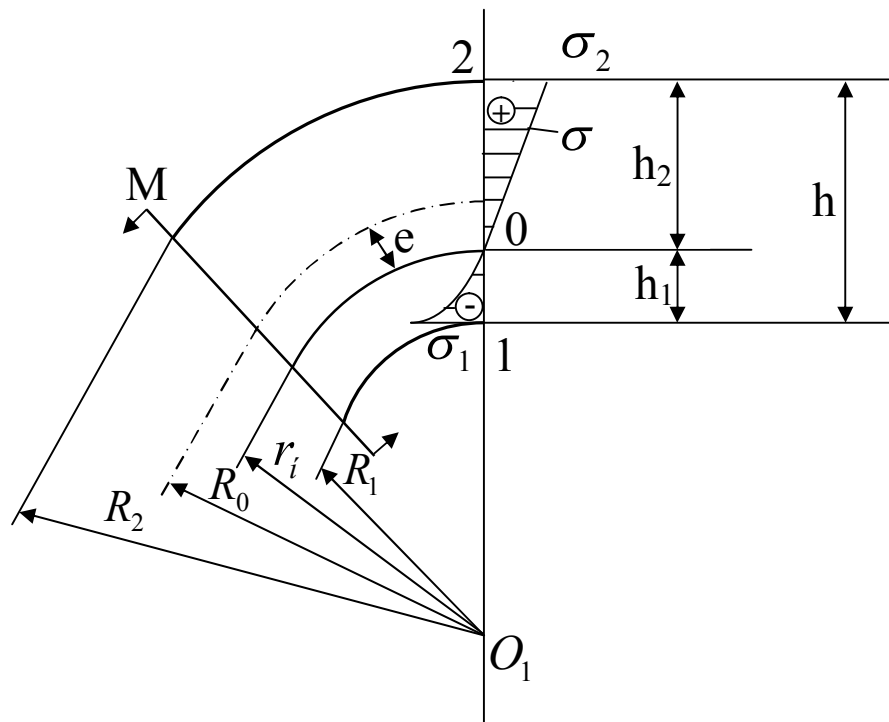


Рис.21.5

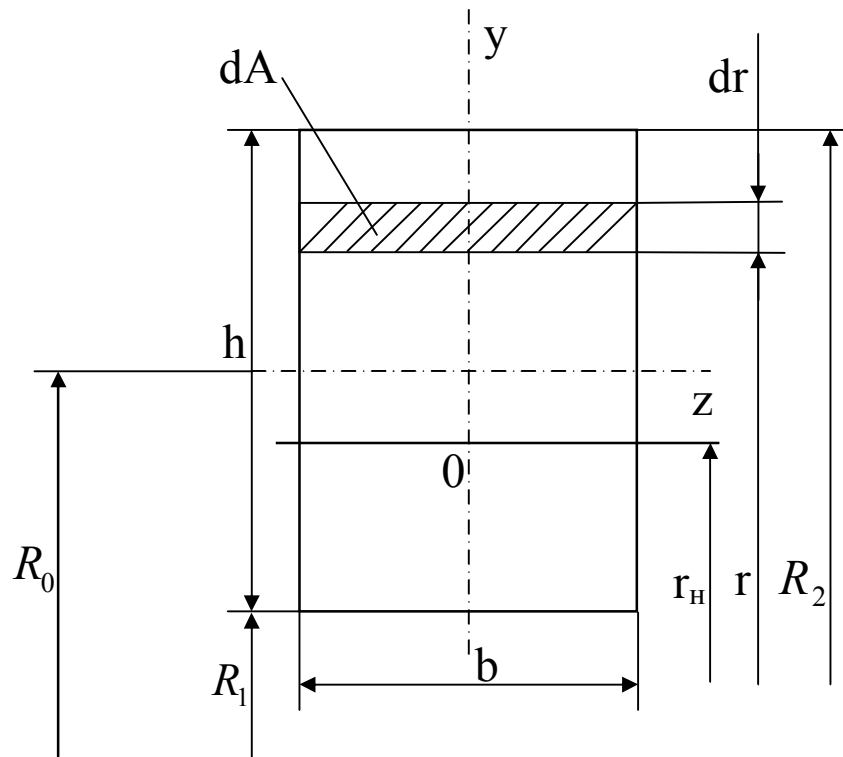


Рис.21.6

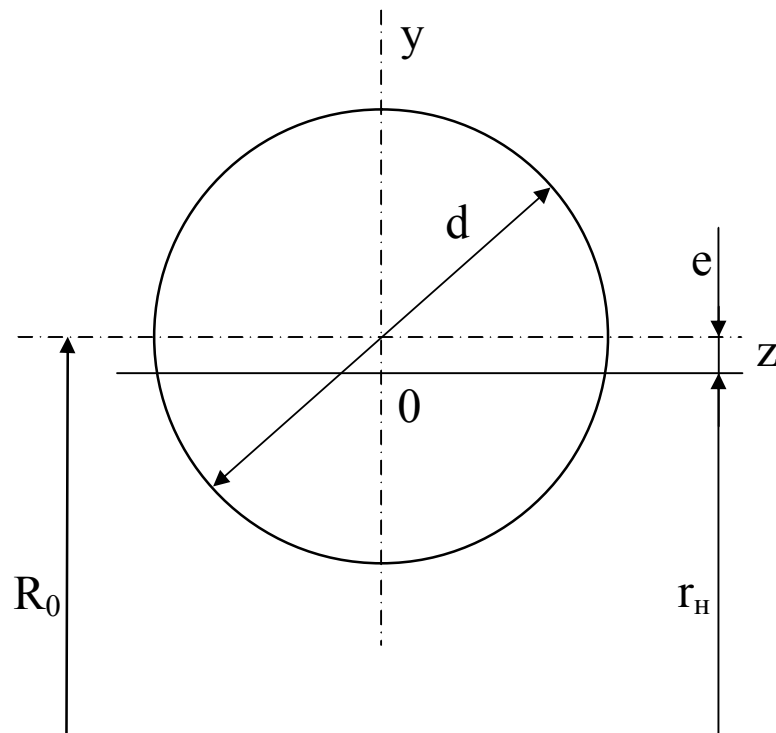


Рис.21.7

Характер епюри нормальних напружень свідчить, що напруження різко зростають в бік ввігнутості кривого стержня. Якщо матеріал стержня крихкий, тоді пік напружень може призвести до виникнення тріщин. У випадку пластичного матеріалу напруження будуть вирівнюватись за рахунок виникнення місцевих пластичних

деформацій, які здебільшого не мають значення для міцності стержня в цілому.

Для використання формул (21.9) треба спочатку визначити за формулою (21.5) радіус кривизни нейтрального шару, потім знайти координату центра ваги перерізу

$$l = R_0 - r_i,$$

де  $R_0$  - радіус геометричної осі кривого стержня. Після цього знаходимо за формулою (21.4) статичний момент перерізу і підставляємо його значення у формули (21.9).

## 21.2 Визначення положення нейтральної осі.

Розглянемо, наприклад, прямокутний переріз /рис. 21.6/. З виразу (21.5), урахувавши, що  $A = bh$ ,  $dA = b \cdot dr$ , будемо мати

$$r_i = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{bdr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,3 \lg \frac{R_2}{R_1}}$$

(21.10)

Аналогічно можна отримати більш загальну формулу для трапецієвидного перерізу

$$r_i = \frac{(b_1 + b_2)h^2}{2[(R_2b_1 - R_1b_2) \ln R_2/R_1 - (b_1 - b_2)h]}$$

(21.11)

де  $b_1$ , та  $b_2$  - ширини перерізу.

Для круглого перерізу /рис. 21.7/ радіус кривизни обчислюють за формулою

$$r_i = \frac{1}{2} \left( R_0 + \sqrt{R_0^2 - \frac{d^2}{4}} \right)$$

(21.12)

Формули для інших перерізів наводяться у довідковій літературі.

Для стержнів із співвідношенням  $h/R_0 \ll \frac{1}{2}$  величину ексцентриситета можна обчислювати за наближеною формулою

$$l = \frac{I}{R_0 A} \quad (21.13)$$

### 21.3 Розрахунок на міцність.

Якщо на кривий стержень діє осьова сила  $N$ , то крім напруження, спричиненого згинальним моментом (21.8), діятимуть напруження

$$\sigma_N = \frac{N}{A}.$$

Підсумні нормальні напруження будуть

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = \frac{M \cdot y}{S_z \cdot r} + \frac{N}{A}$$

Дотичні напруження не справляють суттєвого впливу на міцність, і їх не визначають /за винятком тонкостінних перерізів/.

Умова міцності запишеться так

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y}{S_z \cdot r} + \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm} \quad (21.14)$$

Якщо брус виготовлений з матеріалу, що має різні допустимі напруження на розтягання та стискання, то умова міцності має виконуватися для крайніх точок як у розтягнутій так і у стиснутих зонах.

## ЛЕКЦІЯ 22

### РОЗРАХУНОК ТОНКОСТІННИХ ОБОЛОНОК

Якщо товщини оболонок значно менші ніж радіус їх кривизни  $\rho$ , то такі конструкції з погляду розрахунку на міцність і жорсткість можна віднести до тонкостінних.

Розглянемо оболонку, заповнену газом під тиском  $p$  або рідиною чи сипким тілом, тиск якого змінюється залежно від глибини. Оболонка має форму тіла обертання з віссю і підтримується силами, рівномірно розподіленими вздовж верхнього краю /рис. 22.1/.

Двома площинами вздовж меридіанів АД і ВС та двома кінчними поверхнями, які перетинають її вздовж паралелей АВ і СД, зі стінки оболонки виділимо елемент ABCD. Розміри елементи  $ds_m$  та  $ds_t$ . Радіуси кривизни меридіана та паралелі:  $\rho_m$  і  $\rho_t$ , центральні кути відповідно:  $d\alpha_m$  і  $d\alpha_t$  /рис. 22.2/.

Грані виділеного елемента є головними площадками, бо внаслідок симетрії оболонки і навантаження елемент не перекошується, тобто на них немає дотичних напружень.

Напруження  $\sigma_m$  і  $\sigma_t$  - головні. Третє головне напруження спрямоване нормально до поверхні оболонки в даній точці. На одній з поверхонь оболонки /внутрішній чи зовнішній - залежно від того з якого боку діє тиск/ воно дорівнює тиску  $p$ , а на протилежній - нулю, В тонкостінних оболонках завжди  $\sigma_m$  і  $\sigma_t$  значно більші ніж  $p$ , отже, третім головним напруження і порівняно з  $\sigma_m$  і  $\sigma_t$  можна знехтувати, тобто вважати його нульовим.

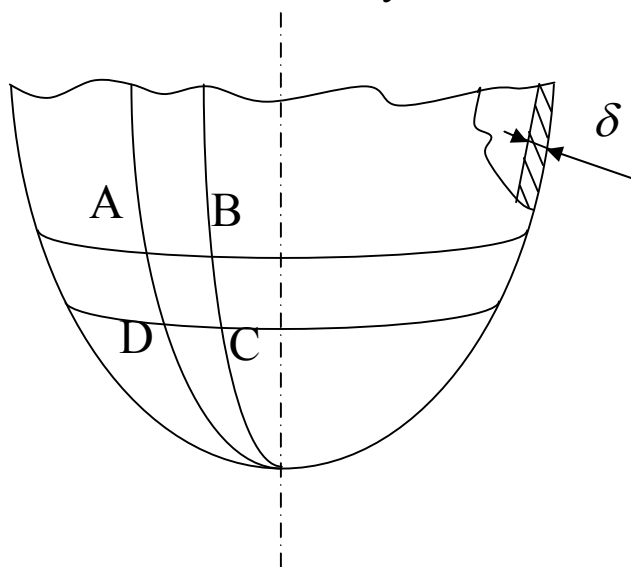


Рис.22.1

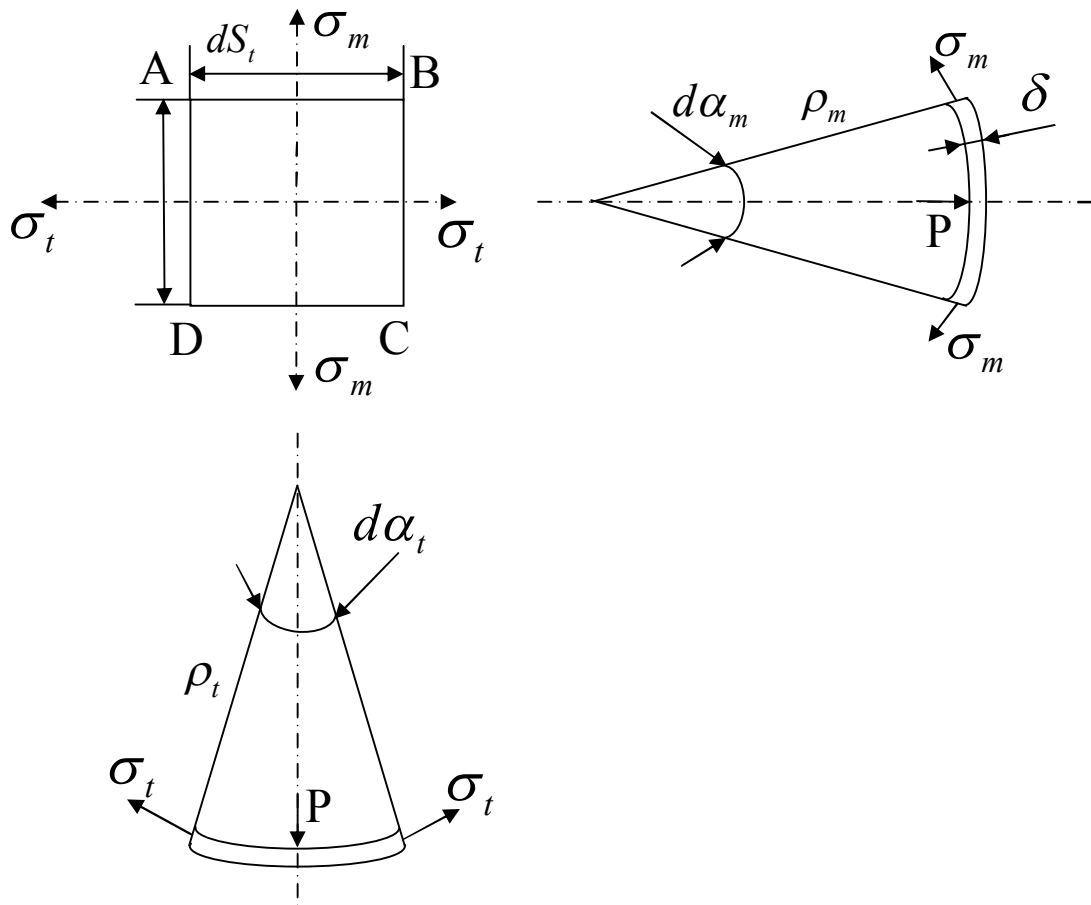


Рис.22.2

Зусилля на відповідних гранях будуть

$$\sigma_m ds_t \cdot \delta ; \sigma_t ds_m \cdot \delta$$

(22.1)

Рівнодійна меридіональних зусиль  $N_m$  /рис. 22.2/, направлена вздовж нормалі до поверхні елемента, дорівнює

$$\Delta_{\tilde{n}\delta} = F \left( \frac{8D^3 n}{Gd^4} + \frac{l}{EA} \right)$$

(22.2)

Рівнодійна  $N_t$  зусиль, що діють вздовж паралелі /широти/ дорівнює

$$N_t = \sigma_t \cdot ds_m \cdot \delta \cdot \frac{ds_t}{\rho_t}$$

(22.3)

Рівнодійна тиску буде

$$N_{\rho} = \rho \cdot ds_m \cdot ds_t$$

(22.4)

Запишемо умову рівноваги елемента

$$N_m + N_t = N_{\rho}$$

або

$$\sigma_m ds_t \cdot \delta \cdot \frac{ds_m}{\rho_m} + \sigma_t ds_m \delta \cdot \frac{ds_t}{\rho_t} = \rho \cdot ds_m \cdot ds_t$$

Звідси перетворень одержимо рівняння тонкостінних оболонок, яке називають рівнянням Лапласа

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{\rho}{\delta}$$

(22.5)

У цьому виразі замість радіусів кривизни  $\rho_m$  і  $\rho_t$  серединної поверхні оболонки можна підставляти відповідні радіуси зовнішньої чи внутрішньої поверхні.

Слід звернути увагу на те, що напружений стан визначили тільки з рівнянь рівноваги, не розглядаючи геометричного та фізичного стану. Це пояснюється тим, що ми вважали розподіл напружень рівномірним по товщині оболонки.

Друге рівняння рівноваги, необхідне для визначення двох нормальних напружень  $\sigma_m$  і  $\sigma_t$ , треба скласти, виходячи з умов конкретної задачі.

Оскільки матеріал оболонки перебуває у плоскому напруженому стані, то для розрахунку на міцність у небезпечних точках слід застосовувати відповідну теорію міцності.

Розглянемо приклади розрахунку оболонок.

I. Сферична оболонка, заповнена газом, тиск якого дорівнює  $\rho$ .

Внаслідок центральної симетрії

$$\rho_m = \rho_t = r; \sigma_m = \sigma_t = \sigma$$

Підставляючи ці дані в рівняння (22.5), одержимо

$$2 \cdot \frac{\sigma}{r} = \frac{\rho}{\delta}, \text{ або } \sigma = \frac{\rho \cdot r}{2\delta};$$

головні напруження

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\rho \cdot \hat{e}}{2\delta}$$

Умови міцності за третьою і четвертою теоріями міцності мають однаковий вигляд:

$$\sigma_{red} = \frac{\rho \cdot r}{2\delta} \leq \sigma_{adm}$$

2. Коловий тонкостінний циліндр радіусом  $r$  /рис. 22.3/ заповнено газом, тиск якого  $P$ .

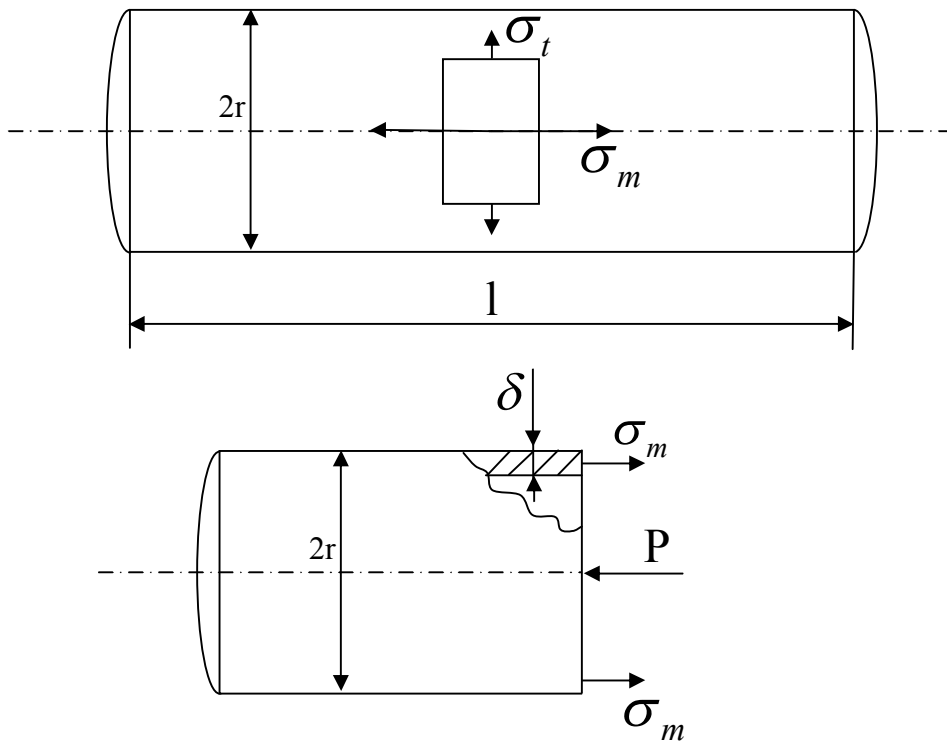


Рис.22.3

Радіуси дорівнюють  $\rho_t = r; \rho_m = \infty$ .



Тоді рівняння (22.5), яке прийме вигляд

$$\frac{\sigma_t}{r} + \frac{\sigma_m}{\infty} = \frac{\rho}{\delta}$$

отримаємо

$$\sigma_t = \frac{\rho \cdot r}{\delta}$$

Для визначення  $\sigma_m$  проведемо переріз, перпендикулярний до осі циліндра, і розглянемо частину циліндра, рис. 22.3.

Умова рівноваги набирає вигляду

$$2\pi r \delta \cdot \sigma_m = \pi r^2 \rho$$

Звідки

$$\sigma_m = \frac{\rho \cdot r}{2 \cdot \delta}$$

Нами розглянуто найпростіші приклади розрахунку оболонок, коли нормальні напруження розподілені по товщині оболонки рівномірно. Однак можуть бути випадки, коли в оболонці виникають ще нормальні напруження згину, що змінюються по товщині її стінки. Їх дослідження вимагає використання більш складної, так званої моментної теорії оболонок.

## ЛЕКЦІЯ 23

### РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ В УМОВАХ ЦИКЛІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

#### 23.1 Змінні напруження. Втоmlеність матеріалів

Якщо на елемент конструкції діє навантаження, яке з часом змінюється за модулем або за модулем та знаком, то характер опору матеріалу при цьому істотно відрізняється від чийору дії статичного навантаження. Давно відомо, що елементи конструкцій і деталі машин які сприймають дію зусиль, змінних

по величині і повторюючихся багато разів, іноді руйнуються раптово, без наявності помітних залишкових деформацій.

Напруження, що змінюються з часом, виникають в елементах конструкцій під дією навантаження, змінного по величині або напрямку, а також навантаження, що переміщуються відносно розглядаємого елемента.

Наприклад, вагонна вісь згинається від навантаження, що обумовлюється вагою вагона /рис. 23.1/ У верхній частині кожного поперечного перерізу осі виникають розтягуючі нормальні напруження. При оберті осі кожна точка осі виявляється то у верхній /розтягнутій/ то у нижній /стиснутій/ половині перерізу. Змінні напруження виникають також у елементах ферми мосту при русі по ньому поїзда.

Зміну напружень з часом можна відобразити за допомогою графіка. У більшості випадків припускається, що змінні напруження є періодичними функціями часу  $\sigma = f(t)$  періодом  $T$  / рис 23.2/.

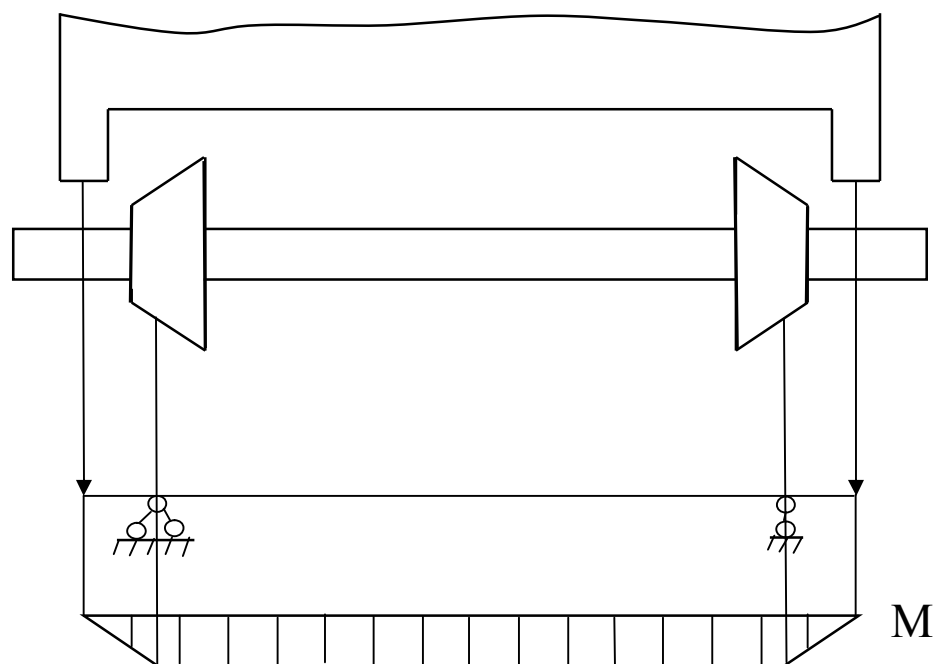


Рис.23.1

Сукупність усіх значень напружень за час одного періоду зміни їх називають циклом напружень. На опір втомленості в основному впливають максимальні  $\sigma_{\max}$  та мінімальні  $\sigma_{\min}$  напруження циклу. Цикли характеризуються також середнім напруженням  $\sigma_{cp}$  та амплітудою  $\sigma_{\alpha}$

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \quad (23.1)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \quad (23.2)$$

З формул /23.1 / , / 23.2 / випливають такі залежності

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\alpha} + \sigma_{\tilde{n}\delta}; \sigma_{\min} = \sigma_{cp} - \sigma_{\alpha} \quad (23.3)$$

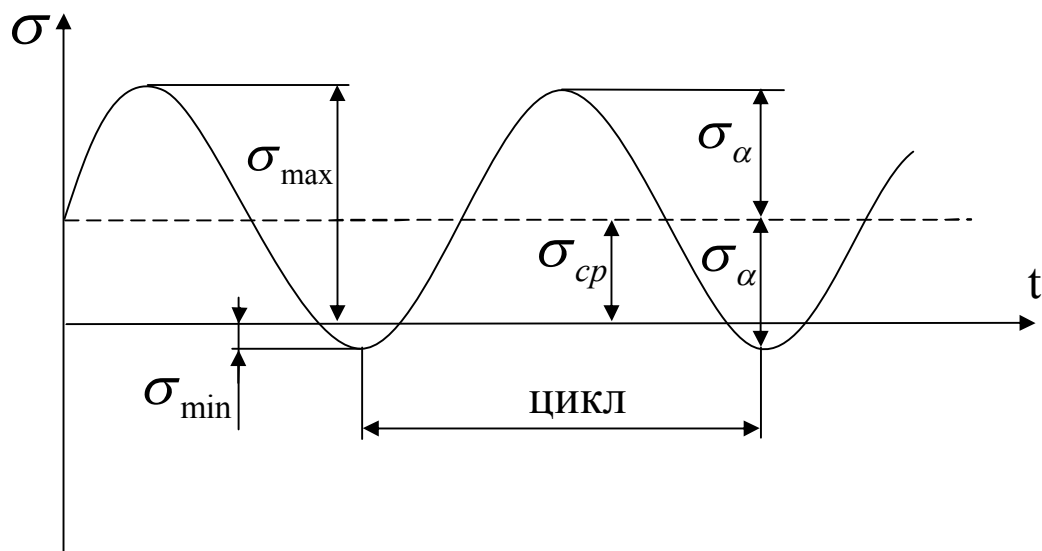


Рис.23.2

Середнє напруження може бути як додатним, так і від'ємним, амплітуда ж циклу - абсолютна величина / знак не враховується/.

Подвоєне значення амплітуди коливань напружень називається размахом циклу.

Відношення мінімального напруження циклу до максимального з урахуванням знаків цих напружень називається характеристикою циклу або коефіцієнтом асиметрії циклу

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

(23.4)

Залежно від  $r$  цикли бувають: подібними /якщо мають однакові коефіцієнти асиметрії/, симетричними коли

$$\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}; r = -1, \text{ /несиметричними /} |\sigma_{\max}| \neq |\sigma_{\min}|; |r| \neq 1.$$

та від нульовими /пульсуючими/. При цьому несиметричний цикл може бути як знакопостійним, так і знакозмінним, найнебезпечним є симетричний цикл.

Величини  $\sigma_{\max}, \sigma_{\min}, \sigma_{cp}, \sigma_a$  і  $r$

називаються параметрами циклу. Кожний цикл повністю визначається двома будь-якими його параметрами.

Багаточислені дослідження дозволили встановити, що при дії змінних напружень після певного числа змін напружень у елементі з'являється тріщина, яка поступово буде розвиватися. У решті решт елемент руйнується, не давши при цьому помітних залишкових деформацій навіть тоді, коли його матеріал високопластичний.

Властивість матеріалів руйнуватися після багаторазової дії змінних напружень називається втомленістю матеріалів.

Злом деталі від втомленості мав характерний вигляд /рис. 23.3/. На ньому майже завжди є дві зони. Одна з них /А/ гладенька, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини; друга /В/ - крупнозерниста, що утворилася при остаточному зломі перерізу деталі ослабленого під час розвивання тріщини.

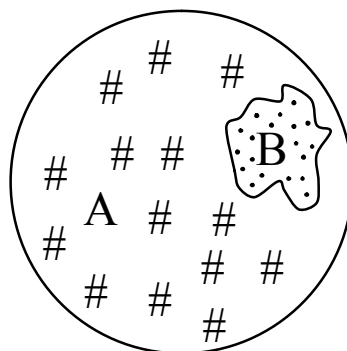


Рис.23.3

### 23.2. Границя витривалості

Здатність матеріалів сприймати многократну дію змінних напружень називають витривалістю, а перевірку міцності елементів конструкцій при дії таких напружень - розрахунком на витривалість.

Для руйнування від втомленості недостатньо змінності напружень. Необхідно також щоб напруження мали певну величину.

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається границею витривалості, або границею втомленості.

Границя витривалості для будь якого цикла змінних напружень будемо позначати через  $\sigma_r$ , з знаком унизу, який указує на відповідну характеристику цикла. Так наприклад,  $\sigma_{-1}$  - границя витривалості при симетричному циклі з характеристикою  $r = -1$ ,  $\sigma_{0,2}$  - границя витривалості при несиметричному циклі з характеристикою  $r = 0,2$  і т.д.

Границя витривалості визначається тільки експериментальним шляхом. Для випробувань виготовляють серію досконало однакових зразків в кількості 6-12 шт. Випробування проводять у такому порядку.

У першому зразку за допомогою спеціальної машини створюють симетричні цикли змінних напружень, які характеризуються значеннями  $\sigma_{\max} = \sigma_I$  та  $\sigma_{\min} = -\sigma_I$

Напруження  $\sigma_I$  приймаються достатньо великими, щоб руйнування відбувалось після невеликої кількості циклів  $N_I$ . Результат випробування наносять на графік у вигляді точки I, абсциса якої дорівнює числу циклів  $N_I$ , які викликали руйнування зразка, а ордината значенню напружень  $\sigma_I$ .

Потім другий зразок випробують до руйнування при напруженнях  $\sigma_{\max} = \sigma_{II} < \sigma_I$  та  $\sigma_{\min} = -\sigma_{II}$ ; результат цього випробування зображається на графіку точкою II. Випробовуючи решту зразків аналогічно отримують точки III, IV і т.д. З'єднуючи одержані по результатам дослідів точки плавною кривою одержують

так названу криву витривалості або криву Веллера /рис. 23.4/. Аналогічно можуть бути одержані криві витривалості, які відповідають циклам з іншими значеннями коефіцієнта-асиметрії  $R$

Крива витривалості показує, що з зменшенням максимального напруження зростає кількість циклів, при якому відбувається руйнування матеріалу. По мірі зменшення напружень крива витривалості асимптотично наближається до деякої горизонтальної прямої, що відсікає на осі ординат відрізок, величиною якого й визначається границя витривалості, Тобто ордината асимптоти дорівнює границі витривалості.

Ордината точки на кривій, де остання практично починає збігатись із зазначеною асимптотою, відповідає такому напруженню при якому зразок не руйнується, пройшовши кількість циклів, що відповідає наперед заданій величині, так званій базі випробовувань  $N_0$ .

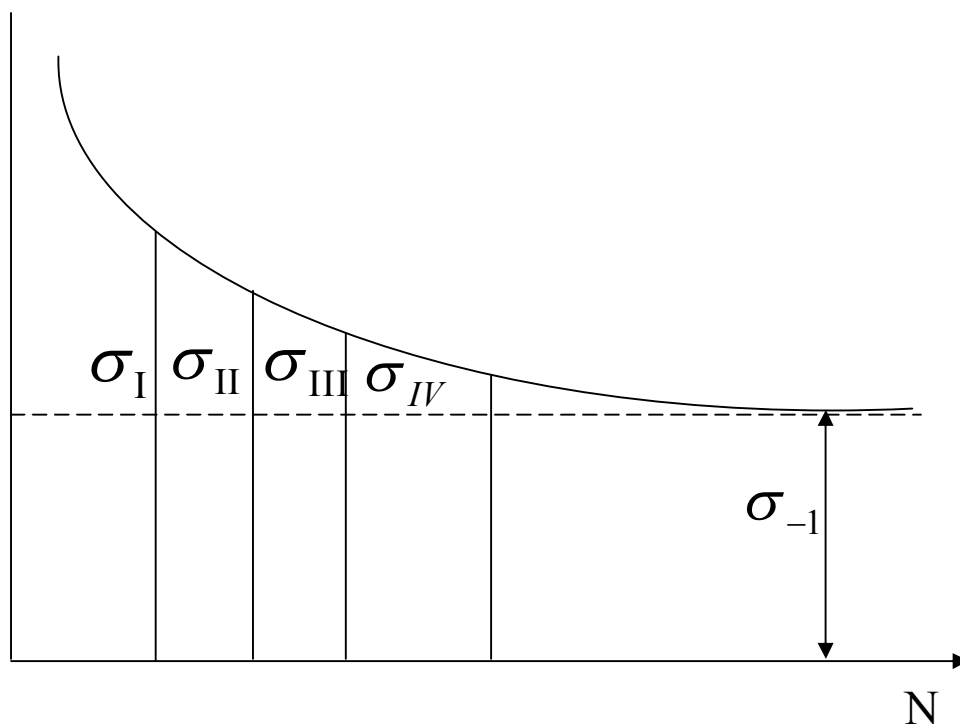


Рис.23.4

Легко зрозуміти, що за базу випробувань  $N_0$  і вибирають ту кількість циклів, при якій правий кінець, кривої втомленості практично проходить паралельно осі абсцис. Виходячи з цього, базою випробувань на опір втомленості називається найбільша кількість повторно-змінних навантажень, перевищення якої не повинне призводити до руйнування від втомленості випробуваного зразка при даному напруженні.

Для чорних металів /сталі, чавуну тощо/ за базу випробувань, як звичайно, беруть 10 циклів, а для кольорових - число, в 5...10 разів більше.

На підставі численних експериментальних даних для деяких матеріалів маються певні співвідношення між границями витривалості при різних видах деформації й, зокрема, між границями витривалості при згинанні  $\sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i}$ , крученні  $\tau_{-1}$  та розтяганні-стисканні  $\sigma_{-1, \delta i \zeta \delta}$ ; при симетричних циклах.

Для гладеньких зразків ці співвідношення приблизно такі:

$$\text{для сталі } \sigma_{-1, \delta i \zeta \delta} = 0,7 \sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i}$$

$$\text{для чавуну } \sigma_{-1, \delta i \zeta \delta} = 0,65 \sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i}$$

$$\text{для сталей та легких сплавів } \tau_{-1} = 0,55 \sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i}$$

$$\text{для чавуну } \tau_{-1} = 0,8 \sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i}$$

Знаючи тимчасовий опір  $\sigma_u$ , границю витривалості сталі при симетричному циклі можна наближено знайти за такими емпіричними співвідношеннями відносно для розтягання - стискання, згинання та кручення:

$$\sigma_{-1, \delta i \zeta \delta} = 0,28 \sigma_u; \sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i} = 0,40 \sigma_u; \tau_{-1} = 0,22 \sigma_u$$

Для кольорових металів співвідношення між границею витривалості та границею міцності менш стійке, згідно з експериментальними даними,  $\sigma_{-1, \zeta \tilde{a} \tilde{e} i} = (0,24 \dots 0,50) \sigma_u$

### 23.3. Основні фактори, які впливають на величину границі витривалості

Численні експерименти проведені з зразками різних форми і розмірів, та практика експлуатації деталей машин показують, що міцність при змінних напруженнях у значній ступені залежить від форми і розмірів деталей, а також від стану її поверхні і впливу середовища.

Встановлено, що границя витривалості конкретної деталі і матеріалу, із якого вона виготовлена різні. Вплив факторів вивчено найбільш повно для симетричного циклу.

1. Концентрація напружень, зниження границі витривалості за рахунок наявності цих або інших концентраторів напружень

ураховується ефективним /Дійсним/ коефіцієнтом концентрації напружень

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,K}} ; \quad K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1,K}}$$

де  $\sigma_{-1}$ ;  $\tau_{-1}$  - границі витривалості для гладеньких зразків;

$\sigma_{-1,K}$ ;  $\tau_{-1,K}$  - границі витривалості зразків з концентрацією напружень.

2. Вплив розмірів деталі /масштабний фактор/

Зниження границі витривалості із збільшенням абсолютних розмірів називається масштабним фактором, Вплив розмірів деталі на величину границі витривалості враховується масштабним коефіцієнтом.

$$\beta_{M\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,M}} ; \quad \beta_{M\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1,M}}$$



де  $\sigma_{-1}; \tau_{-1}$  - границі витривалості лабораторних зразків, що мають малі розміри  $d_0 = 7, \dots, 10 \text{ мм}$  ;

$\sigma_{-1,M}; \tau_{-1,M}$  - границі витривалості геометрично подібних зразків більших розмірів.

### 3. Вплив стану поверхні.

Зниження границі витривалості в залежності від стану обробленої поверхні деталі враховується коефіцієнтом якості поверхні

$$\beta_{i\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1,i}}; \beta_{i\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1,i}},$$

де  $\sigma_{-1}; \tau_{-1}$  - границі витривалості зразків з старанно полірованою поверхнею;

$\sigma_{-1,i}; \tau_{-1,i}$  - границі витривалості випробуваних зразків з певною обробкою поверхні.

Спільний вплив концентрації напружень, розмірів і стану поверхні оцінюється загальним коефіцієнтом  $K_{\sigma D}$  або  $K_{\tau D}$

$$K_{\sigma D} = K_{\sigma} \cdot \beta_{M\sigma} \cdot \beta_{П\sigma};$$

$$K_{\tau D} = K_{\tau} \cdot \beta_{M\tau} \cdot \beta_{П\tau}$$

Коефіцієнт  $K_{\sigma D} (K_{\tau D})$  називається загальним коефіцієнтом зниження границі витривалості при  $(\sigma_{-1D}; \tau_{-1D})$

при симетричному циклі залежить від границі витривалості матеріалу  $(\sigma_{-1}; \tau_{-1})$ , із якого виготовлена деталь і визначається формулою

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D}}; \tau_{-1D} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D}}$$

### 23.4. Розрахунок на міцність при змінних напруженнях

У переважної більшості випадках розрахунки на міцність деталей, працюючих при змінних напруженнях, виконують як перевірочні. Це пов'язано у першу чергу з тим, що загальний

коефіцієнт зниження границі витривалості у процесі конструювання деталі можна вибрати лише орієнтовано, так як у конструктора на цій стадії роботи влище дуже приблизні уяви про розміри і форми деталі. Тому проектний розрахунок виконується приблизно без урахування змінності напружень, але по пониженим допустимих напруженням. Після цього виконується уточнюючий розрахунок з урахуванням змінності напружень, а також конструктивних і технологічних факторів, впливаючих на втомлену міцність деталі. При цьому розрахунку визначаються коефіцієнти запасу міцності.

Умова міцності має наступний вигляд

$$n \geq n_{adm}$$

Значення коефіцієнта запасу міцності  $n_{adm}$  залежить від призначення деталі, точності визначення діючого на неї навантаження і т.п.

$$n_{adm} = 1,4, \dots, 3,0$$

Коефіцієнт запасу міцності визначається як відношення границі витривалості, визначеної для деталі до номінального значення максимального напруження, виникаючого у небезпечній точці деталі.

Номінальним є значення напруження, яке визначається по основним формулам опору матеріалів, тобто без урахування факторів впливаючих на величину границі витривалості.

Таким чином, для визначення коефіцієнта запасу міцності при симетричному циклі одержуємо наступні залежності:

при згинанні

$$n = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_{\max}};$$

при розтяганні-стисканні

$$n = \frac{\sigma_{-1, \delta i \zeta \delta} \cdot D}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1, \delta i \zeta \delta}}{K_{\sigma D} \cdot \sigma_{\max}}$$

при крученні

$$n = \frac{\tau_{-1D}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_{\max}}$$

При спільній дії згинання та кручення, коефіцієнт запасу міцності визначається формулою

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$

## ЗАКІНЧЕННЯ

У лекціях були викладені основні положення курсу опору матеріалів, які складають комплекс.

У даному конспекті лекцій в стислій формі викладені основні положення курсу опору матеріалів, вміщуючи в собі комплекс правил та методик розв'язання найбільш часто зустрічаємих ординарних задач міцності, жорсткості та стійкості.

Між тим майбутнім інженерам-механікам треба знати, що інженерна практика досить часто потребує дослідження і більш складних питань міцності та надійності відповідальних технічних об'єктів. Тому фахівці з питань міцності повинні чітко уявляти ті наукові проблеми, які стоять перед вченими та інженерами на сучасному етапі технічного розвитку.

Ці проблеми висувають на перший план ряд актуальних аспектів.

1. Дослідження міцності при високих та низких температурах /при статичному, динамічному навантаженні, в умовах агресивних та радіаційних середовищ/

2. Дослідження характеристик конструкційної міцності композитних та інших нових матеріалів.

3. Подальший розвиток механіки руйнування /теорії тріщиноутворення.

4. Розв'язання питань малоциклової втоми, удосконалення методів експериментальних досліджень в цій області.

5. Розробки надійних методів розрахунку пружно пластичного стану елементів конструкцій складної форми.

6. Дослідження фізичних аспектів міцності з широким використанням передової експериментальної техніки /електронної мікроскопії,

рентгеноструктурного аналізу, фрактографії, ультразвукової дефектоскопії) та виявлення методів накопичення пошкоджень та вивчення динаміки втрати несучої здатності по мірі напрацювання годин в тяжких умовах експлуатації.

Можна і далі перелічувати сучасні проблеми міцності, потребуючі начального розв'язання. Але вже і цей перелік показує, яке широке поле діяльності відкриває перед студентами механіками наука про міцність, основа якої закладається в традиційному курсі опору матеріалів.