

Розділ III. ДИНАМІКА

15. Динаміка точки

15.1. Основні поняття та означення

Динаміка — розділ теоретичної механіки, в якому вивчається рух матеріальних тіл під дією прикладених до них сил.

Під матеріальними тілами розуміють матеріальну точку (МТ), систему матеріальних точок (СМТ) або абсолютно тверде тіло (АТТ). *Матеріальна точка* (МТ) — це матеріальне тіло, розмірами якого для даної задачі нехтують. *Системою матеріальних точок* (СМТ) називається така сукупність точок, в якій положення і рух кожної точки залежить від положення і руху всіх інших. *Абсолютно тверде тіло* (АТТ) — незмінна система МТ, у якій відстань між будь-якими точками залишається незмінною.

У класичній механіці розглядають рух немалих матеріальних об'єктів зі швидкостями, малими порівняно зі швидкістю світла ($c = 3 \cdot 10^8$ км/с).

Властивість матеріальних тіл швидко або повільно змінювати швидкість свого руху під дією прикладених сил - інертність. Кількісною мірою інертності матеріальних тіл є маса. Маса тіла взагалі змінна величина. Згідно з формулою Ейнштейна—Лоренца маса $m = m_0(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$, де m_0 — маса об'єкта у стані спокою; V — швидкість, з якою рухається тіло; c — швидкість світла.

Якщо $V \ll c$, то $m = m_0 = \text{const}$. Тому в класичній механіці, або механіці «малих» швидкостей, масу матеріальних тіл вважають сталою величиною.

Поняття „маси” вперше введене Ньютоном (до нього розглядалася тільки вага тіла).

Мірою механічної взаємодії між матеріальними тілами є сила. Сили бувають сталі і несталі. Несталі сили можуть бути залежними від переміщення (сили тяжіння, сили пружності), від часу (сили тяги), від швидкості (сили опору).

15.2. Закони Ньютона

В основі динаміки лежать закони Ньютона. Вони є об'єктивними законами природи, встановленими на основі чисельних дослідів і спостережень за рухом матеріальних, узгоджених з досвідом, підтверджених практикою і такі, що приймаються без доведень.

15.2.1. Перший закон - закон інерції (або Галілея-Ньютона)

Вільна від дії зовнішніх сил МТ називається ізольованою, або вільною.

Ізольована від зовнішнього середовища МТ зберігає стан рівномірного і прямолінійного руху або перебуває в стані спокою доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Цей закон розкриває властивість реальних тіл зберігати стан руху. Спокій — тільки окремий випадок руху. Система координат, відносно якої виконується закон інерції, називається інерціальною системою відліку. Будь-яка нерухома або та, що рухається прямолінійно і рівномірно, система відліку є інерціальною. Взагалі нерухомих систем відліку не буває. При розв'язанні багатьох технічних задач система координат, пов'язана з Землею, яка здійснює обертальний рух, може вважатись інерціальною.

15.2.2. Другий (основний) закон Ньютона

Добуток маси матеріальної точки на її прискорення дорівнює силі, що діє на цю точку:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (15.1)$$

Іноді другий закон Ньютона формулюють так: Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}.$$

Другий закон Ньютона виражає зв'язок між прискоренням і силою (величиною, яка характеризує у загальній формі інтенсивність зовнішнього впливу на тіло), а також установлює єдність кількісного визначення сил, прикладених до тіл, що перебувають у стані спокою або руху. Цей закон тому називають *основним законом механіки*, що за ним можна дістати диференціальні рівняння руху й основні теореми динаміки для вільної МТ і СМТ.

Якщо на точку діє декілька сил (див. рис. 15.1), то рівняння (15.1) набирає вигляду

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k. \quad (15.2)$$

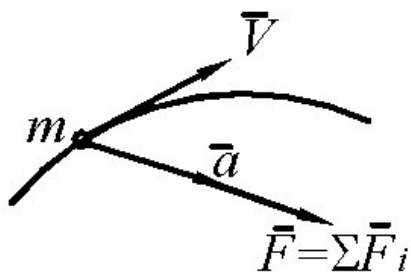


Рис. 15.1

матимемо

На кожне тіло, що перебуває близько до земної поверхні, діє сила тяжіння P , яка дорівнює вазі тіла. Враховуючи, що під дією сили P кожне тіло у вільному падінні має одне і те саме прискорення g , яке називають *прискоренням вільного падіння*, згідно з рівнянням (15.1) для вільного падіння

$$P = mg \quad \text{або} \quad m = P/g. \quad (15.3)$$

15.2.3. Третій закон Ньютона (закон дії і протидії)

Будь-якій дії відповідає однакова за величиною і протилежна за напрямом протидія. Інакше кажучи, сили взаємодії двох тіл однакові між собою і напрямлені у протилежні боки:

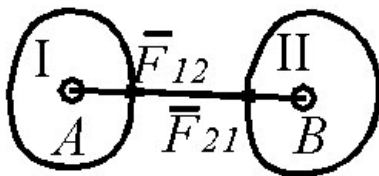


Рис. 15.2

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}.$$

Слід звернути увагу на те, що ці сили не утворюють зрівноважену систему сил, оскільки вони прикладені до різних тіл.

Таким чином, третій закон Ньютона встановлює зв'язок між силами взаємодії двох різних тіл (рис. 15.2), тоді як перший і другий закони Ньютона стосуються однієї матеріальної точки. Крім того, цей закон справедливий для будь-якої системи

координат (у тому числі і інерціальної), оскільки він не містить у собі кінематичних характеристик об'єктів, що рухаються.

15.3. Диференціальні рівняння руху вільної МТ

Форма запису диференціальних рівнянь руху вільної матеріальної точки залежить від способу задавання її руху.

15.3.1. Векторний спосіб задання руху

За другим законом Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}_k$ (рис. 15.3).

Із кінематики відомо, що

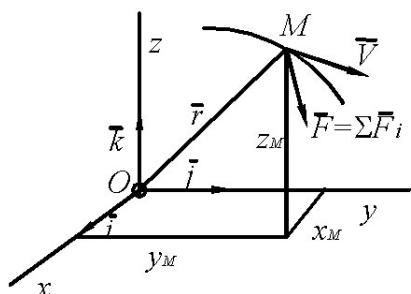


Рис. 15.3

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Тоді

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F}_k. \quad (15.4)$$

Це і є диференціальне рівняння руху точки у векторній формі.

15.3.2. Координатний спосіб задання руху

Проектуючи ліву й праву частини рівняння (15.2) на осі декартової системи координат, маємо:

$$ma_x = \sum F_{kx}, \quad ma_y = \sum F_{ky}, \quad ma_z = \sum F_{kz}.$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \end{aligned}$$

дістаємо

$$m\ddot{x} = \sum F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum F_{kz}. \quad (15.5)$$

Ці рівняння називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в координатній формі.

15.3.3. Природний спосіб задання руху

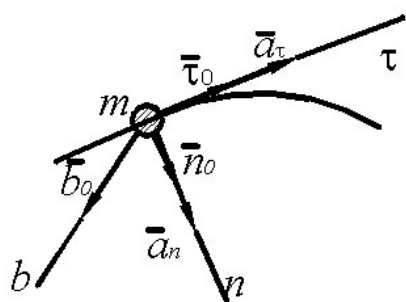


Рис. 15.4

Проектуючи ліву й праву частини рівняння (15.2) на осі природного тригранника $\vec{\tau}_0$, $\vec{n}_0$, $\vec{b}_0$ (рис. 15.4), маємо

$$\left. \begin{aligned} m a_\tau &= \sum F_{k\tau}, \\ m a_n &= \sum F_{kn}, \\ m a_b &= \sum F_{kb}. \end{aligned} \right\}$$

Враховуючи, що $a_\tau = \frac{dV}{dt}$, $a_n = \frac{V^2}{\rho}$, одержимо такі рівняння:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}. \quad (15.6)$$

Останнє рівняння системи (15.6) показує, що траєкторія точки, яка рухається під дією сили $\vec{F}$, така, що дотична площина завжди містить у собі цю силу.

Рівняння (15.6) називаються динамічними рівняннями руху матеріальної точки в натуральній формі або у формі Ейлера.

15.4. Дві основні задачі динаміки МТ

При дослідженні руху матеріальної точки зустрічаються різноманітні задачі, які можуть бути зведені до двох основних задач (прямої і оберненої).

15.4.1. Перша (пряма) задача

Суть першої задачі динаміки полягає в тому що треба визначити силу (або сили), яка діє на точку, якщо задано закон руху матеріальної точки та її масу.

При розв'язуванні задач цього типу необхідно:

1) виділити об'єкт (точку, тіло, систему тіл), рух якого розглядається. При цьому об'єкт руху вибирають так, щоб безпосередньо з ним були пов'язані як задані, так і шукані величини сил;

2) якщо об'єкт руху невідільний (обмежений в'язями), то слід розглядати відповідні в'язі об'єкта, тобто ті тіла, які перебувають у контакті з об'єктом руху;

3) користуючись аксіомою звільнення від в'язей, в'язі слід відкинути, а їх дію замінити силами — реакціями в'язей. У результаті цього об'єкт руху під дією сил і реакцій в'язей можна вважати умовно вільним;

4) вибрати систему координат, прикласти до об'єкта, який розглядається як точка в довільному проміжному стані, всі активні сили та реакції в'язей, що діють на нього, і скласти рівняння у вигляді (15.5) або (15.6);

5) використовуючи закон руху, визначити проекції прискорення на осі координат і підставити їх значення у рівняння;

6) розв'язавши рівняння, визначити шукані величини.

Розглянемо, як розв'язується перша задача динаміки на конкретних прикладах.

Задача 3.1. Літак, маса якого 2000 кг, летить горизонтально з прискоренням 5 м/с^2 . Його швидкість у даний момент 200 м/с. Опір повітря пропорційний до квадрата швидкості і при швидкості 1 м/с дорівнює 0,5 Н. Знайти силу тяги гвинта, якщо вона утворює з напрямом польоту кут 10° .

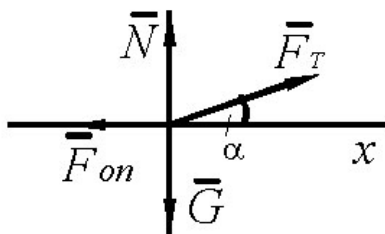


Рис. 15.5

Розв'язання

Літак розглядаємо як точку (рис. 15.5), до якої прикладені всі сили, що діють на нього: $\vec{G}$ - сила ваги; $\vec{N}$ - підйомна сила; $\vec{F}_{on}$ - сила опору повітря; $\vec{F}_T$ - сила тяги. Зазначимо, що всі сили, крім сили ваги, змінні, тобто залежать від швидкості, яка в свою чергу є також змінною

величиною, оскільки літак рухається із заданим прискоренням. Траєкторія літака - пряма лінія, що збігається з напрямом осі x , тому

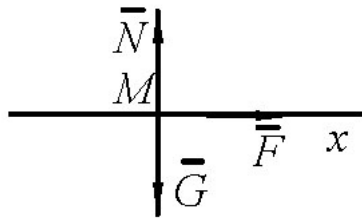
$$ma_x = F_T \cdot \cos \alpha - F_{\text{опор}}.$$

У даному випадку $a_x = a = 5 \text{ м/с}^2$,

$$F_{\text{оп}} = k \cdot V^2, \text{ де } K = \frac{F_{\text{опор1}}}{V_1^2} = \frac{0,5}{1,0^2} = 0,5 \text{ Н} \cdot \text{с}^2 \cdot \text{м}^2.$$

Тоді
$$T_T = \frac{ma_x + KV^2}{\cos \alpha} = \frac{2000 \cdot 5 + 0,5 \cdot 200^2}{\cos 10^\circ} = 30500 \text{ Н}.$$

Задача 3.2. Матеріальна точка масою 50 г рухається по прямій згідно з рівнянням $x = 8 \cdot \sin 2t$ (см). Знайти силу, яка діє на точку в ті моменти часу, коли її координата $x = -5$ см.



Розв'язання

Рис. 15.6 Прикладемо до точки всі діючі на неї сили (рис. 15.6). Запишемо рівняння руху МТ в проекції на вісь x :

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix}.$$

У цьому випадку

$$\sum F_{ix} = F,$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (8 \cdot \sin 2t) = -32 \cdot \sin 2t = -4 \cdot (8 \cdot \sin 2t) = -4 \cdot x, \text{ см/с}^2$$

або $\ddot{x} = -4 \cdot 10^{-2} \cdot x, \text{ м/с}^2.$

Тоді

$$F = m \cdot \ddot{x} = 50 \cdot 10^{-3} \cdot (-4 \cdot 10^{-2} \cdot x) = -2 \cdot 10^{-3} \cdot x, \text{ Н}.$$

У той момент часу, коли координата МТ $x = -5$ см (або $x = -5 \cdot 10^{-2} \text{ м}$), сила $F = -2 \cdot 10^{-3} \cdot (-5 \cdot 10^{-2}) = 10^{-4} \text{ Н}.$

Задача 3.3. Автомобіль вагою 9,8 кН рухається рівномірно по опуклому мосту. Чому дорівнює тиск автомобіля в момент проходження через середину моста, якщо радіус кривини моста дорівнює 50 м, а швидкість автомобіля $V = 10 \text{ м/с}.$

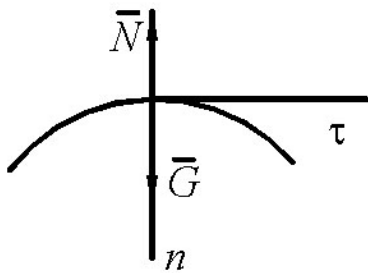


Рис. 15.7

Розв'язання

Автомобіль розглядаємо як МТ, до якої прикладені сила вага $\vec{G}$ і реакція моста $\vec{N}$ (рис. 15.7). Вибираємо природні осі: дотичну τ і нормаль n . Оскільки автомобіль рухається зі сталою швидкістю, то рівняння руху має вигляд

$$m \cdot \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn},$$

де $\rho = R$, $m = G/g$, $\sum F_{kn} = G - N$.

Тоді
$$\frac{G}{g} \cdot \frac{V^2}{R} = G - N,$$

звідки

$$N = G - \frac{G}{g} \cdot \frac{V^2}{R} = G \left(1 - \frac{V^2}{g \cdot R} \right) = 9,8 \left(1 - \frac{10^2}{9,8 \cdot 50} \right) = 7,8 \text{ кН.}$$

Таким чином, сила тиску автомобіля на міст дорівнює реакції N і спрямована у протилежному напрямі.

15.4.2. Друга (обернена) задача

Суть другої задачі динаміки полягає в тому, що треба визначити закон руху матеріальної точки за заданою масою, силами, прикладеними до точки, і початковими умовами, тобто

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

При розв'язуванні задач цього типу спочатку додержують тієї самої послідовності, що й при розв'язуванні першої задачі динаміки (див. пп. 1-4). Після складання рівнянь руху слід з'ясувати, що являють собою праві частини ($\sum F_{kx}$, $\sum F_{ky}$ тощо) цих рівнянь, тобто які сили входять до них.

Якщо до правих частин входять сталі сили або сили, що залежать від часу та швидкості, то проекція прискорення на дану вісь записується як перша похідна за часом від проекції швидкості на цю вісь.

Якщо до прaviх частин входять сили, що залежать від переміщення або від квадрата швидкості, то проекцію прискорення на дану вісь (наприклад, вісь x) треба записати у такому вигляді:

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dV_x}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V_x \frac{dV_x}{dx}.$$

Підставляючи значення прaviх частин і проекції прискорення у рівняння (15.5) або (15.6), розв'язують ці рівняння, двічі інтегруючи, тобто знаходять загальний інтеграл (загальний розв'язок, який містить довільні сталі інтегрування). Потім визначають сталі інтегрування відповідно до заданих початкових умов руху точки, тобто значень координат і швидкості у початковий момент часу $t = t_0 = 0$ (зазначимо, що початкові координати точки залежать від обраної системи координат, а початкова швидкість задається умовою задачі). Після визначення сталих інтегрування їх значення підставляють у загальний розв'язок задачі і таким способом дістають рівняння руху МТ під дією даної системи сил за даних початкових умов. Потім досліджують одержаний розв'язок. При цьому слід мати на увазі, що для дослідження і перевірки одержаного розв'язку задачі треба розв'язання проводити у загальному вигляді, а числові дані підставляти тільки в кінцевий результат.

Застосування цієї методики розглянемо при розв'язанні конкретних задач.

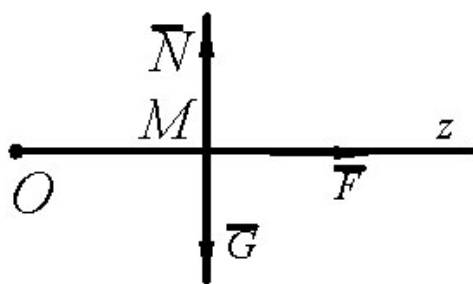


Рис. 15.8

Задача 3.4. На матеріальну точку масою 200 г, що рухається вздовж горизонтальної осі Ox , діє сила $F = 2$ Н. У початковий момент $x_0 = 3$ м і $V_0 = 4$ м/с. Скласти рівняння руху точки.

Розв'язання

Покажемо сили, що діють на точку (рис. 15.8). На основі другого закону Ньютона складаємо диференціальне рівняння руху у проекції на вибрану координатну вісь Ox : $m\ddot{x} = F$.

Беручи до уваги, що права частина нашого рівняння стала величиною і $\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt}$, можна записати

$$\frac{dV_x}{dt} = \frac{1}{m} \cdot F, \quad \text{або} \quad dV_x = \frac{1}{m} \cdot F \cdot dt.$$

Після інтегрування знаходимо

$$V_x = \frac{1}{m} \cdot Ft + C_1, \quad (15.7)$$

де C_1 — стала інтегрування, яку знаходимо з початкових умов задачі (при $t = 0$; $V_x = V_0$) $C_1 = V_0$.

Тоді

$$V_x = \frac{1}{m} \cdot Ft + V_0, \quad (15.8)$$

Враховуючи, що $V_x = \frac{dx}{dt}$, рівняння (15.8) можна записати у такому вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m} \cdot Ft + V_0 \quad \text{або} \quad dx = \frac{1}{m} F t dt + V_0 dt.$$

Після інтегрування знаходимо

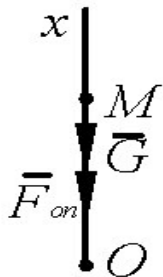
$$x = \frac{1}{m} F \frac{t^2}{2} + V_0 t + C_2.$$

Сталу інтегрування C_2 визначаємо з початкових умов задачі (при $t = 0$; $x = x_0$), підставляючи їх у рівняння (15.9): $C_2 = x_0$.

Тоді остаточно маємо

$$x = \frac{1}{m} F \frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0 = \frac{1}{0,2} \cdot 2 \frac{t^2}{2} + 4t + 3 = 5t^2 + 4t + 3, \text{ м.}$$

Задача 3.5. На яку висоту h підніметься тіло вагою G , кинуте вертикально вгору зі швидкістю V_0 , якщо опір повітря визначається формулою $F_{on} = k^2 \cdot G V^2$, де V - швидкість тіла?



Розв'язання

Вважаємо, що матеріальна точка вільна, оскільки вона рухається під дією ваги і сили

опору повітря. Траєкторія точки є пряма лінія, вздовж якої спрямуємо вісь Ox у бік руху (рис. 15.9). Складемо диференціальне рівняння руху в проекції на вісь Ox :

$$m\ddot{x} = -G - F_{on} = -G - k^2 G V_x^2 = -mg - k^2 \cdot mg \cdot V_x^2.$$

Після спрощень рівняння можна записати так:

$$\ddot{x} = -g(1 + k^2 V_x^2). \quad (15.10)$$

Оскільки шукана величина h є координатою тієї точки осі, де швидкість тіла дорівнює її кінцевому значенню, тобто нулю, з проекції прискорення $\ddot{x}$ на вісь Ox виключимо час t і введемо новий аргумент x :

$$\ddot{x} = \frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = V_x \cdot \frac{dV_x}{dx}.$$

Тоді рівняння (15.10) матиме вигляд

$$V_x \frac{dV_x}{dx} = -g(1 + k^2 V_x^2), \quad \text{або} \quad \frac{V_x \cdot dV_x}{1 + k^2 V_x^2} = -g \cdot dx.$$

Після інтегрування знаходимо його розв'язок

$$\frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 V_x^2) = -gx + C_1. \quad (15.11)$$

Сталу інтегрування визначимо з початкових умов (при $t = 0$; $x = 0$; $V_x = V_0$):

$$C_1 = \frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 V_0^2).$$

Тоді рівняння (15.11) набере вигляду

$$\frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 V_x^2) = -gx + \frac{1}{2k^2} \ln(1 + k^2 V_0^2),$$

звідки

$$x = \frac{1}{2gk^2} \cdot \ln \frac{1 + k^2 V_0^2}{1 + k^2 V_x^2}.$$

Коли тіло досягне максимальної висоти підйому ($x = h$), а

швидкість $V_x = 0$, то

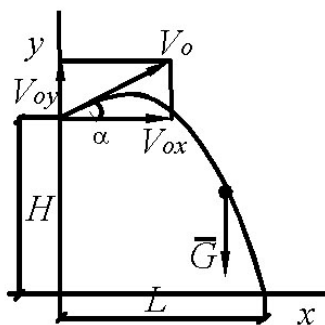
$$h = \frac{1}{2gk^2} \ln(1 + k^2 V_0^2).$$

14.5. Криволінійний рух матеріальної точки

14.5.1. Рух точки, кинутої під кутом α до горизонту

Вперше цю задачу розв'язав Г. Галілей, розглядаючи рух снаряда, кинутого у пустоті під деяким кутом до горизонту.

Задача 3.6. Грудка руди кинута зі швидкістю V_0 з висоти H під кутом α до горизонту (рис. 15.10). Визначити дальність польоту.



Розв'язання

Складаємо диференціальні рівняння руху точки:

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = 0, \quad (15.12)$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy} = -G = -mg, \quad (15.13)$$

Рис. 15.10

де $\sum F_{ix} = 0$, $\sum F_{iy} = -G = -mg$.

Після спрощень рівняння можна записати так:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g \quad \text{або} \quad \frac{dV_x}{dt} = 0, \quad \frac{dV_y}{dt} = -g.$$

Розв'язуючи перше рівняння, дістаємо

$$V_x = C_1 = \text{const}.$$

Враховуючи, що

$$V_x = \frac{dx}{dt}, \quad \text{маємо} \quad \frac{dx}{dt} = C_1 \quad \text{або} \quad dx = C_1 \cdot dt.$$

Після інтегрування

$$x = C_1 \cdot t + C_2.$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов (при $t = 0$; $x = 0$; $V_x = V_{0x} = V_0 \cdot \cos \alpha$):

$$C_1 = V_0 \cdot \cos \alpha, \quad C_2 = 0.$$

Тоді

$$x = V_0 \cdot t \cdot \cos \alpha. \quad (15.14)$$

Розв'язуючи друге рівняння, дістаємо

$$V_y = -gt + C_3.$$

Враховуючи, що $V_y = \frac{dy}{dt}$, маємо

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_3, \quad \text{або} \quad dy = -gt \cdot dt + C_3 \cdot dt.$$

Після інтегрування

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_3 \cdot t + C.$$

Сталі інтегрування C_3 і C_4 визначаємо з початкових умов (при $t = 0$; $y = H$; $V_y = V_{0y} = V_0 \cdot \sin \alpha$):

$$C_3 = V_0 \cdot \sin \alpha, \quad C_4 = H.$$

Тоді

$$y = -\frac{gt^2}{2} + V_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + H. \quad (15.15)$$

Щоб знайти траєкторію руху точки у звичайному вигляді, виключаємо з рівнянь (15.14) і (15.15) час t . З рівняння (15.14)

$$\text{знаходимо} \quad t = \frac{x}{V_0 \cdot \cos \alpha}.$$

Тоді

$$y = -\frac{gx^2}{2 \cdot V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha + H. \quad (15.16)$$

Таким чином, грудка руди рухається по параболі.

Дальність польоту знайдемо з рівняння (15.16), поклавши в ньому $x = L$, а $y = 0$:

$$0 = -\frac{yL^2}{2V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + L \cdot \operatorname{tg} \alpha + H. \quad (15.17)$$

Розв'язуючи рівняння (15.17) відносно L одержуємо

$$L = \frac{V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}{g} \left(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 2H \frac{g}{V_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}} \right) =$$

$$= \frac{V_0 \cdot \cos \alpha}{g} \left(V_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{V_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH} \right).$$

14.5.2. Криволінійний рух точки під дією змінних сил

Задача 3.7. Тіло вагою $\vec{G}$, з початковою швидкістю $\vec{V}_0$ кинуте до горизонту під кутом α , рухається під впливом сили ваги і опору $\vec{R}$ повітря. Визначити найбільшу висоту H тіла над рівнем початкового стану, вважаючи, що опір пропорційний до швидкості руху ($\vec{R} = -k \cdot G \cdot \vec{V}$).

Розв'язання

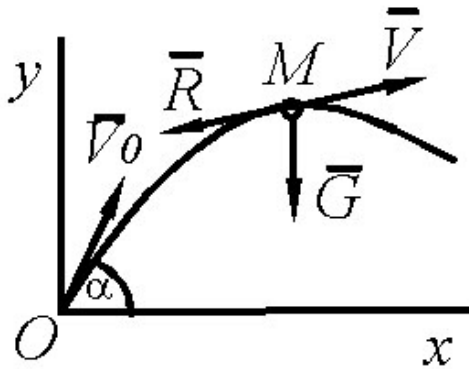


Рис. 15.11

На тіло M , яке розглядаємо як матеріальну точку, діють дві сили: $\vec{G}$ - вага тіла; $\vec{R}$ - опір повітря (рис. 15.11). Напрямок сили опору $\vec{R}$ протилежний напрямку швидкості $\vec{V}$ рухомої точки.

Диференціальні рівняння руху точки M в координатній формі

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -R \cdot \cos(\vec{V}, x), \\ m\ddot{y} &= -G - R \cdot \cos(\vec{V}, y) \end{aligned} \right\} \quad (15.18)$$

Оскільки

$$\cos(\vec{V}, x) = V_x / V; \quad \cos(\vec{V}, y) = V_y / V,$$

рівняння (15.18) після деяких перетворень набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -kgV_x, \\ \ddot{y} &= -g(1 + kV_y) \end{aligned} \right\}$$

або

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + kg\dot{x} &= 0, \\ \ddot{y} + kg\dot{y} &= -g \end{aligned} \right\} \quad (15.19)$$

Отже, ця задача звелась у математичному розумінні до знаходження двох функцій які мають задовольняти не тільки диференціальні рівняння (15.19), а й початкові умови:

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \quad x=0; \quad \dot{x} &= V_0 \cdot \cos \alpha; \\ y=0; \quad \dot{y} &= V_0 \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Характеристичні рівняння для двох диференціальних рівнянь (15.19) однакові, тому можна записати

$$\lambda^2 + kg\lambda = 0, \text{ а } \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -kg.$$

Загальний розв'язок системи (15.19) набере вигляду

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 \cdot e^{-kgt}, \\ y &= C_3 + C_4 \cdot e^{-kgt} + y_{\text{ділянки}} \end{aligned} \right\} \quad (15.20)$$

Частинний розв'язок $y_{\text{ділянки}}$ другого рівняння системи (15.19) знаходимо у вигляді (особливий випадок) $y_{\text{ділянки}} = A \cdot t$.

Після підстановки цього значення у друге рівняння системи (15.19) одержимо: $A = -1/k$. Отже, $y_{\text{ділянки}} = -t/k$, а система (15.20) запишеться так:

$$\left. \begin{aligned} x &= C_1 + C_2 \cdot e^{-kgt}, \\ y &= C_3 + C_4 \cdot e^{-kgt} - \frac{t}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

Сталі інтегрування C_1 , визначаються з початкових умов задачі. Для цього треба знайти проекції швидкостей x і y як функції часу. Диференціюючи рівняння (15.21) за часом t маємо

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -C_2 \cdot kg \cdot e^{-kgt} \\ \dot{y} &= -C_4 \cdot kg \cdot e^{-kgt} - 1/k. \end{aligned} \right\} \quad (15.22)$$

Для $t=0$ з рівностей (15.21) і (15.22) дістанемо чотири рівняння відносно шуканих сталих:

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0, \\ C_3 + C_4 &= 0, \\ -C_2 kg &= V_0 \cdot \cos \alpha, \\ -C_4 \cdot kg - 1/k &= V_0 \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$C_1 = -C_2 = \frac{V_0 \cdot \cos \alpha}{kg},$$

$$C_3 = -C_4 = \frac{V_0 \cdot \sin \alpha + 1/k}{kg}.$$

Підставляючи знайдені сталі у рівності (15.21), дістаємо рівняння руху матеріальної точки

$$\begin{aligned} x &= V_0 \cdot \cos \alpha \cdot (1 - e^{-kgt}) / kg, \\ y &= (1/k + V_0 \cdot \sin \alpha) (1 - e^{-kgt}) / kg - t/k. \end{aligned} \quad (15.23)$$

Щоб визначити найбільшу висоту тіла над рівнем початкового положення, функцію $y = y(t)$ з системи (15.23) досліджуємо на екстремум:

$$\frac{dy}{dt} = (1/k + V_0 \cdot \sin \alpha) \cdot e^{-kgt} - 1/k = 0$$

або

$$e^{-kgt} = \frac{1}{k(1/k + V_0 \cdot \sin \alpha)},$$

звідки

$$t_{kp} = \frac{1}{kg} \cdot \ln(1 + V_0 \cdot k \cdot \sin \alpha),$$

а шукана величина

$$\begin{aligned} H = y \Big|_{nput=t_{kp}} &= \frac{1}{kg} \left(\frac{1}{k} + V_0 \cdot \sin \alpha \right) \left(1 - e^{-kgt_{kp}} \right) - \frac{t_{kp}}{k} = \\ &= \frac{V_0 \cdot \sin \alpha}{kg} - \frac{1}{k^2 g} \ln(1 + V_0 \cdot k \cdot \sin \alpha). \end{aligned}$$

Запитання для самоперевірки і контролю

1. Що називається механічною силою?
2. Що називається масою точки? Які властивості фізичних тіл враховуються поняттям маси?
3. Сформулюйте основний закон динаміки.
4. Сформулюйте перший і третій закони Ньютона.
5. Як вивести диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки при трьох способах задання її руху?
6. Сформулюйте дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки. За допомогою яких математичних операцій їх розв'язують і як саме?
7. Скільки сталих інтегрування має загальний розв'язок диференціальних рівнянь руху МТ, якщо вона рухається в просторі; на площині; вздовж прямої?
8. Що таке початкові умови руху МТ і як їх записують при трьох способах задання руху?

16. Коливання матеріальної точки

З коливальним рухом зустрічаються в різних галузях науки і техніки, особливо в автоматичі. Незважаючи на різну природу виникнення, цей рух підпорядковується одним і тим самим законам і описується одними й тими самими рівняннями. Тому теорія малих коливань має велике значення.

Залежно від характеру сил, що спричиняють коливання точки, розрізняють коливання вільні (або власні), згасаючі та вимушені.

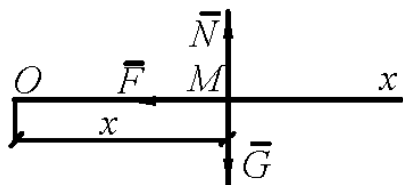
16.1. Вільні коливання матеріальної точки

Вільними (власними) коливаннями точки називають її під дією сили, зумовленої початковим відхиленням точки від положення рівноваги або наданням їй початкової швидкості.

Точка M масою m рухається прямолінійно під дією однієї тільки відновлюваної сили $\vec{F}$ (сили пружності пружини), яка спрямована до нерухомого центра O і пропорційна до відстані від цього центра (рис. 16.1). Знайдемо закон руху точки.

Розв'язання

Проекція сили $\vec{F}$ на вісь Ox $F_x = -cx$,
де c - коефіцієнт пропорційності, наприклад, жорсткість пружини.



Диференціальне рівняння, що описує вільні коливання точки ($m\ddot{x} = -cx$) після спрощень матиме вигляд

Рис. 16.1

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (16.1)$$

де $k = \sqrt{c/m}$ — колова частота вільних незгасаючих коливань.

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку має загальний інтеграл

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt. \quad (16.2)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаються на основі початкових умов (при $t = 0$ $x = x_0$, а $\dot{x} = V_0$).

Іноді рівняння (16.2) записують у вигляді

$$x = A \cdot \sin(kt + \alpha), \quad (16.3)$$

де $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ - амплітуда коливань; а $\alpha = \arctg(C_1 / C_2)$ - початкова фаза.

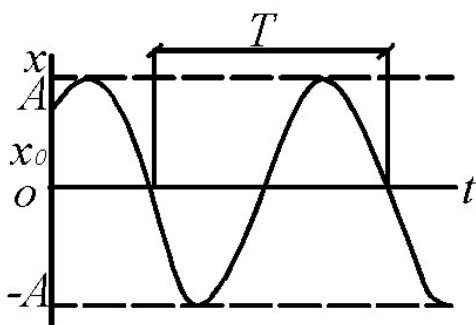


Рис. 16.2

Графік вільних коливань, що описуються рівнянням (16.3), наведено на рис. 16.2. Період вільних коливань точки визначається за формулою

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{m/c}.$$

Треба мати на увазі, що період вільних коливань не залежить від початкових умов руху точки (x_0 і $\dot{x}_0$).

16.2. Загасаючі коливання матеріальної точки

На точку M масою m , що рухається прямолінійно, діє крім сили пружності пружини ($F = cx$) ще й сила опору середовища ($R = \mu \cdot V$), де μ — коефіцієнт пропорційності. Знайти закон руху матеріальної точки.

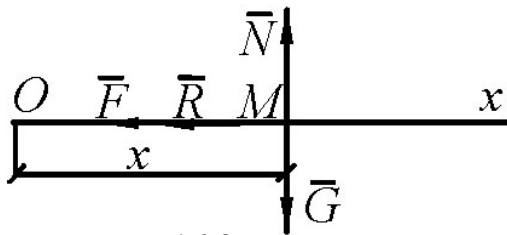


Рис. 16.3

Проеціюючи сили на вісь Ox , маємо $\sum F_{ix} = -F - R = -cx - \mu \dot{x}$.

Підставляючи $\sum F_{ix}$ в перше рівняння системи (15.5), одержуємо $m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}$.

Після спрощень диференціальне рівняння, що описує рух точки, набирає вигляду

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (16.4)$$

де $k^2 = c/m$, $2n = \mu/m$ (n - відносний коефіцієнт демпфірування коливань, який має розмірність колової частоти коливань).

Залежно від співвідношення між n і k розрізняють три види руху:

а) $k > n$ (сила опору середовища мала). У цьому випадку точка здійснюватиме загасаючі коливання за законом

$$x = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos k_1 t + C_2 \cdot \sin k_1 t), \quad (16.5)$$

або

$$x = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha), \quad (16.6)$$

де C_1 і C_2 - сталі інтегрування, які визначаються з початкових умов задачі; $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$; A - амплітуда коливань; α - початкова фаза коливань.

Графік загасаючих коливань зображено на рис. 16.4.

Період загасаючих коливань

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Амплітуди коливань $x_1, x_2, \dots, x_n$ спадають з кожним півперіодом за законом геометричної прогресії, знаменник якої η називається *декрементом згасання коливань*,

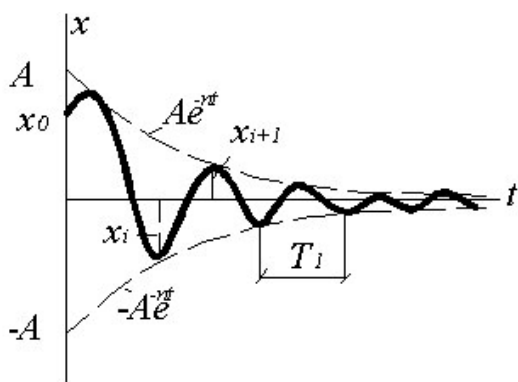


Рис. 16.4

$$\eta = \frac{x_{i+1}}{x_i} = e^{-nT/2},$$

а модуль його логарифма, тобто величина $nT/2$ - логарифмічним декрементом згасаючих коливань;

б) $n > k$; (сила опору середовища велика). У цьому випадку точка здійснюватиме аперіодичний рух (рис. 16.5) за

законом

$$x = e^{-nt} (C_1 \cdot e^{rt} + C_2 \cdot e^{-rt}) = A \cdot e^{-nt} \cdot sh(rt + \alpha), \quad (16.7)$$

де $r = \sqrt{n^2 - k^2}$.

Як видно з графіка (рис. 16.5), характер руху залежить від початкової швидкості $\dot{x}_0$;

в) $n = k$ (граничний випадок). Матеріальна точка, як і в

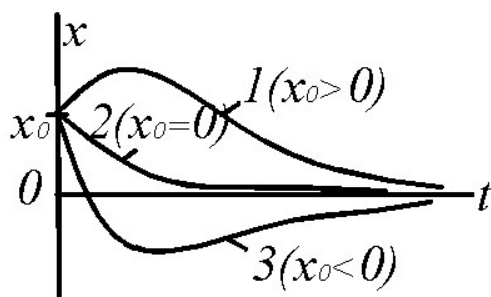


Рис. 16.5

попередньому випадку, здійснюватиме аперіодичний рух (рис. 16.5) за законом

$$x = e^{-nt} (C_1 t + C_2). \quad (16.8)$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 , які визначаються з початкових умов задачі.

16.3. Вимушені коливання за відсутності сил опору.

Резонанс

Вимушені коливання відбуваються за умови. Що на матеріальну точку, крім відновлювальної сили (сили пружності), діє збурююча сила, яка взагалі може змінюватись за будь-яким законом.

Але найчастіше ця сила змінюється за гармонічним законом.

Якщо на матеріальну точку крім сили пружності діє збурююча сила $Q = H_0 \cdot \sin pt$, то диференціальне рівняння набирає вигляду

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin pt, \quad (16.9)$$

де $h = H_0/m$; H_0 - амплітуда збурюючої сили; p - її частота ($p \neq k$).

Розв'язуючи рівняння (16.9), маємо

$$x = x_1 + x_2 = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt,$$

або

$$x = A \cdot \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \cdot \sin pt. \quad (16.10)$$

Із формули (16.10) видно, що рух точки визначається накладанням вільних та чисто вимушених коливань. Вільні коливання точки (перший доданок x_1) залежать від початкових умов і визначаються загальним розв'язком однорідного рівняння ($\ddot{x} + k^2 x = 0$). Чисто вимушені коливання (другий доданок x_2) не залежать від початкових умов і визначаються частинним розв'язком неоднорідного диференціального рівняння (16.9).

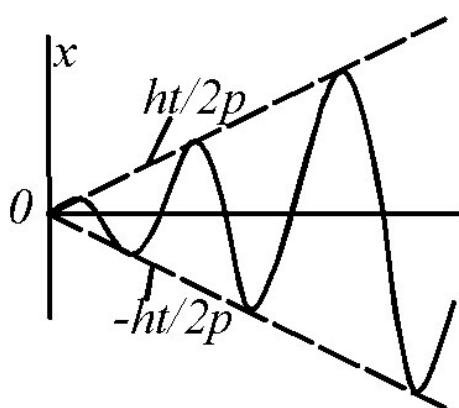


Рис. 16.6

За наявності резонансу (випадок збіжності частоти збурюючої сили з частотою власних коливань, тобто $k = p$) частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння (16.9) шукається у вигляді $x_2 = B_1 \cdot t \cdot \cos pt$ і після деяких перетворень записується так:

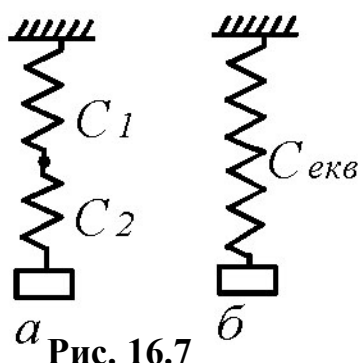
$$x_2 = -\frac{h}{2p} \cdot t \cdot \cos pt \quad (16.11)$$

Графік руху точки, який визначається за формулою (16.11), наведено на рис. 16.6. Як показано на графіку, амплітуда

вимушених коливань зростає прямо пропорційно до першого степеня часу. Явище резонансу становить значний інтерес для практики.

16.4. Визначення еквівалентної жорсткості

При розв'язуванні практичних задач виникає така ситуація, коли в тій чи іншій конструкції для забезпечення високих динамічних властивостей треба встановити пружину певної жорсткості, але таких пружин промисловість не виготовляє. Тому конструктори змушені з пружин, що випускаються підприємствами, скласти пружинний комплект, жорсткість якого еквівалентна відповідній жорсткості однієї пружини. При цьому в комплекті пружини можуть бути з'єднані між собою тим чи іншим способом (послідовно, паралельно, під кутом одна до одної або змішаним способом).



При розрахунках, якщо ми маємо справу з такими пружинними комплектами, для спрощення розв'язку задачі систему пружин замінюють однією, еквівалентною тим, що входять до комплекту. При визначенні еквівалентної жорсткості треба враховувати спосіб з'єднання пружин.

Так, при послідовному з'єднанні двох пружин (рис. 16.7, а, б), жорсткість яких C_1 і C_2 , еквівалентна жорсткість визначається за формулою

$$C_{екв} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

При паралельному з'єднанні пружин (рис. 16.8 а) або коли вантаж затиснений між двома пружинами, які встановлені між нерухомими поверхнями (рис. 16.8, б), еквівалентна жорсткість в цих обох випадках визначається однаково і становить

$$C_{екв} = C_1 + C_2$$

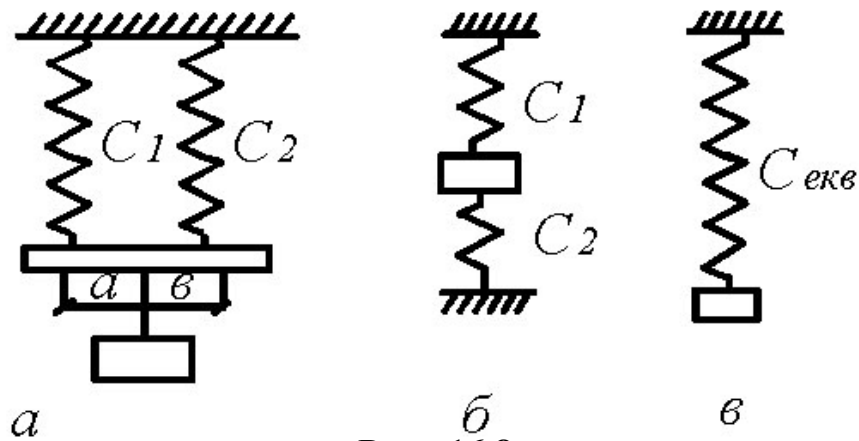


Рис. 16.8

При змішаному з'єднанні пружин (рис. 16.9) еквівалентна жорсткість визначається за формулою

$$C_{екв} = C_1 \cdot \cos^2 \alpha_1 + (C_2 + C_3) \cos^2 \alpha_2 + \frac{C_4 \cdot C_5}{C_4 + C_5} \cdot \cos^2 \alpha_3.$$

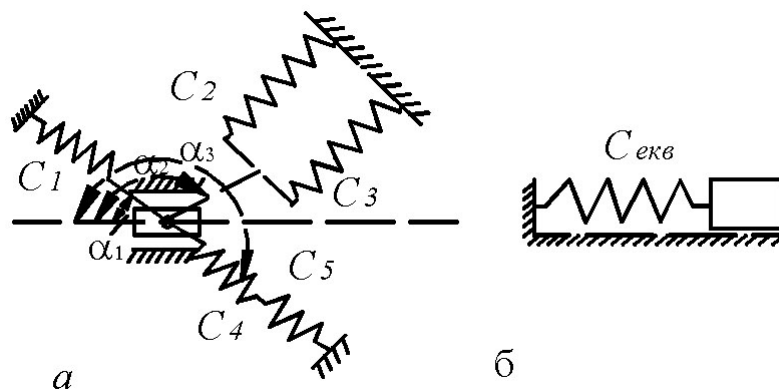


Рис. 16.9

16.5. Методичні вказівки до розв'язування задач

Розв'язання задач на коливальний рух матеріальної точки рекомендується виконувати в такій послідовності:

- 1) вибрати систему відліку, взявши початок відліку в положенні статичної рівноваги матеріальної точки;
- 2) записати початкові умови руху точки;
- 3) при складанні диференціального рівняння треба зобразити матеріальну точку в проміжному положенні, яке відповідає її додатній координаті, припускаючи, що точки

переміщуються в бік зростання цієї координати;

4) зобразити на рисунку сили, прикладені до матеріальної точки. Застосовуючи принцип звільнення від в'язей, додати сили реакцій в'язей, що діють на точку;

5) скласти диференціальне рівняння руху матеріальної точки в проекції на відповідну вісь;

6) після складання диференціального рівняння руху розглянути умови статичної рівноваги точки, яка коливається. Використавши цю умову, часто вдається скоротити ряд сталих доданків в правій частині диференціального рівняння;

7) інтегруючи одержане диференціальне рівняння руху і використовуючи початкові умови, визначити сталі інтегрування.

Розв'язуючи задачу про вільні коливання матеріальної точки, можна довести розв'язок до результату в загальному вигляді, а потім підставити числові дані.

Розглядаючи задачу про згасаючі коливання, треба підставити числові дані в складене диференціальне рівняння і визначити коефіцієнти n і k через те, що залежно від їх співвідношення розв'язок записується у вигляді (16.5), (16.7) або (16.8).

Розв'язуючи задачу про вимушені коливання матеріальної точки, потрібно визначити числові значення коефіцієнтів диференціального рівняння тому, що вигляд частинного розв'язку залежить від співвідношення між коловими частотами вимушених і вільних коливань, тобто між p і k .

Задача 3.8. Верхній кінець вертикальної пружини, коефіцієнт жорсткості якої $C = 98$ Н/м, закріплено нерухомо, а до нижнього підвішено вантаж масою $m_1 = 2$ кг. У деякий момент часу до вантажу m_1 додали вантаж масою $m_2 = 0,8$ кг. Визначити рівняння руху та період коливань обох вантажів (рис. 16.10).

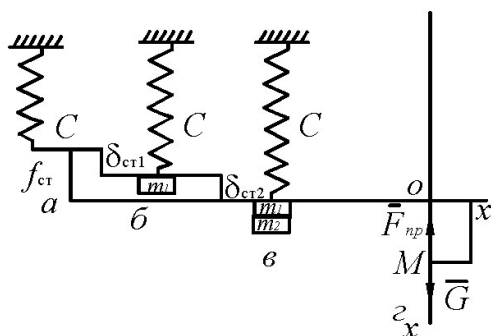


Рис. 16.10

Розв'язання

Коли вантаж масою m_1 підвішено нерухомо на пружині (рис. 16.10, б), її деформація дорівнює δ_{CT1} , а деформація пружини під дією вантажу m_2 дорівнює δ_{CT2} . Коливання вантажів на пружині розглядаємо відносно стану рівноваги, коли вантажі масою m_1 і m_2 нерухомі (рис. 16.10, в, г), тобто сила ваги цих вантажів зрівноважується пружною силою. Рівняння руху вантажів уздовж осі Ox матиме вигляд

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix},$$

$$\begin{aligned}\text{де } \sum F_{ix} &= -G - F_{np} = (m_1 + m_2)g - c(f_{CT} + x) = m_1g + m_2g - cf_{CT} - cx = \\ &= m_1g + m_2g - c(\delta_{CT1} + \delta_{CT2}) - cx = -cx.\end{aligned}$$

Тоді $m\ddot{x} = -cx$ або $\ddot{x} + k^2x = 0$,
де

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{c}{m_1 + m_2} = \frac{98}{2 + 0,8} = 35 \text{ с}^{-2} (k = 5,91 \text{ с}^{-1}).$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має загальний інтеграл

$$x = C_1 \cdot \cos kt + C_2 \cdot \sin kt.$$

Сталі інтегрування C_1 і C_2 визначаємо з початкових умов: при $t = 0$ $x_0 = -\delta_{CT2}$; $\dot{x}_0 = 0$.

Швидкість руху вантажів масою m_1 і m_2 у довільний момент часу t визначаємо, диференціюючи рівняння (16.2) за часом t :

$$\dot{x} = -kC_1 \cdot \sin kt + kC_2 \cdot \cos kt.$$

Враховуючи початкові умови, маємо

$$C_1 = -\delta_{CT2} = -\frac{G_2}{C} = -\frac{m_2g}{C} = -\frac{0,8 \cdot 9,8}{98} = -0,08 \text{ м},$$

Тоді

$$x = -\delta_{CT2} \cdot \cos kt = -0,08 \cdot \cos 5,91t \text{ м.}$$

Період коливань обох вантажів

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{5,91} = 1,06 \text{ с.}$$

Задача 3.9. На точку вагою 0,98 Н діють сила притягання до нерухомого центра, пропорційна до відстані точки від центра, і сила опору, пропорційна до першого степеня швидкості (рис. 16.3). Сила притягання на відстані 0,01 м від центра дорівнює 0,1 Н, а сила опору при швидкості 0,01 м/с - 0,012 Н. У початковий момент відстань точки від центра дорівнює 0,03 м, а швидкість - 0,06 м/с і напрямлена від центра. Знайти рівняння руху точки.

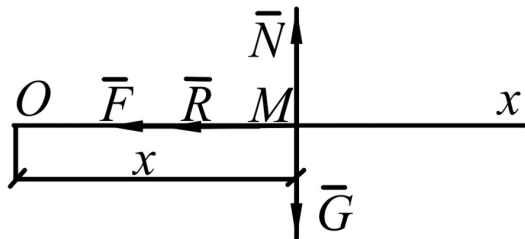


Рис. 16.11

Розв'язання

Знаходимо коефіцієнти пропорційності c і μ :

$$F = F_{np} = cx \Rightarrow c = \frac{F}{x} = \frac{0,1}{0,01} = 10 \text{ Н/м,}$$

$$R = \mu \cdot V \Rightarrow \mu = \frac{R}{V} = \frac{0,012}{0,01} = 1,2 \text{ с/м.}$$

Згідно з рис. 16.11, диференціальне рівняння руху точки в проекції на вісь Ox матиме вигляд

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = -F - R = -cx - \mu \cdot \dot{x}$$

або

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

де $m = \frac{G}{g} = \frac{0,98}{9,8} = 0,1 \text{ кг,} \quad k^2 = \frac{c}{m} = \frac{10}{0,1} = 0,1 \cdot 10^2 \text{ с}^{-2}, (k = 10 \text{ с}^{-1}),$

$$2n = \frac{\mu}{m} = \frac{1,2}{0,1} = 12 \text{ с}^{-1}$$

Оскільки $k > n$, то розв'язок цього рівняння набирає вигляду

$$x = e^{-nt} (C_1 \cdot \cos k_1 t + C_2 \cdot \sin k_1 t),$$

де

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = 8 \text{ с}^{-1}.$$

Сталі інтегрування визначаємо з початкових умов (при $t = 0$ $x_0 = 0,03$ м; $\dot{x}_0 = 0,06$ м/с): $C_1 = x_0 = 0,03$ м.

Для визначення C_2 знаходимо вираз для швидкості:

$$\dot{x} = -ne^{-nt} (C_1 \cdot \cos k_1 t + C_2 \cdot \sin k_1 t) + e^{-nt} (-k_1 C_1 \cdot \sin k_1 t + k_1 C_2 \cdot \cos k_1 t).$$

Тоді $\dot{x}_0 = -n(C_1 \cdot 1 + 0) + 1 \cdot (0 + k_1 \cdot C_2)$, звідки

$$C_2 = \frac{C_1 \cdot n + \dot{x}_0}{k_1} = \frac{0,03 \cdot 6 + 0,06}{8} = 0,03 \text{ м.}$$

Підставляючи числові значення у розв'язок, знаходимо

$$x = e^{-6t} (0,03 \cdot \cos 8t + 0,03 \cdot \sin 8t) = 0,03e^{-6t} (\cos 8t + \sin 8t) \text{ м.}$$

Таким чином, точка виконує загасаючі коливання.

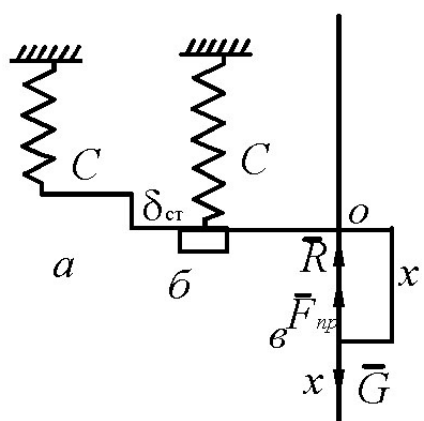


Рис. 16.12

Задача 3.10. Тіло вагою 49 Н, підвішене на пружині з коефіцієнтом жорсткості $c = 125$ Н/м, рухається під дією опору середовища $R = \mu V$, Н ($\mu = 50$ Н·с/м). У початковий момент довжина пружини на 3 см більша від її довжини у стані рівноваги, а швидкість „ тіла дорівнює 6 см/с і напрямлена вертикально вниз. Знайти рівняння руху тіла.

Розв'язання

Диференціальне рівняння руху точки згідно з рис. 16.12

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix} = G - F_{np} - R = -mg - c(x + \delta_{cm}) - \mu \dot{x}.$$

Після спрощень матимемо

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0,$$

де

$$m = \frac{G}{g} = \frac{49}{9,8} = 5 \text{ кг}, \quad 2n = \frac{50}{5} = 10 \text{ с}^{-1} \quad (n = 5 \text{ с}^{-1}),$$

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{125}{5} = 25 \text{ с}^{-2} \quad (k = 5 \text{ с}^{-1}).$$

Оскільки $k = n$, то розв'язок цього рівняння буде

$$x = e^{-nt}(C_1t + C_2).$$

Сталі інтегрування визначаємо з початкових умов задачі (при $t = 0$ $x_0 = 3$ см, $\dot{x} = 6$ см/с): $C_2 = x_0 = 3$ см.

Для визначення сталої величини C_1 знаходимо вираз для швидкості

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-nt} \cdot (C_1t + C_2) + e^{-nt} \cdot C_1.$$

Тоді, $\dot{x}_0 = -n \cdot C_2 + C_1$,

звідки $C_1 = \dot{x}_0 + n \cdot C_2 = 6 + 5 \cdot 3 = 21$ см.

Підставляючи значення C_1 і C_2 в розв'язок, маємо

$$x = e^{-5t}(21 \cdot t + 3) = 3 \cdot e^{-5t}(7 \cdot t + 1) \text{ см.}$$

Згідно з одержаним рівнянням точка виконує аперіодичний рух.

Задача 3.11. На вантаж вагою 2,45 Н, підвішений на пружині, коефіцієнт жорсткості якої $c = 100$ Н/м, діє вертикальна сила $F = 1,8 \cdot \sin 16t$, Н. Знайти рівняння вимушених коливань вантажу.

Розв'язання

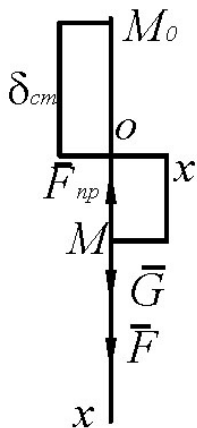


Рис. 16.13

Розглянемо рух вантажу, вважаючи його матеріальною точкою M . Рух точки M невільний, в'яззю є пружина. Систему сил, які діють на вантаж, зображено на рис. 16.13 (точка M_0 відповідає положенню, коли пружина не розтягнута). На рухому точку M діє стала сила ваги G , змінна сила пружності пружини $F_{пр} = c \cdot \Delta = c(x + \delta_{CT})$ і збурююча сила F .

У проекції на координатну вісь Ox , напрямлену вниз (у напрямі руху точки), дістанемо:

$$m\ddot{x} = G - F_{np} + F,$$

або

$$m\ddot{x} = G - cx - c\delta_{CT} + H_0 \cdot \sin pt,$$

де

$$H_0 = 1,8 \text{ Н}; \quad p = 16 \text{ с}^{-1}; \quad m = G/g = 2,45/9,8 = 0,25 \text{ кг}.$$

Беручи до уваги, що $c \cdot \delta_{CT} = G$ (у стані статичної рівноваги), після спрощень матимемо

$$\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin pt,$$

де $h = \frac{H_0}{m} = \frac{1,8}{0,25} = 7,2 \text{ м/с}^2; \quad k^2 = \frac{c}{m} = \frac{100}{0,25} = 400 \text{ с}^{-2}, \quad (k = 20 \text{ с}^{-1}).$

Враховуючи, що $k \neq p$, ($k = 20 \text{ с}^{-1}$, $p = 16 \text{ с}^{-1}$), окремий розв'язок цього диференціального рівняння шукаємо у вигляді

$$x_2 = B \cdot \sin pt.$$

Для знаходження B визначимо $\dot{x}_2$ і $\ddot{x}_2$:

$$\dot{x}_2 = Bp \cdot \cos pt, \quad \ddot{x}_2 = -B \cdot p^2 \cdot \sin pt.$$

Підставляючи $\dot{x}_2$ і $\ddot{x}_2$ у рівняння $\ddot{x} + k^2 x = h \cdot \sin pt$, матимемо

$$-Bp^2 \cdot \sin pt + k^2 B \cdot \sin pt = h \cdot \sin pt,$$

звідки $B = h / (k^2 - p^2).$

Тоді
$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin pt = \frac{7,2}{20^2 - 16^2} \sin 16t = 0,05 \cdot \sin(16t) \text{ м}.$$

Це й буде рівняння вимушених коливань вантажу.

Запитання для самоперевірки і контролю

1. Які рухи МТ називаються вільними, загасаючим, вимушеними коливаннями?
2. У якому випадку МТ здійснює аперіодичний рух?
3. Чи залежить період вільних, загасаючих коливань від початкових умов?
4. За яким законом змінюється амплітуда загасаючих коливань?
5. Що таке декремент загасання і що він характеризує?
6. Чи залежать вимушені коливання МТ від початкових умов?
7. У якому випадку при дії на МТ гармонічної збруюючої сили настає явище резонансу?
8. У чому полягає явище резонансу? Як змінюється з часом амплітуда вимушених коливань у цьому випадку?

17. Вступ до динаміки систем. Моменти інерції

17.1. Механічна система. Внутрішні і зовнішні сили

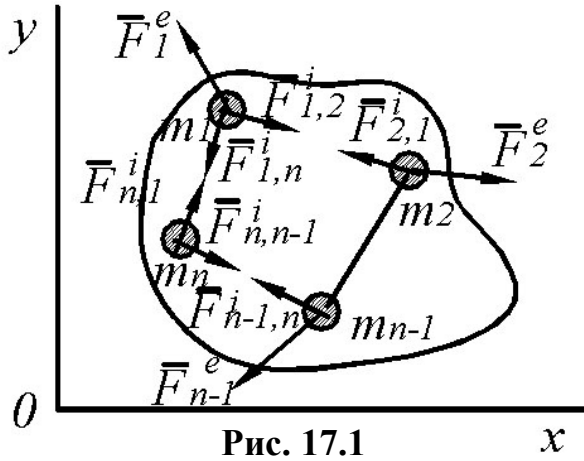


Рис. 17.1

Механічна система — система матеріальних точок (тіл), в якій положення або рух кожної точки (тіла) залежить від положення і руху всіх інших.

На кожну точку механічної системи діють як зовнішні, так і внутрішні сили (рис. 17.1). Зовнішні сили ($\vec{F}_k^e$)

— це сили, що діють на систему з боку тіл, які не входять у дану систему. Внутрішні сили ($\vec{F}_k^i$) — сили взаємодії між точками даної системи.

Розглянемо властивості внутрішніх сил. Оскільки

$$\vec{F}_{1,2}^i = -\vec{F}_{2,1}^i, \vec{F}_{2,3}^i = -\vec{F}_{3,2}^i, \dots, \vec{F}_{n-1,n}^i = -\vec{F}_{n,n-1}^i,$$

то головний вектор внутрішніх сил

$$\vec{R}_{\text{гол}}^i = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k^i = 0 \quad (17.1)$$

Головний момент внутрішніх сил (рис. 17.2):

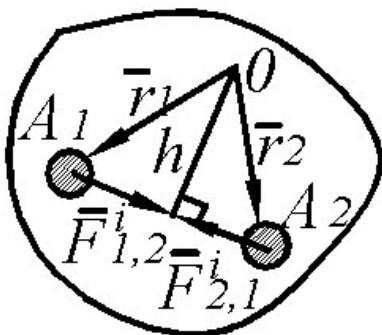


Рис. 17.2

$$\vec{M}_{\text{гол}(1,2)}^i = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2}^i + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1}^i = 0,$$

$$\text{оскільки } \vec{F}_{1,2}^i = -\vec{F}_{2,1}^i \text{ і } |\vec{r}_1 \times \vec{F}_{1,2}^i| = F_{1,2}^i \cdot h,$$

$$|\vec{r}_2 \times \vec{F}_{2,1}^i| = -F_{2,1}^i \cdot h.$$

Таким чином,

$$\vec{M}_{\text{гол}}^i = \sum_{k=1}^n \vec{M}_{\text{гол}(k,k-1)}^i = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0 \left(\vec{F}_k^i \right) = 0. \quad (17.2)$$

17.2. Центр мас механічної системи

Маса механічної системи дорівнює алгебраїчній сумі мас МТ (тіл), що входять до системи (рис. 17.3):

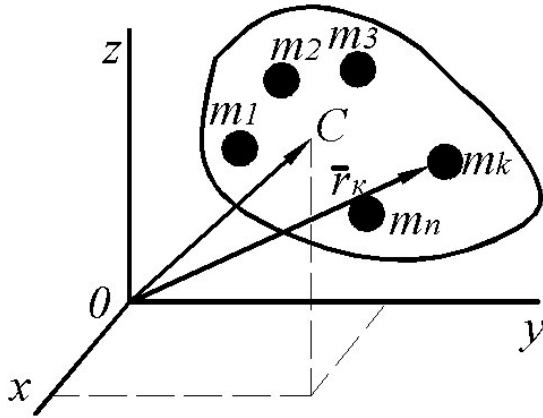


Рис. 17.3

$$M = \sum_{k=1}^n m_k. \quad (17.3)$$

Центр мас — геометрична точка, радіус-вектор якої визначається за формулою

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}. \quad (17.4)$$

В однорідному полі сил ваги центр мас збігається з *центром ваги*.

У декартовій системі координат координати центра мас

$$x_C = \frac{\sum m_k \cdot x_k}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_k \cdot y_k}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_k \cdot z_k}{M}. \quad (17.5)$$

Введення поняття центра мас дає змогу у разі випадків звести задачу про рух системи матеріальних точок до задачі про рух однієї точки — центра мас.

17.3. Момент інерції тіл відносно осі

Положення центра мас характеризує розподіл мас системи неповністю. Тому вводять ще одну характеристику — момент інерції. Вперше це поняття введено Л. Ейлером.

Моментом інерції тіла відносно даної осі називається скалярна величина, що дорівнює сумі добутків мас усіх точок тіла (системи) на квадрати їх відстаней від цієї осі. Наприклад, відносно осі z

$$J_z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot h_k^2, \text{ або } J_z = \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2). \quad (17.6)$$

Момент інерції твердого тіла відносно даної осі може бути записаний ще й таким чином:

$$J_z = M \cdot i_z^2, \quad (17.7)$$

де M — маса тіла; i_z - радіус інерції тіла відносно осі z .

Радіус інерції тіла визначає ту відстань від осі до точки, де треба зосередити всю масу M тіла, щоб момент інерції однієї цієї точки дорівнював моменту інерції всього тіла.

Якщо розглядають суцільне тіло, то його поділяють на елементарні частини. Тоді

$$J_z = \int_{(v)} h^2 dm. \quad (17.8)$$

Момент інерції виражається в кілограмах на квадратний метр ($\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

17.3.1. Момент інерції стержня

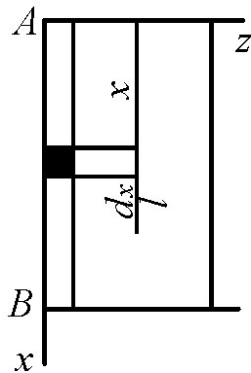


Рис. 17.4

Розглянемо стержень довжиною l і вагою G (масою M). Якщо вісь Az (рис. 17.4) проходить через кінець стержня, то момент інерції стержня

$$J_z = \int_{(l)} x^2 dm; \quad dm = \rho_1 \cdot dx = \frac{M}{l} dx;$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} J_z &= \int_0^l x^2 \frac{M}{l} \cdot dx = \frac{M}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{M}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \\ &= \frac{M}{l} \cdot \frac{l^3}{3} = \frac{Ml^2}{3}. \end{aligned} \quad (17.9)$$

17.3.2. Момент інерції тонкого круглого кільця (обода)

Розглянемо кільце масою M і радіуса R .

Якщо вісь Cz перпендикулярна до площини кільця і проходить через центр C (рис. 17.5), то

$$J_z = \sum m_k h_k^2 = \sum m_k R^2 = R^2 \cdot \sum m_k = M \cdot R^2.$$

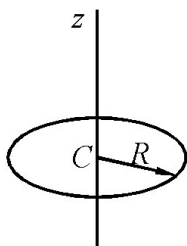


Рис. 17.5

$$J_z = M \cdot R^2. \quad (17.10)$$

17.3.3. Момент інерції круглої платівки (циліндра)

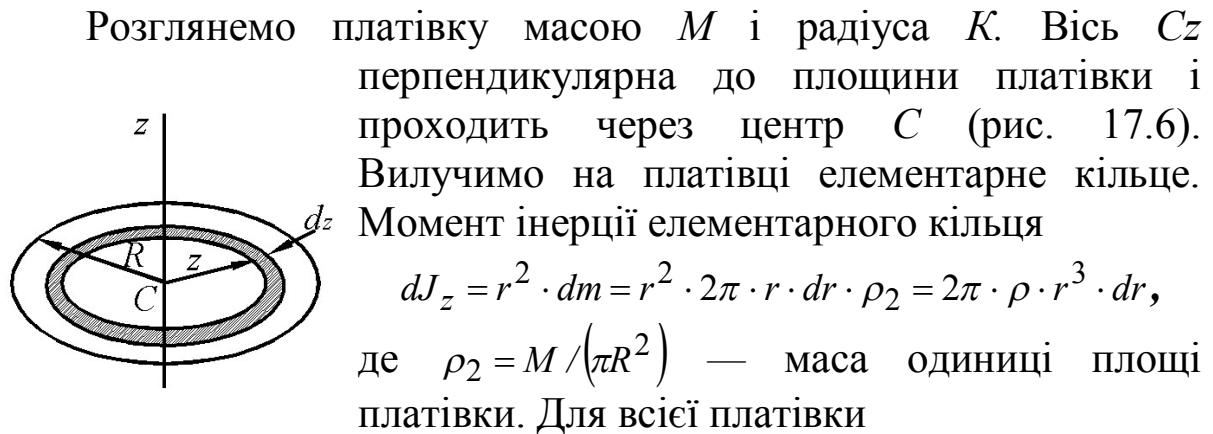


Рис. 17.6

$$J_z = \int dJ_z = 2\pi\rho_2 \int_0^R r^3 \cdot dr = \pi\rho_2 \frac{R^4}{2} = \frac{MR^2}{2}. \quad (17.11)$$

Якщо вісь лежить у площині платівки і збігається з діаметром, то

$$J_x = J_y = M \cdot R^2 / 4. \quad (17.12)$$

17.3.4. Моменти інерції прямокутної платівки, конуса, кулі

Для суцільної прямокутної платівки масою M , сторони якої a та b , коли вісь x спрямована вздовж a , а вісь y — вздовж b , моменти інерції

$$J_x = M \cdot b^2 / 3, \quad J_y = M \cdot a^2 / 3.$$

Для суцільного колового конуса масою M з основою радіуса R момент інерції відносно осі z , яка спрямована вздовж осі конуса,

$$J_z = 0,3 \cdot M \cdot R^2.$$

Для суцільної кулі масою M і радіусом R момент інерції відносно осі, що спрямована вздовж діаметра,

$$J_z = 0,4 \cdot M \cdot R^2.$$

17.3.5. Теорема Гюйгенса—Штейнера (теорема про моменти інерції відносно паралельних осей)

Момент інерції тіла відносно даним осі дорівнює моменту інерції відносно осі, паралельної їй, що проходить через центр мас тіла, доданому до добутку маси всього тіла, на квадрат відстані між осями.

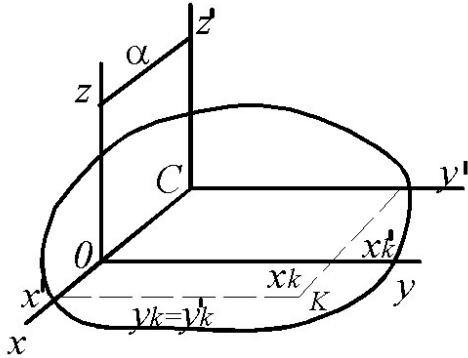


Рис. 17.7

Покажемо, як, знаючи момент інерції відносно будь-якої одної осі, що проведена в тілі, знайти момент інерції відносно іншої осі, що їй паралельна.

Якщо провести через центр мас C тіла довільні осі $Cx'y'z'$, а через будь-яку точку O на осі Cx' — осі $Oxyz$ такі, що $Oy \parallel Cy$, $Oz \parallel Cz$ (рис. 17.7), а відстань між осями Cz' і Oz дорівнює d , то моменти інерції відносно цих осей:

$$J_{Oz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2),$$

$$J_{Cz} = \sum m_k [(x'_k)^2 + (y'_k)^2].$$

Оскільки довільна точка K має координати $x_k = x'_k - d$, $y_k = y'_k$,

то

$$J_{Oz} = \sum m_k [(x'_k - d)^2 + (y'_k)^2] = \sum m_k [(x'_k)^2 + (y'_k)^2] + d^2 \sum m_k - 2d \cdot \sum m_k x'_k = I_{Cz'} + M \cdot d^2 - 2d \cdot \sum m_k x'_k.$$

Враховуючи, що $\sum m_k x'_k = M \cdot x_C$ і точка C — початок координат, $x_C = 0$, $\sum m_k x'_k = 0$. Тоді

$$J_{Oz} = J_{Cz'} + M \cdot d^2. \quad (17.13)$$

Формула (17.13) виражає теорему Гюйгенса — Штейнера. З цієї формули видно, що $J_{Oz} > J_{Cz}$, тобто із усіх осей даного напрямку момент інерції буде мінімальним відносно осі, що проходить через центр мас.

Задача 3.12. Визначити момент інерції стержня масою M і довжиною l відносно осі, що проходить через центр мас (рис. 17.8).

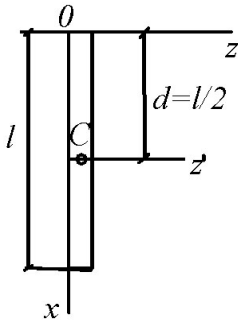


Рис. 17.8

Розв'язання

Згідно з (17.9) і (17.13) можна записати

$$J_{Cz'} = J_{Oz} - M \cdot d^2 = \frac{M \cdot l^2}{3} - M \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{M \cdot l^2}{12}. \quad (17.14)$$

17.4. Диференціальні рівняння руху системи МТ

На кожную точку системи діють як зовнішні ($\vec{F}_k^e$), так і внутрішні ($\vec{F}_k^i$) сили. Тому згідно з (15.2) можна записати

$$m_k \vec{a}_k = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i.$$

Аналогічний результат дістанемо й для інших точок системи. Таким чином, для всієї системи

$$\left. \begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^e + \vec{F}_1^i, \\ m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2^e + \vec{F}_2^i, \\ &\dots\dots\dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^e + \vec{F}_n^i. \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Ці рівняння і є диференціальними рівняннями руху матеріальної системи у векторній формі.

Запитання для самоперевірки і контролю

1. Які дві класифікації сил. застосовують у механіці?
2. Що таке центр мас системи? За якими формулами визначають положення центра мас?
3. Що таке момент інерції твердого тіла відносно осі?

4. Яка величина називається радіусом інерції тіла?
5. Як визначається осьовий момент інерції однорідних тіл найпростішої форми: стержня, кільця (обода), диска (циліндра)?
6. Яка залежність між моментом інерції тіла відносно паралельних осей?
7. Запишіть диференціальні рівняння руху матеріальної системи у векторній формі.

18. Загальні теореми динаміки точки і матеріальної системи

Розв'язання диференціальних рівнянь (17.15) пов'язано з великими труднощами, оскільки вони мають високий порядок, а праві частини рівнянь містять внутрішні сили, значення яких не завжди відомі.

До ефективних методів розв'язання багатьох задач механіки належать загальні або основні теореми динаміки, які характеризують окремі властивості механічного руху і надають часткову інформацію про цей рух.

У динаміці системи матеріальних точок розглядають чотири основні теореми – про рух центра мас, про зміну кількості руху, про зміну кінетичного моменту та про зміну кінетичної енергії. У динаміці матеріальної точки основних теорем три – про зміну кількості руху, про зміну моменту кількості руху та про зміну кінетичної енергії.

Загальні теореми динаміки мають як диференціальну, так і інтегральну форми запису.

18.1. Теорема про рух центра мас матеріальної системи

Оскільки на систему діють як зовнішні, так і внутрішні сили, то рівняння руху системи мають вигляд

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

Тут згідно з властивістю внутрішніх сил (18.1) $\sum \vec{F}_k^i = 0$, а

згідно з (18.4)

$$\sum m_k \vec{a}_k = \sum m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = M \ddot{\vec{r}}_C = M \vec{a}_C.$$

Остаточно можна записати

$$M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e. \quad (18.1)$$

Теорема. Добуток маси матеріальної системи на прискорення центра мас дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, що діють на систему, або центр мас механічної системи під дією зовнішніх сил рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи.

У проекціях на осі декартової системи координат рівняння (18.1) має вигляд

$$M \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad M \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e, \quad M \ddot{z}_C = \sum F_{kz}^e. \quad (18.2)$$

Ця теорема має велике практичне значення. Вона дозволяє виключити з розгляду заздалегідь невідомі внутрішні сили та дає обґрунтування динаміки матеріальної точки.

18.1.1. Закон збереження руху центра мас матеріальної системи (наслідки із теореми)

1. Якщо $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то $M \vec{a}_C = 0$, або $\vec{V}_C = \text{const}$.

Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається зі сталою за модулем і напрямом швидкістю.

2. Коли, наприклад, $\sum F_{kx}^e = 0$, то $M \ddot{x}_C = 0$ або $V_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const}$.

Якщо зовнішні сили, що діють на систему, такі, що сума їх проекцій на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція вектора швидкості центра мас на вісь є величина стала.

18.1.2. Методика розв'язування задач

Теорема про рух центра мас системи застосовується в таких випадках:

а) при вивченні поступального руху системи, оскільки всі точки системи в цьому випадку мають у даний момент однакові швидкості й прискорення, і тому поступальний рух системи повністю визначається рухом центра мас;

б) при складному русі, коли розглядають поступальну складову руху разом з центром мас, оскільки складний рух системи завжди можна розкласти на переносний поступальний рух разом з центром мас і відносний рух відносно центра мас;

в) коли $\vec{F}_k^e = 0$ або одна з його проекцій на координатні осі, наприклад на вісь x , $\sum F_{kx}^e = 0$ (використовується висновок із теореми);

г) при визначенні руху однієї з точок системи за даним рухом інших точок і за даними зовнішніми силами;

д) при знаходженні головного вектора зовнішніх сил, у тому числі реакцій в'язей за даними законами руху точок системи.

Задачі за допомогою цієї теореми (висновків із неї) треба розв'язувати у такій послідовності:

1) з'ясувати, які матеріальні точки (тіла) треба включити до системи, рух якої розглядається (указати об'єкт руху);

2) визначити в'язі відносно виділеної системи точок;

3) користуючись принципом звільнення від в'язей, відкинути останні, замінивши їх дію на точки системи реакціями в'язей;

4) скласти схему зовнішніх сил, включаючи й реакції в'язей, прикладених до виділеної системи точок (тіл);

5) вибрати систему координат і скласти диференціальні рівняння руху центра мас системи в проекціях на осі декартової системи координат у вигляді (18.2);

6) при розв'язуванні прямої задачі динаміки треба двічі продиференціювати координати центра мас за часом і з рівнянь (18.2) визначити проекції головного вектора зовнішніх сил на координатні осі;

7) при розв'язуванні оберненої задачі динаміки необхідно розв'язати задачу Коші, тобто зінтегрувати диференціальні рівняння і визначити сталі інтегрування на основі початкових умов, після чого записати закон руху центра мас;

8) після розв'язування задачі треба дослідити результат і зробити, якщо це можливо, узагальнюючий висновок.

Задача 3.13. Однорідні блоки радіусами r_1 і r_2 ($r_1 > r_2$) жорстко скріплені між собою і насаджені на спільну горизонтальну вісь O (рис. 18.1). Загальна вага блоків O , вага вантажів M_1 і M_2 відповідно G_1 і G_2 , прискорення вантажу M_1 дорівнює a_1 . Визначити тиск блоків на вісь обертання.

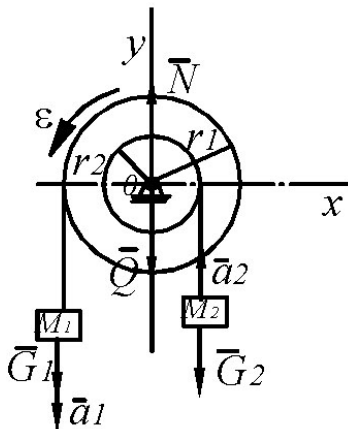


Рис. 18.1

Розв'язання

Розглянемо рух матеріальної системи, що складається з блоків і вантажів. В'яzzу відносно виділеної системи є опора O , реакція N якої спрямована вздовж осі Oy , оскільки всі зовнішні сили вертикальні.

Рівняння руху такої системи в проекції на вісь Oy :

$$\sum m_k a_{ky} = \sum F_{ky}^e, \quad \text{або} \quad m_1 a_{1y} + m_2 a_{2y} + m_3 a_{3y} = \sum F_{ky}^e \quad (18.3)$$

де

$$m_1 = G_1 / g; \quad m_2 = G_2 / g; \quad m_3 = G_3 / g; \quad \sum F_{ky}^e = N - Q - G_1 - G_2.$$

Проекція прискорення кожного тіла на вісь Oy :

$$a_{1y} = -a_1; \quad a_{2y} = a_2 = \varepsilon \cdot r_2 = a_1 \cdot r_2 / r_1;$$

$a_{3y} = 0$ (оскільки центр мас блоків — точка O нерухома).

Підставляючи все в рівняння (18.3), матимемо

$$-\frac{G_1}{g} \cdot a_1 + \frac{G_2}{g} \cdot a_1 \cdot r_2 / r_1 + 0 = N - Q - G_1 - G_2,$$

звідки

$$M = Q + G_1 + G_2 - \frac{a_1}{g\eta_1}(G_1 \cdot r_1 - G_2 \cdot r_2).$$

Задача 3.14. У човні вагою Q на спокійній воді почали одночасно рухатися від лав до корми двоє людей вагою G_1 і G_2 . Їх переміщення відносно човна дорівнює відповідно l_1 і l_2 . Нехтуючи опором води, визначити переміщення човна.

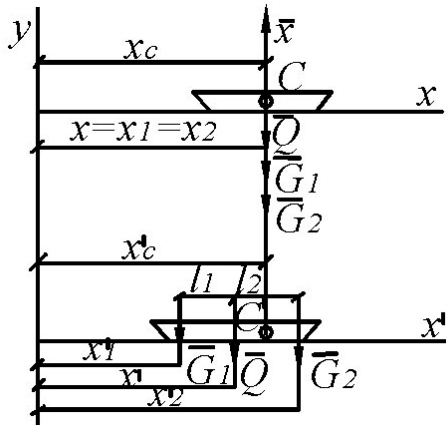


Рис. 18.2

Розв'язання

Розглянемо рух матеріальної системи, що складається з човна і двох людей (рис. 18.2). В'яззю відносно виділеної системи, враховуючи умови задачі, є ідеальна горизонтальна площина, реакція якої N напрямлена перпендикулярно до цієї площини. Оскільки в початковому і кінцевому положеннях система нерухома, а сили, що діють на систему, вертикальні, то

$$x_C = \text{const} \quad \text{або} \quad x_C = x_{C'} = \text{const}. \quad (18.4)$$

Ця закономірність (коли координата центра мас на початку і кінці руху системи залишається тією самою) впливає із закону збереження руху центра мас матеріальної системи.

У початковому положенні

$$x_C = \frac{\sum m_k x_k}{M} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m x}{m_1 + m_2 + m} = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + Q x}{G_1 + G_2 + Q}.$$

У кінцевому положенні

$$x_{C'} = \frac{\sum m_k x'_k}{M} = \frac{m_1 x'_1 + m_2 x'_2 + m x'}{m_1 + m_2 + m} = \frac{G_1 x'_1 + G_2 x'_2 + Q x'}{G_1 + G_2 + Q}.$$

Беручи до уваги рівності (18.4), маємо:

$$G_1x_1 + G_2x_2 + Qx = G_1x'_1 + G_2x'_2 + Qx'.$$

При цьому

$$x'_1 = x_1 - l_1 - s, \quad x'_2 = x_2 + l_2 + s, \quad x' = x - s,$$

де s — переміщення човна.

Тоді рівняння (18.5) можна записати так:

$$G_1x_1 + G_2x_2 + Qx = G_1(x_1 - l_1 - s) + G_2(x_2 + l_2 + s) + Q(x - s)$$

або

$$0 = -G_1l_1 + G_2l_2 - s(G_1 + G_2 + Q),$$

звідки

$$s = \frac{G_2l_2 - G_1l_1}{G_1 + G_2 + Q}.$$

18.2. Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки і системи

18.2.1. Кількість руху точки і системи. Імпульс сили

Кількістю руху точки називається векторна величина $\vec{q}$, що дорівнює добутку мас точки на вектор її швидкості. Вектор $\vec{q} = m\vec{V}$ напрямлений до траєкторії руху точки: $[m\vec{V}] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Н} \cdot \text{с}$.

Кількість руху механічної системи дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількостей руху всіх точок, що входять до системи, або добутку маси системи на швидкість її центра мас:

$$\vec{Q} = \sum m_k \vec{V}_k = M \cdot \vec{V}_C. \quad (18.6)$$

Мірою дії сили за деякий інтеграл часу є імпульс сили. Елементарний імпульс сили $d\vec{S} = \vec{F} \cdot dt$, а імпульс сили за скінченний проміжок часу

$$\bar{S} = \int_{(t)}^t d\bar{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt. \quad (18.7)$$

Розмірність $[\bar{S}] = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Н} \cdot \text{с}.$

18.2.2. Теорема про зміну кількості руху точки

Ця теорема еквівалентна основному рівнянню динаміки і записується так:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_i. \quad (18.8)$$

Перша похідна від кількості руху матеріальної точки за часом дорівнює геометричній сумі сил, що діють на точку.

Інтегруючи рівняння (18.8) одержимо цю теорему в інтегральній формі:

$$d(m\vec{V}) = \sum \vec{F}_i \cdot dt,$$

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}_1} d(m\vec{V}) = \sum \int_0^t \vec{F}_i \cdot dt,$$

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum \vec{S}_i. \quad (18.9)$$

Приріст кількості руху матеріальної точки за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі Імпульсів усіх сил, що діють на точку, за той самий проміжок часу.

У проекціях на координатні осі рівняння (18.9) матимемо:

$$\left. \begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= \sum S_{ix}, \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= \sum S_{iy}, \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= \sum S_{iz}. \end{aligned} \right\} \quad (18.10)$$

18.2.3. Теорема про зміну кількості руху системи

На кожен точку системи (рис. 18.3) діють як зовнішні $\vec{F}_k^e$,

так і внутрішні $\vec{F}_k^i$ сили. Теорема (18.8) набирає вигляду

$$\frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \vec{F}_k^e + \vec{F}_k^i \quad (k=1, n).$$

Для всіх точок системи

$$\sum \frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \sum \vec{F}_k^e + \sum \vec{F}_k^i.$$

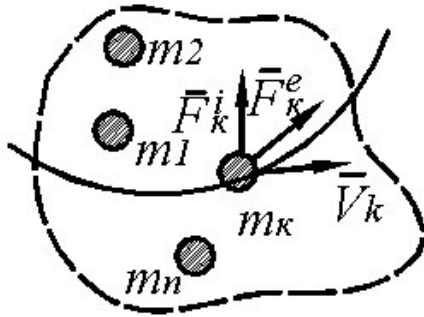


Рис. 18.3

Оскільки $\sum \vec{F}_k^i = 0$ (згідно з властивостями внутрішніх сил), а

$$\sum \frac{d(m_k \vec{V}_k)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum m_k \vec{V}_k = \frac{d\vec{Q}}{dt}$$

то

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e. \quad (18.11)$$

Перша похідна за часом від кількості руху матеріальної системи дорівнює геометричній сумі зовнішніх сил, що діють на систему.

Інтегруючи рівняння (18.11), одержимо цю теорему в інтегральній формі:

$$d\vec{Q} = \sum \vec{F}_k^e dt; \quad \int_{\vec{Q}_0}^{\vec{Q}_1} d\vec{Q} = \sum \int_0^t \vec{F}_k^e dt;$$

$$\vec{Q}_1 - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e \quad (18.12)$$

Приріст кількості руху системи за будь-який фіксований проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів, що діють на систему зовнішніх сил, за той самий проміжок часу.

Проеціюючи рівняння (18.11) і (18.12) на осі координат, матимемо:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e,$$

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e; \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (18.13)$$

18.2.4. Закон збереження кількості руху матеріальної системи (висновок із теореми)

1. Коли $\sum \vec{F}_k^e = 0$, то $\vec{Q} = const$.

Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то головний вектор кількості руху цієї системи є величина стала за напрямом і модулем.

2. Коли, наприклад, $\sum \vec{F}_{kx}^e = 0$, то $Q_x = const$.

Якщо зовнішні сили, що діють на систему, такі, що сума їх проєкцій на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проєкція головного вектора кількості руху системи на цю вісь є величина стала.

18.2.5. Методика розв'язування задач

Критерій використання теореми про зміну кількості руху точки такий: якщо в умові задачі серед заданих або шуканих величин є час руху, то теорему слід застосовувати в інтегральній формі; якщо силу задано як функцію часу або як сталу величину, то диференціальне рівняння, що виражає теорему, слід зінтегрувати.

Методика розв'язання задач така сама, як і за допомогою теореми про рух центра мас.

Задача 3.15. Тіло A (рис. 18.4), розмірами якого можна знехтувати, рухалось уздовж ділянки шляху BC ; у кінці цієї

ділянки воно набуло горизонтальної швидкості 15 м/с. Потім його рух по траєкторії CD був вільним протягом 2,04 с. Визначити модуль і напрям швидкості тіла в кінці ділянки CD .

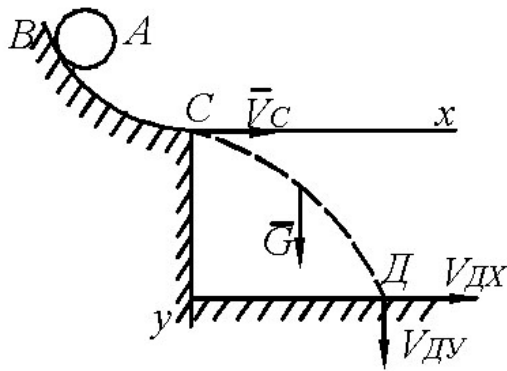


Рис. 18.4

Розв'язання

Щоб визначити швидкість тіла A , яке рухається як вільна матеріальна точка під дією сили ваги G , в точці D , застосуємо теорему про зміну кількості руху точки (18.10) у проекціях на осі координат:

$$mV_{1x} - mV_{0x} = \sum S_{ix},$$

$$mV_{1y} - mV_{0y} = \sum S_{iy}.$$

Проекції початкової і кінцевої швидкостей тіла A на координатні осі

$$V_{1x} = V_{Dx}, \quad V_{0x} = V_C, \quad V_{1y} = V_{Dy}, \quad V_{0y} = 0.$$

Крім того,

$$\sum S_{ix} = \sum \int_0^{\tau} F_{ix} dt = 0,$$

$$\sum S_{iy} = \sum \int_0^{\tau} F_{iy} dt = \int_0^{\tau} \sum F_{iy} dt = \int_0^{\tau} G \cdot dt = G\tau = mg\tau.$$

Тоді

$$\left. \begin{aligned} mV_{Dx} - mV_C &= 0, \\ mV_{Dy} - mV_C &= mg\tau, \end{aligned} \right\}$$

звідки

$$\left. \begin{aligned} V_{Dx} &= V_C, \\ V_{Dy} &= g\tau, \end{aligned} \right\}$$

Знаючи складові швидкості в точці D , дістанемо:

$$V_D = \sqrt{V_{Dx}^2 + V_{Dy}^2} = \sqrt{V_C^2 + g^2 \cdot \tau^2} = \sqrt{15^2 + 9,81^2 \cdot 2,04^2} = 25 \text{ м/с}.$$

Кут нахилу швидкості до горизонту визначаємо через напрямні косинуси:

$$\cos \alpha = \frac{V_{Dx}}{V_D} = \frac{15}{25} = 0,6, \quad \text{звідки } \alpha = 53^\circ 10'.$$

Задача 3.16. Кривошип OA вагою G_1 і довжиною l обертається з кутовою швидкістю ω_0 навколо осі O і приводить у рух шатун AB вагою G_2 і повзун B вагою G_3 . Визначити кількість руху механізму у випадку, коли кривошип OA перпендикулярний до прямої OB (рис. 18.5).

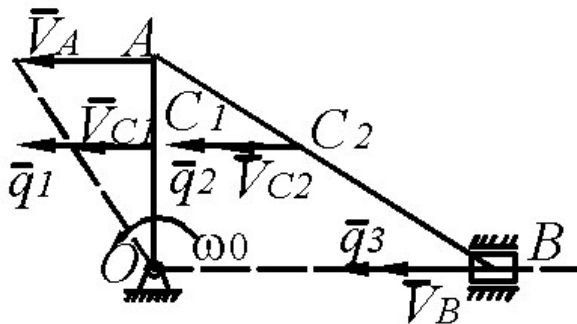


Рис. 18.5

Розв'язання

Механічна система складається з трьох тіл: кривошипа OA , шатуна AB і повзуна B . Визначимо спочатку швидкості центрів мас цих тіл:

$$V_{C1} = \frac{OA}{2} \omega_0 = \frac{l}{2} \omega_0.$$

Оскільки шатун у даний момент часу виконує поступальний рух (миттєвий центр швидкостей міститься в нескінченності), то швидкості точок A , C_2 та B однакові, тобто

$$V_B = V_{C2} = V_A = OA \cdot \omega_0 = l \cdot \omega_0.$$

Кількість руху кожного з тіл

$$q_1 = m_{OA} \cdot V_{C1} = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{l}{2} \cdot \omega_0, \quad q_2 = m_{AB} \cdot V_{C2} = \frac{G_2}{g} \cdot l \cdot \omega_0,$$

$$q_3 = m_B \cdot V_B = \frac{G_3}{g} \cdot l \cdot \omega_0.$$

Оскільки вектори $\vec{q}_1$, $\vec{q}_2$ і $\vec{q}_3$ паралельні, то

$$\begin{aligned} Q = \sum q_i &= q_1 + q_2 + q_3 = \frac{G_1}{g} \cdot \frac{l}{2} \cdot \omega_0 + \frac{G_2}{g} \cdot l \omega_0 + \frac{G_3}{g} \cdot l \cdot \omega_0 = \\ &= \frac{l \omega_0}{2g} (G_1 + 2G_2 + 2G_3). \end{aligned}$$

Задача 3.17. Граната масою $m=12$ кг, що летіла зі швидкістю $V=15$ м/с, розірвалась у повітрі на дві частини. Швидкість уламка маси 8 кг збільшилась у напрямі руху до 25 м/с. Визначити швидкість другого уламка.

Розв'язання

Гранату і два уламки розглядаємо як єдину матеріальну систему (рис. 18.6). Оскільки на систему діють тільки вертикальні сили ваги (опір повітря згідно з умовою задачі не

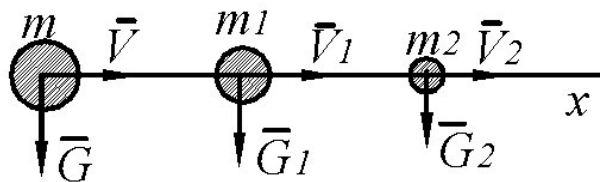


Рис. 18.6

враховується), то для розв'язання задачі використовуємо закон збереження кількості руху системи

$$Q_{0x} = Q_{1x} = \text{const}.$$

У початковий момент часу (до розриву гранати) $Q_{0x} = mV$. Після розриву гранати кількість руху системи $Q_{1x} = m_1V_1 + m_2V_2$. Зрівнюючи, маємо $mV = m_1V_1 + m_2V_2$, звідки

$$V_2 = \frac{mV - m_1V_1}{m_2} = \frac{mV - m_1V_1}{m - m_1} = \frac{12 \cdot 15 - 8 \cdot 25}{12 - 8} = -5 \text{ м/с}.$$

Таким чином, швидкість другого уламка дорівнює 5 м/с і напрямлена проти руху першого.

18.3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки і системи

18.3.1. Момент кількості, руху точки і системи

Моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра називається вектор-момент, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора на вектор кількості руху:

$$\vec{m}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V}. \quad (18.14)$$

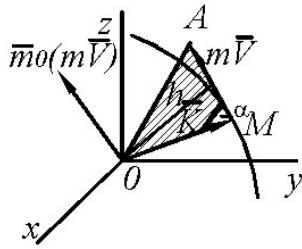


Рис. 18.7

Вектор-момент $\vec{m}_0(m\vec{V})$ перпендикулярний до площини $\triangle MOA$ (рис. 18.7) і спрямований у той бік, звідки видно обертання вектора $m\vec{V}$ проти ходу годинникової стрілки. Прикладено вектор у центрі O . Модуль вектора-моменту

$$m_0(m\vec{V}) = m \cdot V \cdot h = m \cdot V \cdot r \cdot \sin \alpha. \quad (18.15)$$

Головний момент кількості руху $\vec{L}_0$ матеріальної системи (кінетичний момент) відносно центра дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху точок, що входять до системи, відносно цього центра:

$$\vec{L}_0 = \sum_{k=1}^n \vec{m}_0(m_k \vec{V}_k) = \sum_{K=1}^n (\vec{r}_k \times m_k \vec{V}_k). \quad (18.16)$$

Кінетичний момент системи відносно будь-якої осі дорівнює проекції головного моменту кількості руху відносно центра на вісь, що проходить через цей центр:

$$\left. \begin{aligned} L_x &= np_x(\vec{L}_0) = \sum m_x(m_k \vec{V}_k), \\ L_y &= np_y(\vec{L}_0) = \sum m_y(m_k \vec{V}_k), \\ L_z &= np_z(\vec{L}_0) = \sum m_z(m_k \vec{V}_k). \end{aligned} \right\} \quad (18.17)$$

Проекція головного моменту кількості руху системи на нерухому вісь дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх векторів кількості руху відносно цієї осі.

18.3.2. Кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Визначимо кінетичний момент L_z тіла, що обертається навколо нерухомої осі z (рис. 18.8):

$$L_z = \sum m_k (m_k \vec{V}_k) = \sum (h_k \cdot m_k \cdot V_k) = \sum h_k \cdot m_k \cdot h_k = \omega \cdot \sum m_k \cdot h_k^2 = \omega I_z, \quad \text{де}$$

$$V_k = \omega \cdot h_k, \quad \sum m_k \cdot h_k^2 = J_z.$$

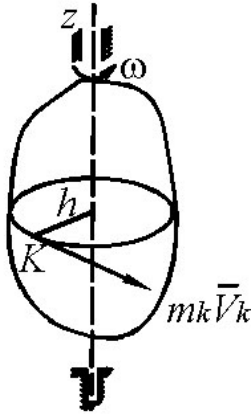


Рис. 18.8

$$L_z = J_z \cdot \omega. \quad (18.18)$$

Таким чином, кінетичний момент тіла, що обертається відносно осі, дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно цієї осі на кутову швидкість тіла.

Якщо система складається з кількох тіл, що обертаються навколо однієї осі, то

$$L_z = J_{1z} \cdot \omega_1 + J_{2z} \cdot \omega_2 + \dots + J_{nz} \cdot \omega_n.$$

Порівнюючи (18.18) з (18.6) - $\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C$, робимо висновок, що вектор кількості руху характеризує поступальний рух системи, а кінетичний момент тіла, що обертається відносно осі, характеризує обертальний рух його навколо осі.

18.3.3. Теорема про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра і осі

Ця теорема дозволяє зазначити, як змінюється за часом вектор $\vec{m}_0(m\vec{V})$ (рис. 18.9):

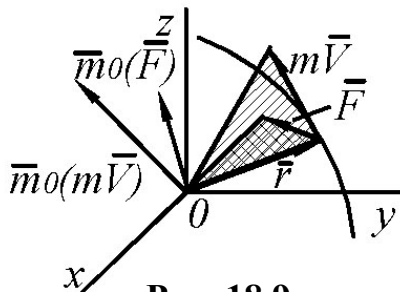


Рис. 18.9

$$\frac{d}{dt} [m_0(m\vec{V})] = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{V}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m \frac{d\vec{V}}{dt} =$$

$$\vec{V} \times m\vec{V} + \vec{r} \times m\vec{a} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{m}_0(\vec{F}).$$

Таким чином,

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_0(m\vec{V})] = \vec{m}_0(\vec{F}). \quad (18.19)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки відносно нерухомого центра дорівнює моменту сили відносно того самого центра.

У проекціях на осі координат матимемо

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [m_x(m\vec{V})] &= m_x(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} [m_y(m\vec{V})] &= m_y(\vec{F}), \\ \frac{d}{dt} [m_z(m\vec{V})] &= m_z(\vec{F}). \end{aligned} \right\} \quad (18.20)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомої осі дорівнює моменту сили, що діє на точку, відносно тієї самої осі.

Висновок із теореми (закон збереження моменту кількості руху матеріальної точки):

а) якщо момент сили, що діє на точку, відносно будь-якого нерухомого центра дорівнює нулю, то момент кількості руху точки відносно цього центра є величина стала як за модулем, так і за напрямом;

б) якщо момент сили, що діє на точку, відносно будь-якої нерухомої осі дорівнює нулю, то момент кількості руху матеріальної точки відносно цієї осі є величина стала.

18.3.4. Теорема про зміну кінетичного моменту матеріальної системи відносно центра і осі

Для довільної точки системи масою m_k (рис. 18.10), на яку діють як зовнішні $\vec{F}_k^e$, так і внутрішні $\vec{F}_k^i$ сили, теорема про зміну моменту кількості руху точки матиме вигляд

$$\frac{d}{dt} [\vec{m}_0(m_k \vec{V}_k)] = \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

Якщо записати аналогічні вирази для інших точок системи і додати їх, то

$$\sum \frac{d}{dt} [\vec{m}_0(m_k \vec{V}_k)] = \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^e) + \sum \vec{m}_0(\vec{F}_k^i).$$

де $k = 1, n$.

Оскільки згідно з (18.16)

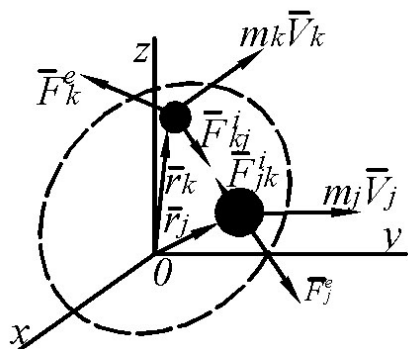


Рис. 18.10

$$\sum \frac{d}{dt} [\vec{m}_0 (m_k \vec{V}_k)] = \frac{d}{dt} \sum \vec{m}_0 (m_k \vec{V}_k) = \frac{d\vec{L}_0}{dt},$$

а $\sum \vec{m}_0 (\vec{F}_k^i) = 0$ згідно з (17.2), то

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum \vec{m}_0 (\vec{F}_k^e) = \vec{M}_0^e. \quad (18.21)$$

Теорема. *Похідна за часом від кінетичного моменту (головного моменту кількості руху) системи відносно будь-якого нерухомого центра дорівнює сумі моментів (головному моменту) всіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно того самого центра.*

Проеціюючи (18.21) на осі координат, маємо

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x^e, \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y^e, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z^e, \quad (18.22)$$

Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомої осі дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему відносно цієї осі.

18.3.5. Закон збереження головного моменту кількості руху системи

1. Коли $\vec{M}_0^e = \sum \vec{m}_0 (\vec{F}_k^e) = 0$, то $\vec{L}_0 = const$.

Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, відносно даного центра дорівнює нулю, то головний момент кількості руху (кінетичний момент) системи відносно цього центра є величина стала за модулем і напрямом.

2. Коли, наприклад, $M_z^e = \sum m_z (\vec{F}_k^e) = 0$, то $L_z = const$.

Якщо головний момент зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему, відносно будь-якої осі дорівнює нулю, то головний момент кількості руху системи відносно цієї осі є величина стала.

18.3.6. Методика розв'язування задач за допомогою теореми про зміну кінетичного моменту системи

При розв'язуванні задач за допомогою цієї теореми треба додержувати такої послідовності:

- 1) спрямувати одну з осей координат уздовж нерухомої осі обертання;
- 2) записати теорему відносно відповідної осі у вигляді (18.22);
- 3) показати всі зовнішні сили, що діють (згідно з умовою задачі) на систему;
- 4) визначити головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої осі;
- 5) обчислити кінетичний момент системи відносно нерухомої осі;
- 6) підставити значення головного моменту зовнішніх сил і кінетичного моменту системи в (18.22) і розв'язати рівняння;
- 7) проаналізувати одержаний розв'язок.

Задача 3.18. Під час запуску в хід електричної корби до барабана A прикладається обертальний момент $M_{об} = \alpha \cdot t$, де α - стала величина. Вантаж B маси M_1 підіймається за допомогою каната, що намотується на барабан A радіуса r і масою M_2 (рис. 18.11). Визначити кутову швидкість барабана, вважаючи його суцільним циліндром. У початковий момент корба була нерухомою.

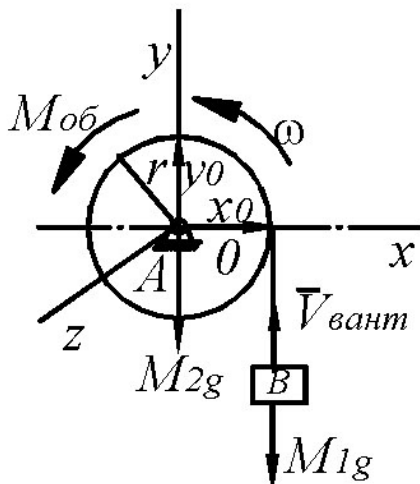


Рис. 18.11

Розв'язання

Виберемо осі координат з початком у точці O так, щоб вісь Ox була напрямлена вздовж осі обертання барабана перпендикулярно до площини (рис. 18.11). На систему, що складається з барабана і вантажу, діють такі зовнішні сили: вага

барабана і вантажу, складові реакції точки $O-X_0$, Y_0 і обертальний момент $M_{об}$.

Для розв'язання задачі використовуємо теорему про зміну кінетичного моменту в проекціях на осі координат $\frac{dL_z}{dt} = M_z^e$, щоб виключити з розгляду наперед невідомі реакції X_0 і Y_0 .

Головний момент зовнішніх сил, що діють на систему, відносно осі Oz

$$M_z^e = \sum m_z(\vec{F}_k^e) = M_{об} - M_1 g \cdot r = \alpha \cdot t - M_1 \cdot g \cdot r.$$

Кінетичний момент системи відносно осі Oz

$$L_z = l_{z(бар)} + l_{z(вант)} = \frac{M_2 r^2}{2} \cdot \omega + M_1 \cdot \omega \cdot r^2 = \omega (M_2 + 2M_1) \frac{r^2}{2},$$

оскільки

$$L_{z(бар)} = J_z \cdot \omega = \frac{M_2 r^2}{2} \cdot \omega, \quad l_{z(вант)} = M_1 V_{вант} \cdot r = M_1 \cdot \omega \cdot r^2.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt} \left[\omega (M_2 + 2M_1) \frac{r^2}{2} \right] = \alpha t - M_1 \cdot g \cdot r,$$

або

$$\frac{r^2}{2} (M_2 + 2M_1) \frac{d\omega}{dt} = \alpha t - M_1 g r.$$

Розв'язуючи це рівняння, одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2} (M_2 + 2M_1) \int_0^\omega d\omega &= \int_0^t (\alpha \cdot t - M_1 g r) dt, \\ \frac{r^2}{2} (M_2 + 2M_1) \omega &= \alpha t^2 / 2 - M_1 g \cdot r t. \end{aligned}$$

звідки

$$\omega = \frac{(\alpha \cdot t - M_1 g r) t}{r^2 (M_2 + 2M_1)}.$$

Задача 3.19. Однорідний диск вагою P обертається навколо вертикальної осі AB зі сталою кутовою швидкістю ω_0 (рис. 18.12). З положення A почала рухатися по ободу диска точка M вагою Q . Нехтуючи тертям на осі обертання, визначити кутову швидкість диска в момент, коли точка M буде на максимальній відстані від осі обертання AB .

Розв'язання

Виберемо осі координат так, щоб вісь z була напрямлена вздовж осі обертання AB . Оскільки сили Q , і P паралельні осі z (осі обертання), то $M_z^e = 0$. Згідно із законом збереження кінетичного моменту системи

$$L_{z0} = L_{z1} = L_z = \text{const} \quad (18.23)$$

У початковий момент часу кінетичний момент системи визначається тільки кінетичним моментом диска, оскільки точка M збігається з точкою A і швидкість її дорівнює нулю. Тому

$$L_{z0} = l_z(D) = J_z \cdot \omega_0 = \frac{m_D r^2}{4} \cdot \omega_0 = \frac{P \cdot r^2}{4g} \cdot \omega_0.$$

У момент часу, коли точка M перебуває на максимальній відстані від осі обертання, кінетичний момент системи

$$\begin{aligned} L_{z1} &= l_z(D) + l_z(T) = J_z \cdot \omega_1 + m_T \cdot V_{\text{пер}} \cdot CM = \\ &= \frac{P \cdot r^2}{4g} \cdot \omega_1 + \frac{Q}{g} V_{\text{пер}} \cdot r = \frac{P \cdot r^2}{4g} \cdot \omega_1 + \frac{Q}{g} \omega_1 \cdot r^2 = (P + 4Q) \cdot \omega_1 \frac{r^2}{4g}. \end{aligned}$$

(точка M виконує складний рух, тому $l_z(T) = l_{z(T)\text{від}} + l_{z(T)\text{пер}}$. Кінетичний момент точки у відносному русі дорівнює нулю, оскільки відносна швидкість $\vec{V}_{\text{від}}$ паралельна осі обертання. Тоді остаточно

$$l_{z(T)} = l_{z(T)\text{пер}} = m_T V_{\text{пер}} \cdot CM.$$

Згідно з (18.23) маємо

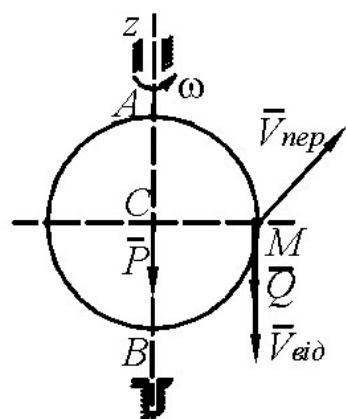


Рис. 18.12

$$\frac{Pr^2}{4g} \cdot \omega_0 = (P + 4Q)\omega_1 \frac{r^2}{4g}, \quad \text{звідки} \quad \omega_1 = \frac{h \cdot \omega_0}{P + 4Q}.$$

18.3.7. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла

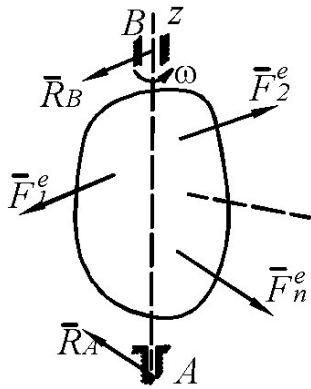


Рис. 18.13

Тверде тіло (рис. 18.13) обертається навколо нерухомої осі z під дією зовнішніх сил $\vec{F}_1^e, \vec{F}_2^e$. Реакції підшипників $\vec{R}_A$ і $\vec{R}_B$. Щоб виключити ці реакції з рівнянь руху, оскільки вони наперед невідомі, використовуємо теорему про зміну кінетичного моменту системи

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\vec{F}_k^e) = M_z^e.$$

Враховуючи, що $L_z = J_z \cdot \omega$, маємо

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e \quad \text{або} \quad J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \quad (18.24)$$

Це й буде рівняння обертального руху твердого тіла. Оскільки $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, то (18.24) можна записати у вигляді

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z^e. \quad (18.25)$$

Добуток моменти інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення дорівнює обертальному моменту.

Рівняння (18.24) дає змогу знайти такі величини:

- 1) обертальний момент M_z^e на підставі закону обертання $\varphi = f(t)$ тіла і моменту інерції тіла відносно осі обертання;
- 2) закон обертання $\varphi = f(t)$ тіла за обертальним моментом M_z^e і моментом інерції тіла J_z ;
- 3) момент інерції J_z тіла відносно осі обертання за законом

$\varphi = f(t)$ обертання тіла і величиною обертального моменту M_z^e .

Окремі випадки:

1) якщо $M_z^e = 0$, то $\omega = \text{const}$, тобто тіло рівномірно обертається навколо осі;

2) якщо $M_z^e = \text{const}$, то $\varepsilon = \text{const}$ тобто тіло обертається рівномірно-змінно.

18.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки та системи

18.4.1. Кінетична енергія матеріальної точки і матеріальної системи (твердого тіла)

Кінетична енергія є мірою механічного руху. Вперше як кількісну міру руху „живу силу” (кінетичну енергію) увів Г.Лейбниць (1646-1716).

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси на квадрат швидкості: $\frac{1}{2}mV^2$. Кінетична енергія матеріальної системи дорівнює алгебраїчній сумі кінетичних енергій точок, що входять до системи:

$$T = \sum \left(\frac{1}{2} m_k V_k^2 \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (18.26)$$

де T – скалярна величина, яка виражається в джоулях.

Визначимо формули для обчислювання кінетичної енергії тіла для різних видів його руху.

1. **Поступальний рух.** Усі точки тіла рухаються з однаковими швидкостями, які дорівнюють швидкості центра мас ($\vec{V}_K = \vec{V}_C$). Тому

$$T_{n.p.} = \frac{1}{2} \sum m_K V_C^2 = \frac{V_C^2}{2} \sum m_K = \frac{MV_C^2}{2}.$$

Таким чином, кінетична енергія тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості центра мас.

2. Обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо осі, то швидкість кожної точки тіла $V_K = \omega \cdot h_K$ (рис. 18.14), де h_K - відстань точки від осі обертання; ω - кутова швидкість. Тоді

$$T_{об.р} = \sum \frac{m_K V_K^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m_K \omega^2 h_K^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_K h_K^2 = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2, \quad (18.28)$$

де $\sum m_K h_K^2 = J_z$ згідно з (16.6) є момент інерції тіла відносно осі обертання.

Таким чином, кінетична енергія тіла при обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості.

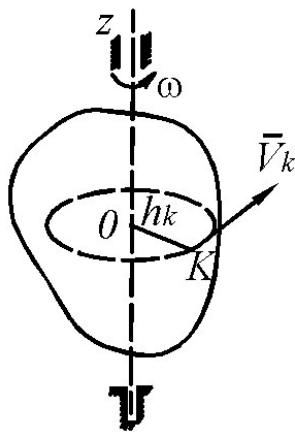


Рис. 18.14

3. Плоскопаралельний рух.

Швидкості точок у кожний момент часу розподілені, як і при обертальному русі, навколо осі, що проходить через миттєвий центр швидкості P (рис. 18.15) перпендикулярно до площини руху.

Тому
$$T_{пл} = \frac{1}{2} J_P \cdot \omega^2,$$

де J_P — момент інерції тіла відносно осі, що проходить через миттєвий центр швидкості.

Ця величина змінна, оскільки положення центра P під час руху тіла постійно змінюється. Якщо замість цієї величини використати сталий момент інерції J_C відносно осі, що проходить через центр мас,

то згідно з (17.13)

$$J_P = J_C + Md^2.$$

Тоді

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 (J_C + Md^2) = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega^2, \quad (18.29)$$

де $V_C = \omega \cdot PC = \omega d$ - швидкість центра мас.

Таким чином, при плоскопаралельному русі кінетична енергія тіла дорівнює сумі енергій поступального руху зі

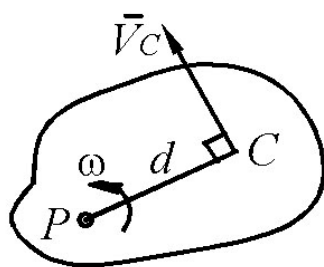


Рис. 18.15

швидкістю центра мас і обертального руху навколо центра мас.

4. **Складний рух** можна розкласти на поступальний рух зі швидкістю центра мас і обертальний рух навколо осі, що проходить через центр мас. Тому кінетична енергія тіла при такому русі складається з енергії двох складових рухів:

$$T_{CK} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2. \quad (18.30)$$

18.4.2. Робота сили та її основні властивості. Потужність

Мірою дії сили на заданому переміщенні є робота. Існує поняття елементарної роботи сили та повної роботи.

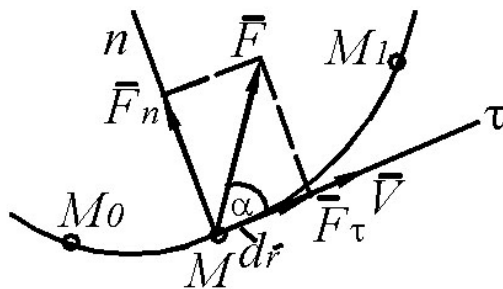


Рис. 18.16

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку векторів сили й елементарного переміщення $d\vec{r}$, напрямленого по дотичній до траєкторії в точці прикладення сил (рис. 18.16):

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (18.31)$$

Якщо рух задається природним способом, то елементарна робота

$$dA = F_\tau \cdot ds = F \cdot ds \cdot \cos \alpha, \quad (18.32)$$

де $ds = |d\vec{r}|$.

При цьому:

а) якщо $\alpha = 0$, то $dA = F \cdot ds$;

б) якщо $\alpha = 90^\circ$, то $dA = 0$ (таким чином, якщо сила напрямлена перпендикулярно до переміщення, то елементарна робота сили дорівнює нулю);

в) якщо $\alpha = 180^\circ$, то $dA = -F \cdot ds$.

В аналітичній формі або при координатному способі задання руху

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz, \quad (18.33)$$

де

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k},$$

$$d\vec{r} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}.$$

Робота сили при скінченному переміщенні по криволінійній траєкторії M_0M_1

$$A = \int_{(M_0, M_1)} dA = \int_{M_0}^{M_1} F \cdot ds \cdot \cos \alpha = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz).$$

Робота сили вимірюється в джоулях:

$$[A] = \text{Дж} \quad (1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}).$$

Робота рівнодійної сили на деякому переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт складових сил на тому самому переміщенні. Робота сили на розглядуваному переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт цієї сили на складових переміщеннях.

Розглянемо окремі випадки визначення роботи деяких сил:

а) *робота сили ваги*

$$A = \int_0^s F \cdot ds \cdot \cos \alpha = F \cdot s \cdot \cos \alpha. \quad (18.34)$$

б) *робота сили ваги (рис. 18.17)*

$$A = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz) = \begin{cases} F_x = F_y = 0 \\ F_z = -G \end{cases} = - \int_{z_0}^{z_1} G \cdot dz =$$

$$= -G(z_1 - z_0) = G(z_0 - z_1) = GH,$$

де $z_0 - z_1 = H$.

$$A_G = \pm G \cdot H. \quad (18.35)$$

Робота сили ваги матеріальної точки (тіла) дорівнює добутку сили ваги на різницю висот кінцевого й початкового положень точки (вертикальне переміщення).

Робота не залежить від траєкторії руху точки прикладання

сили ваги, тобто залежить тільки від початкового і кінцевого положень. Такі сили називаються потенціальними;

в) *робота пружної сили (рис. 18.18)*

$F = -cx$ на переміщенні з положення x_0 у положення x_1

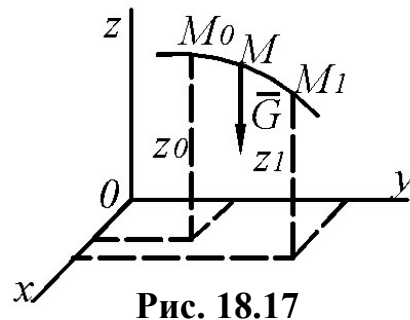


Рис. 18.17

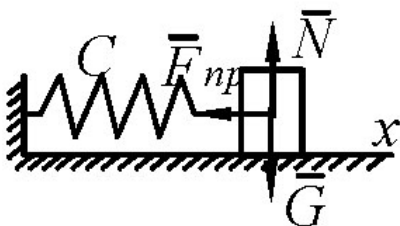
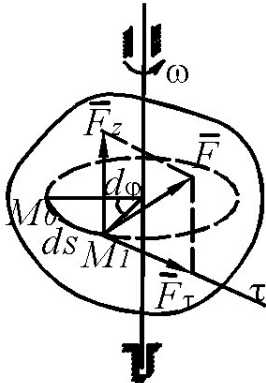


Рис. 18.18

$$A_{np} = \int_{x_0}^{x_1} F_x \cdot dx = - \int_{x_0}^{x_1} c \cdot x \cdot dx = - \frac{cx^2}{2} \Big|_{x_0}^{x_1} = - \frac{c(x_1^2 - x_0^2)}{2}.$$

$$A_{np} = \frac{c}{2} (x_0^2 - x_1^2) \quad (18.36)$$

Робота пружної сили при кінцевому переміщенні пропорційна до різниці квадратів величин кінцевого й початкового положень (стискань) пружини;



г) *робота обертальної сили або пари сил (моменту)* (рис. 18.19).

$$\vec{F} = \vec{F}_z + \vec{F}_\tau.$$

$\vec{F}_z \perp ds$ і не виконує роботи, тоді

Рис. 18.19

$$dA(\vec{F}) = dA(\vec{F}_\tau) = F_\tau \cdot ds = F_\tau \cdot h \cdot d\phi = M_{об} \cdot d\phi.$$

Таким чином, робота моменту сили дорівнює добутку обертального моменту на кут повороту;

д) *робота сил тертя ковзання і кочення:*

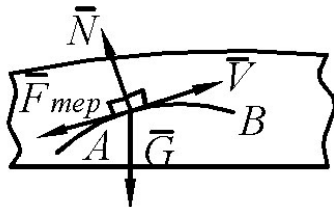


Рис. 18.20

Сила тертя ковзання $F_{тер} = fN$ спрямована протилежно напрямку швидкості (рис. 18.20):

$$A_{тер} = \int_0^s F_{тер} \cdot ds \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{s}) = - \int_0^s fN \cdot ds.$$

$$\text{Якщо } N = const, \text{ то } A = -f \cdot N \cdot s \quad (18.38)$$

Робота сили тертя ковзання завжди від'ємна.

Момент тертя кочення (рис. 18.21) $M_{Т.К.} = \delta \cdot N.$

(див. розділ «Статика»).

Робота сил тертя кочення

$$A_{Т.К.} = - \int_0^\phi M_{Т.К.} \cdot d\phi = - \int_0^\phi \delta \cdot N \cdot d\phi.$$

Якщо момент тертя кочення величина стала, то

$$A_{Т.К.} = -M_{Т.К.} \cdot \phi = -\delta \cdot N \cdot \phi. \quad (18.39)$$

або

$$A_{\text{Т.К.}} = -\delta \cdot N \cdot s / r, \text{ де } \varphi = s / r.$$

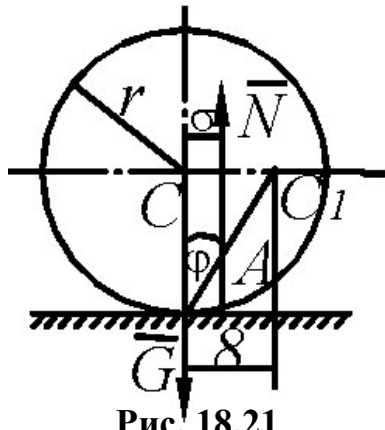


Рис. 18.21

Потужність W характеризує швидкість виконання роботи в часі і визначається за формулою

$$W = \frac{dA}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{V}. \quad (18.40)$$

Потужність сили дорівнює скалярному добутку векторів сили і швидкості її точки прикладання.

Потужність виражається у ватах.

18.4.3. Теорема про зміну кінетичної енергії МТ (рис. 18.22)

Згідно з (14.2) $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$,

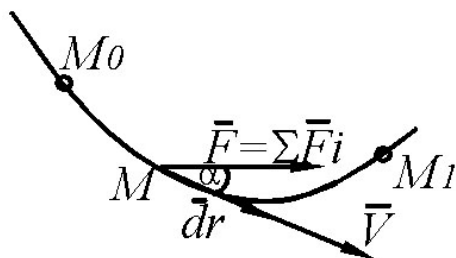


Рис. 18.22

або

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \sum \vec{F}_i.$$

Помноживши ліву і праву частини цього рівняння скалярно на $d\vec{r}$, дістанемо

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}$$

або

$$m \cdot d\vec{V} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}.$$

Оскільки $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, а $\sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dA$, то $m\vec{V} \cdot d\vec{V} = dA$,

або

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dA. \quad (18.41)$$

Теорема (диференціальна форма). Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі рівнодійної всіх сил, що діють на точку.

Інтегруючи (18.41), маємо

$$\int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}_1} d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_{(M_0)}^{(M_1)} dA, \quad \text{або} \quad \frac{mV_1^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A_{(M_0, M_1)}. \quad (18.42)$$

Теорема (інтегральна форма). Зміна кінетичної енергії матеріальної точки на скінченному проміжку шляху дорівнює роботі рівнодійної всіх сил, прикладених до точки на тій самій ділянці шляху.

18.4.4. Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи

На кожну точку матеріальної системи діють як зовнішні, так і внутрішні сили. Тому теорема (18.41) для довільної точки має вигляд

$$d\left(\frac{m_k \vec{V}_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i.$$

Якщо записати аналогічні вирази для інших точок системи і додати їх, то

$$\sum d\left(\frac{m_k \cdot V_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i.$$

Оскільки

$$\sum d\left(\frac{m_k \cdot V_k^2}{2}\right) = d\sum\left(\frac{m_k V_k^2}{2}\right) = dT,$$

то

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \quad k = 1, n$$

Теорема (диференціальна форма). Диференціал кінетичної енергії матеріальної системи дорівнює алгебраїчній сумі елементарних робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на систему.

Інтегруючи (18.43), маємо

$$\int_{T_0}^{T_1} dT = \int_{(M_0, M_1)} d \left(\sum A_k^e \right) + \int d \left(\sum A_k^i \right),$$

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i, \quad k = 1, n. \quad (18.44)$$

Теорема (інтегральна форма). *Зміна кінетичної енергії матеріальної системи на скінченному переміщенні дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил на цьому самому переміщенні.*

Це єдина теорема, яка враховує роботу не тільки зовнішніх, а й внутрішніх сил матеріальної системи. Безумовно це ускладнює процес розв'язування задачі. Але іноді робота внутрішніх сил дорівнює нулю, а саме:

а) при незмінній системі матеріальних точок, наприклад, абсолютно твердого тіла;

б) коли внутрішні сили є реакціями ідеально гладеньких поверхонь;

в) коли внутрішні сили є реакціями абсолютно шорстких поверхонь.

У цих випадках теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної системи набуває вигляду

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e, \quad k = \overline{1, n}. \quad (18.45)$$

18.4.5. Силowe поле. Потенціальне силowe поле і силowa функція. Потенціальна енергія

Серед сил, з якими мають справу в механіці, особливе місце посідає клас сил, величина і напрям яких залежить тільки від положення точки простору, де міститься матеріальна точка що розглядається. Якщо точка (або система точок) рухається в просторі під дією сил, що однозначно визначаються положенням тих точок простору, в яких в даний момент знаходиться точка або система, то кажуть, що точка (або система) рухається в силowому полі.

Силowим полем називається частина фізичного простору, в якому на точки розташованої в ньому механічної системи діють

сили, залежні лише від положення цих точок, тобто від координат і часу. Якщо сили явно не залежать від часу, то силове поле називають стаціонарним, а якщо залежать - нестаціонарним.

Прикладами силового поля можуть бути поля сил тяжіння, сил пружності, електростатичне поле.

Силове поле буде потенціальним, коли робота сил поля, що діють на механічну систему, не залежить від форми траєкторії руху її точок і визначається тільки їх початковим і кінцевим положеннями.

Сили, що діють в такому полі, називаються силами, що мають потенціал, або консервативними силами.

Ця умова виконується, якщо існує однозначна силова функція координат

$$U(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n), \quad (18.46)$$

частинні похідні від якої за координатами будь-якої точки $M_i (i = \overline{1, n})$ дорівнюють проекціям прикладеної до цієї точки сили на відповідні осі, тобто

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (18.47)$$

Елементарна робота сил потенціального поля дорівнює повному диференціалу силової функції

$$\delta A = dU.$$

Робота сил, що діють на точки механічної системи в потенціальному полі, дорівнює різниці значень силової функції в кінцевому та початковому положеннях системи і не залежить від форми траєкторій руху точок цієї системи:

$$A_{1,2} = \int_1^2 dU = U_2 - U_1. \quad (18.48)$$

Робота сил, що діють на точки системи в потенціальному полі на будь-якому замкненому переміщенні, тобто на переміщенні, при якому початкове і кінцеве положення для всіх точок збігаються, дорівнює нулю, оскільки $U_2 = U_1$.

Для потенціальних сил можна ввести поняття про потенціальну енергію як величину, що характеризує «запас роботи», який має матеріальна точка в даному пункті силового поля. Щоб порівняти між собою ці «запаси роботи», потрібно умовитись про вибір нульової точки O , в якій умовно

вважатимемо, що «запас роботи» дорівнює нулю.

Потенціальною енергією системи в даному положенні називається скалярна величина Π , яка дорівнює роботі сил потенціального поля, що прикладені до її точок, на переміщенні системи із даного положення в нульове.

Це свідчить про те, що потенціальна енергія залежить від координат точок, тобто

$$\Pi = \Pi(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

(у нульовому положенні її значення дорівнює нулю).

Якщо механічна система переміщується з одного положення в інше, то робота сил, що прикладені до точок механічної системи, на будь-якому її переміщенні дорівнює різниці значень потенціальної енергії в початковому і кінцевому положеннях системи:

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Між силовою функцією і потенціальною енергією існує залежність

$$A = \Pi = U_0 - U, \quad (18.49)$$

тобто потенціальна енергія Π системи відрізняється від силової функції U , взятої зі знаком «-» на сталу величину U_0 .

З рівності (18.49) випливає

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = -\frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Тоді на підставі (18.47) одержимо

$$X_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}, \quad Y_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}, \quad Z_i = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i}, \quad (18.50)$$

тобто-проекції на координатні осі сили, що діє в потенціальному полі на кожну точку механічної системи, дорівнюють взятим зі знаком «-» частинним похідним від потенціальної енергії системи за відповідними координатами цієї точки.

18.4.6. Методика розв'язування задач

За допомогою теореми про зміну кінетичної енергії точки (системи) можна розв'язувати задачі тоді, коли серед даних і шуканих величин є маса (вага); швидкості точок у початковий і

кінцевий моменти часу; переміщення точки (точок); сили, що прикладені до точки (точок).

При цьому найлегше розв'язуються задачі при сталих силах або силах, що залежать від положення точки (точок).

Розв'язуючи задачі за допомогою цієї теореми, рекомендуємо додержувати такої послідовності:

1) виділити матеріальну точку (тіло), рух якої (якого) розглядатимемо;

2) розглянути в'язі відносно виділених тіл;

3) замінити дію в'язей на виділені тіла реакціями в'язей;

4) скласти схему всіх сил, включаючи і реакції в'язей, після чого рух точки (тіла) можна розглядати як вільний;

5) вибрати систему координат;

6) обчислити суму робіт усіх сил, прикладених до матеріальної точки (точок або тіл) на її переміщенні;

7) обчислити кінетичну енергію матеріальної точки, (тіла) в її (його) початковому і кінцевому положеннях;

8) застосувати теорему про зміну кінетичної енергії точки (системи), із складеного рівняння визначити шукану величину.

Якщо кількість невідомих у задачі більше одного, то, крім зазначеної теореми, слід застосувати другу загальну теорему динаміки (про рух центра мас, про зміну кількості руху або моменту кількості руху) або скласти відповідне диференціальне рівняння руху об'єкта (повністю або частково).

Задача 3.20. Тіло M кинуте з поверхні Землі вздовж вертикальної лінії (рис. 18.23) з початковою швидкістю V_0 .

Знайти висоту підкидання тіла, якщо сила ваги змінюється обернено пропорційно до квадрата відстані від центра Землі, а радіус Землі дорівнює R (опором повітря знехтувати).

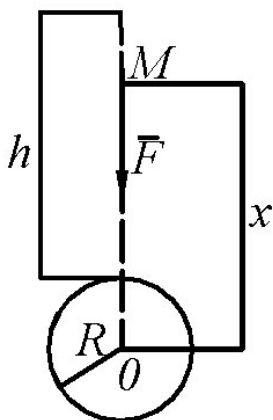


Рис. 18.23

Розв'язання

Розглянемо вільний рух тіла M , до якого прикладено силу $F = \alpha/x^2$, де x - відстань тіла від центра Землі; а α - невідомий сталий коефіцієнт пропорційності. Коефіцієнт α

визначимо з умов на поверхні Землі ($x = R$):

$$F_{x=R} = G = mg = \frac{\alpha}{R^2},$$

звідки $\alpha = mgR^2$.

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії точки (18.42) і беручи до уваги, що кінцева швидкість V_1 при підйомі на максимальну висоту дорівнює нулю і робота сили F має знак «-»,

$$A_{(M_0, M_1)} = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} F dx = - \int_R^{R+h} \alpha \cdot x^{-2} dx = -mgR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx,$$

оскільки точка M віддаляється від поверхні Землі, а сила $\vec{F}$ напрямлена до центра Землі, одержимо рівняння (18.42) у вигляді

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -mgR^2 \int_R^{R+h} x^{-2} dx,$$

$$\text{або } \frac{V_0^2}{2gR^2} = \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_R^{R+h} = -\left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R}\right) = \frac{h}{R(R+h)}, \quad \text{звідки } h = \frac{V_0^2 R}{2gR - V_0^2}.$$

Задача 3.21. Визначити кінетичну енергію планетарного механізму (рис. 18.24). Колесо II, вага якого G , а радіус r , перебуває у внутрішньому зачепленні з нерухомим колесом I радіуса K . Колесо II приводиться в рух кривошипом OC вагою Q . Кривошип обертається навколо нерухомої осі O , перпендикулярної до площини рисунка, зі сталою кутовою швидкістю ω_0 (колесо II вважати однорідним круглим диском, а кривошип OC - тонким однорідним стержнем). Кінетичну енергію виразити через кутову швидкість ω_0 кривошипа OC .

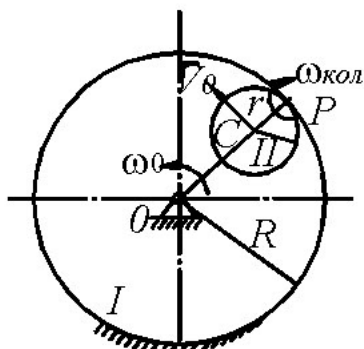


Рис. 18.24

Розв'язання

Розглядувана матеріальна система містить маси коліс I і II, кривошип OC . Отже, кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Колесо І нерухоме, тому $T_1 = 0$. Колесо ІІ здійснює плоскопаралельний рух, що складається з двох рухів - поступального разом з полюсом і обертального навколо полюса. Тому

$$T_2 = \frac{1}{2} m_{\text{кол}} \cdot V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega_{\text{кол}}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{G}{g} \cdot \omega_0^2 (R-r)^2 + \\ + \frac{1}{2} \cdot \frac{Gr^2}{2g} \cdot \frac{\omega_0^2}{r^2} \cdot \frac{\omega_0^2 (R-r)^2}{r^2} = \frac{3G}{4g} \omega_0^2 (R-r)^2,$$

де

$$V_C = \omega_0 \cdot OC = \omega_0 (R-r); \quad J_C = \frac{1}{2} m_{\text{кол}} \cdot r^2 = \frac{Gr^2}{2g},$$

оскільки колесо ІІ — однорідний круглий диск;

$$\omega_{\text{кол}} = \frac{V_C}{CP} = \frac{\omega_0 (R-r)}{r}.$$

Кривошип OC обертається навколо нерухомої осі O з кутовою швидкістю ω_0 . Тому його кінетична енергія

$$T_3 = \frac{1}{2} J_0 \cdot \omega_0^2 = \frac{Q(R-r)^2}{6g} \cdot \omega_0^2,$$

де

$$J_0 = \frac{1}{3} m \cdot OC^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q}{g} (R-r)^2 = \frac{Q}{3g} (R-r)^2,$$

оскільки кривошип — однорідний тонкий стержень, що обертається навколо осі, яка проходить через його кінець.

Шукана кінетична енергія механізму

$$T = \frac{3G}{4g} \cdot \omega_0^2 (R-r)^2 + \frac{Q(R-r)^2}{6g} \omega_0^2 = \frac{(9G + 2Q)}{12g} \omega_0^2 (R-r)^2.$$

Задача 3.22. Визначити швидкість і прискорення вантажу після його спуску на величину S , якщо відомі G_1 , G_2 , G_3 . Тертям знехтувати. У початковий момент система була нерухома (рис. 18.25).

Розв'язання

Застосовуючи теорему про зміну кінетичної енергії системи, маємо

$$T_{II} - T_0 = \sum A_k^e. \quad (18.51)$$

Згідно з умовою задачі спочатку кінетична енергія системи дорівнює нулю, тобто $T_0 = 0$. У кінцевому положенні

$T_I = T_1 + T_2 + T_3$, де T_1 - кінетична енергія вантажу M , який рухається поступально

$$\left(T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{G_1}{2g} \cdot V_1^2 \right);$$

T_2 - кінетична енергія блока, який обертається навколо нерухомої осі O

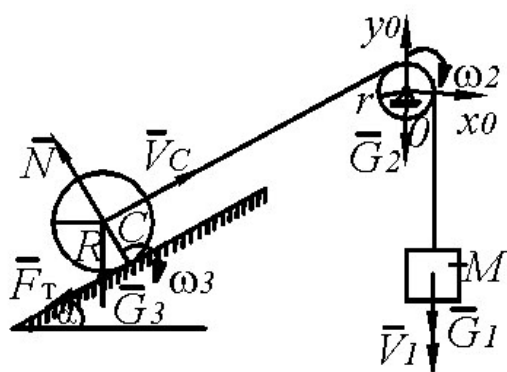


Рис. 18.25

$$(T_2 = \frac{1}{2} J_0 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2} \cdot \frac{V_1^2}{r_2^2} = \frac{G_2 V_1^2}{4g},$$

оскільки $J_0 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$, а $\omega_2 = V_1 / r_2$);

T_3 - кінетична енергія котка, який здійснює плоскопаралельний

рух
$$(T_3 = \frac{1}{2} m_3 V_C^2 + \frac{1}{2} J_C \cdot \omega_3^2 = \frac{3G_3}{4g} V_1^2,$$

оскільки $V_C = V_1$, $\omega_3 = V_C / R = V_1 / R$, $I_C = \frac{1}{2} m_3 R_3^2 = \frac{G_3}{2g} R_3^2$).

Тоді

$$T_0 = \frac{G_1}{2g} V_1^2 + \frac{G_2}{4g} V_1^2 + \frac{3G_3}{4g} V_1^2 = \frac{V_1^2}{4g} (2G_1 + G_2 + 3G_3).$$

Обчислимо суму робіт усіх сил, прикладених до точок (тіл) системи:

$$\sum A_k^e = A_{G_1} + A_{G_2} + A_{G_3} + A_{x_0} + A_{y_0} + A_N + A_{F_T},$$

де $A_{G_1} = G_1 \cdot S$; $A_{G_2} = 0$, $A_{x_0} = A_{y_0} = 0$, оскільки центр мас блока нерухомий; $A_{G_3} = -G_3 \cdot S \cdot \sin \alpha$; $A_N = 0$, оскільки $\vec{N}$ перпендикулярний до переміщення центра мас котка; $A_{F_T} = 0$, оскільки коток котиться без ковзання.

$$\text{Тоді } \sum A_k^e = G_1 \cdot S - G_3 \cdot S \cdot \sin \alpha = S \cdot (G_1 - G_3 \cdot \sin \alpha).$$

Підставивши знайдені величини в рівняння (18.51), дістанемо

$$\frac{V_1^2}{4g} (2G_1 + G_2 + 3G_3) = S \cdot (G_1 - G_3 \cdot \sin \alpha) \quad (18.52)$$

звідки шукана величина швидкості вантажу M

$$V_1 = \sqrt{\frac{4gS(G_1 - G_3 \cdot \sin \alpha)}{2G_1 + G_2 + 3G_3}}.$$

Щоб визначити прискорення вантажу M , обчислимо першу похідну за часом від лівої і правої частин рівняння (18.52):

$$\frac{2G_1 + G_2 + 3G_3}{4g} \cdot 2V_1 \cdot \frac{dV_1}{dt} = (G_1 - G_3 \sin \alpha) \frac{ds}{dt}.$$

Тут $\frac{dV_1}{dt} = a_1$ — прискорення вантажу M ; $\frac{ds}{dt} = V_1$ — швидкість вантажу M .

Після спрощень матимемо

$$\frac{2G_1 + G_2 + 3G_3}{2g} \cdot a_1 = G_1 - G_3 \cdot \sin \alpha,$$

звідки

$$a_1 = \frac{2(G_1 - G_3 \cdot \sin \alpha)}{2G_1 + G_2 + 3G_3} g.$$

Запитання для самоперевірки і контролю

- 1. Сформулюйте теорему про рух центра мас матеріальної системи. Коли ця точка рухається рівномірно і прямолінійно?*
- 2. Що характеризує імпульс сили?*
- 3. Що називається кількістю руху матеріальної точки і системи? За якою формулою її визначають?*
- 4. Сформулюйте теорему про зміну кількості руху матеріальної системи в диференціальній та інтегральній формах. Коли кількість руху матеріальної системи є сталою?*
- 5. Що називається моментом кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі? Як вони пов'язані між собою?*
- 6. Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно центра та осі.*
- 7. Що називається кінетичним моментом матеріальної системи відносно центра та осі?*
- 8. Як формулюється теорема про зміну кінетичного моменту системи відносно центра та осі?*
- 9. Як формулюється закон збереження кінетичного моменту системи відносно центра та осі?*
- 10. За якою формулою визначають кінетичний момент твердого тіла відносно його осі обертання?*
- 11. Що називається кінетичною енергією матеріальної точки і системи?*
- 12. Як формулюється теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки і системи?*
- 13. За якими формулами визначають роботу сили при трьох способах задання руху матеріальної точки?*
- 14. За якими формулами обчислюють кінетичну енергію твердого тіла в різних випадках його руху?*
- 15. Як визначається робота сил, що діють на точку (тверде тіло)?*
- 16. Який вигляд має диференціальне рівняння твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі?*