

О.О. Бейгул, І.А. Колесник

# **Динаміка та міцність металургійних машин**

Допущено Міністерством освіти і науки України  
у якості навчального посібника  
для студентів металургійних спеціальностей ВНЗ

Дніпродзержинськ – 2006

## ЗМІСТ

Передмова

Розділ 1. Системи з скінченим числом ступенів свободи

- 1.1. Рівняння Лагранжа другого роду
- 1.2. Способи складання диференціальних рівнянь руху
- 1.3. Визначення власних частот та форм вільних коливань
- 1.4. Головні, або нормальні координати
- 1.5. Вимушені коливання системи

Розділ 2. Стержневі системи з розподіленими масами

- 2.1. Поперечні коливання струн
- 2.2. Поздовжні коливання стержнів
- 2.3. Крутильні коливання валів
- 2.4. Поперечні коливання балок
- 2.5. Вимушені коливання балок, викликані рухомим навантаженням

Розділ 3. Наближені методи розрахунку коливань

- 3.1. Метод Релея
- 3.2. Метод Гриммена
- 3.3. Метод Донкернея
- 3.4. Метод Релея-Рітца
- 3.5. Метод Бубнова-Гальоркіна

Розділ 4. Розрахунки на міцність при ударному навантаженні

- 4.1. Удар при осьовому навантаженні
- 4.2. Скручуючий удар
- 4.3. Удар при поперечному навантаженні

Розділ 5. Деякі технічні застосування теорії коливань

- 5.1. Критичне число обертів вала
- 5.2. Основи розрахунку віброізоляції
- 5.3. Вплив зазорів на динамічні навантаження у приводі
- 5.4. Вплив механічних характеристик електродвигуна на динаміку привода

Література

УДК 669.013.002.5:539.4

Рецензенти: д-р техн. наук, професор Сатонін О.В. (Донбаська державна машинобудівна академія), д-р техн. наук, професор Седуш В.Я. (Донецький національний технічний університет)

Бейгул О.О., Колесник І.А.

Динаміка та міцність металургійних машин / О.О.Бейгул, І.А. Колесник. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2006. –

У навчальному посібнику викладені основи формування динамічних навантажень на металургійні машини, запропоновані алгоритми розрахунків на динамічну міцність вузлів і агрегатів на підставі вивчення дискретних та монолітних систем. Наведені наближені методи розрахунку коливань. Окремий розділ присвячений ударній взаємодії тіл. Розглянуті деякі технічні застосування теорії коливань.

© Видавництво ДДТУ  
2006

## Передмова

Питання динаміки та міцності металургійних машин першорядне значення, оскільки у промисловості підсилюються тенденції підвищення продуктивності машин, що тісно пов'язано з збільшенням навантажень, посиленням темпів їх роботи. Ці питання стають ще більш актуальними у зв'язку з розвитком автоматичних способів виробництва, що пов'язано з підвищенням вимог до міцності, точності виготовлення деталей, вузлів, агрегатів.

Характер динамічних навантажень у виконавчих механізмах машин суттєво залежить від технологічних схем, характеру операцій, типу виконавчих механізмів, їх приводів.

Дійсно, якщо технологічний процес переривчастий, наприклад, у блюмінгах, слябінгах, рільсобалкових станах при заправленні смуги у кліті безупинного стану, то кожного разу при черговому захопленні заготовки та виході її з валків у головній лінії, а також у натискних механізмах збуджуються динамічні процеси, в результаті яких зусилля, що виникають у ланках машин, значно перевищують технологічні навантаження, які звичайно приймають у якості розрахункових при проектуванні устаткування.

У практиці експлуатації металургійного устаткування, особливо станів, відомо чимало прикладів, коли незнання чи неврахування динамічного характеру навантаження машин призводить до великих аварій чи до незадовільної якості металопродукції.

Знання дійсного характеру навантаження металургійних машин витратами, а при експлуатації досягти найбільшої продуктивності за рахунок обґрунтованого використання резервів міцності та потужності.

Незалежно від призначення та конструктивних особливостей, яка полягає у наявності інертності та пружності ланок, у здатності за певних умов здійснювати коливання. Тому теоретичні методи дослідження динамічних явищ у машинах є загальними, розходження полягає лише у параметрах машин і режимах їх навантаження, що позначиться на інтенсивності збуджених коливань.

Металургійні машини належать до машин циклічного навантаження, іноді близького до ударного, що призводить до появи великих динамічних навантажень. Рівень динамічних навантажень коливального характеру майже на усіх металургійних машинах дуже високий, це слід враховувати при розрахунках на міцність, конструюванні.

Разом з тим проблеми динаміки та міцності металургійних машин не достатньо висвітлені у сучасній літературі.

# РОЗДІЛ 1

## СИСТЕМИ З СКІНЧЕННИМ ЧИСЛОМ СТУПЕНІВ СВОБОДИ

### 1.1. Рівняння Лагранжа другого роду

Рівняння Лагранжа другого роду – це загальне рівняння динаміки, записане в узагальнених координатах, певним чином наполоіроване. Запишемо загальне рівняння динаміки у декартових координатах

$$\sum_{i=1}^n [(F_{x_i} - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (F_{y_i} - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (F_{z_i} - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0, \quad (1.1)$$

де  $n$  – кількість матеріальних точок механічної системи;

$i$  – порядковий номер матеріальної точки;

$F_{x_i}, F_{y_i}, F_{z_i}$  – проекції активної сили  $\overline{F}_i$ , прикладеної до  $i$ -ї матеріальної точки, на відповідні вісі декартової системи координат, Н;

$m_i$  – маса  $i$ -ї матеріальної точки, кг;

$\ddot{x}_i, \ddot{y}_i, \ddot{z}_i$  – проекції прискорення  $i$ -ї матеріальної тички на відповідні вісі декартової системи координат, м/с<sup>2</sup>;

$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$  – проекції синхронної варіації радіуса  $i$ -ї матеріальної точки на відповідні вісі декартової системи координат, м.

Оскільки

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, \dots, q_s, t), \\ y_i &= y_i(q_1, \dots, q_s, t), \\ z_i &= z_i(q_1, \dots, q_s, t), \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

де  $q_i$  – узагальнена координата;

$t$  – час, с,

та можна записати

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \delta y_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad \delta z_i = \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j; \quad (1.3)$$

де  $s$  – кількість узагальнених координат;

$j$  – порядковий номер узагальненої координати;

$\delta q_j$  – синхронна варіація  $j$ -ї узагальненої координати.

Підставляємо вирази (1.3) у рівняння (1.1)

$$\sum_{i=1}^n \left[ (F_{x_i} - m_i \ddot{x}_i) \sum_{j=1}^s \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j + (F_{y_i} - m_i \ddot{y}_i) \sum_{j=1}^s \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j + (F_{z_i} - m_i \ddot{z}_i) \sum_{j=1}^s \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \right] = 0. \quad (1.4)$$

Міняємо порядок підсумовування у лівій частині рівняння (1.4)

$$\sum_{i=1}^n \delta q_j \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ (F_{x_i} - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + (F_{y_i} - m_i \ddot{y}_i) \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + (F_{z_i} - m_i \ddot{z}_i) \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] \right\} = 0. \quad (1.5)$$

Оскільки варіація  $\delta q_j$  цілковито довільна, то вираз у фігурних дужках самостійно має дорівнювати нулю

$$\sum_{i=1}^n \left[ (Fx_i - m_i \ddot{x}_i) \frac{\partial x_i}{\partial q_i} + (Fy_i - m_i \ddot{y}_i) \frac{\partial y_i}{\partial q_i} + (Fz_i - m_i \ddot{z}_i) \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right] = 0. \quad (1.6)$$

Виходячи з властивостей рядів, ліву частину рівняння (1.6) переписуємо інакше

$$\sum_{i=1}^n \left( Fx_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Fy_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Fz_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^n \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = 0. \quad (1.7)$$

Перший ряд у лівій частині рівняння (1.7) за визначенням є узагальненою силою  $Q_j$ , яка відповідає  $j$ -й узагальненій координаті, тобто

$$\sum_{i=1}^n \left( Fx_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Fy_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Fz_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = Q_j \quad (j=1, \dots, s) \quad (1.8)$$

Перетворюємо другий ряд рівняння (1.7), використовуючи правила диференціювання складних функцій та добутків функцій [5]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left( m_i \ddot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \ddot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + m_i \ddot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left( m_i \frac{d}{dt} \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + m_i \frac{d}{dt} \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + m_i \frac{d}{dt} \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \\ & \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{x}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{y}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{z}_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Перетворюємо вираз (1.9), використовуючи правила диференціювання степінних функцій [5]:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n m_i \left[ \frac{d}{dt} \left( \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial \dot{q}_j} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{x}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{y}_i + \frac{d}{dt} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{z}_i \right) \right] = \\ & = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{m}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{m}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Як відомо з курсу теоретичної механіки [25], кінетична енергія механічної системи  $n$  матеріальних точок має наступний вигляд:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2). \quad (1.11)$$

Переписуємо вираз (1.10) з урахуванням позначення (1.11)

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] - \frac{\partial}{\partial q_j} \left[ \frac{m_i}{2} (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) \right] \right\} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (1.12)$$

Об'єднуючи вирази (1.8) з (1.12), після простих перетворень отримуємо систему  $s$  диференціальних рівнянь, які мають назву рівнянь Лагранжа другого ряду:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j=1, \dots, s). \quad (1.13)$$

Коли на механічну систему діють сили консервативного і неконсервативного походження, то узагальнену силу  $Q_j$  можна записати у вигляді суми узагальненої сили  $Q_j^P$ , яка відповідає консервативним силам  $\overline{P}_i$ , та узагальненої сили  $Q_j^F$ , яка відповідає неконсервативним силам  $\overline{F}_i$ .

З огляду на таке розмежування узагальнених сил рівняння Лагранжа другого роду приймають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j^P + Q_j^F \quad (j=1, \dots, s) \quad (1.14)$$

Коли на механічну систему діють лише консервативні сили, то відповідні узагальнені сили визначаються формулою [25]

$$Q_j = Q_j^P = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, s) \quad (1.15)$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія механічної системи, Дж.

А рівняння Лагранжа другого роду конкретизуються наступним чином:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, s). \quad (1.16)$$

## 1.2. Способи складання диференціальних рівнянь руху

У розрахунковій практиці в основному поширені три способи виведення диференціальних рівнянь руху механічних систем – основний, прямий та протилежний. Основний, до того ж найбільш універсальний спосіб полягає в отриманні диференційних рівнянь руху по схемі рівнянь Лагранжа другого роду, котрі при наявності лише консервативних сил мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} \quad (j=1, \dots, s), \quad (1.17)$$

де  $T$  – кінетична енергія, Дж;

$\Pi$  – потенціальна енергія, Дж;

$q_j$  –  $j$ -а узагальнена координата;

$\dot{q}_j$  –  $j$ -а узагальнена швидкість;

$j$  – номер узагальненої координати;

$s$  – число ступенів свободи.

Як відомо [25], при малих рухах поліномної системи зі стаціонарними зв'язками поблизу положення рівноваги кінематична та потенціальна енергія мають наступний вираз:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k; \quad (1.18)$$

$$П = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{jk} q_j q_k, \quad (1.19)$$

де  $a_{jk} = a_{kj}$  – інертні коефіцієнти;

$c_{jk} = c_{kj}$  – узагальнені коефіцієнти жорсткості.

Коли положення рівноваги стійке при нульових значеннях координат, то потенціальна енергія у цьому положенні має ізольований мінімум, а вираз (1.19) є додатково визначеною квадратичною формою. Для цього необхідно і достатньо, щоб мала місце нерівність

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (1.20)$$

При використанні нерівності (1.20) система, виведена з положення рівноваги, здійснює вільні коливання.

Підставляючи вирази (1.18) та (1.19) у рівняння (1.17), отримуємо наступну систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = 0 \quad (j = 1, \dots, s). \quad (1.21)$$

Прямий спосіб виведення диференціальних рівнянь руху механічних систем полягає у тому, що від системи відокремлюються зосереджені маси, на які діють позиційні (у тому числі пружні) сили, виражені через обрані узагальнені координати, а далі записуються відповідні диференціальні рівняння руху цих мас.

Протилежний спосіб виведення диференціальних рівнянь руху механічних систем полягає у тому, що після відокремлення зосереджених мас розглядається без масовий скелет системи, на який діють відповідні інерційні сили, виражені через узагальнені прискорення, а далі записуються вирази переміщень точок знаходження зосереджених мас скелета системи з урахуванням зовнішніх та інерційних сил.



Для ілюстрації наведених способів розглянемо пружну систему, яка складається з двох зосереджених мас  $m_1$  та  $m_2$  та двох пружин з коефіцієнтами жорсткості  $C_1$  та  $C_2$  (рис. 1.1).

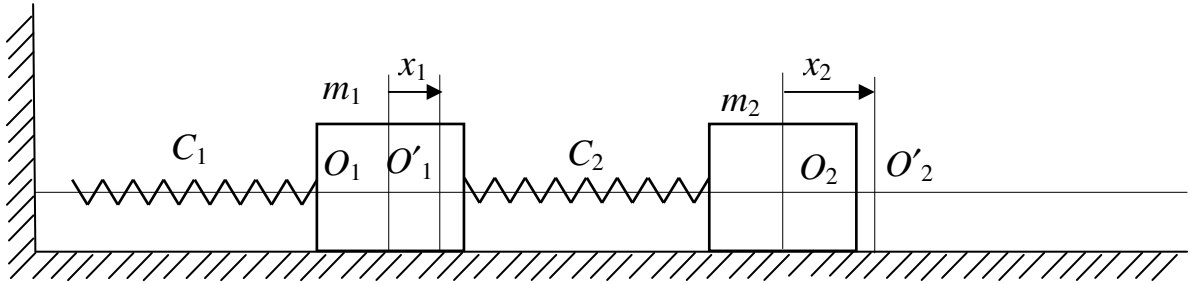


Рисунок 1.1 – Розрахункова схема двомасової системи до основного способу

**Основний спосіб.** У якості узагальнених координат приймаємо горизонтальні переміщення  $x_1$  та  $x_2$  зосереджених мас  $m_1$  та  $m_2$  відповідно від стану рівноваги. Записуємо вирази кінетичної та потенціальної енергії системи

$$T = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{x}_2^2}{2} \quad (1.22)$$

$$\Pi = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2 (x_1 - x_2)^2}{2}. \quad (1.23)$$

Далі використовуємо дії над виразами (1.22) та (1.23) у відповідності з операторами рівняння Лагранжа другого роду (1.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} \right) = m_1 \ddot{x}_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2 \dot{x}_2, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} \right) = m_2 \ddot{x}_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_2 (x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Об'єднаємо ці вирази, отримуємо диференціальні рівняння вільних коливань двомасової системи

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.24)$$

**Прямий спосіб.** Відокремлюємо зосереджені маси і розглядаємо їх як вільні тіла під дією сил пружності, що визначаються деформаціями обох пружин (рис. 1.2), тобто

$$N_1 = c_1 x_1, \quad N_2 = c_2 (x_2 - x_1). \quad (1.25)$$

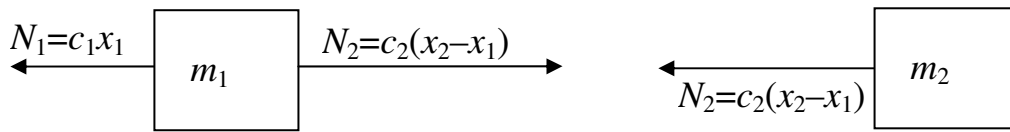


Рисунок 1.2 – Розрахункова схема двомасової системи до прямого способу

Диференціальні рівняння руху зосереджених мас приймають наступний вигляд

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -N_1 + N_2, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -N_2. \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

Підставляючи у ці рівняння  $N_1$  та  $N_2$  з виразів (1.25), отримуємо систему диференціальних рівнянь вільних коливань двомасової системи

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0, \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

**Протилежний спосіб.** Відокремлюємо зосереджені маси  $m_1$  та  $m_2$ , а їх дію заміняємо силами інерції  $-m_1 \ddot{x}_1$  та  $-m_2 \ddot{x}_2$ , прикладеними у відповідних точках безмасового скелету системи (рис. 1.3).

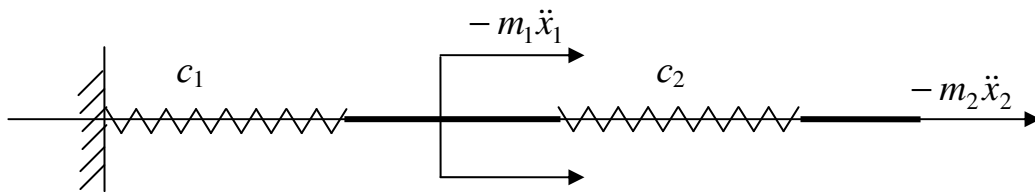


Рисунок 1.3 – Розрахункова схема двомасової системи до протилежного способу

У цій схемі перша пружина навантажена силою  $-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2$ , а друга пружина – силою  $-m_2 \ddot{x}_2$ . Визначаємо переміщення точок прикладення першої та другої зосереджених мас:

$$x_1 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1}, \quad (1.28)$$

$$x_2 = \frac{-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2}{c_1} + \frac{-m_2 \ddot{x}_2}{c_2}. \quad (1.29)$$

Після простих перетворень у виразах (1.28) та (1.29) отримуємо систему диференціальних рівнянь вільних коливань двомасової системи

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 + c_1 x_1 &= 0, \\ \frac{c_2}{c_1} m_1 \ddot{x}_1 + \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) m_2 \ddot{x}_2 + c_2 x_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.30)$$

Система диференціальних рівнянь (1.24) та (1.27), отримані основним та прямим способами, співпадають за формою, система (1.30), отримана протилежним способом, не співпадає з першими двома, хоча цілком зрозуміло, що система диференціальних рівнянь (1.24) та (1.30) або (1.27) та (1.30), будучи різними за формою, описують ті ж самі вільні коливання двомасової системи.

Слід зазначити [25], що диференціальні рівняння коливань, отримані основним способом, співпадають з диференціальними рівняннями коливань, отриманими прямим способом, коли кінетична енергія має канонічну форму запису

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s a_j \dot{q}_j^2. \quad (1.31)$$

У цьому разі система диференціальних рівнянь (1.21) автоматично приймає форму

$$a_j \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^s c_{jk} q_k = 0 \quad (j=1, \dots, s), \quad (1.32)$$

яка співпадає з системою рівнянь, отриманих прямим способом.

Коли потенціальна енергія має канонічну форму запису

$$P = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s c_j q_j^2, \quad (1.33)$$

то диференціальні рівняння коливань, отримані основним способом, співпадають з диференціальними рівняннями, отриманими протилежним способом, і система диференціальних рівнянь (1.21) автоматично приймає форму

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + c_j q_j = 0 \quad (j=1, \dots, s). \quad (1.34)$$

У наведеному прикладі двомасової системи кінетична енергія має канонічну форму запису, тому диференціальні рівняння коливань, отримані основним та прямим способами, співпадають.

Розглянемо ряд багатомасових систем, для яких виведення диференціальних рівнянь коливань тим чи іншим способом має певні переваги. На рис. 1.4 зображена система, яка складається з певної кількості зосереджених мас  $m_j$ , з'єднаних між собою пружними елементами, які працюють на розтягнення та стиснення. Маючи на увазі, що у даному разі узагальнені координати співпадають з відповідними лінійними переміщеннями, для  $j$ -ї маси диференціальне рівняння коливань має наступний вигляд

$$m_j \ddot{x}_j = -c_j(x_j - x_{j-1}) - c_{j+1}(x_j - x_{j+1}) \quad (1.35)$$

де  $m_j$  – маса  $j$ -го тіла, кг;

$c_j$  – коефіцієнт поздовжньої жорсткості  $j$ -ї пружини, Н/м;

$x_j$  – лінійне переміщення  $j$ -го тіла, м.

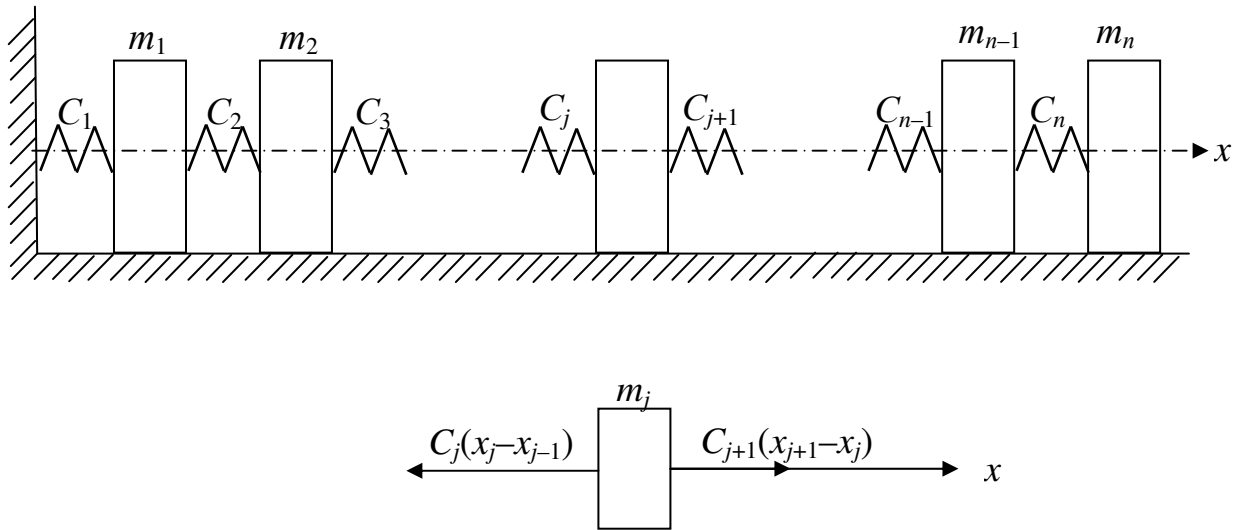


Рисунок 1.4 – Багатомасова система з пружними елементами, які працюють на розтягнення та стиснення

Враховуючи крайові умови, отримуємо систему диференціальних рівнянь вільних коливань тіл

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0; \\ \dots \\ m_j \ddot{x}_j - c_j x_{j-1} + (c_j + c_{j+1})x_j - c_{j+1} x_{j+1} &= 0; \\ \dots \\ m_n \ddot{x}_n - c_n x_{n-1} + c_n x_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.36)$$

Ці рівняння надзвичайно прості за структурою, у перше і останнє з них входять по два невідомих, у решту – по три.

Аналогічний вигляд за структурою мають і рівняння крутильних коливань масивних дисків, закріплених на пружному валі (рис. 1.5).

Рисунок 1.5 – Багатомасова крутильна система

Записуємо рівняння вільних коливань для  $j$ -го диска

$$J_j \ddot{\varphi}_j = -c_{kj}(\varphi_j - \varphi_{j-1}) - c_{kj+1}(\varphi_j - \varphi_{j+1}), \quad (1.37)$$

де  $J_j$  – момент інерції  $j$ -го диска, кг·м<sup>2</sup>;

$c_{kj}$  – коефіцієнт крутильної жорсткості  $j$ -ї ділянки вала, Н·м/рад;

$\varphi_j$  – кут повороту  $j$ -го диска, рад.

Враховуючи крайові умови, отримуємо систему диференціальних рівнянь вільних коливань дисків

$$\left. \begin{array}{l} J_1 \ddot{\varphi}_1 + (c_{k1} + c_{k2})\varphi_1 - c_{k2}\varphi_2 = 0; \\ \text{-----} \\ J_j \ddot{\varphi}_j - c_{kj}\varphi_{j-1} + (c_{kj} + c_{kj+1})\varphi_j - c_{kj+1}\varphi_{j+1} = 0; \\ \text{-----} \\ J_n \ddot{\varphi}_n - c_{kn}\varphi_{n-1} + c_{kn}\varphi_n = 0. \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

Ці рівняння за структурою повністю співпадають з рівняннями (1.36) для поздовжніх коливань, до того ж коефіцієнт рівнянь (1.36) та (1.38) легко визначаються з вихідних даних. Слід зазначити, що пружні системи, представлені на рис. 1.4 та 1.5, мають назву ланцюгових систем, оскільки пружні сили, які діють на зосереджені маси, залежать тільки від взаємних зміщень сусідніх тіл. Таким чином, для ланцюгових систем прямий спосіб виведення диференціальних рівнянь коливань має безперечну перевагу.

З іншого боку, для балочних систем з зосередженими масами зручніше користуватись протилежним способом виведення таких рівнянь. Відповідна розрахункова схема наведена на рис. 1.6, система диференціальних рівнянь коливань має наступний вигляд:

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2) + \delta_{13}(-m_3 \ddot{y}_3) + \dots + \delta_{1s}(-m_s \ddot{y}_s); \\ y_2 = \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2) + \delta_{23}(-m_3 \ddot{y}_3) + \dots + \delta_{2s}(-m_s \ddot{y}_s); \\ \text{-----} \\ y_s = \delta_{s1}(-m_1 \ddot{y}_1) + \delta_{s2}(-m_2 \ddot{y}_2) + \delta_{s3}(-m_3 \ddot{y}_3) + \dots + \delta_{ss}(-m_s \ddot{y}_s), \end{array} \right\} \quad (1.39)$$

де  $y_j$  – переміщення при коливаннях систем по  $j$ -й узагальненій координаті, м;

$\delta_{jk}$  – коефіцієнт виливу, м/Н;

$m_j$  –  $j$ -а зосереджена маса, кг.

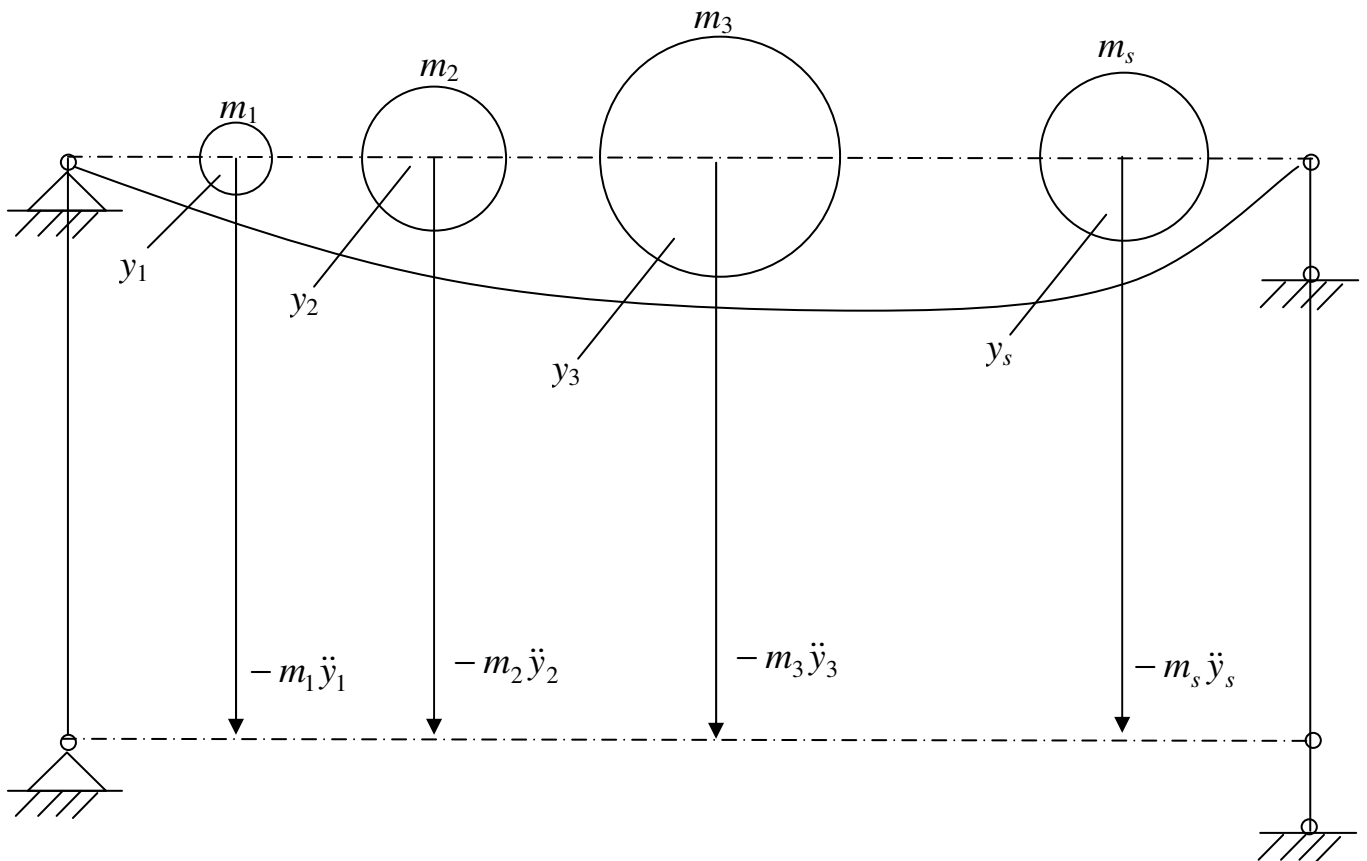


Рисунок 1.6 – Багатомасова балочна система

Для визначення коефіцієнтів вливу  $\delta_{jk}$  слід розглянути навантаження балки одиничними силами, прикладеними в точках знаходження зосереджених мас, у напрямках відповідних переміщень, що виконується методами опору матеріалів.

### 1.3. Визначення власних частот та форм вільних коливань

Виконуючи дії з виразами кінетичної та потенціальної енергій (1.18) та (1.19) у відповідності з операторами рівнянь Лагранжа другого роду, отримуємо наступну систему однорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + \dots + a_{1s}\ddot{q}_s + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{1s}q_s &= 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + \dots + a_{2s}\ddot{q}_s + c_{21}q_1 + c_{12}q_2 + \dots + c_{2s}q_s &= 0, \\ \dots & \\ a_{s1}\ddot{q}_1 + a_{s2}\ddot{q}_2 + \dots + a_{ss}\ddot{q}_s + c_{s1}q_1 + c_{s2}q_2 + \dots + c_{ss}q_s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

де  $q_j$  –  $j$ -а узагальнена координата;  
 $\ddot{q}_j$  –  $j$ -е узагальнене прискорення;  
 $a_j$  –  $j$ -й інерційний коефіцієнт;



Корені рівняння (1.45) дійсні та додатні для систем, які учиняють рух відносно стану стійкої рівноваги, звичайно нумеруються у порядку зростання

$$p_1 < p_2 < p_3 < \dots < p_s. \quad (1.46)$$

Кожному кореню  $p_j$  відповідає часткове рішення (1.41), отже загальне рішення будується як сума таких виразів, певним чином записаних

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_{11} \sin(p_1 t + \varphi_1) + A_{12} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_{1s} \sin(p_s t + \varphi_s); \\ q_2 &= A_{21} \sin(p_1 t + \varphi_1) + A_{22} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_{2s} \sin(p_s t + \varphi_s); \\ &\text{-----} \\ q_s &= A_{s1} \sin(p_1 t + \varphi_1) + A_{s2} \sin(p_2 t + \varphi_2) + \dots + A_{ss} \sin(p_s t + \varphi_s); \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

де  $A_{kj}$  – амплітуда коливань по  $j$ -й узагальненій координаті, коли коливання відбуваються з  $k$ -ю власною частотою;

$p_j$  – власна кругова частота коливань по  $j$ -й узагальненій координаті,  $1/c$ ;

$\varphi_j$  – відповідний фазовий куш, рад.

Узагальнений вигляд рішень (.147)

$$q_j = \sum_{k=1}^s A_{jk} \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (j=1,1,\dots,s) \quad (1.48)$$

свідчить про полігармонійний характер коливань, коли число гармонійних складових дорівнює числу степенів свободи системи.

Якщо підставити у систему рівнянь (1.42)  $j$ -й корінь частотного рівняння, то незалежних рівнянь залишається тільки  $s-1$ , що виходить з загальних властивостей однорідних систем алгебраїчних рівнянь [5]. Ці рівняння сполучують між собою  $s$  амплітуд  $A_{ij}$ , дозволяючи утворити наступні відношення, так звані коефіцієнти форми,

$$\kappa_{1j} = \frac{A_{1j}}{A_{1j}}, \quad \kappa_{2j} = \frac{A_{2j}}{A_{2j}}, \dots, \kappa_{sj} = \frac{A_{sj}}{A_{sj}} \quad (j=1,2,\dots,s), \quad (1.49)$$

які визначають відносні амплітуди  $j$ -ї гармоніки, тим самим описують конфігурацію системи при максимальному її відхиленні у процесі вільних коливань з  $j$ -ю власною частотою. Такі конфігурації системи залежать лише від властивостей самої системи і мають назву власних форм. Кожному кореню частотного рівняння відповідає певна власна форма, тому число власних форм дорівнює числу степенів свободи механічної системи.

Загальне рішення (1.48) з урахуванням коефіцієнтів форми  $x_{ji}$  має наступний вигляд



$$q_j = \sum_{k=1}^s \kappa_{ji} A_{1k} \sin(p_k t + \varphi_k) \quad (j=1,2,\dots,s); \quad (1.50)$$

містить  $2s$  констант, для визначення котрих слугить  $2s$  початкових умов у вигляді узагальнених координат і узагальнених швидкостей у початковий момент.

Приклад 1.1. Визначити власні частоти та форми коливань двомасової балочної системи, зображеної на рис. 1.7.

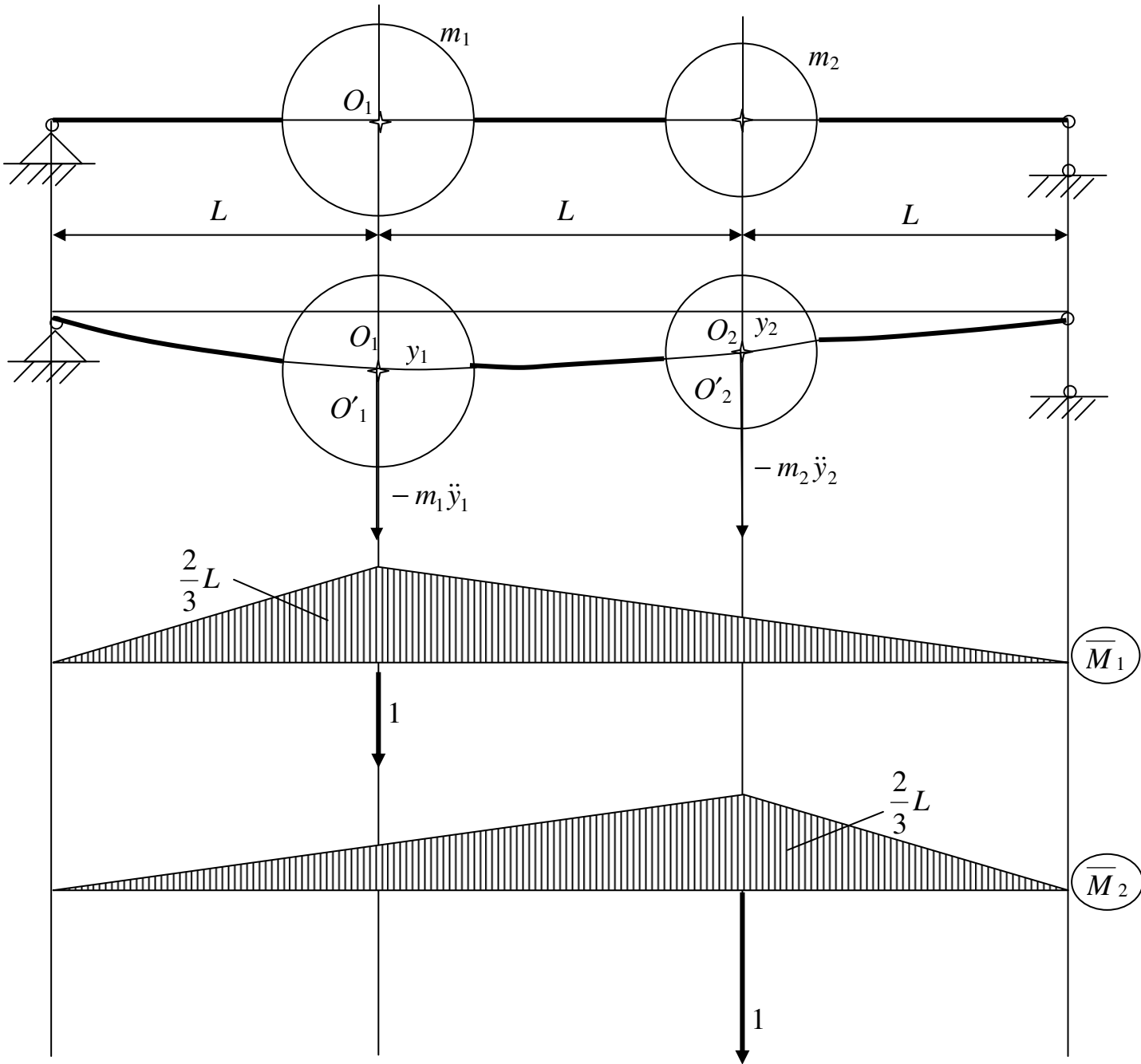


Рисунок 1.7 – Розрахункова схема двомасової балочної системи

Оскільки перед нами балочна система, то скористаємося описаним вище протилежним способом складання диференціальних рівнянь вільних коливань. Система (1.39) суттєво скорочується:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1\ddot{y}_1) + \nu_{12}(-m_2\ddot{y}_2), \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1\ddot{y}_1) + \nu_{22}(-m_2\ddot{y}_2). \end{aligned} \right\} \quad (1.51)$$

Рішення рівнянь (1.51) шукаємо у вигляді (1.41):

$$y_1 = A_1 \sin(pt + \varphi), \quad y_2 = A_2 \sin(pt + \varphi). \quad (1.52)$$

Після підставки виразів (1.52) у рівняння (1.51) отримуємо систему однорідних алгебраїчних рівнянь відносно амплітуд  $A_1$  та  $A_2$ :

$$\left. \begin{aligned} (\delta_{11}m_1p^2 - 1)A_1 + \delta_{12}m_2p^2A_2 &= 0, \\ \delta_{21}m_1p^2A_1 + (\delta_{22}m_2p^2 - 1)A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Як відомо [5], система рівнянь (1.53) має нетривіальні корені лише за умови

$$\begin{vmatrix} \delta_{11}m_1p^2 - 1 & \delta_{12}m_2p^2 \\ \delta_{21}m_1p^2 & \delta_{22}m_2p^2 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.54)$$

Після розкриття визначника (1.54) отримуємо частотне рівняння

$$m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)(p^2)^2 - (\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)p^2 + 1 = 0, \quad (1.55)$$

рішення якого з урахуванням (1.46) має наступний вигляд

$$p^2 = \frac{\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2 \mp \sqrt{(\delta_{11}m_1 + \delta_{22}m_2)^2 - 4m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}}{2m_1m_2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)}. \quad (1.56)$$

Як це відомо з опору матеріалів, величини  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{22}$  визначаються шляхом перемноження одиничних епюр згинаючих моментів (рис. 1.7):

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4L^3}{9EJ_z}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7L^3}{18EJ_z}, \quad (1.57)$$

де  $EJ_z$  – згинальна жорсткість балочної системи, Па·м<sup>4</sup>.

При умові  $m_1 = m_2 = m$  отримуємо

$$P_1^2 = \frac{6EJ_z}{5mL^3}, \quad P_2^2 = \frac{90EJ_z}{5mL^3}. \quad (1.58)$$

Після того, як частота  $P$  прийняла одне з отриманих значень, визначних перетворюється у нуль, а одне з рівнянь (1.53) стає наслідком іншого. У цьому разі ми фактично маємо не два рівняння, а одне рівняння з двома невідомими, з якого можна визначити лише відношення амплітуд  $A_1$  та  $A_2$ . Підставляємо у перше рівняння (1.53)  $p^2 = p_1^2$ , отримуємо  $A_2 = A_1$  або у позначеннях (1.49)  $A_{21} = A_{11}$ , підставляємо  $p^2 = p_2^2$ , отримуємо  $A_2 = -A_1$ , або у позначеннях (1.49)  $A_{22} = -A_{12}$ . Коефіцієнти форми при цьому дорівнюють

$$\kappa_{11} = \frac{A_{11}}{A_{11}} = 1, \quad \kappa_{21} = \frac{A_{21}}{A_{11}} = 1, \quad \kappa_{12} = \frac{A_{12}}{A_{12}} = 1, \quad \kappa_{22} = \frac{A_{22}}{A_{12}} = -1. \quad (1.59)$$

Таким чином, для системи з двома степенями свободи існує дві власні форми коливань. При коливаннях з нижчою частотою  $p$ , амплітуди мають однакові знаки, переміщення мас  $m_1$  та  $m_2$  відбуваються у одній фазі; при коливаннях з вищою частотою  $p_2$  амплітуди мають різні знаки, переміщення мас  $m_1$  та  $m_2$  відбувається у протифазі. Відповідні форми коливань зображені на рис. 1.8, а, б.

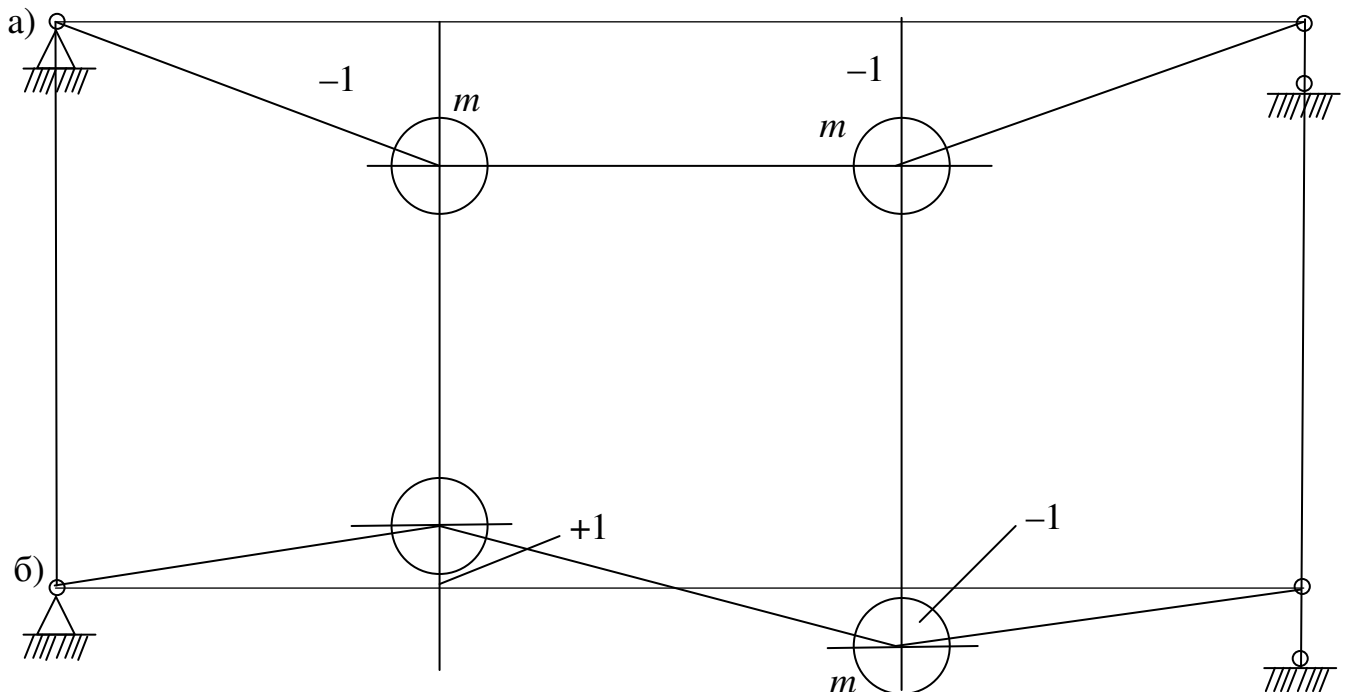


Рисунок 1.8 – Власні форми коливань двомасової балочної системи

При  $p = p_1$  та  $p = p_2$  вирази (1.52) конкретизуються і приймають наступний вигляд:

$$y_1 = A \sin(p_1 t + \varphi), \quad y_2 = A \sin(p_1 t + \varphi). \quad (1.60)$$

$$y_1 = A \sin(p_2 t + \varphi), \quad y_2 = -A \sin(p_2 t + \varphi). \quad (1.61)$$

Об'єднуючи вирази (1.60) та (1.61), отримуємо повне рішення задачі

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A \sin(p_1 t + \varphi_1) + B \sin(p_2 t + \varphi_2), \\ y_2 &= A \sin(p_1 t + \varphi_1) - B \sin(p_2 t + \varphi_2), \end{aligned} \right\} \quad (1.62)$$

де константи  $A$ ,  $B$ ,  $\varphi_1$  та  $\varphi_2$  визначаються з початкових умов

#### 1.4. Головні, або нормальні координати

Вводимо  $s$  нових узагальнених координат, які пов'язані з уже узагальненими координатами наступними залежностями

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= A_{11}\chi_1 + A_{12}\chi_2 + \dots + A_{1s}\chi_s, \\ q_2 &= A_{21}\chi_1 + A_{22}\chi_2 + \dots + A_{2s}\chi_s, \\ &\text{-----} \\ q_s &= A_{s1}\chi_1 + A_{s2}\chi_2 + \dots + A_{ss}\chi_s, \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

або у скороченому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} q_j &= \sum_{m=1}^s A_{jm} \chi_m, \\ q_k &= \sum_{n=1}^s A_{kn} \chi_n, \end{aligned} \right\} \quad (1.64)$$

де  $A_{jm}$  – амплітуда коливань по  $j$ -й узагальненій координаті при  $m$ -й формі власний коливань;

$A_{kn}$  – амплітуда коливань по  $k$ -й узагальненій координаті при  $n$ -й формі власних коливань;

$\chi_m, \chi_n$  – нові узагальнені координати.

Записуємо вирази кінетичної та потенціальної енергії з урахуванням узагальнених координат (1.64)

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} \sum_{m=1}^s A_{jm} \dot{\chi}_m \sum_{n=1}^s A_{kn} \dot{\chi}_n. \quad (1.65)$$

Міняємо порядок підсумовування у виразі (1.65), отримуємо

$$T = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s \dot{\chi}_m \dot{\chi}_n \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} A_{jm} A_{kn}. \quad (1.66)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{jk} q_j q_k = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{jk} \sum_{m=1}^s A_{jm} \chi_m \sum_{n=1}^s A_{kn} \chi_n. \quad (1.67)$$

Міняємо порядок підсумовування у виразі (1.67), отримуємо

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^s \sum_{n=1}^s \chi_m \chi_n \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{jk} A_{jm} A_{kn}. \quad (1.68)$$

Оскільки форми власних коливань ортогональні, внутрішні подвійні суми виразів (1.66) та (1.68) дорівнюють нулю при  $m \neq n$ . Вводимо відповідні позначення при  $m = n$ .

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s a_{jk} A_{jn} A_{kn} = a_n, \quad (1.69)$$

$$\sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s c_{jk} A_{jn} A_{kn} = c_n. \quad (1.70)$$

Тоді вирази кінетичної та потенціальної енергії приймають канонічну форму

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s a_n \dot{\chi}_n^2, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^s c_n \chi_n^2. \quad (1.71)$$

Узагальнені координати  $\chi_n$ , які спричиняють канонічну форму запису кінетичної та потенціальної енергії, мають назву головних або нормальних координат системи.

Рівняння Лагранжа другого роду істотно спрощуються, приймають тривіальний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \ddot{\chi}_1 + c_1 \chi_1 &= 0, \\ a_2 \ddot{\chi}_2 + c_2 \chi_2 &= 0, \\ \text{-----} \\ a_s \ddot{\chi}_s + c_s \chi_s &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.72)$$

або в іншому вигляді

$$a_n \ddot{\chi}_n + c_n \chi_n = 0 \quad (n=1,2,\dots,s). \quad (1.73)$$

Ці рівняння інтегруються незалежно одне від одного, і як наслідок, механічна система при використанні нормальних координат неначе розпадається на  $s$  незалежних парціальних підсистем з одним ступенем свободи.

Власні частоти головних коливань визначаються за формулою

$$P_n = \sqrt{\frac{c_n}{a_n}} \quad (n=1,2,\dots,s), \quad (1.74)$$

а загальне рішення диференціальних рівнянь (1.73)

$$\left. \begin{aligned} \chi_1 &= A_1 \sin(p_1 t + \varphi_1), \\ \chi_2 &= A_2 \sin(p_2 t + \varphi_2), \\ \text{-----} \\ \chi_s &= A_s \sin(p_s t + \varphi_s) \end{aligned} \right\} \quad (1.75)$$

або

$$\chi_n = A_n \sin(p_n t + \varphi_n) \quad (n=1,2,\dots,s). \quad (1.76)$$

Константи  $A_n$  та  $\varphi_n$  визначаються з початкових умов задачі:

$$\chi_n(0) = \chi_{n0}, \quad \dot{\chi}_n(0) = \dot{\chi}_{n0} \quad (n=1,2,\dots,s). \quad (1.77)$$

### 1.5. Вимушені коливання системи

Коли на лінійну механічну систему з  $s$  степенями свободи при відсутності тертя діють зовнішні силові фактори, які залежать певним чином від часу, то рівняння Лагранжа другого роду мають наступний вигляд:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = Q_j^F \quad (j=1,2,\dots,s), \quad (1.77)$$

де  $Q_j^F$  –  $j$ -а збуджуюча узагальнена сила неконсервативного походження, яка відповідає  $j$ -й узагальненій координаті.

Після підстановки виразів кінетичної та потенціальної енергії (1.18) та (1.19) у рівняння (1.77) отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = Q_j^F \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (1.78)$$

Якщо узагальнені координати вибрані так, що кінетична енергія має канонічну форму запису, тобто  $a_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ , то система рівнянь (1.78) істотно спрощується:

$$a_j \ddot{q}_k + \sum_{k=1}^s c_{jk} q_k = Q_j^F \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (1.79)$$

До таких рівнянь можна підійти на шляху прямого способу, що має рацію для ланцюгових систем.

Якщо узагальнені координати вибрані так, що потенціальна енергія має канонічну форму запису, тобто  $c_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ , то система рівнянь (1.78) істотно спрощується і за структурою цілком співпадає з відповідними рівняннями, отриманими протилежним способом.

$$\sum_{k=1}^s a_{jk} \ddot{q}_k + c_j q_j = Q_j^F \quad (j=1,2,\dots,s). \quad (1.80)$$

Саме протилежним способом є сенс користуватися при дослідженні та розрахунках коливань балочних систем.

Розглянемо дію збуджуючих сил, які міняються по гармонічному закону; це варто того, адже усяке зовнішнє збудження можна розкласти у ряди Фур'є по синуса та косинусах, а результати діяння окремих гармонічних складових, як це справедливо для лінійних систем, об'єднати. Припустимо, на механічну систему з  $s$  степенями свободи по кожній узагальненій координаті діють гармонічні складові  $P_j \sin \omega t$ , які мають однакові частоту і форму, а відрізняються лише амплітудними значеннями.

Тоді рівняння (1.78) приймають такий вигляд:

$$\sum_{k=1}^s (a_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} q_k) = P_j \sin \omega t \quad (j=1,2,\dots,s) \quad (1.81)$$

Стаціонарну частину рішення системи (1.81) розшукуємо у вигляді

$$q_j = A_j \sin \omega t \quad (j=1,2,\dots,s), \quad (1.82)$$

Звідки видно, що усі узагальнені координати змінюються з певною частотою, яка дорівнює частоті збуджуючих сил.

Підставляючи (1.82) у диференціальні рівняння (1.81), отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь для визначення коливань  $A_j$ :

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - \omega^2 a_{11})A_1 + (c_{12} - \omega^2 a_{12})A_2 + \dots + (c_{1s} - \omega^2 a_{1s})A_s &= P_1, \\ (c_{21} - \omega^2 a_{21})A_1 + (c_{22} - \omega^2 a_{22})A_2 + \dots + (c_{2s} - \omega^2 a_{2s})A_s &= P_2, \\ \text{-----} \\ (c_{s1} - \omega^2 a_{s1})A_1 + (c_{s2} - \omega^2 a_{s2})A_2 + \dots + (c_{ss} - \omega^2 a_{ss})A_s &= P_s. \end{aligned} \right\} \quad (1.83)$$

Рішення системи рівнянь (1.83) по правилу Крамера [5] має вигляд

$$A_j = \frac{\Delta_j}{D} \quad (j=1,2,\dots,s), \quad (1.84)$$

де  $D$  – головний визначник системи алгебраїчних рівнянь (1.83)

$$D = \begin{vmatrix} (c_{11} - \omega^2 a_{11}) & c_{12} - \omega^2 a_{12} & \dots & c_{1s} - \omega^2 a_{1s} \\ c_{21} - \omega^2 a_{21} & c_{22} - \omega^2 a_{22} & \dots & c_{2s} - \omega^2 a_{2s} \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ c_{s1} - \omega^2 a_{s1} & c_{s2} - \omega^2 a_{s2} & \dots & c_{ss} - \omega^2 a_{ss} \end{vmatrix} \quad (1.85)$$

$\Delta_j$  – визначник, який отримується з головного визначника  $D$  шляхом заміни  $j$ -го стовпця стовпцем, утвореним з правих частин системи рівнянь (1.83).

Сукупність амплітудних значень  $A_j$  визначає форму вимушених коливань системи.

Якщо порівняти отриманий визначник  $D$  (1.85) з частотним визначником (1.44), то видно, що вони повністю співпадають при  $\omega = p$ . Але у цьому випадку визначник  $D$  обертається у нуль так само, як і частотний визначник. Це може бути лише за обставин, коли частоти зовнішніх збуджень співпадають з власними частотами системи, тобто  $\omega_j = p_j$ .

Якщо  $D = 0$ ,  $\Delta_j \neq 0$ , то усі амплітуди  $A_j$  безмежно зростають, що свідчить про появу резонансного режиму. Таким чином, появу резонансних режимів спричиняє збіг збуджуючих частот з якого-небудь власного частотою.

Приклад 1.2. На двох балках (рис. 1.9) встановлено двигун, що має незбалансований ротор малого  $m_0 = 40$  кг. Радіус дебалансу  $r = 10^{-3}$  м; частота обертання ротора  $n = 3000$  об/хв. Маса двигуна 180 кг. Довжина балок  $l = 1,5$  м. Для балок обрано швелер №12 (ГОСТ 8240–72), у якого  $J_z = 304 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>. Перевірити систему на резонанс.

Розв'язання. Це задача на вимушені коливання системи з одним ступенем свободи.



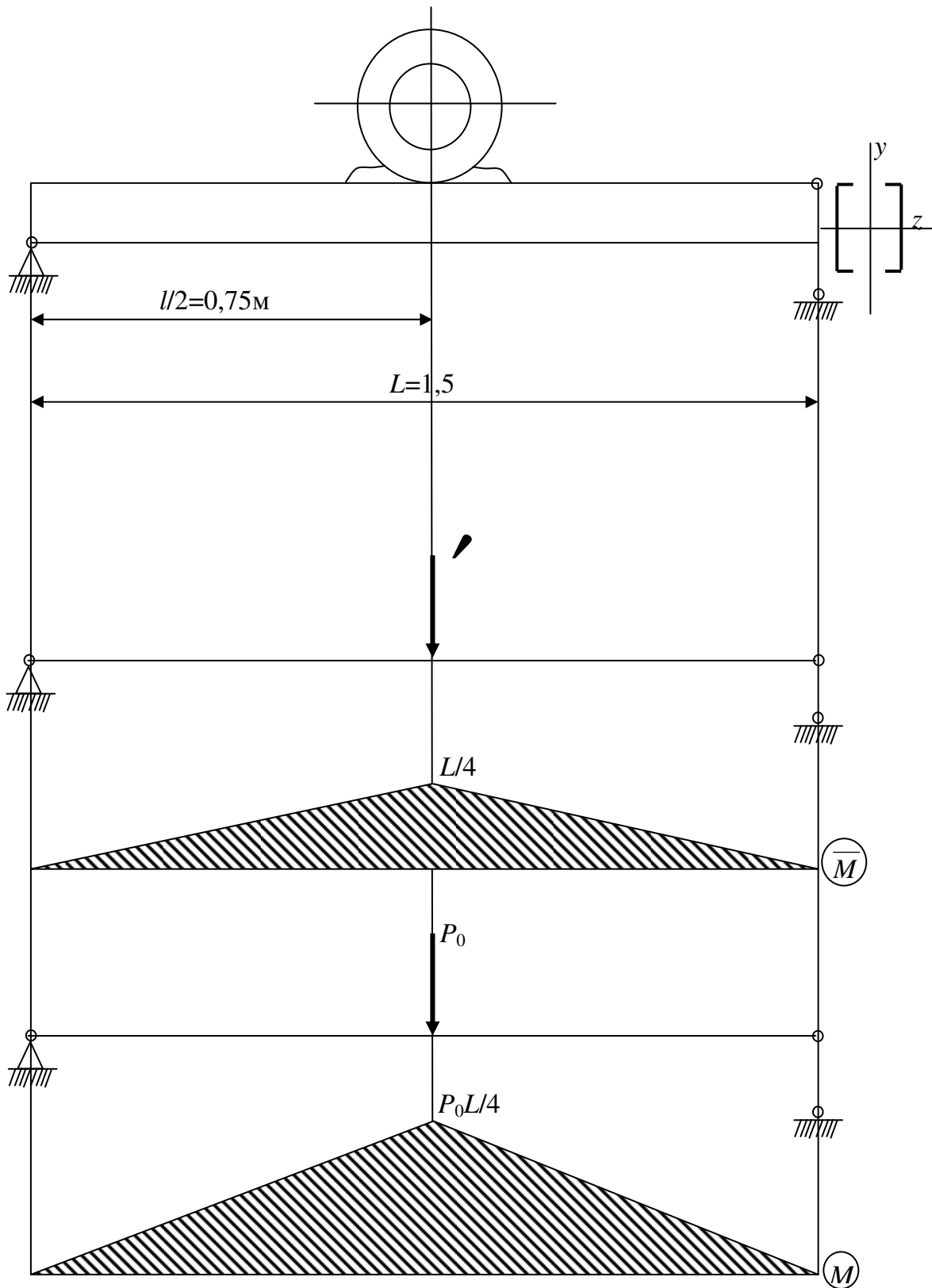


Рисунок 1.9 – Розрахункова схема навантаження двох балок електродвигуном

Складаємо рівняння вимушених коливань прямим способом, нехтуючи малою балок

$$m_{\partial} \ddot{y} = -cy + P_0 \sin \omega t,$$

де  $m_{\partial}$  – маса двигуна, кг;

$c$  – коефіцієнт жорсткості пружної системи у місці встановлення двигуна, Н/м;

$P_0$  – максимальне значення збуджуючої сили, Н;

$\omega$  – кругова частота збуджуючої сили, 1/с.

Перепишемо одержане рівняння у такому вигляді

$$\ddot{y} + p^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \omega t,$$

де  $p$  – власна кругова частота коливань системи, 1/с;

а далі розв'язуємо його

$$y = A \sin(pt + \phi) \mp \frac{P_0}{c \left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)} \sin(\omega t - \psi).$$

Перший доданок цього виразу являє собою власне коливання, амплітуда і фаза котрого визначається початковими умовами. Ці коливання є затухаючими, тому через певний час практично зникають. Другий доданок описуємо вимушені коливання системи з частотою збуджуючої сили та відповідною фазою  $\psi$ .

Останній вираз для практичного розрахунку на міцність переписуємо з урахуванням сказаного

$$y = \frac{P_0}{c \left|1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right|} \sin(\omega t - \psi).$$

Визначаємо необхідні для розрахунку величини.

Кругова частота збуджуючої сили дорівнює кутовій швидкості обертання ротора

$$\omega = 2\pi \cdot \frac{3000}{60} = 314 \text{ 1/с.}$$

Визначаємо кругову частоту власних коливань системи, нехтуючи власною масою балок,

$$P = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

Маючи на увазі, що  $c = 1/\delta_{11}$ , спочатку находимо  $\delta_{11}$  способом Верещагіна, маючи відповідну одиничну епюру згинаючих моментів (рис. 1.9),

$$c = \frac{96EJ_z}{L^3}$$

А далі розраховуємо власну кругову частоту

$$P = \sqrt{\frac{96EJ_z}{L^3 m}} = \sqrt{\frac{96 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 304 \cdot 10^{-8}}{1,5^3 \cdot 180}} = 310 \text{ 1/с.}$$

Як бачимо, частоти майже співпадають, що свідчить про неминучий резонансний режим. Щоб його запобігти, спробуємо знайти профіль балок на більш легкий; беремо, наприклад, швелер №8 (ГОСТ 8240–72), у якого  $J_z = 89,4 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ . У цьому разі отримуємо власну кругову частоту  $p = 168 \text{ 1/с}$ .

Ця частота уже істотно відрізняється від частоти збуджуючої сили, тому для подальшого розрахунку визначаємо коефіцієнт динамічності

$$k_d = \frac{1}{\left|1 - \frac{314^2}{168^2}\right|} = 0,401.$$

Далі визначаємо максимальне значення збуджуючої сили

$$P_0 = m_0 \omega^2 r = 40 \cdot 314^2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 3944 \text{ Н.}$$

Максимальне напруження у балках від дії цієї статично прикладеної сили становить

$$\sigma'_{cm} = \frac{M_z}{2W_z} = \frac{P_0 L}{8W_z} = \frac{3944 \cdot 1,5}{8 \cdot 22,4 \cdot 10^{-6}} = 33 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 33 \text{ МПа,}$$

де  $W_z = 22,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  – момент опору згинанню одного швелера №8.

Максимальне напруження у балках від дії динамічного прикладеної сили  $P_0$  становить

$$\sigma = \sigma_{cm} K_d = 33 \cdot 0,401 = 13,2 \text{ МПа.}$$

Ці перемінні напруження накладаються на постійні напруження від власної маси двигуна  $m_d = 180$  кг.

$$\sigma_{cm} = \frac{m \partial l}{v W_z} = \frac{180 \cdot 9,8 \cdot 1,5}{8 \cdot 22,4 \cdot 10^{-6}} = 14,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 14,8 \text{ МПа}.$$

Таким чином, навантаження балок, на яких встановлено двигун, потребує розрахунку на в-новальну міцність при наступних характеристиках циклу напружень:

$$\sigma_m = 14,8 \text{ МПа}, \quad \sigma_a = 13,2 \text{ МПа},$$

де  $\sigma_m$  – середній рівень напружень, Па;

$\sigma_a$  – амплітудне значення перемінної складової напружень, Па.

Приклад 1.2. На сталевій балці прямокутного поперечного перетину (рис. 1.10) закріплені дві зосереджені маси  $m_1 = m$  та  $m_2 = 2m$ . На масу  $m_1$  діє періодична сила  $P = P_0 \sin \omega t$ , де  $\omega^2 = 1/\delta_{22} m_2$ ,  $P_0 = 500$  Н. Визначити максимальне нормальне напруження у балці при наступних параметрах системи:  $m = 20$  кг,  $L = 0,5$  м,  $v = 2 \cdot 10^{-2}$  м,  $h = 4 \cdot 10^{-2}$  м.

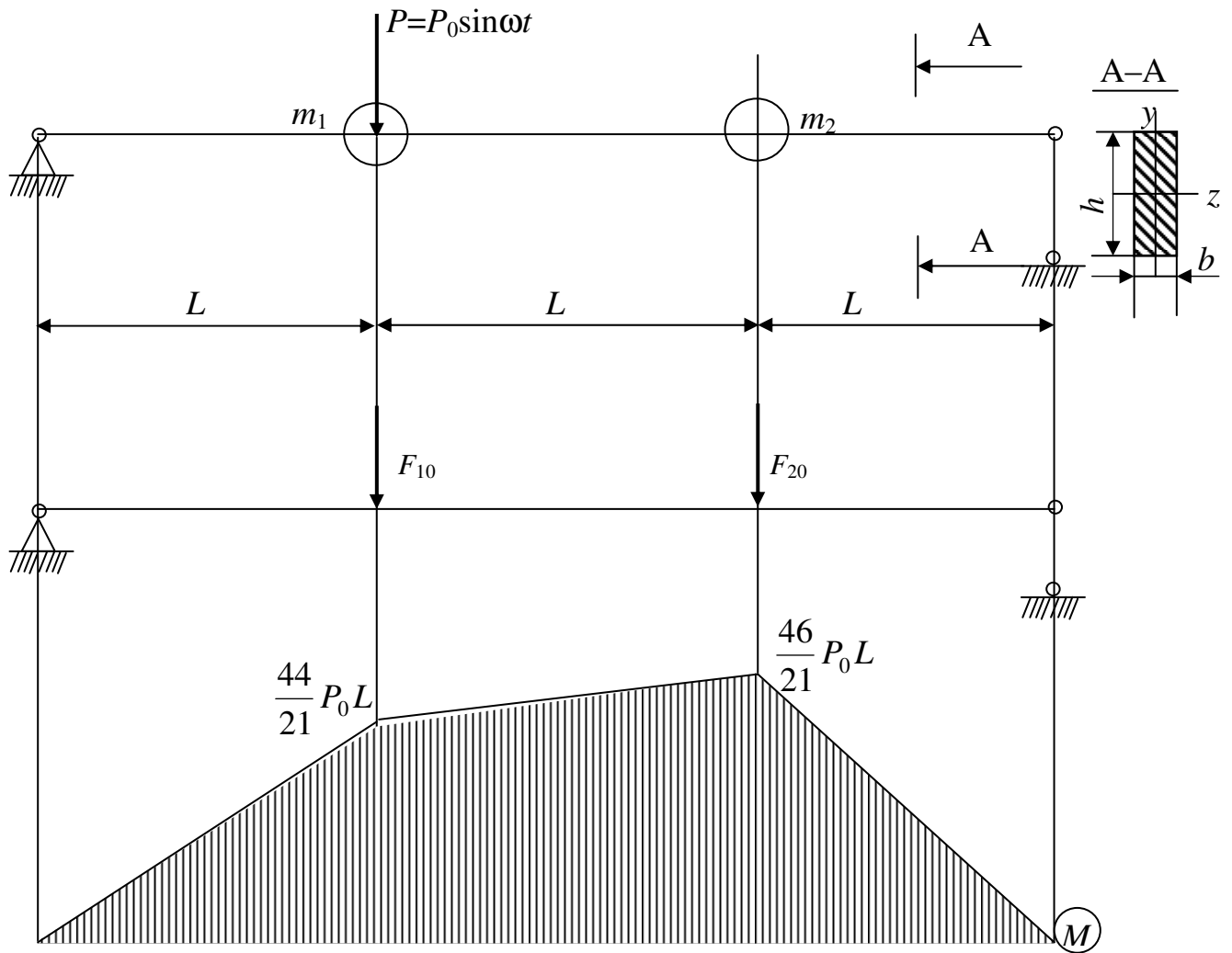


Рисунок 1.10 – Розрахункова схема двомасової динамічної системи

Розв'язання. Запишемо диференціальні рівняння вимушених коливань системи, виведеної протилежним способом,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}(-m_1 \ddot{y}_1 + P_0 \sin \omega t) + \delta_{12}(-m_2 \ddot{y}_2); \\ y_2 &= \delta_{21}(-m_1 \ddot{y}_1 + P_0 \sin \omega t) + \delta_{22}(-m_2 \ddot{y}_2). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Рішення системи рівнянь (a) шукаємо у вигляді  $y_1 = A_1 \sin \omega t$ ,  $y_2 = A_2 \sin \omega t$ . Підставляючи  $y_1$  та  $y_2$  у рівняння (a), знаходимо амплітуду коливань  $A_1$  та  $A_2$ :

$$A_1 = P_0 \frac{\delta_{11}(1 - \delta_{22}m_2\omega^2) + \delta_{12}^2 m_2 \omega^2}{(1 - \delta_{11}m_1\omega^2)(1 - \delta_{22}m_2\omega^2) - \delta_{12}^2 m_1 m_2 (\omega^2)^2};$$

$$A_2 = P_0 \frac{\delta_{21}}{(1 - \delta_{11}m_1\omega^2)(1 - \delta_{22}m_2\omega^2) - \delta_{12}^2 m_1 m_2 (\omega^2)^2}.$$

За умовою задачі  $\omega^2 = 1/\delta_{22}m_2$ , таким чином,

$$A_1 = -P_0 \delta_{22} \frac{m_2}{m_1}, \quad A_2 = -P_0 \delta_{22} \frac{\delta_{22} m_2}{\delta_{12} m_1},$$

або після розкриття коефіцієнтів податливості  $\delta_{ij}$ , наприклад, способом Верещагіна

$$A_1 = -\frac{8 P_0 L^3}{9 EJ_z}, \quad A_2 = -\frac{64 P_0 L^3}{63 EJ_z}.$$

У процесі динамічного навантаження на маси  $m_1$  та  $m_2$  діють періодичні сили  $F_1 = P_0 \sin \omega t - m_1 \ddot{y}_1$  та  $F_2 = -m_2 \ddot{y}_2$ , амплітудні значення яких

$$F_{10} = 2P_0, \quad F_{20} = 2P_0 \frac{\delta_{22}}{\delta_{12}} = \frac{16}{7} P_0.$$

На рис. 1.10 зображена епюра згинаючих моментів звідки видно, що небезпечним перетином є той, де закріплена маса  $m_2$ :

$$M_{z \max} = \frac{46}{21} P_0 L.$$

Після підготовки числових даних отримуємо максимальне напруження у балці

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} = \frac{46 P_0 L}{21 \cdot \pi h^2 / 6} = \frac{6 \cdot 46 \cdot 500 \cdot 0,5}{21 \cdot 2 \cdot 10^{-2} (4 \cdot 10^{-2})^2} = 102,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 102,7 \text{ МПа}.$$

Приклад 1.3. Визначити найбільше дотичне напруження, яке виникає у валу постійного поперечного перетину  $d = 40$  мм (рис. 1.11) при дії на нього крутячого моменту  $M = M_0 \sin \omega t$  ( $M_0 = 300$  Н·м,  $\omega = 0,8 p_2$ ,  $p_2$  – друга власна частота коливань системи)

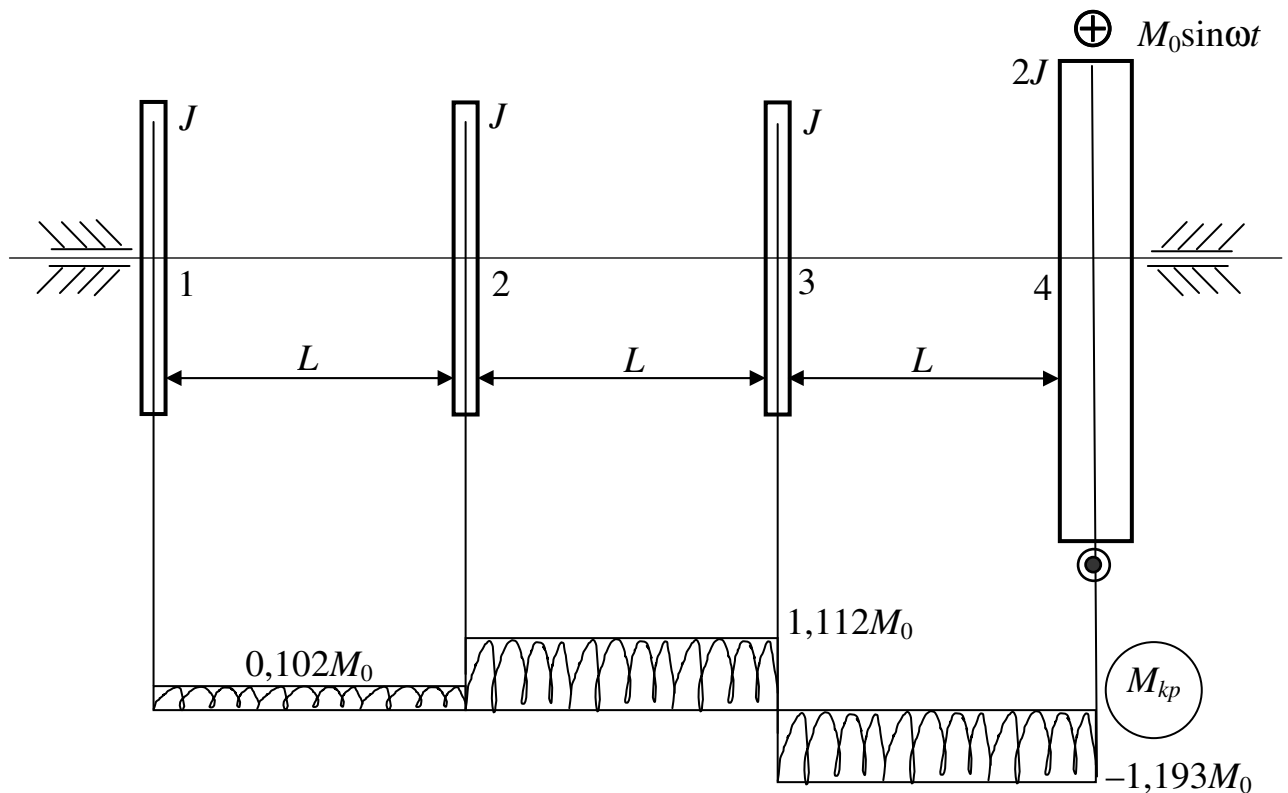


Рисунок 1.11 – Розрахункова схема чотиримасової крутильної системи

**Рішення.** Складаємо диференційні рівняння коливань пружної системи основним способом, тобто у формі рівнянь Лагранжа другого роду. Спочатку записуємо вирази кінетичної та потенціальної енергії:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} 2J \dot{\varphi}_4^2; \\ \Pi &= \frac{1}{2} c (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} c (\varphi_4 - \varphi_3)^2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{a})$$

Виконуючи дії у відповідності з операторами рівнянь Лагранжа другого роду, отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} J \ddot{\varphi}_1 + c (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J \ddot{\varphi}_2 + c (\varphi_2 - \varphi_1) + c (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ J \ddot{\varphi}_3 + c (\varphi_3 - \varphi_2) + c (\varphi_3 - \varphi_4) &= 0; \\ 2J \ddot{\varphi}_4 + c (\varphi_4 - \varphi_3) &= M_0 \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (\text{б})$$

Рішення системи (б) шукаємо у формі  $\varphi_i = A_i \sin \omega t$ , що після відповідної підстановки дає наступну систему алгебраїчних рівнянь відповідно амплітуд коливань:

$$\left. \begin{aligned} (c - J\omega^2)A_1 - cA_2 &= 0; \\ -cA_1 + (2c - J\omega^2)A_2 - cA_3 &= 0; \\ -cA_2 + (2c - J\omega^2)A_3 - cA_4 &= 0; \\ -cA_3 + (c - 2J\omega^2)A_4 &= M_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{в})$$

При розв'язанні системи рівнянь (в) отримуємо наступні значення кутів закручування  $A_1 = 0,373M_0/c$ ,  $A_2 = 9,274 M_0/c$ ,  $A_3 = -0,841 M_0/c$ ,  $A_4 = -0,352 M_0/c$ .

Звідки отримуємо амплітудні значення крутячих моментів на ділянках вала:

$$\left. \begin{aligned} M_{12} &= c(A_1 - A_2) = 0,102M_0; \\ M_{23} &= c(A_2 - A_3) = 1,112M_0; \\ M_{34} &= c(A_3 - A_4) = -1,193M_0, \end{aligned} \right\}$$

Звідки  $M_{кр\max} = |M_{34}| = 1,193 M_0 = 1,1193 \cdot 300 = 357,9 \text{ Н}\cdot\text{м}$ .

Визначаємо найбільше дотичне напруження, воно діє на третій ділянці вала:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр\max}}{W_{кр}} = \frac{1,193M_0}{0,2d^3} = \frac{1,193 \cdot 300}{0,2(40 \cdot 10^{-3})^3} = 28 \cdot 10^6 \text{ Па} = 28 \text{ МПа}.$$

#### Питання для самоконтролю

1. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду?
2. Саме чому дорівнює число рівнянь Лагранжа другого роду для кожної механічної системи?
3. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду у випадках, коли на систему одночасно діють консервативні та неконсервативні сили?
4. Який вигляд мають рівняння Лагранжа другого роду для консервативних систем?
5. Як визначаються потенціальна енергія механічної системи, яка знаходиться під впливом сил пружності?
6. У яких випадках прямий спосіб складання диференціальних рівнянь коливань має певні переваги?
7. У яких випадках протилежний спосіб складання диференціальних рівнянь коливань має переваги?
8. У чому полягає сутність власних форм коливань системи?
9. Яким показником характеризується власні форми коливань системи?
10. Які узагальнені координати називаються головними або нормальними?
11. Які переваги мають головні, або нормальні координати при дослідженні динаміки пружних систем?
12. Чому дорівнює кругова частота збуджуючої сили з боку електродвигуна при наявності незбалансованості ротора?



## РОЗДІЛ 2

### СТУРЖНЕВІ СИСТЕМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ МАСАМИ

#### 2.1. Поперечні коливання струн

Струну рахуємо абсолютно гнучкою, що означає наявність у поперечних перетинах лише поздовжніх сил (рис. 2.1, а). Оскільки поперечні переміщення струни досить малі, є сенс припустити, що сила на тяжіння  $N_0$  у процесі коливань лишається постійною.

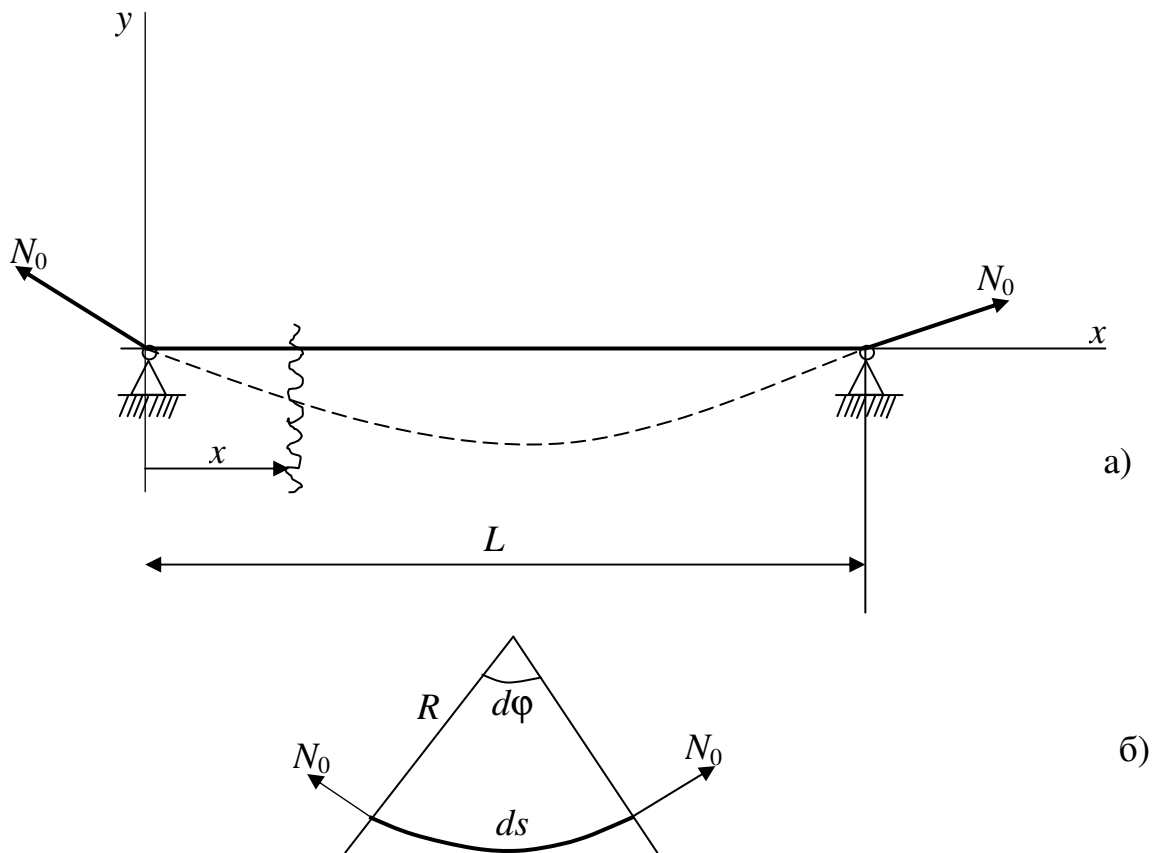


Рисунок 2.1 – Розрахункова схема струни

б) Складаємо рівняння руху елементарної ділянки струни  $dS$  (рис. 2.1,

$$m_0 dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 2N_0 \frac{dS}{R} \cdot \frac{1}{2}, \quad (2.1)$$

де  $m_0$  – маса одиниці довжини струни, кг;

$N_0$  – сила натяжіння струни, Н.

$y(x,t)$  – переміщення поточної точки струни, м;

$S$  – довжина дуги струни, м;

$R$  – радіус кривизни струни при коливаннях, м.

Приймаючи до уваги малі переміщення струни, можна записати

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.2)$$

після чого рівняння руху приймає наступний вигляд

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.3)$$

де  $a^2 = N_0/m_0$ .

Функція  $y(x,t)$  має відповідати крайовим та початковим умовам.

У найбільш загальному вигляді рішення рівняння (2.3) розшукуємо у вигляді:

$$y = Y(x)T(t). \quad (2.4)$$

Після підстановки (2.4) у рівняння (2.3) отримуємо два ординарних диференціальних рівняння відносно функцій  $Y$  та  $T$ :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{T} + p^2 T &= 0, \\ Y'' + \frac{p^2}{a^2} Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

де  $p$  – власна кругова частота коливань,  $1/c$ .

Розв'язуємо систему рівнянь (2.5):

$$T = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt, \quad (2.6)$$

$$Y = C_3 \cos \frac{p}{a} x + C_4 \sin \frac{p}{a} x. \quad (2.7)$$

При крайових умовах, які очевидні з розрахункової схеми,  $x = 0$   $y = 0$ ,  $x = L$   $y = 0$  з рівняння (2.7) отримуємо

$$C_3 = 0, \quad C_4 \sin \frac{p}{a} L. \quad (2.8)$$

Оскільки  $C_4$  немає рації дорівнювати нулю, то

$$\sin \frac{p}{a} L = 0, \quad (2.9)$$

звідси витікає

$$\frac{p}{a}L = \pi n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.10)$$

З співвідношення (2.10) визначаємо власні кругові частоти коливань

$$p_n = \frac{\pi n}{L}a = \frac{\pi n}{L} \sqrt{\frac{N_0}{m_0}} \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

Кожна величина  $p_n$  відповідає рівнянню (2.3) та крайовим умовам, тому загальне розв'язання являє собою суму цих розв'язань:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_{1n} \cos \frac{\pi n a}{L} t + C_{2n} \sin \frac{\pi n a}{L} t \right) \sin \frac{\pi n x}{L}. \quad (2.12)$$

Розв'язання (2.12) має відповідати початковим умовам, а саме:

$$y \left. \begin{aligned} (x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin \frac{\pi n x}{L} = f_1(x), \\ \dot{y}(x, 0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n a}{L} C_{2n} \sin \frac{\pi n x}{L} = f_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

де функція  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$  – початкова форма коливань та початковий розподіл швидкостей точок струни.

Коефіцієнти  $C_{1n}$  та  $C_{2n}$  знаходимо по відомим формулам з теорії рядів Фур'є [5]:

$$\left. \begin{aligned} C_{1n} &= \frac{2}{L} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx, \\ C_{2n} &= \frac{2}{\pi n a} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Коли є потреба визначити лише частоти коливань, то розв'язання рівняння (2.3) можна шукати у вигляді

$$y(x, t) = Y(x) \sin pt. \quad (2.15)$$

Підставляючи (2.15) у рівняння (2.3), отримуємо

$$Y'' + \frac{p^2}{a^2} Y = 0. \quad (2.16)$$

Розв'язання рівняння (2.16) має вигляд (2.7). Функція  $u(x)$  має відповідати крайовим умовам задачі, запис яких призводить до частотного рівняння.

## 2.2. Поздовжні коливання стержнів

Розглянемо однорідний призматичний стержень у якому збуджені поздовжні коливання (рис. 2.2).

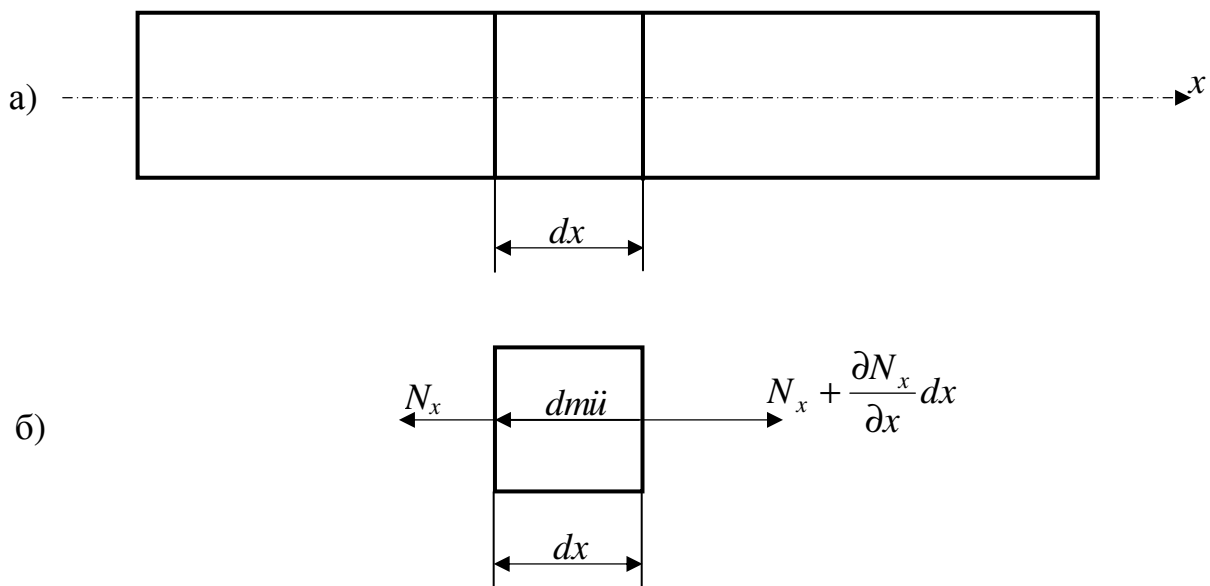


Рисунок 2.2 – Розрахункова схема стержня

При виведенні рівняння руху базуємося на гіпотезі плоских перетинів, крім того, приймаємо, що коефіцієнт Пуассона  $\nu$  дорівнює нулю. Тоді положення кожного поперечного перетину у процесі коливань повністю характеризується його поздовжнім зміщенням  $U$ , а нормальна сила у перетині  $N_x$  пов'язана з деформацією  $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  законом Гука для одноосного напруженого стану.

$$N_x = EF \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (2.17)$$

де  $F$  – площа поперечного перетину стержня,  $\text{м}^2$ ;

З умови рівноваги елементарної ділянки стержня (рис. 2.2, б)

$$dm \ddot{u} = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \quad (2.18)$$

де  $dm$  – маса елементарної ділянки, кг;  
або з урахуванням питомої маси стержня

$$\rho F \ddot{u} = \frac{\partial N_x}{\partial x}, \quad (2.19)$$

де  $\rho$  – питома маса матеріалу стержня, кг/м<sup>3</sup>.

Об'єднуючи вираз (2.17) з рівнянням (2.19), отримуємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.20)$$

Таким чином, отримано рівняння поздовжніх коливань стержня, у якому невідома величина  $u$  є функцією двох незалежних перемінних  $x$ ,  $t$ . Це диференціальне рівняння у часткових похідних, так зване хвильове рівняння.

Розв'язання рівняння (2.20) шукаємо у вигляді

$$u = X(x) \sin pt, \quad (2.21)$$

де  $X(x)$  – функція лише однієї перемінної  $x$ , м;

$p$  – кругова частота власних поздовжніх коливань стержня, 1/с.

Після підстановки (2.21) у рівняння (2.20) отримуємо рівняння, яке визначає форми коливань:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\rho}{E} p^2 X = 0, \quad (2.22)$$

звідки

$$X = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E} p^2 x} + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E} p^2 x}. \quad (2.23)$$

Константи  $C_1$  та  $C_2$  мають бути визначені з крайових умов.

При защемлених торцях  $u = 0$ , відповідно  $X = 0$ ; при вільних торцях  $N_x = 0$ , відповідно  $\frac{dX}{dx} = 0$ .

Коли лівий торець стержня ( $x = 0$ ) пружно закріплений (рис. 2.3, а), а коефіцієнт жорсткості закріплення  $c$ , то  $N_x = cu$ , відповідно,  $EF \frac{dX}{dx} = cX$ . Коли правий торець стержня ( $x = l$ ) пружно закріплений (рис. 2.3, б), то крайова умова має вигляд  $EF \frac{dX}{dx} = -cX$ .

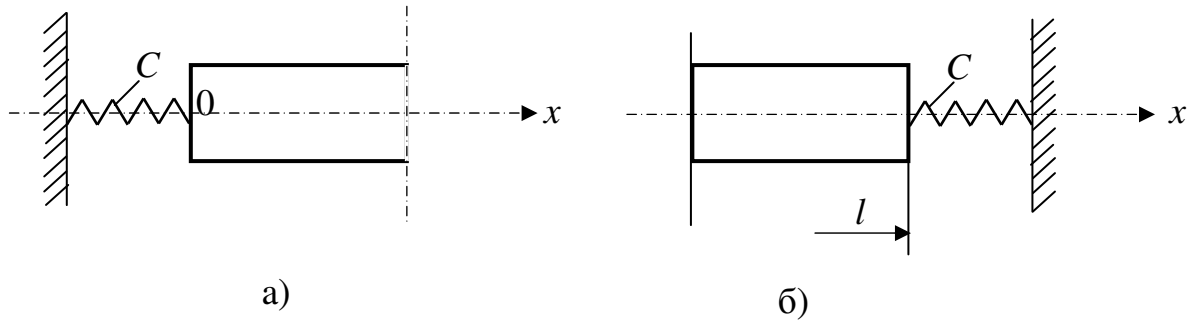


Рисунок 2.3 – Розрахункові схеми пружних закріплень стержнів

Коли лівий кінець стержня з'єднаний з зосередженою масою  $m$ , то крайова умова для функції  $X(x)$  може бути отримана з рівняння руху маси  $m$

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EF \frac{\partial u}{\partial x}$$

або після підстановки у це рівняння (2.21)

$$-mp^2 X = EF \frac{dX}{dx}.$$

Коли правий кінець стержня з'єднаний з зосередженою масою  $m$ , то відповідна крайова умова має вигляд

$$-mp^2 X = -EF \frac{dX}{dx}.$$

При різних крайових умовах стержня після підстановки у них виразу (2.23) отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $C_1$  та  $C_2$ , а далі частотне рівняння.

Приклад 2.1. Стержень закріплений нерухомо лівим кінцем, а правий кінець вільний (рис. 2.4). Виразити власні частоти коливань та форми коливань.

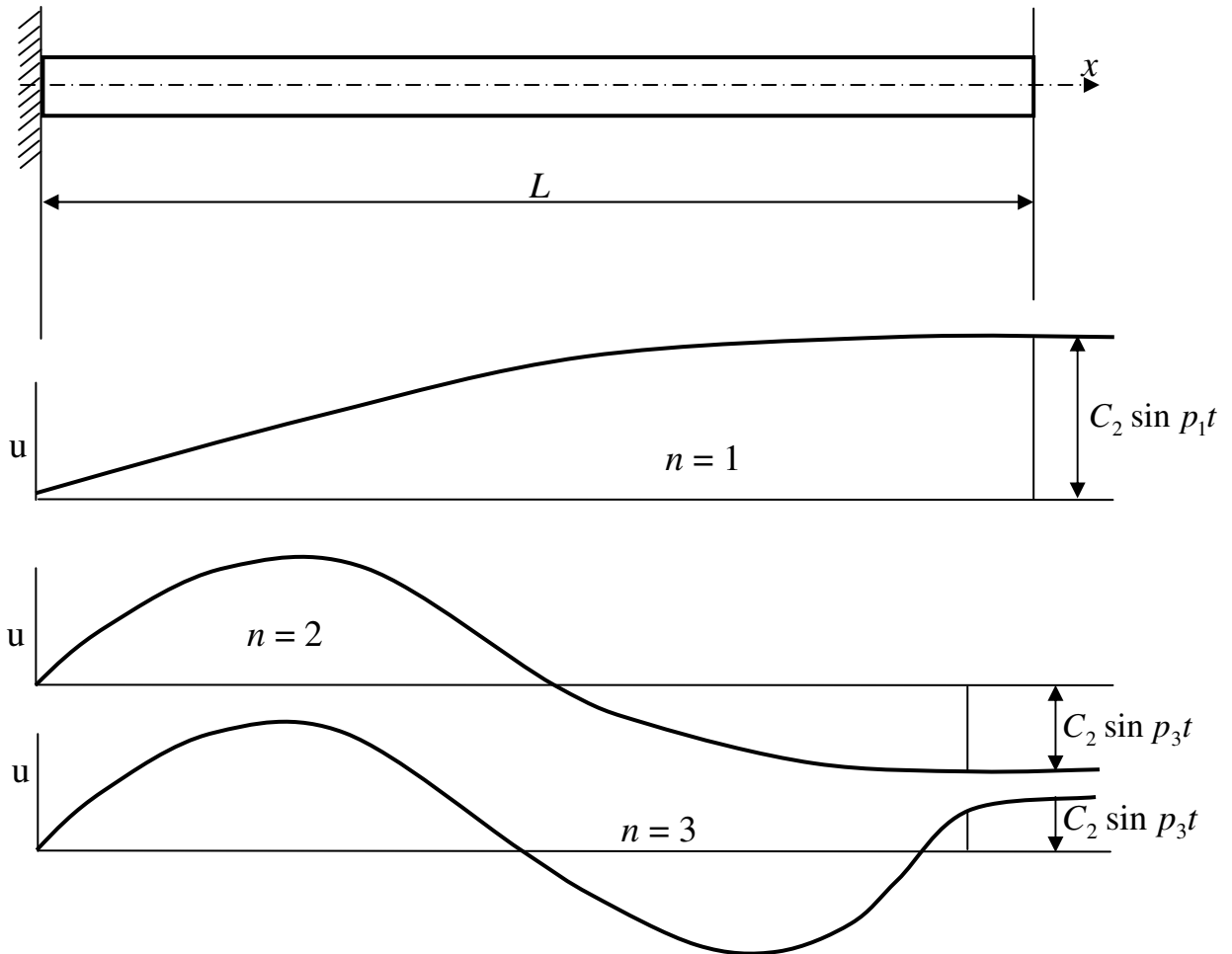


Рисунок 2.4 – Форми коливань стержня

Розв'язання. Крайовий умови наступні:

При  $x = 0$  функція  $X = 0$ , при  $x = L$  її похідна  $\frac{dX}{dx} = 0$ . Скористайтесь

виразом (2.23):

$$\left. \begin{aligned} X &= C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 x, \\ \frac{dX}{dx} &= -C_1 \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 x + C_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 x. \end{aligned} \right\}$$

У перше рівняння підставляємо  $x = 0$ , у друге  $x = L$  та прирівнюємо їх нулю

$$\left. \begin{aligned} C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \cdot 0 + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \cdot 0 &= 0, \\ -C_1 \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 l + C_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 l &= 0. \end{aligned} \right\}$$

З першого рівняння отримуємо  $C_1 = 0$ , з другого –

$$C_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 l = 0.$$

З останнього виразу слід чекати, що або  $C_2 = 0$ , або  $\cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} p^2 l = 0$ . У першому випадку отримуємо для „ $u$ ” нульове розв’язання, яке не є цікавим, у іншому випадку

$$pl \sqrt{\frac{S}{E}} = \frac{\pi}{2} (2n - 1),$$

де  $n$  – будь-яке ціле число. Звідки визначається ряд послідовних частот власних поздовжніх коливань стержня

$$p = \frac{\pi}{2L} (2n - 1) \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Таким чином, стержень має нескінченну кількість частот власних коливань, відповідно яким можливі резонансні режими. Найнижча частота, або частота основного тону має вигляд

$$p = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{S}}.$$

Після підстановки „ $p$ ” у вираз (2.23) отримуємо форми коливань, які відповідають різним значенням  $n$ :

$$X = C_2 \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x.$$

При  $n = 1, 2, 3$  форми коливань зображені на рис. 2.4. Функція переміщення „ $u$ ” у згоді з виразом (2.21) має наступний вигляд

$$u(x, t) = C_2 \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x \sin pt.$$

Виникнення тієї чи іншої форми коливань визначається способом збудження, залежить від початкових умов власних коливань.



### 2.3. Крутильні коливання валів

При виведенні рівняння коливань припускаємо, що при динамічному крученні вал деформується так же, як і при статичному, а саме: поперечні перетини його лишаються плоскими та повертаються навколо поздовжньої осі як жорсткі диски.

На рис. 2.5 зображена розрахункова схема вала, де виділена елементарна ділянка, показані силові фактори, які діють на неї.

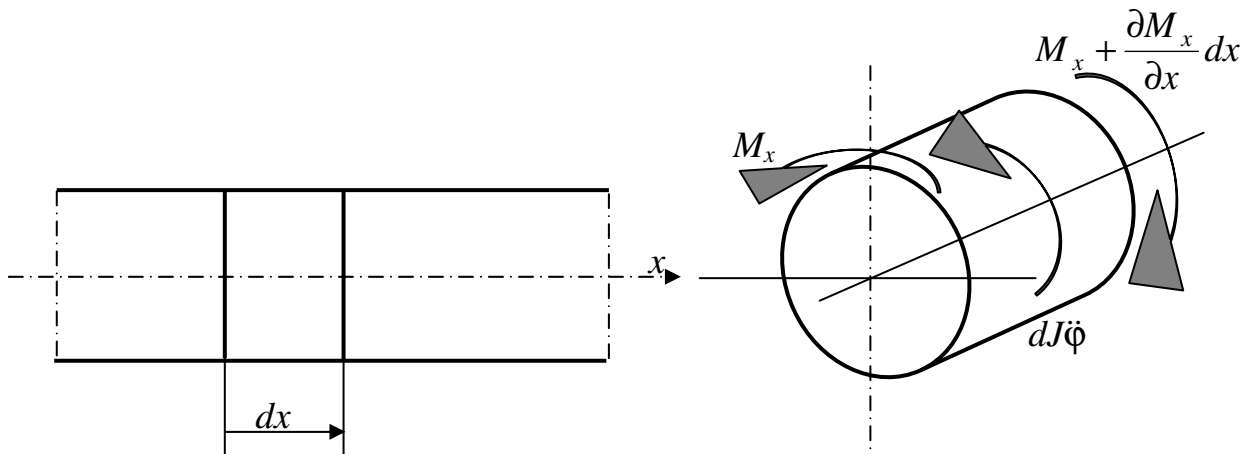


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема вала

Складаємо рівняння рівноваги елементарної ділянки вала

$$M_x + dJ\dot{\varphi} - M_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} dx = 0, \quad (2.24)$$

де  $M_x$  – крутячий момент у початковому перетині, Н·м;

$J$  – момент інерції вала, кг·м<sup>2</sup>;

$\varphi$  – кут повороту перетину, рад.

Після скорочення отримуємо

$$dJ\dot{\varphi} - \frac{\partial M_x}{\partial x} dx = 0. \quad (2.25)$$

Вводимо поняття моменту інерції маси одиниці довжини вала

$$J_0 = J_p \rho, \quad (2.26)$$

де  $J_0$  – момент інерції маси одиниці довжини вала, кг·м<sup>2</sup>;

$J_p$  – полярний момент інерції поперечного перетину вала, м<sup>4</sup>;

$\rho$  – питома маса матеріалу вала, кг.

З іншого боку наводимо вираз, який пов'язує крутячий момент з крутильною жорсткістю

$$M_x G J_p Q = G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.27)$$

де  $G$  – модуль пружності другого роду, Па;

$Q$  – погонний кут закручування вала, рад/м.

Підставляємо (2.26) та (2.27) у рівняння (2.25):

$$J_p \rho dx \ddot{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x} G J_p \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \quad (2.28)$$

або після скорочення:

$$J_p \rho \ddot{\varphi} = G J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.29)$$

Записуємо рівняння (2.29) в остаточному вигляді:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.30)$$

Таким чином, отримано рівняння крутильних коливань вала, у якому  $\varphi$  є функція двох перемінних  $x$  та  $t$ . Це диференціальне рівняння у часткових похідних, розв'язання якого шукаємо у вигляді:

$$\varphi = \Phi(x) \sin pt, \quad (2.31)$$

де  $\Phi(x)$  – функція, яка залежить лише від поздовжньої координати  $x$ , рад:

$p$  – кругова частота власних крутильних коливань вала, 1/с.

Після підстановки (2.31) у рівняння (2.30) отримуємо рівняння, яке визначає форми коливань:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{\rho}{G} p^2 \Phi = 0, \quad (2.32)$$

звідки

$$\Phi = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G} p^2} x + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G} p^2} x. \quad (2.33)$$

Константи  $C_1$  та  $C_2$  визначаються з крайових умов.

При за\*\*\*мих торцевих перетинах  $\varphi = 0$ , відповідно  $\Phi = 0$ ; при вільних  $M_x = 0$ , відповідно  $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ .

Коли лівий торцевий перетин ( $x = 0$ ) пружно закріплений, а коефіцієнт крутильної жорсткості закріплення  $C_x$ , то  $M_x = C_x\Phi$ , відповідно  $GJ_p \frac{d\Phi}{dx} = C_x\Phi$ . Коли правий торцевий перетин ( $x = l$ ) пружно закріплений, то крайова умова має вигляд  $GJ_p \frac{d\Phi}{dx} = -C_x\Phi$ .

Коли лівий кінцевий перетин вала з'єднаний з зосередженою масою, яка має момент інерції  $J$ , то крайова умова для функції  $\Phi(x)$  може бути отримана з рівняння руху маси

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = GJ_p \frac{d\varphi}{dx}$$

або після підстановки у це рівняння вираз (2.31)

$$-J_p^2\Phi = GJ_p \frac{d\Phi}{dx}.$$

Коли правий кінцевий перетин вала з'єднаний з зосередженою масою, яка має момент інерції  $J$ , то крайова умова для функції  $\Phi$  має вигляд

$$-J_p^2\Phi = -GJ_p \frac{d\Phi}{dx}.$$

При різних крайових умовах вала після підстановки у них виразу (2.33) отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $C_1$  та  $C_2$ , а далі відповідне частотне рівняння.

Приклад 2.2. Визначити власні кругові частоти пружних коливань суцільного вала круглого перетину для випадків закріплення, як це показано на рис. 2.6.

Розв'язання. У випадку вільних торцевих перетинів (рис. 2.6, а) відповідний пружний момент дорівнює нулю, тобто при  $x = 0$ ,  $x = l$

$$M_x = GJ_p \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \sin pt GJ_p \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0,$$

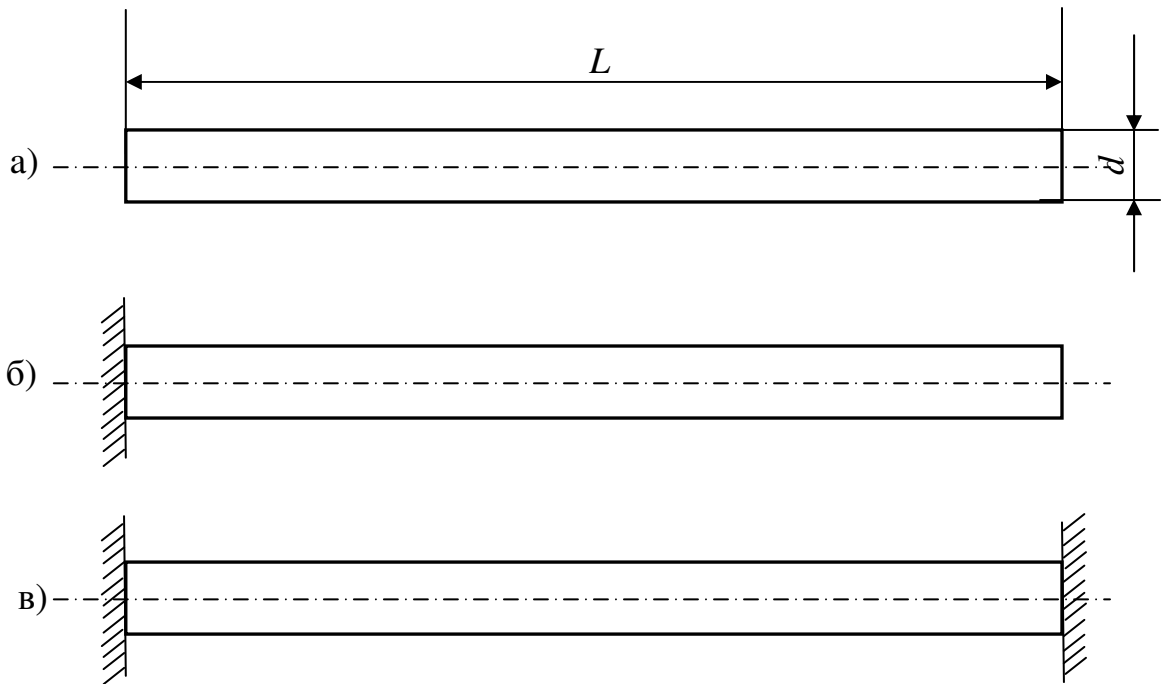


Рисунок 2.6 – Розрахункові схеми валів

звідки отримуємо наступні умови

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=l} = 0.$$

З рівняння (2.33)

$$C_2 \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 = 0, \tag{а}$$

$$-C_1 \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l + C_2 \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l = 0. \tag{б}$$

З співвідношення (а) витікає, що  $C_2 = 0$ , а с співвідношення (б)

$$\sin pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = 0,$$

звідки

$$pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Власні кругові частоти крутильних коливань вала

$$p_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

У випадку, коли один з перетинів вала заземлений (рис. 2.6, б), крайові умови мають вигляд:

$$x = 0, \Phi = 0; \quad x = l, \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0.$$

Далі скористаємось виразами (2.33) та (б):

$$\Phi|_{x=0} = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot 0 + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot 0 = 0, \quad (в)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \Big|_{x=l} = -C_1 \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l + C_2 \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l = 0. \quad (г)$$

З виразу (в)  $C_1 = 0$ , з виразу (г)

$$\cos pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = 0,$$

звідки

$$pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \frac{\pi}{2} (2n - 1) \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Власні кругові частоти крутильних коливань вала

$$p_n = \frac{\pi}{2l} (2n - 1) \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

У випадку, коли обидва торцеві перетини вала заземлені (рис. 2.6, в), крайові умови мають вигляд:

$$x = 0, \Phi = 0; \quad x = l, \Phi = 0.$$

Скористаємось виразом (2.33):

$$\Phi|_{x=0} = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot 0 + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot 0 = 0, \quad (д)$$

$$\Phi|_{x=l} = C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot l + C_2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cdot l = 0. \quad (e)$$

З виразу (д)  $C_1 = 0$ , з виразу (е)

$$\sin pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = 0,$$

звідки

$$pl \sqrt{\frac{\rho}{G}} = \pi n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Власні кругові частоти крутильних коливань вала

$$p_n = \frac{\pi n}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

**Приклад 2.3.** Вивести частотне рівняння крутильних коливань вала круглого перетину з дисками на кінцях (рис. 2.7). Моменти інерції дисків  $J_1$  та  $J_2$ .

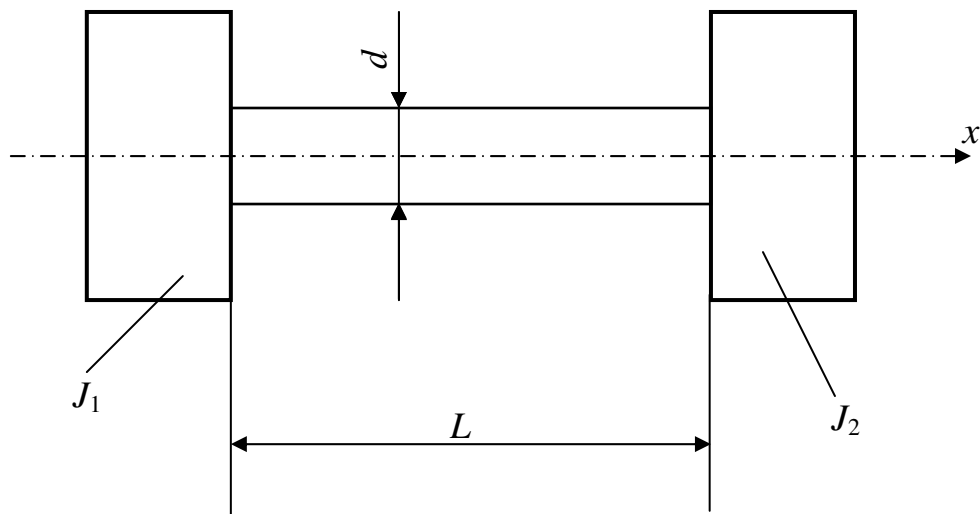


Рисунок 2.7 – Розрахункова схема вала з двома дисками

Розв’язання. До торців вала прикладені моменти інерції дисків, які дають дві крайові умови:

$$GJ_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} = J_1 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{x=0}, \quad (a)$$

$$GJ_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=l} = -J_2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{x=l}, \quad (б)$$

де  $J_p$  – полярний момент інерції перетину вала,  $m^4$ .

Виконання крайових умов (а) та (б) з урахуванням виразу (2.33) дає систему однорідних рівнянь відносно  $C_1$  та  $C_2$ :

$$\left. \begin{aligned} GJ_p \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 C_2 + J_1 p^2 C_1 &= 0, \\ \left( GJ_p \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l - J_2 p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l \right) C_2 - \\ - \left( GJ_p \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 \sin \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l + J_2 p^2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{G}} p^2 l \right) C_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (B)$$

Дорівнюємо нулю визначник системи (в), отримуємо таким чином частотне рівняння

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(m+n)\beta}{(mn\beta^2 - 1)},$$

де  $\beta = pl \sqrt{\frac{\rho}{G}}$ ;  $m = \frac{J_1}{J_0}$ ;  $n = \frac{J_2}{J_0}$ ;  $J_0 = J_p \rho l$ .

## 2.4. Поперечні коливання балок

На рис. 2.8 зображена двоопорна статична визначима балка.

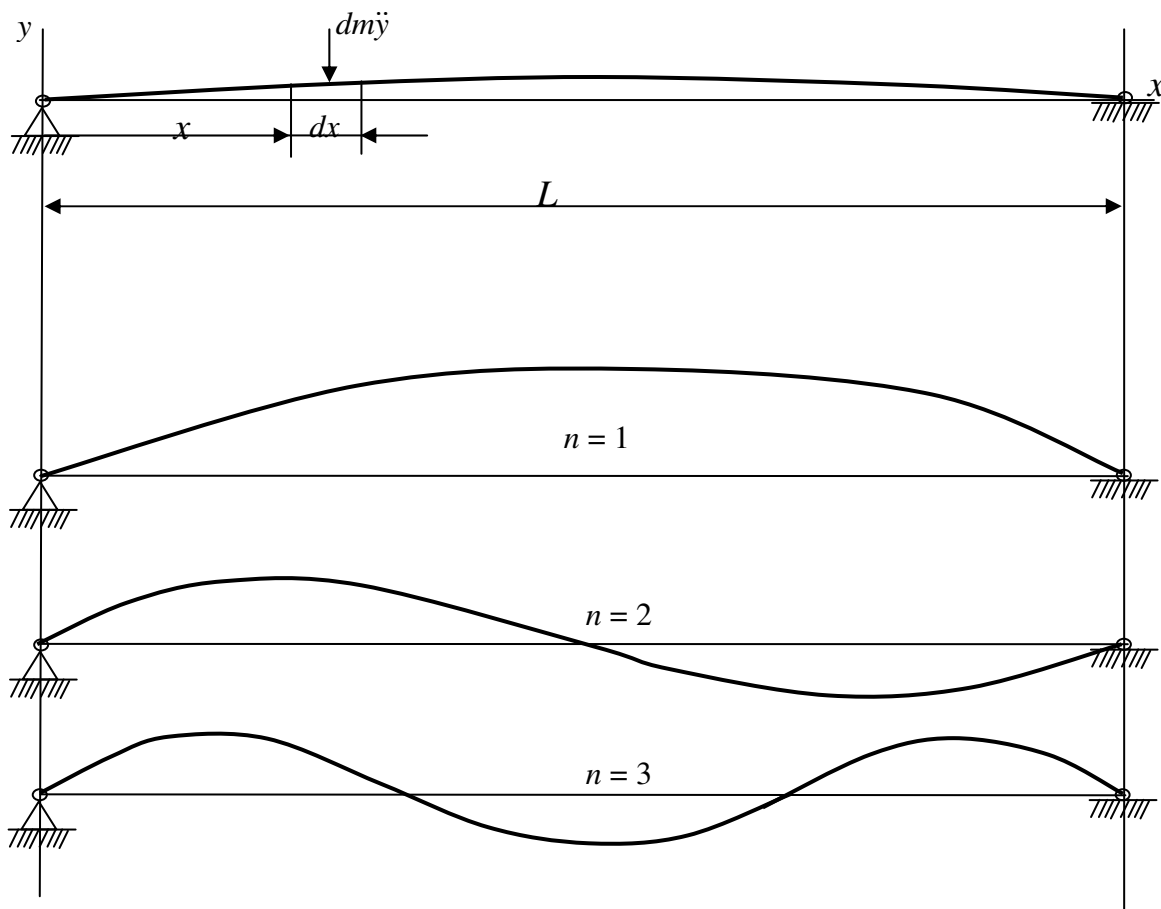


Рисунок 2.8 – розрахункова схема та форми коливань двоопорної балки

Як відомо з опору матеріалів,

$$EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q, \quad (2.34)$$

де  $EJ_z$  – згинальна жорсткість балки, Н·м<sup>2</sup>;

$q$  – погонне навантаження, Н/м.

Визначаємо погонне навантаження, яке при вільних коливаннях балки має інерційне походження:

$$q = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (2.35)$$

де  $F$  – площа поперечного перетину балки, м<sup>2</sup>.

Знак «–» поставлено у зв'язку з тим, що навантаження  $q$  направлене у бік, протилежний прискоренню.

Об'єднуємо рівняння (2.34) та вираз (2.35):

$$EJ_z \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (2.36)$$

Рівняння (2.36) переписуємо наступним чином:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\rho F}{EJ_z} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.37)$$

Розв'язання рівняння (2.37) шукаємо у вигляді:

$$y = Y(x) \sin pt. \quad (2.38)$$

Після підстановки (2.38) у (2.37) маємо

$$Y^{IV} - a^4 Y = 0, \quad (2.39)$$

де

$$A^4 = \frac{\rho F}{EJ_z} p^2. \quad (2.40)$$

Розв'язання рівняння (2.39) наступне:

$$Y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + C_3 chax + C_4 shax, \quad (2.41)$$



де константи  $C_i$  визначаються з крайових умов. Для балки, зображеної на рис. 2.8, на кожній опорі прогин  $y$  та згинаючий момент  $EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$  обертається у нуль. Таким чином, маємо геометричні крайові умови: при  $x = 0$   $Y = 0$ , при  $x = l$   $Y = 0$  та статичні крайові умови: при  $x = 0$   $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ , при  $x = l$   $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0$ . З перших геометричної та статичної крайових умов отримуємо  $C_1 = 0$ ,  $C_3 = 0$ . З других геометричної та статичної крайових умов маємо:

$$\left. \begin{aligned} C_2 \sin al + C_4 shal &= 0, \\ -C_2 \sin al + C_4 shal &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Складемо почленно рівняння системи (2.42), отримуємо

$$2C_4 shal = 0, \quad (2.43)$$

звідки  $C_4 = 0$ .

Для нетривіального розв'язання системи (2.42) її визначник має дорівнювати нулю:

$$\begin{vmatrix} \sin al & shal \\ -\sin al & shal \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$2\sin al shal = 0.$$

Гіперболічний синус обертається у нуль лише при  $al = 0$ , що не складає інтерес для розв'язання даної задачі; лишається  $\sin al = 0$ , звідки  $al = \pi n$ . З урахуванням позначення (2.40) отримуємо

$$p = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ_z}{\rho F}}. \quad (2.44)$$

Як бачимо, і у випадку згинальних коливань утворюється нескінченна послідовність частот, але на відміну від поздовжніх чи крутильних коливань тут частоти пропорційні не першій, а другій степені чисел натурального ряду.

Форма пружної лінії балки при поперечних коливаннях визначається виразом (2.41), який при даних крайових умовах істотно спрощується і має вигляд

$$Y = C_2 \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (2.45)$$

При коливаннях у основному тоні тобто при  $n = 1$  балка згинається по одній на півхвилі синусоїди, при  $n = 2$  маємо дві на півхвилі, при  $n = 3$  – три на півхвилі і так далі, що демонструється на рис. 2.8. Відповідно цим частотам при наявності періодичних зовнішніх збуджень можлива поява резонансних режимів. Виникнення тієї чи іншої форми коливань визначається початковими умовами збудження власних коливань.

## 2.5. Вимушені коливання балок, викликані рухомою силою

Коли постійна вертикальна сила  $P$  рухається уздовж балки, то вона викликає коливання; розрахункова схема такої балки представлена на рис. 2.9.

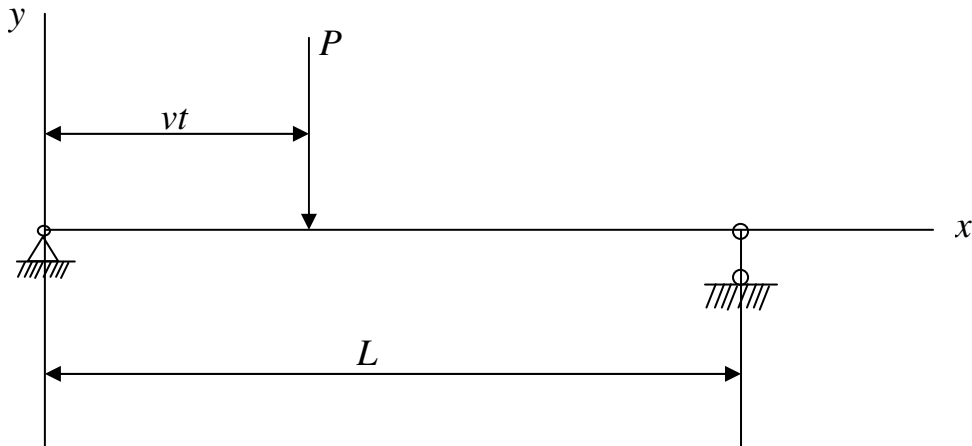


Рисунок 2.9 – Розрахункова схема балки з рухомою постійною силою

Рівняння коливань отримуємо у формі рівняння Лагранжа другого роду, для цього узагальнені координати позначаємо  $q_n$ , після чого функція прогинів набуває наступний вигляд:

$$\frac{\rho Fl}{2} \ddot{q}_n + \frac{EJ_z \pi^4 n^4}{2l^3} q_n = P \sin \frac{\pi nvt}{l} \quad (2.50)$$

або

$$\ddot{q}_n + a^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 q_n = \frac{2P}{\rho Fl} \sin \frac{\pi nvt}{l}, \quad (2.51)$$

де  $a^2 = El/\rho F$ .

Розв'язання рівняння (2.51) має вигляд

$$q_n = C_1 \cos a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 t + C_2 \sin a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2 t + \frac{2P}{\rho Fl} \sin \frac{\pi nvt}{l} \left/ \left[ a^2 \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - \left( \frac{\pi nvt}{l} \right)^2 \right] \right. \quad (2.52)$$

Оскільки при  $t = 0$   $q_n(0) = 0$ ,  $\dot{q}_n(0) = 0$ , то

$$q_n = \frac{2P}{\rho Fl} \left[ \sin \frac{\pi nvt}{l} - \frac{v}{a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2} \sin a \left( \frac{\pi n}{l} \right) t \right] \left/ \left[ a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - \left( \frac{\pi nvt}{l} \right)^2 \right] \right. \quad (2.53)$$

Підставляємо (2.53) у (2.46):

$$y(x,t) = \frac{2P}{\rho Fl} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi nx}{l} \times \left[ \sin \frac{\pi nvt}{l} - \frac{v}{a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2} \sin a \left( \frac{\pi n}{l} \right) t \right] \left/ \left[ a \left( \frac{\pi n}{l} \right)^4 - \left( \frac{\pi nvt}{l} \right)^2 \right] \right. \quad (2.54)$$

Коли швидкість  $v$  рухомої сили дуже мала, у виразі (2.54) можна покласти  $v = 0$  та  $vt = c$ , тоді отримуємо

$$y = \frac{2Pl^3}{\rho F \pi^4 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{\pi nc}{l} \sin \frac{\pi nx}{l} \quad (2.55)$$

Як відомо, це – статичний прогин балки на двох опорах, викликаний силою  $P$ , яка прикладена на відстані  $c$  від лівої опори.

#### Питання для самоконтролю:

1. Чи враховується згинальна жорсткість струн при виведенні рівнянь поперечних коливань?
2. Який внутрішній силовий фактор є основним при розгляданні поперечних коливань струн?
3. На підставі чого поздовжнє зусилля у струні вважається постійним при поперечних коливаннях?
4. Яка основна гіпотеза щодо \*\*\*\*\* деформування стержнів при поздовжніх коливаннях?

5. Чи враховуються сили інерції, пов'язані з поперечним рухом часток стержня при поздовжніх коливаннях, коли виводиться відповідне рівняння?
6. У чому полягає схожість диференціальних рівнянь поздовжніх та крутильних коливань?
7. Що являє собою хвильове рівняння?
8. Чим відрізняється геометричні від статичних крайових умов?
9. Яким чином замірюються крайові умови для стержня з вантажем на кінці?
10. Чи може наступати резонансний режим поперечних коливань балки на двох опорах при русі по ній постійної сили?

## РОЗДІЛ 3

### НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ

#### 3.1. Метод Релея

Розрахунок пружних систем на коливання свідчать про те, що у багатьох випадках визначення частот власних коливань доцільніше проводити наближеними методами. Розглянемо найбільш розповсюджений наближений метод – метод Релея.

Розглянемо коливальну систему, яка складається з балки та декількох зосереджених мас (рис. 3.1). У число цих мас може бути включено частково і маса самої балки.

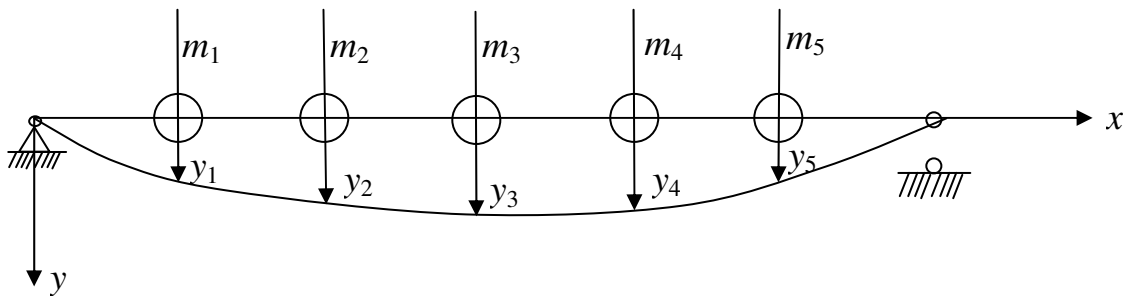


Рисунок 3.1 – Розрахункова схема балки з зосередженими масами

Розглянемо форму коливань основного тону, приймаємо, що коливання усіх мас відбуваються з однаковою частотою. Закон руху  $i$ -ї маси приймаємо у вигляді

$$y_i = A_i \sin(pt - \varphi), \quad (3.1)$$

Тоді швидкість  $i$ -ї маси буде

$$\dot{y}_i = A_i \cos(pt - \varphi). \quad (3.2)$$

У момент проходження усіма масами положення рівноваги  $y_i$  обертається у нуль, а швидкість  $\dot{y}_i$  стає максимальною. Кінетична енергія системи досягає максимуму і дорівнює

$$T = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2. \quad (3.3)$$

У момент максимального відхилення мас від положення рівноваги кінетична енергія обертається у нуль, проте максимального значення дося-

гає потенціальна енергія балки  $\Pi$ . З умови збереження енергій можна написати

$$\frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 = \Pi_1 \quad (3.4)$$

звідси

$$p_2 = \frac{2\Pi}{\sum_{i=1}^n m_i A_i^2}. \quad (3.5)$$

Для того, аби підрахувати за цією формулою частоту, необхідно знати форму пружної осі балки. Для цього не обов'язково користуватися точним виразом пружної осі, можна обмежитись деякою наближеною формою, коли частота, обчислена за формулою (3.5), мало відрізняється від точного її значення.

Приклад 3.1. Методом Релея визначити першу частоту власних коливань балки неремінної жорсткості з трьома зосередженими масами (рис. 3.2). Власну масу балки можна не враховувати.

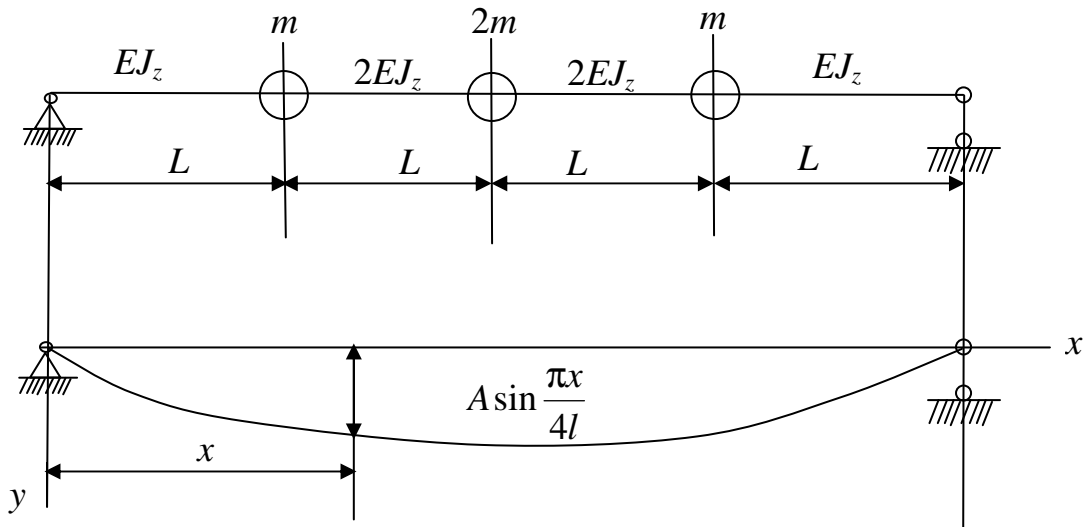


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема балки з зосередженими масами

Розв'язання. Приймаємо, що пружна вісь балки при коливаннях апроксимується функцією

$$y = A \sin \frac{\pi x}{4l}.$$

Потенціальна енергія вигнутої балки

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \frac{EJ_{zi}}{2} \int_{l_i} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx,$$

або після підстановки

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{EJ_z}{2} \int_0^l A^2 \left( \frac{\pi}{4l} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} dx + 2 \frac{EJ_z}{2} \int_0^{3l} A^2 \left( \frac{\pi}{4l} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} dx + \\ &+ \frac{EJ_z}{2} \int_0^{4l} A^2 \left( \frac{\pi}{4l} \right)^4 \sin^2 \frac{\pi x}{4l} dx. \end{aligned}$$

В результаті інтегрування отримуємо

$$\Pi = EJ_z A^2 \left( \frac{\pi}{4l} \right)^4 \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \right). \quad (\text{а})$$

кінетична енергія системи

$$T = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 = \frac{p^2}{2} \left[ 2m \left( A \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 2mA^2 \right] = \frac{p^2}{2} 3mA^2. \quad (\text{б})$$

Прирівнюючи (а) та (б), отримуємо

$$p^2 = \frac{\pi^4 EJ_z}{384L^3 m} \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{\pi} \right).$$

Приклад 3.2. Методом Релея визначити першу частоту власних по-здовжніх коливань системи, яка складається з стержня та зосередженої ма-си  $m$  (рис. 3.3). Маса стержня  $m_c$ , довжина –  $L$ , жорсткість –  $EF$ .

Розв'язання. Приймаємо, що переміщення  $u = u(x)$  являє собою лі-нійну функцію  $x$  (рис. 3.3).

$$u = A \frac{x}{L}.$$

Потенціальна енергія розтягнутого стержня

$$\Pi = \int_0^L \frac{N_x^2}{2EF} dx = \frac{1}{2} EF \int_0^L \epsilon_x^2 dx = \frac{1}{2L} EFA^2. \quad (\text{а})$$

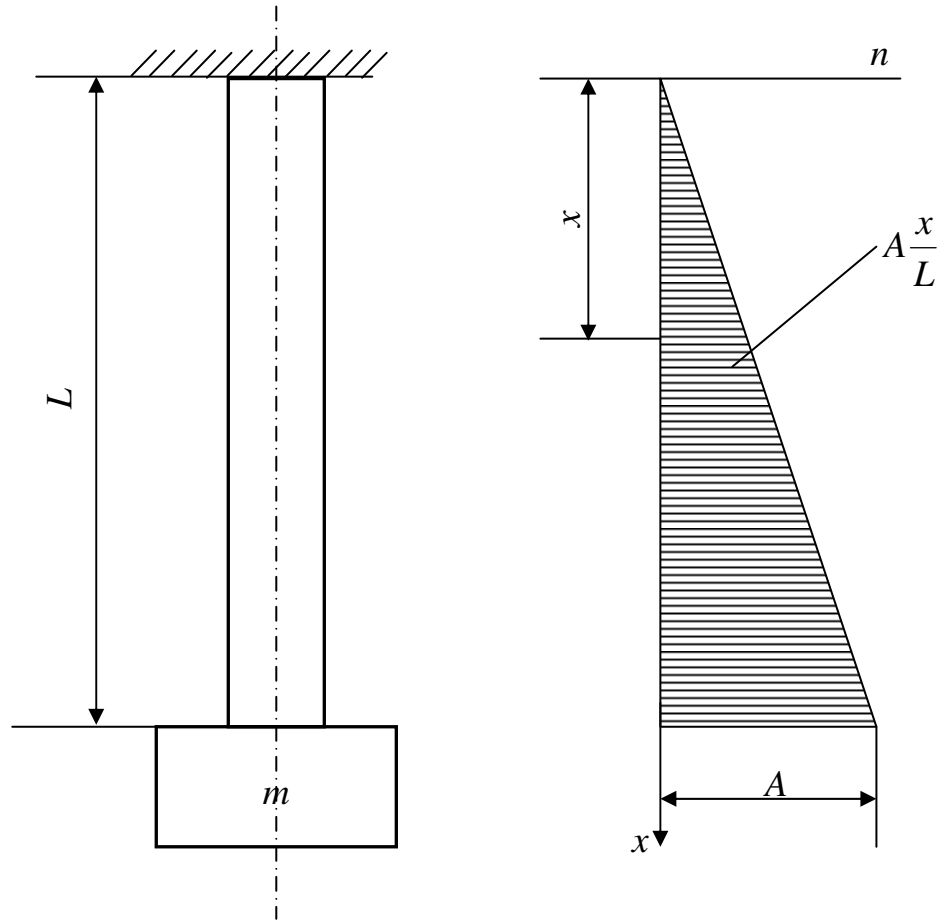


Рисунок 3.3 – Розрахункова схема стержня з зосередженою масою

Кінетична енергія системи

$$T = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 = \frac{p^2}{2} \left[ \int_0^L \frac{m_0}{L} \left( A \frac{x}{L} \right)^2 dx + mA^2 \right] \quad (\text{б})$$

Прирівнюючи вираз (а) та (б), отримуємо

$$p^2 = \frac{EF}{L \left( m + \frac{1}{3} m_c \right)}$$

Величина  $\frac{1}{3} m_c$  має назву зведеної маси, а коефіцієнт  $\frac{1}{3}$  – коефіцієнт зведення, який показує, яку частину маси пружної системи слід приєднати до зосередженої маси на кінці, аби врахувати інерційність пружного елемента, у даному разі стержня.



При використанні методу Релея можуть траплятись істотні розбіжності з точним розв'язанням. Причина полягає у тому, що на відміну від апроксимуючої функції, її друга похідна, яка входить до виразу потенціальної енергії, може неприпустимо відрізнятись від її точного виразу. Тому бажано використовувати формулу Релея так, щоб уникнути диференціювання. Для цього слід приймати формулу коливань, яка співпадає з формулою пружної системи, викликаною певною статично прикладеною системою сил  $P_i$ . Після обчислення переміщень, викликаних цими силами, можна підрахувати потенціальну енергію деформацію системи як роботу цих сил

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i A_i, \quad (3.6)$$

де  $A_i$  – переміщення точки прикладення  $i$ -ї сили, м.

При такому підході точність розрахунку істотно підвищується, розбіжність не перевищує 1%.

### 3.2. Метод Граммеля

Нам відомо, що приймаючи форму коливань у згоді зі статичною картиною деформації під впливом певної системи сил, можна істотно підвищити точність розрахунку на підставі виключення операції диференціювання. Подальше підвищення точності досягається у методі Граммеля, де диференціювання замінюється інтегруванням. Послідовність розрахунку наступна.

Задається форма коливань, підраховуються максимальна кінетика енергія руху

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2. \quad (3.7)$$

Визначаються максимальні сили інерції мас

$$F_i = p^2 m_i A_i. \quad (3.8)$$

Визначаються внутрішні силові фактори в елементах системи під впливом навантажень  $F_i$ . По внутрішніх силових факторах обчислюється максимальна потенціальна енергія  $\Pi_{\max}$  А потім з рівності  $T_{\max} = \Pi_{\max}$  визначається частота коливань.

Розглянемо втілення методу Греммеля для розрахунку частоти коливань консольної балки (рис. 3.4).

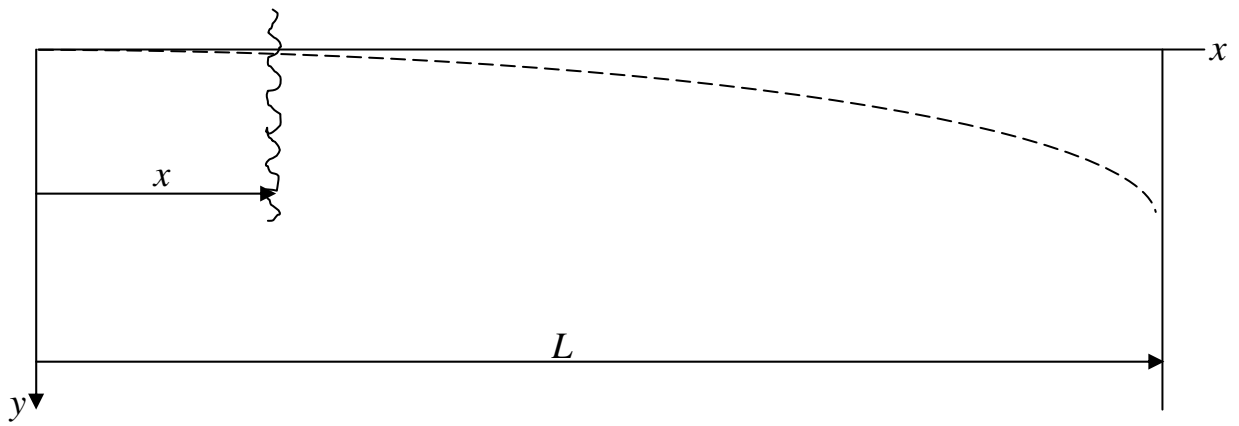


Рисунок 3.4 – Розрахункова схема консольної балки

Задаємося параболічною формою прогинів

$$y = A \left( \frac{x}{L} \right)^2, \quad (3.9)$$

звідки знаходимо максимальну кінетичну енергію системи

$$T_{\max} = \frac{p^2}{2} \int m_0 y^2 dx = \frac{p^2}{2} \frac{m_0 A^2 L}{5}, \quad (3.10)$$

де  $m_0$  – маса одиниці довжини балки, кг/м.

Інтенсивність сил інерції

$$q = h^2 m_0 A \left( \frac{x}{L} \right)^2. \quad (3.11)$$

Поперечна сила у перетині

$$Q_y = - \int_x^L q dx = - p^2 m_0 A \int_x^L \frac{x^2}{L^2} dx = - \frac{p^2 m_0 A}{3L^2} (L^3 - x^3), \quad (3.12)$$

Зникаючий момент

$$M_z = - \int_x^L Q_y dx = \frac{p^2 m_0 A}{3L^2} \int_x^L (L^3 - x^3) dx = \frac{p^2 m_0 A}{12L^2} (3L^4 - 4L^3 x + x^4), \quad (3.13)$$

Потенціальна енергія деформації

$$\begin{aligned} \Pi_{\max} &= \int_0^L \frac{M_z^2(x)}{2EJ_z} dx = \frac{p^4 m_0^2 A^2}{288EJ_z L^4} \int_0^L (3L^4 - 4L^3 x + x^4)^2 dx = \\ &= \frac{13}{1620} \frac{p^4 m_0^2 A^2 L^5}{EJ_z}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Прирівнюючи вирази (3.10) та (3.14), отримуємо

$$p = \sqrt{\frac{1620}{130} \frac{EJ_z}{m_0 L^4}} = 3,53 \sqrt{\frac{EJ_z}{m_0 L^4}}, \quad (3.15)$$

що має розбіжність лише 0,42% у порівнянні з точним розв'язанням.

### 3.3. Формула Донкерлея

Як відомо, метод Релея дає дещо завищені частоти коливань, тому є рація вживання формула, яка б давала дещо занижені значення частот. Таку властивість має формула Донкерлея.

Розглянемо багатомасову систему, наприклад, балку на двох опорах (рис. 3.5). Там же на рис. 3.5, а зображена точна форма власних коливань

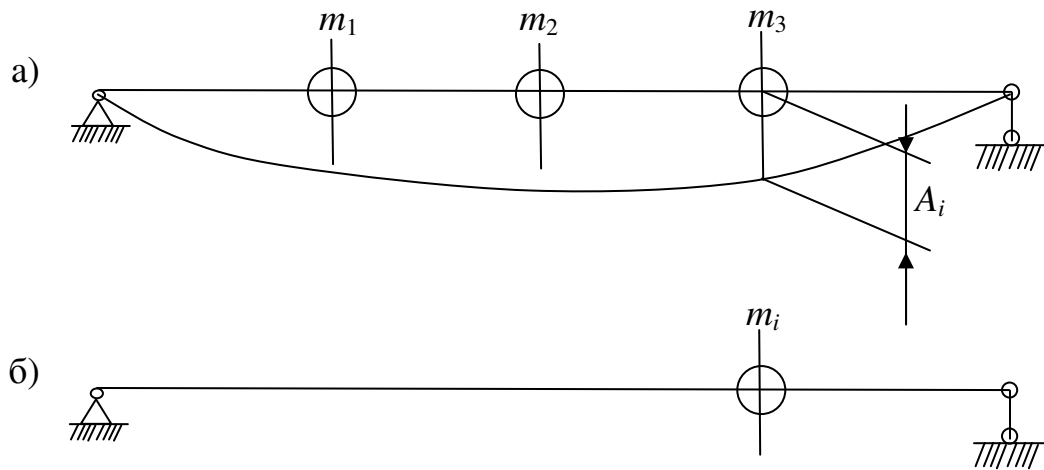


Рисунок 3.5 – Розрахункова схема балок

цієї системи. Точне значення власної частоти, яка відповідає даній формі коливань, визначається формулою

$$p^2 = \frac{2\Pi}{\sum_{i=1}^n m_i A_i^2}. \quad (3.16)$$

Тепер розглянемо ту ж балку, але з однією масою  $m_i$  (рис. 3.5, б); частота коливань такої системи визначається формулою

$$p_i^2 = \frac{1}{\delta_{ii} m_i}, \quad (3.17)$$

де  $\delta_{ii}$  – переміщення точки прикладення  $i$ -го силового фактору у напрямку  $i$ -го силового фактору, поки  $i$ -й силовий фактор дорівнює одиниці, м/Н.

З іншого боку, наближене значення  $\bar{p}_i$  тієї ж частоти можна визначити за формулою Релея, вважаючи, що форма коливань системи з однією масою  $m_i$  співпадає з точною формою (рис. 3.5, а):

$$\bar{p}_i = \frac{2\Pi}{m_i A_i^2}. \quad (3.18)$$

Співставляючи формули (3.16) та (3.18), отримуємо

$$p^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\bar{p}_i^2}}. \quad (3.19)$$

Після підстановки  $p_i$  замість  $\bar{p}_i$  у вираз (3.19) отримуємо формулу Донкернея

$$p^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \delta_{ii} m_i}. \quad (3.20)$$

Оскільки  $\bar{p}_i$  завжди більша  $p_i$ , то слід заключити, що формула Донкернея дає занижені значення частот.

Таким чином, істинні значення частот власних коливань пружних систем містяться у межах між заниженими значеннями, обчисленими за формулою Донкернея, та завищеними значеннями, обчисленими по методу Релея.

### 3.4. Метод Релея-Рітца

Метод Релея-Рітца базується на варіаційному принципі Гамільтона-Остроградського: дійсний рух консервативної механічної системи, підкореної ідеальним, двостороннім зв'язком, у проміжку від  $t_1$  до  $t_2$  такий, що дія по Гамільтону  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  має стаціонарне значення, тобто

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \quad (3.21)$$

де  $L = T - \Pi$  – функція Лагранжа, або кінематичний потенціал, Дж.

Маючи на увазі, що  $x_i = A_i \sin pt$ , коли

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 \quad (3.22)$$

$$\Pi = \Pi_0 \sin^2 pt, \quad (3.33)$$

де  $\Pi_0$  – потенціальна енергія системи при амплітудних переміщеннях, Дж, переписуємо вираз (3.21) у вигляді

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{1}{2} p^2 \cos^2 pt \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 - \Pi_0 \sin^2 pt \right) dt = 0. \quad (3.24)$$

Приймаємо, що інтервал інтегрування дорівнює періоду коливань ( $t_1 = 0, t_2 = 2\pi/p$ ). Ці значення  $t_1$  та  $t_2$  відповідають умовам вживання принципу Гамільтона-Остроградського, оскільки  $x_i(t_1) = x_i(t_2) = 0$ . Оскільки

$$\int_0^{2\pi/p} \cos^2 ptdt = \int_0^{2\pi/p} \sin^2 ptdt = \frac{\pi}{p}, \quad (3.25)$$

рівняння (3.24) приймає наступний вигляд

$$\delta \left( \frac{1}{2} p^2 \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 - \Pi_0 \right) = 0. \quad (3.26)$$

Задаємо форму коливань у вигляді ряду

$$A_j(x) = \sum_{j=1}^k a_j \varphi_j(x), \quad (3.27)$$

де  $a_j$  – невизначені параметри;

$\varphi_j$  – відомі, наперед задані, лінійно незалежні функції координат, які відповідають умовам закріплення системи.

Кількість складових у ряді (3.27) визначається необхідною точністю визначення частот. По відомій формі коливань можна визначити додатки варіаційного рівняння (3.26). Вони є однорідними квадратичними формами відносно параметрів  $a_j$ . Від умови стаціонарності (3.26) переходимо до системи рівнянь

$$\frac{1}{2} p^2 = \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^n m_i A_i^2 - \frac{\partial \Pi_0}{\partial a_j} = 0. \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.28)$$

Рівняння (3.28) є лінійним та однорідним відносно параметрів  $a_j$ . З умови рівності нулю визначена система (3.28) отримуємо частотне рівняння  $k$ -го степеня відносно квадрата частоти.

**Приклад 3.3.** Визначити власні частоти коливань двоопорної статично визначимої балки з перетинами, перемінними по довжині (рис. 3.6).

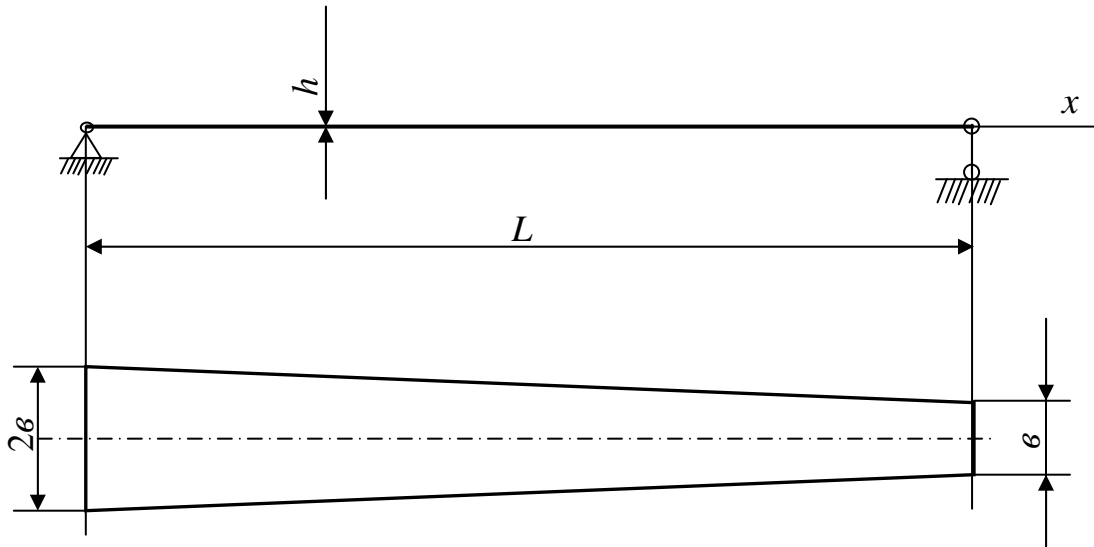


Рисунок 3.6 – Розрахункова схема з перемінним перетином

Розв'язання. У зображеній системі координат записуємо основні характеристики балки:

$$m_0 = \bar{m}_0 \left(1 - \frac{z}{2L}\right), \quad \text{де } \bar{m}_0 = \rho 2bh;$$

$$J_z = \bar{J}_z \left(1 - \frac{z}{2L}\right), \quad \text{де } \bar{J}_z = \frac{2bh^3}{12}.$$

Задаємо форму коливань, яка має параметри:

$$y(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{L} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{L}.$$

Обчислюємо доданки умови стаціонарності

$$\sum_{i=1}^n m_i A_i^2 = \int_0^L m_0 y^2(x) dx = \bar{m}_0 L \left( \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{8}{9\pi^2} a_1 a_2 + \frac{3}{8} a_2^2 \right);$$

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \int_0^L EJ_z \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \pi^4 \frac{E \bar{J}_z}{2L^3} \left( \frac{3}{8} a_1^2 + \frac{32}{9\pi^2} a_1 a_2 + 6a_2^2 \right).$$

Система рівнянь (3.28) має наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} p^2 \bar{m}_0 L \left( \frac{3}{4} a_1 + \frac{8}{9\pi^2} a_2 \right) - \frac{E \bar{J}_z}{2L^3} \left( \frac{3}{4} a_1 + \frac{32}{9\pi^2} a_2 \right) &= 0; \\ \frac{1}{2} p^2 \bar{m}_0 L \left( \frac{8}{9\pi^2} a_1 + \frac{3}{4} a_2 \right) - \frac{E \bar{J}_z}{2L^3} \left( \frac{32}{9\pi^2} a_1 + 12a_2 \right) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Для нетривіального розв'язання цієї системи необхідно і достатньо, аби визначник її дорівнював нулю

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{4}(\alpha^1 - 1) & \frac{8}{9\pi^2}(\alpha^1 - 4) \\ \frac{8}{9\pi^2}(\alpha^1 - 4) & \frac{3}{4}(\alpha^1 - 16) \end{vmatrix} = 0,$$

де  $\alpha^2 = p^2 \bar{m}_0 L^4 / \pi^4 E \bar{J}_z$ .

Корені отриманого рівняння складають

$$\alpha_1^2 = 0,9913, \quad \alpha_2^2 = 16,14.$$

Звідки обчислюємо власні частоти коливань балки:

$$P_1 = \alpha_1 \pi^2 \sqrt{\frac{E \bar{J}_z}{m_0 L^4}} = 0,9957 \pi^2 \sqrt{\frac{E \bar{J}_z}{m_0 L^4}},$$

$$P_2 = \alpha_2 \pi^2 \sqrt{\frac{E \bar{J}_z}{m_0 L^4}} = 4,017 \pi^2 \sqrt{\frac{E \bar{J}_z}{m_0 L^4}}.$$

Співставляючи метод Релея та метод Релея-Рітца, слід зауважити, що у методі Релея реальна система замінюється на систему з одним ступенем свободи, у методі Релея-Рітца реальна система замінюється на систему з  $k$  степенями свободи, де  $k$  – кількість координатних функцій, які враховуються у виразі (3.27) для форми коливань.

### 3.5. Метод Бубнова-Гальоркіна

Метод Бубнова-Гальоркіна базується на властивості ортогональних функцій. У курсі математичного аналізу є наступне визначення ортогональних функцій: коли має місце сімейство безперервних функцій  $\psi_k(x)$ , а інтервал від добутку усяких двох функцій цього сімейства у проміжку  $[a, b]$  дорівнює нулю

$$\int_b^a \psi_k(x) \psi_l(x) dx = 0, \quad (3.29)$$

то ці функції утворюють у вище означеному проміжку ортогональну систему.

На підставі \*\*леми з курсу математичного аналізу витікає, що коли одна з функцій тотожно дорівнює нулю, то вона ортогональна до усіх без винятку функцій, оскільки умова (3.29) виконується. У якості такої функції розглянемо наступну

$$\psi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( E J_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad (3.30)$$

яка являє собою диференціальне рівняння коливань балки з загальному випадку. Ця функція тотожно дорівнює нулю при усіх значеннях  $x$ , тому можна записати

$$\int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \psi(x) dx = 0. \quad (3.31)$$

Але коли функцію  $y(x,t)$  замінити її наближеним значенням у формі ряду

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) f_i(t), \quad (3.32)$$

де  $\varphi_i(x)$  – відомі функції, які відповідають крайовим умовам задачі;

$f_i(t)$  – невідомі функції часу,

то функція (3.30) уже не буде тотожно дорівнювати нулю і не буде ортогональною у проміжку  $[0,L]$  до усякої функції.

У цьому разі можна поставити умову, аби отримана функція була ортогональною хоча б до обмеженого класу функцій, наприклад, функцій  $\varphi_i$ , які складають ряд (3.32):

$$\int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \psi_i(x) dx = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.33)$$

У результаті для визначення функцій  $f_i(t)$  отримуємо систему диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Обмежуючись, наприклад, двома додатками ряду (3.32), отримуємо наближені значення перших двох частот коливань.

Метод Бубнова-Гальоркіна досить універсальний і може вживатись при розв'язанні різних задач. Але треба мати на увазі, що метод Бубнова-Гальоркіна вимагає вибору таких апроксимуючих функцій, щоб ті відповідали усім крайовим умовам, кінематичним та статичним, на відміну від методу Релея-Рітца, коли обов'язково задовільними лише кінематичним крайовим умовам.

Приклад 3.4. Шарнірно закріплена двоопорна балка (рис. 3.7) має перемінну по довжині згинальну жорсткість  $EJ_z = EJ_{z0} \left( 1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right)^2$  та погонну масу  $m = m_0 \left( 1 + \sin \frac{\pi x}{L} \right)$ . Визначити методом Бубнова-Гальоркіна основну власну частоту коливань при одночленному наближенні.



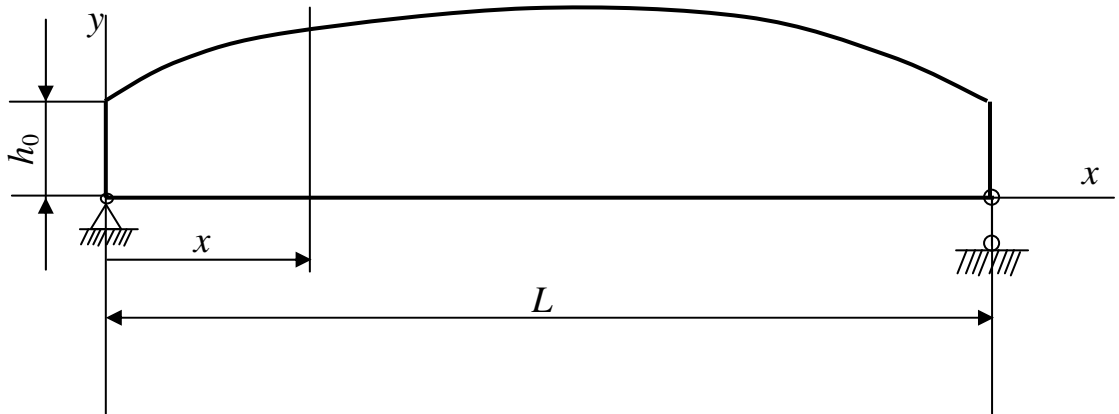


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема двоопорної балки

**Розв’язання.** Диференціальне рівняння коливань балки з перемінним моментом інерції має вигляд

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{а})$$

Розв’язання рівняння (а) у згоді з постановкою задачі шукаємо у вигляді

$$y = y_0 \sin \frac{\pi x}{L} f(t), \quad (\text{б})$$

де функція  $\sin \frac{\pi x}{L}$  відповідає усім крайовим умовам задачі, а саме: при  $x = 0$   $y = 0, y'' = 0$ ; при  $x = L$   $y = 0, y'' = 0$ .

У згоді з методом Бубнова-Гальоркіна запишемо

$$\int_0^L \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ_z \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0,$$

або після підстановки (б):

$$- f \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 E \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( J_z \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx + \ddot{f} \int_0^L m \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0.$$

Виконуючи відповідні обчислення, отримуємо наступне

$$\ddot{f} + 4,7 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{EJ_{z0}}{m_0} f = 0,$$

звідки у першому наближенні основна власна частота поперечних коливань

$$P_1 = 2,16 \frac{\pi^4}{L^4} \sqrt{\frac{EJ_{z0}}{m_0}}.$$

Питання для самоконтролю

1. У чому полягає сутність методу Релея?
2. Яка частота визначається при користуванні методом Релея?
3. Чи можна методом Релея урахувати інерційність пружних елементів?
4. У чому полягає сутність методу Граммеля?
5. За рахунок чого метод Граммеля забезпечує більш високу точність, ніж метод Релея?
6. У чому сенс використання формули Донкерлея?
7. На якому принципі базується метод Рітца-Релея?
8. Яким крайовим умовам мають задовольняти апроксимуючі функції у методі Рітца-Релея?
9. Що покладено в основу методу Бубнова-Гальоркіна?
10. Яким крайовим умовам мають задовольняти апроксимуючі функції у методі Бубнова-Гальоркіна?

## РОЗДІЛ 4

### РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

#### 4.1. Удар при осьовому навантаженні

Під ударним навантаженням будемо розуміти таке навантаження, яке швидко змінюється у часі. Точний розрахунок пружних систем, а особливо систем з розподіленими параметрами на ударне навантаження надзвичайно складний. Тому на практиці використовують спрощені методи розрахунку на ударне навантаження.

Розглянемо, як сприймається ударне навантаження у системі з одним ступенем свободи (рис. 4.1). маса  $m$  рухається у горизонтальному напрямку зі швидкістю  $v_0$  і зупиняється пружним силовим елементом, масою якого будемо нехтувати.

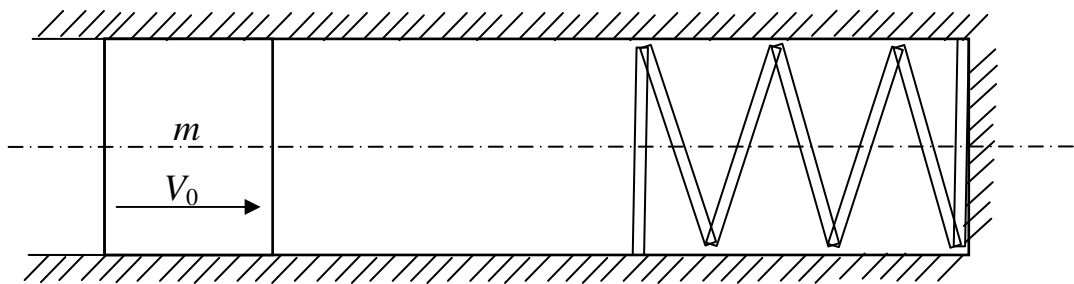


Рисунок 4.1 – Розрахункова схема системи при поздовжньому ударі

Після того, як маса торкається пружного силового елемента, швидкість її зменшується до нуля, коли кінетична енергія повністю переходить у потенціальну енергію стисненого пружного елемента, а сила стиснення досягає максимуму.

Далі починається рух у протилежному напрямку, відбувається коливання системи, яке описується за допомогою рівняння гармонічних коливань

$$x = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt, \quad (4.1)$$

де  $p = \sqrt{1/\delta_{11}m}$  – частота власних коливань маси, приєднаної до пружного силового елемента.

За початок відліку часу  $t$  приймаємо момент торкання маси з пружним силовим елементом. Відповідні початкові умови: при  $t = 0$   $x = 0$ ,  $x'' = v_0$ . Звідки визначаємо константи  $C_1$  та  $C_2$

$$C_{11} = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{p}.$$

Відповідне рівняння коливань приймає наступний вигляд

$$x = \frac{v_0}{p} \sin pt. \quad (4.2)$$

Графічна інтерпретація рівняння (4.2) наведена на рис. 5.2. Максимальне переміщення дорівнює

$$x_{\max} = \frac{v_0}{p}.$$

Найбільша величина сили, яка стискує пружний силовий елемент, має назву динамічного навантаження, складає

$$P_{\max} = \frac{x_{\max}}{\delta_{11}} = \frac{v_0}{\delta_{11} p}. \quad (4.4)$$

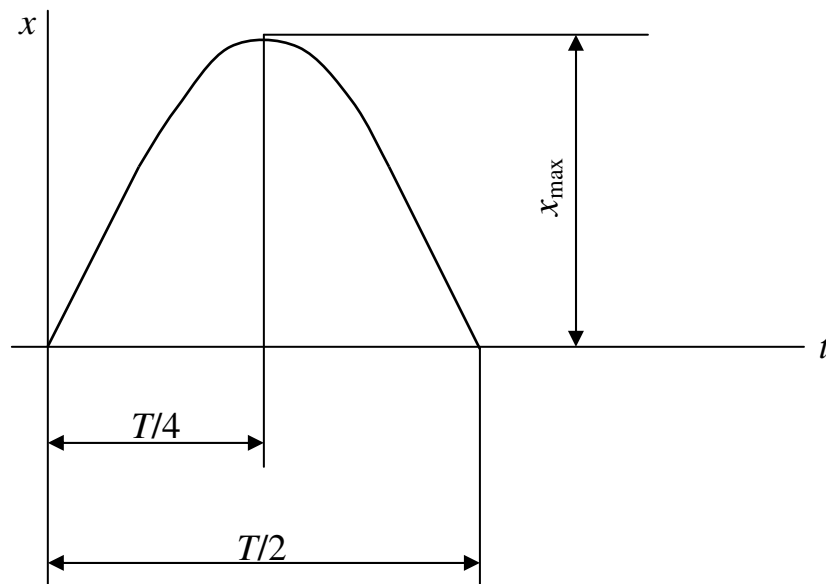


Рисунок 4.2 – Графік руху приєднаної маси при горизонтальному ударі

Та ж сила  $P_{\max}$  може бути обчислена з умови енергетичного балансу. Для цього прирівнюємо кінетичну енергію маси  $m$ , яка рухається, потенціальній енергії стиснутого пружного елемента

$$T_0 = v, \quad \text{або} \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} P_{\max}^2 \delta_{11},$$

звідки отримуємо

$$P_{\max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{\delta_{11}}} = \frac{v_0}{\delta_{11} p}, \quad (4.5)$$

що співпадає з виразом (4.4)

У випадку вертикального удару (рис. 4.3) графік руху приєднаної маси має вигляд, який ілюструється рис. 4.4.

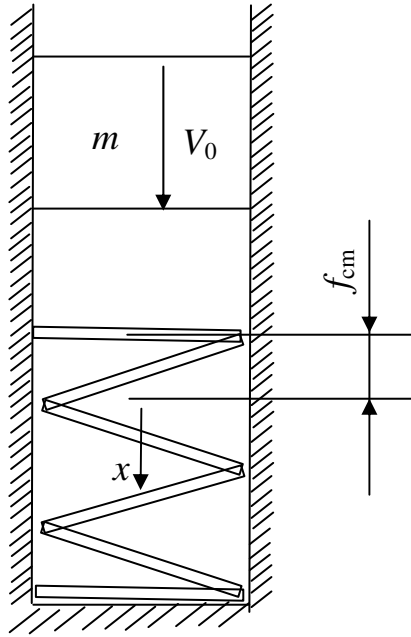


Рисунок 4.3 – Розрахункова схема системи при вертикальному поздовжньому ударі

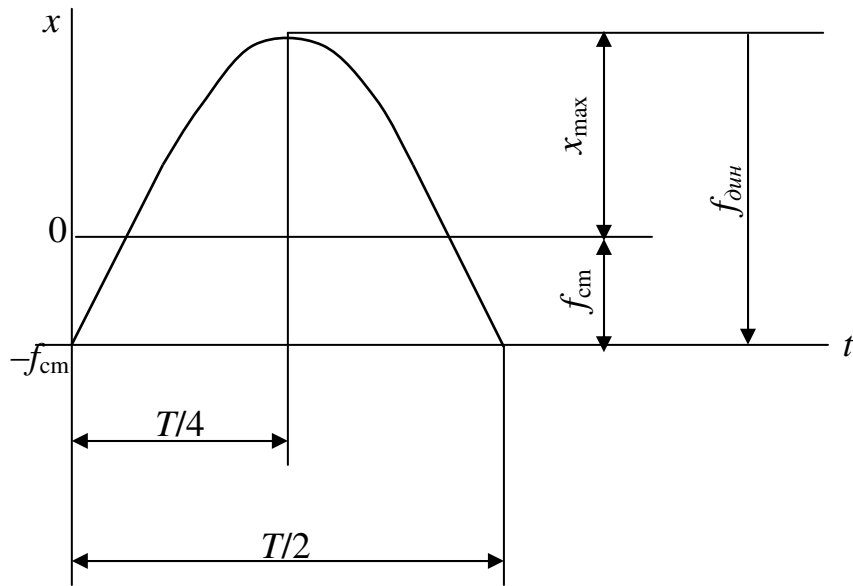


Рисунок 4.4 – Графік руху приєднаної маси при вертикальному ударі

Тоді початкові умови руху мають наступний вигляд: при  $t = 0$   $x = -f_{cm}$ ,  $\dot{x} = v_0$ , де  $f_{cm} = \delta_{11}mg$  – статичний прогін системи під впливом маси  $m$ .

Відповідно переміщення визначаються виразом

$$x = -f_{cm} \cos pt + \frac{v_0}{p} \sin pt. \quad (4.6)$$

Максимальне переміщення

$$x_{\max} = \sqrt{f_{cm}^2 + \left(\frac{v_0}{p}\right)^2}. \quad (4.7)$$

А повна деформація дорівнює

$$f_{\text{дин}} = f_{cm} + \sqrt{f_{cm}^2 + \left(\frac{v_0}{p}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Тоді максимальна сила удару

$$P_{\max} = \frac{f_{\text{дин}}}{\delta_{11}} = mg + \sqrt{(mg)^2 + \frac{v_0^2}{\delta_{11}^2 p^2}}. \quad (4.9)$$

розглянемо розв'язання цієї задачі енергетичним методом. При складанні енергетичного балансу необхідно враховувати змінення потенціальної енергії маси на динамічному прогині  $f_{\text{дин}}$ , який отримує пружний елемент,

$$T_0 + \Pi = V, \quad (4.10)$$

де  $T_0$  – кінетична енергія маси у момент контакту з пружним елементом, Дж;

$\Pi$  – змінення потенційної енергії маси на динамічному прогині, Дж;

$V$  – потенціальна енергія деформації пружного елемента, Дж.

Як відомо,

$$\Pi = mgf_{\text{дин}}, \quad (4.11)$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{f_{\text{дин}}^2}{\delta_{11}}. \quad (4.12)$$

Далі підставляючи (4.11) та (4.12) у вираз (4.10), отримуємо квадратичне рівняння відносно  $f_{\text{дин}}$

$$f_{\text{дин}}^2 - 2f_{cm}f_{\text{дин}} - 2\delta_{11}T_0 = 0, \quad (4.13)$$

звідки

$$f_{\text{дин}} = f_{cm} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}T_0}{f_{cm}^2}} \right]. \quad (4.14)$$

Величина, яка стоїть у квадратних дужках, має назву коефіцієнт динамічності, позначається  $k_g$ , тобто

$$k_g = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}T_0}{f_{cm}^2}}. \quad (4.15)$$

Вираз (4.14) з урахуванням (4.15) приймає вигляд

$$f_{\text{дин}} = k_g f_{cm}. \quad (4.16)$$

Коефіцієнт динамічності показує, у скільки раз прогин при ударі більший прогину, який виникає при статичному прикладенні навантаження від маси. Таке ж співвідношення існує між внутрішніми силовими факторами та напруженнями.

$$\sigma_{\text{дин}} = k_g \sigma_{cm}. \quad (4.17)$$

Як це видно з виразу (4.15), коефіцієнт динамічності залежить від жорсткості системи та кінетичної енергії маси, яка падає; але це цілком справедливо за умови нехтування масою буферної деталі  $m_1$  (рис. 4.5), що міститься між падаючою масою та пружним елементом.

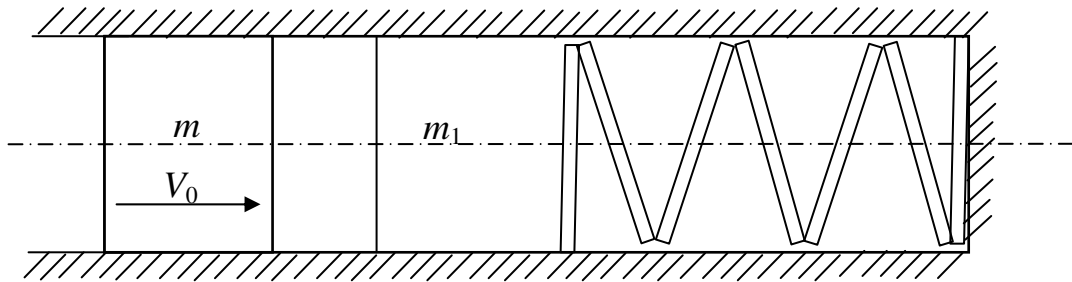


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема системи при поздовжньому ударі з урахуванням проміжної маси

У свій час наявність буферної деталі дає підстави розглядати два види деформації, а саме: місцеві деформації деталей у зоні контакту, а також загальні деформації пружного елемента. Визначення місцевих деформацій досить складне і виходить за рамки даного курсу, а ось деформації пружного елемента визначаються досить просто з енергетичних міркувань на підставі припущення про непружний удар, коли обидві маси після удару рухаються як єдине ціле з загальною швидкістю  $v_1$ .

На цій підставі скористаємося умовою збереження кількості руху

$$mv_0 = (m + m_1)v_1, \quad (4.18)$$

звідки безпосередньо отримуємо

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m + m_1}. \quad (4.19)$$

Відповідна кінетична енергія приймає наступний вигляд

$$T'_0 = \frac{1}{2}(m + m_1)v_1^2 = \frac{T}{1 + \frac{m_1}{m}}, \quad (4.20)$$

де  $T'_0$  – кінетична енергія сумарної маси, Дж.

При такому підході формули для динамічного прогину та коефіцієнта динамічності приймають наступний вигляд

$$f_{\text{дин}} = f_{\text{см}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}T_0}{f_{\text{см}}^2 \left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}} \right], \quad (4.21)$$

$$k_{\delta} = 1 + \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\delta_{11}T_0}{f_{cm}^2 \left(1 + \frac{m_1}{m}\right)}} \right], \quad (4.22)$$

Приклад 4.1. Кліть масою 2000 кг спускається униз зі швидкістю  $v_0 = 1$  м/с. Навести повірочний розрахунок на міцність у аварійному випадку раптового заїдання троса. Довжина троса у момент зупинки дорівнює 10 м. Приведений модуль пружності троса  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа, площа перетину  $F = 5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, допустиме навантаження на трос 120 кН.

Рішення. При розв'язанні даної задачі скористаємося енергетичним методом. Так, при зупинці кінетична енергія кліті  $\frac{mv_0^2}{2}$ , потенціальна енергія кліті на переміщенні  $f_{дин} - f_{cm}$  переходить у додаткову потенціальну енергію троса

$$\frac{1}{2} \frac{f_{дин}^2}{\delta_{11}} - \frac{1}{2} \frac{f_{cm}^2}{\delta_{11}}.$$

Отримуємо рівняння енергетичного балансу

$$\frac{mv_0^2}{2} + mg(f_{дин} - f_{cm}) = \frac{1}{2\delta_{11}}(f_{дин}^2 - f_{cm}^2).$$

Оскільки  $mg\delta_{11} = f_{cm}$ , отримане рівняння приймає остаточний вигляд

$$f_{дин}^2 - 2f_{cm}f_{дин} + f_{cm}^2 - \frac{v_0^2}{g}f_{cm} = 0.$$

Звідки

$$f_{дин} = f_{cm} \left[ 1 + \sqrt{\frac{v_0^2}{gf_{cm}}} \right].$$

Далі, маючи на увазі, що  $\delta_{11} = \frac{l}{EF}$ , а  $f_{cm} = \frac{mgl}{EF}$ , запишемо вираз коефіцієнта динамічності

$$k_g = 1 + \sqrt{\frac{EFv_0^2}{mg^2l}},$$

або після підстановки числових даних

$$k_g = 1 + \sqrt{\frac{0,7 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1^2}{2 \cdot 10^3 \cdot 9,8^2 \cdot 10}} = 5,27.$$

Таким чином,

$$P_{дин} = k_g P_{cm} = 5,27 \cdot 2000 \cdot 9,8 = 103,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 103,3 \text{ кН},$$

що менше, ніж допустиме навантаження, а трос відповідає умові міцності.



## 4.2. Скручуючий удар

Ударне кручення має місце при інтенсивному гальмуванні валів з масивними маховиками, викликається силами інерції мас при великих прискореннях.

При визначенні напружень та деформацій стержнів при ударному скручуванні будемо користуватись енергетичним методом. Так, потенціальна енергія деформації стержня при скручуванні чому ударі може бути представлена у виді

$$U = \frac{1}{2} M_{\text{дин}} \Phi_{\text{дин}} \frac{M_{\text{дин}}^2 l}{2GJ_p}, \quad (4.23)$$

де  $M_{\text{дин}}$  – динамічний крутячий момент, Н·м;

$\Phi_{\text{дин}}$  – відповідний кут закручування вала довжиною  $l$ .

$l$  – довжина вала, м;

$G$  – модуль пружності другого роду, Па;

$J_p$  – полярний момент інерції поперечного перетину вала, м<sup>4</sup>.

Як правило,  $M_{\text{дин}}$  не відомий, проте відома кінетична енергія  $T_0$  відповідної маси маховика, яка викликає ударне кручення. Наприклад, при різкому гальмуванні вала з маховиком на певній відстані від місця гальмування, ділянка вала між маховиком та перетином, де реалізується гальмування, підлягає ударному крученню. При цьому будемо вважати, що вся кінетична енергія маховика повністю переходить у потенціальну енергію деформації вала, тобто

$$T_0 = U, \quad (4.24)$$

Для подальших перетворень виражаємо потенціальну енергію деформації вала через максимальні дотичні напруження. Як відомо,  $\tau_{\text{max}} = M_{\text{дин}}/W_p$ , де  $W_p$  – момент опору крученню, який для крутого вала становить  $\pi d^3/16$ . Звідки можна записати

$$M_{\text{дин}} = \frac{\tau_{\text{max}} \pi d^3}{16}. \quad (4.25)$$

Підставляючи  $M_{\text{дин}}$  у вираз (4.23), отримуємо

$$U = \frac{\tau_{\text{max}}^2 \pi^2 d^6 l}{16^2 \cdot 2GJ_p} = \frac{\tau_{\text{max}}^2 Fl}{4G}, \quad (4.26)$$

де  $F$  – площа поперечного перетину вала, м<sup>2</sup>;

$l$  – довжина ділянки вала, яка підлягає скрученню, м.

Об'єднуючи вирази (4.24) та (4.26), отримуємо максимальне дотичне напруження при ударному крученні

$$\tau_{\text{max}} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{Fl}}. \quad (4.27)$$

У свою чергу,

$$T_0 = \frac{1}{2} J \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} J \omega^2; \quad J = \frac{mD^2}{8}, \quad (4.28)$$

де  $J$  – полярний момент інерції маси маховика, кг·м<sup>2</sup>;  
 $m$  – маса маховика, кг.

**Приклад 4.2.** Диск діаметром  $D = 200 \cdot 10^{-3}$  м та масою  $l = 1$  м та діаметром  $d = 60 \cdot 10^{-3}$  м (рис. 4.6), обертається з постійною кутовою швидкістю при  $n = 120$  об/хв. Визначити величину максимальних дотичних напружень у валі у той момент, коли лівий кінець раптово зупиняється.  $G = 0,8 \cdot 10^5$  МПа.

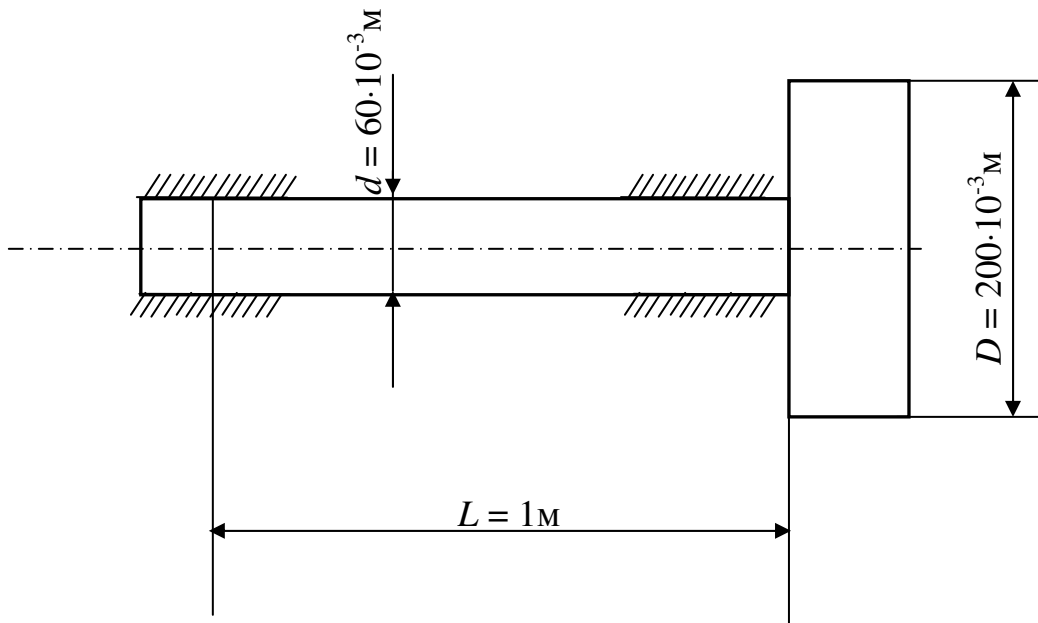


Рисунок 4.6 – Розрахункова схема валу з маховиком

**Рішення.** Для визначення максимального напруження при ударному крученні скористаємося формулою (4.27) з урахуванням виразів (4.28).

$$T_0 = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{mD^2}{8} \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 \cdot (200 \cdot 10^{-3})^2}{8} \cdot \frac{3,14^2 \cdot 180^2}{30^2} = 19,72 \text{ Дж};$$

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot (60 \cdot 10^{-3})^2}{4} = 2826 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2.$$

$$\tau_{\max} = 2 \sqrt{\frac{T_0 G}{Fl}} = 2 \sqrt{\frac{19,72 \cdot 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6}{2826 \cdot 10^{-6} \cdot 1}} = 47,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 47,2 \text{ МПа}.$$

### 4.3. Удар при поперечному навантаженні

Розглянемо удар о балку жорсткого тіла з масою  $m$ , яке рухається по вертикалі зі швидкістю  $v_0$  (рис. 4.7).

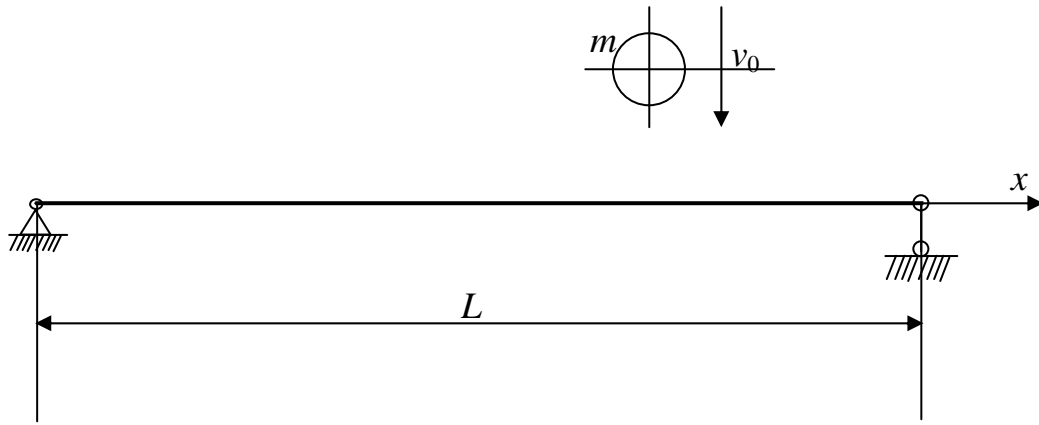


Рисунок 4.7 – Розрахункова схема балки

Задаємо вид пружної лінії балки при ударі виразом

$$y(x,t) = w(x)q(t). \quad (4.29)$$

Припускаємо, що удар непружний, коли тіло з моменту  $t = 0$  починає рухатися сумісно з відповідним перетином балки. Таким чином, оскільки зміщення усіх перетинів балки визначаються рівнянням (4.29), є підстави вважати, що у момент удару всі перетини балки миттєво отримують кінцеві швидкості

$$\dot{y}(x,0) = w(x)\dot{q}(0); \quad (4.30)$$

відповідно і швидкість тіла миттєво змінюється, стає рівною  $v_1$ , тієї точки балки, у яку прийшовся удар:

$$v_1 = w_0\dot{q}(0). \quad (4.31)$$

У процесі удару певна частина кінетичної енергії втрачається. Для аналітичної оцінки цієї обставини скористаємось відомою теоремою Карно [ ], яка формується так: втрата кінетичної енергії дорівнює кінетичній енергії втрачених швидкостей.

Оскільки у момент удару швидкість маси  $m$  змінюється на величину  $v_0 - v_1$ , а швидкість поточного перетину балки на величину  $\dot{y}(x,0)$ , то втрата енергії складає

$$\Delta T = \frac{m(v_0 - v_1)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_l m_0 [\dot{y}(x,0)]^2 dx, \quad (4.32)$$

де  $m_0$  – маса одиниці довжини балки, кг/м.

З іншого боку, втрату енергії можна визначити безпосередньо як різницю між енергіями до і після процесу удару, а саме:

$$\Delta T = \frac{mv_0^2}{2} - \left\{ \frac{mv_1^2}{2} + \frac{1}{2} \int_l m_0 [\dot{y}(x,0)]^2 dx \right\}. \quad (4.33)$$

Об'єднуючи вирази (4.32) та (4.33), отримуємо

$$mv_1(v_0 - v_1) - \int_l m_0 [\dot{y}(x,0)]^2 dx = 0. \quad (4.34)$$

Підставляючи у вираз (4.34) значення  $\dot{y}(x,0)$  з формули (4.30) та  $v_1$  з формули (4.31), знаходимо

$$\dot{q}(0) = v_0 \frac{mw_0}{mw_0^2 + \int_l m_0 w^2(x) dx}$$

та відповідну швидкість тіла після входження у контакт з балкою

$$v_1 = w_0 \dot{q}(0) = \frac{mw_0}{m + \int_l m_0 \left[ \frac{w(x)}{w_0} \right]^2 dx}. \quad (4.35)$$

Таку швидкість мало б тіло  $m$  після непружного співудару з тілом масою  $m_{np}$ , де

$$m_{np} = \int_l m_0 \left[ \frac{w(x)}{w_0} \right]^2 dx. \quad (4.36)$$

Величина  $m_{np}$  має назву приведеної маси балки, яка складає певну долю дійсної маси  $m_\delta = \int_l m_0 dx$ .

Можна записати

$$m_{np} = k_{np} m_\delta, \quad (4.37)$$

де  $m_\delta$  – дійсна маса балки, кг;

$k_{np}$  – коефіцієнт приведення.

$$k_{np} = \frac{1}{m_\delta} \int_l m_0 \left[ \frac{w(x)}{w_0} \right]^2 dx. \quad (4.38)$$

Таким чином, швидкість тіла та відповідної точки балки після входження у контакт

$$v_1 = v_0 \frac{m}{m + m_{np}}. \quad (4.39)$$

Кінетична енергія системи  $T_1$  у цей момент становить

$$T_1 = (m + m_{np}) \frac{v_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{m}{m + m_{np}} = T_0 \frac{m}{m + m_{np}}, \quad (4.40)$$

де  $T_0$  – початкова кінетична енергія тіла, Дж.

Величини максимального динамічного прогину та напруження у балці можна знайти, прирівнюючи енергію,  $T_1$  максимальній потенціальній енергії деформації  $v_{\max}$ . Коли форма пружної осі балки відповідає статичному навантаженню її силою, прикладеною у точці удару, то потенціальна енергія деформації

$$v = \frac{f_{\max}^2}{\delta_{11}}, \quad (4.41)$$

де  $f_{\max}^2$  – прогин балки у точці удару, м;

$\delta_{11}$  – прогин балки у точці удару від одиничної сили, м/Н.

Прирівнюючи вирази (4.40) та (4.41), отримаємо

$$f_{\max} = \sqrt{\frac{2\delta_{11}T_0}{1 + \frac{m_{np}}{m}}}. \quad (4.42)$$

Маючи на увазі вираз (4.20), на підставі формули (4.420) можна зробити висновок, що у даному разі реальна пружна система у вигляді балки замінюється системою з одним ступенем свободи, уся маса якої міститься у точці удару.

Приклад 4.3. Визначити динамічні нормальні напруження у сталевому стержні при його падінні з висоти  $H = 0,1$  м таким чином, що його обидва кінці одночасно торкаються жорстких опор. Довжина стержня  $l = 1$  м, діаметр стержня  $d = 0,01$  м, питома маса матеріалу стержня  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

Рішення. Будемо виходити з того, що уся кінетична енергія  $T_0$  стержня у момент удару повністю переходить у потенціальну енергію деформації  $v$ , тобто  $v = T_0$ .

Цілком очевидно, що у момент удару стержень навантажується силами інерції  $q_i$  його маси, які рівномірні розподілені по довжині. Тому для визначення потенціальної енергії деформації скористаймося формулою потенціальної енергії балки під дією рівномірного навантаження

$$v = \int_0^l \frac{M_z^2(x) dx}{2EJ_z} = \frac{1}{2EJ_z} \int_0^l \frac{q_i^2 l^2}{4} \left( x^2 - 2 \frac{x^3}{l} + \frac{x^4}{l^2} \right) dx = \frac{q_i^2 l^5}{240EJ_z},$$

або після підстановки числових значень

$$v = \frac{q_i^2 l^5}{240EJ_z} = \frac{q_i^2 \cdot l^5 \cdot 64}{240 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (1 \cdot 10^{-2})^4} = 40 \cdot 10^{-6} q_i^2.$$

Визначаємо кінетичну енергію стержня

$$T_0 = mgH = \rho Fl gH = 7,8 \cdot 10^3 \cdot \frac{\pi(1 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 1 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 10^{-1} = 60 \cdot 10^{-2} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Визначаємо інтенсивність рівномірно розподіленого навантаження з умови  $v = T_0$ , або  $40 \cdot 10^{-6} q_i^2 = 60 \cdot 10^{-2}$ :

$$q_i = \sqrt{\frac{60 \cdot 10^{-2}}{40 \cdot 10^{-6}}} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ Н/м} = 120 \text{ Н/м}.$$

Звідки максимальний згинаючий момент

$$M_{z\max} = \frac{q_i l^2}{8} = \frac{120 \cdot 1^2}{8} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

максимальне динамічне нормальне напруження при падінні даного стержня:

$$\sigma_{\partial\max} = \frac{M_{z\max}}{W_z} = \frac{15 \cdot 32}{\pi \cdot (1 \cdot 10^{-2})^3} = 153 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 153 \text{ МПа}.$$

Питання для самоконтролю

1. Що розуміється під ударним навантаженням?

2. Якими факторами доводиться нехтувати при розрахунках на ударне навантаження?
3. Як впливають додаткові ступені свободи на динамічні навантаження?
4. Чи враховуються витрати енергії при ударній взаємодії тіл?
5. Які Ви знаєте підходи при визначенні динамічних навантажень при ударах?
6. У яких випадках має переваги енергетичний підхід?
7. Що Ви розумієте під коефіцієнтом динамічності?
8. Що Ви розумієте під приведеною масою системи?
9. Яка умова покладена в основу визначення приведеної маси системи при ударній взаємодії тіл?
10. До якої системи подібна балка при ударному навантаженні?

## РОЗДІЛ 5

### ДЕЯКІ ТЕХНІЧНІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОЛИВАНЬ

#### 5.1. Критичне число обертів вала

Деталі та вузли машин, які швидко обертаються, не можуть бути ідеально збалансовані, тому у практичних випадках виникають значні інерційні сили, які спричиняють відхід від прямолінійної форми валів, роторів. У таких випадках при певних кутових швидкостях обертання, які мають назву критичних, відбуваються найбільші прогини відповідних систем. При подальшому збільшенні числа обертів розкачування систем зменшується, що пояснюється теорією коливань.

Розглянемо вал, який обертається у двох підшипникових вузлах (рис. 5.1), у середньому перетині якого закріплений диск.

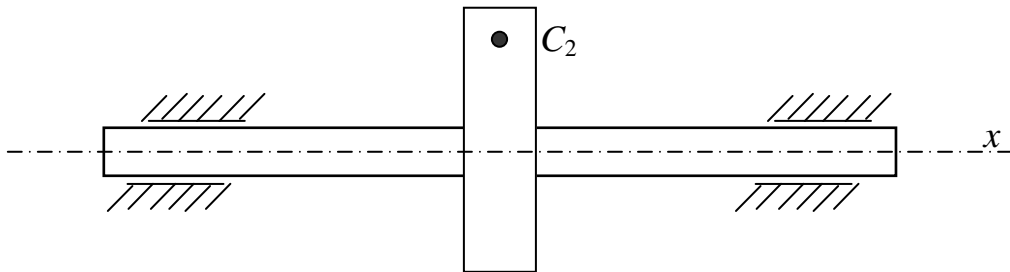


Рисунок 5.1 – Розрахункова схема вала з диском

Припустимо, що центр маси  $m$  диска має зміщення  $e$  відносно центра вала (рис. 5.2).

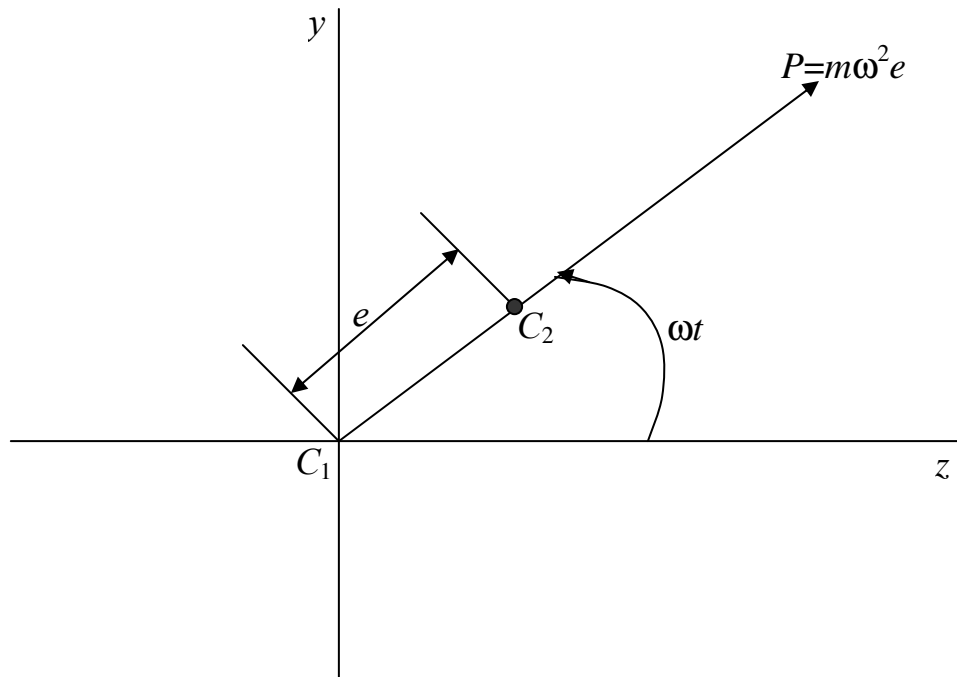


Рисунок 5.2 – Схема утворення сили дисбалансу вала

Будемо вважати, що уся маса зосереджена у диску. Позначаємо проекції прогину вала на осі  $z$  та  $y$  буквами  $\xi$  та  $\eta$  відповідно, тоді координати центра маси диска можна записати наступним чином:

$$\left. \begin{aligned} z &= \xi + e \cos \omega t; \\ y &= \eta + e \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Складаємо рівняння руху диска:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} + c\xi &= 0; \\ m\ddot{y} + c\eta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

Підставляючи у рівняння (5.2) значення  $z$  та  $y$ , отримуємо

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\xi} + c\xi &= m\omega^2 e \cos \omega t; \\ m\ddot{\eta} + c\eta &= m\omega^2 e \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Поділимо рівняння системи (5.3) на  $m$ , тоді після введення відповідного позначення отримуємо:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi} + p^2 \xi &= \omega^2 e \cos \omega t; \\ \ddot{\eta} + p^2 \eta &= \omega^2 e \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

де  $p$  – власна кругова частота поперечних коливань вала з диском,  $1/c$ .

Таким чином отримані диференціальні рівняння з правими частинами. Повне розв'язання кожного з цих рівнянь складається з розв'язання відповідного однорідного рівняння та часткового розв'язання з правою частиною. Можна записати

$$\left. \begin{aligned} \xi &= c_1 \cos pt + c_2 \sin pt + \xi^*; \\ \eta &= c_3 \cos pt + c_4 \sin pt + \eta^*, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

де  $\xi^*$  та  $\eta^*$  – часткові розв'язання рівнянь з правою частиною, або стаціонарні розв'язання.

Перші доданки у цих виразах описують вільні коливання системи, які за реальних обставин швидко вгасають. Лишається знайти стаціонарні розв'язання  $\xi^*$  та  $\eta^*$ .

Приймаємо

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= c_5 \cos \omega t + c_6 \sin \omega t; \\ \eta^* &= c_7 \cos \omega t + c_8 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

де  $c_5, c_6, c_7, c_8$  – невизначені константи.

Підставляємо ці функції у відповідні рівняння системи (5.4). Далі, об'єднуючи вирази з  $\cos$  та  $\sin$  у лівих частинах, а потім прирівнюючи вирази при  $\cos$  та  $\sin$  у лівих та правих частинах отриманих рівнянь, записуємо

$$c_5 = \frac{\omega^2 e}{p^2 - \omega^2}; \quad c_6 = 0; \quad c_7 = 0; \quad c_8 = \frac{\omega^2 e}{p^2 - \omega^2}. \quad (5.7)$$

Таким чином, стаціонарні розв'язання рівнянь (5.4) з урахуванням виразів (5.7) мають вигляд



$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= \frac{e}{\frac{p^2}{\omega^2} - 1} \cos \omega t; \\ \eta^* &= \frac{e}{\frac{p^2}{\omega^2} - 1} \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Як видно з формул (5.8), при кутовій швидкості обертання системи, як наближається до кутової частини власних поперечних коливань вала, тобто  $\omega \rightarrow p$ , амплітуди коливань останнього наближаються до нескінченності. Ця кутова швидкість обертання вала має назву критичної. Формули (5.8) до того ж показують, що при стаціонарному режимі руху центр вала рухається з кутовою швидкістю  $\omega$  по колу радіусом

$$r = \frac{e}{\frac{p^2}{\omega^2} - 1}. \quad (5.9)$$

При цьому слід зауважити, що центр обертання  $c$ , центр вала  $c_1$  та центр маси диска  $c_2$  розташовані на одній прямій. Але в залежності від співвідношення  $\omega/p$  взаємне розташування цих точок може бути різним. Так, при  $\omega < p$  точки  $c$  та  $c_1$  лежать по один бік від центру маси  $c_2$  (рис. 5.3, а), а при  $\omega > p$  – по різні (рис. 5.3, б). Залежність радіусу обертання  $r$  від відношення  $\omega/p$  зображена на рис. 5.4.

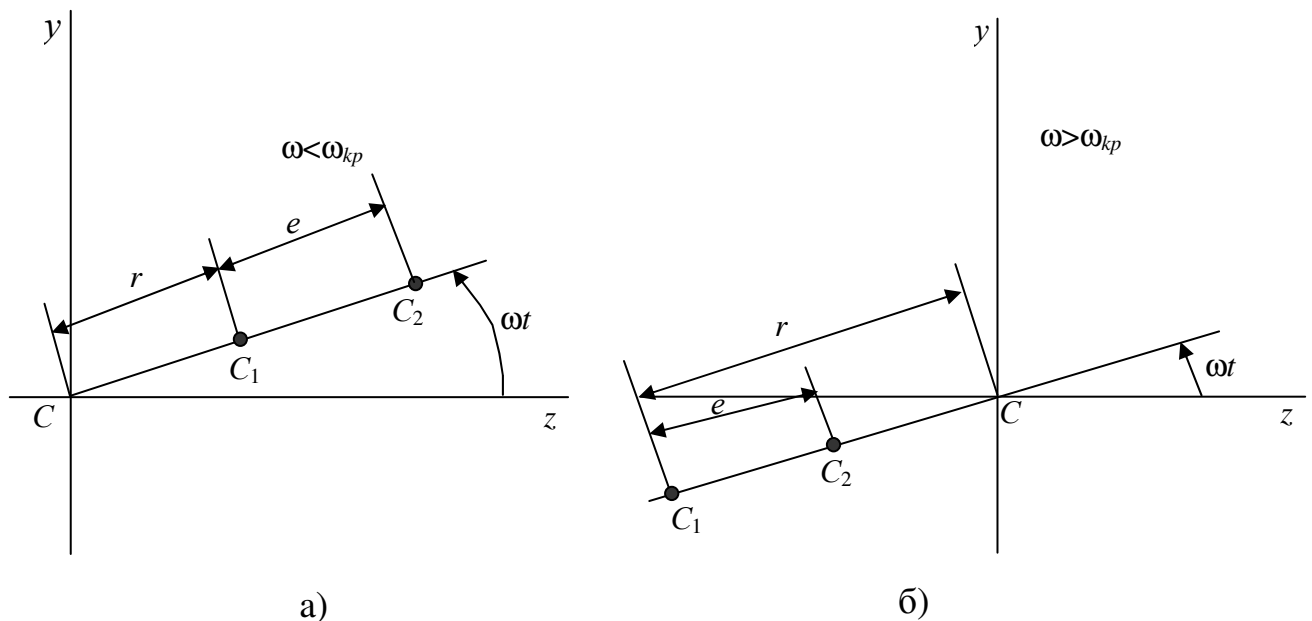


Рисунок 5.3 – Розташування характерних точок вала в залежності від співвідношення  $\omega/p$ .

Рисунок 5.4 – Залежність радіусу обертання  $r$  від відношення  $\omega/p$ .

Як це видно з формули (5.9), при наближенні кутової швидкості до нескінченності  $r \rightarrow -e$ , а центр маси диска  $c_2$  безмежно наближається до центру обертання  $c$ . Це явище має назву самоцентрування, використовується у конструкціях машин з так званими гнучкими валами. В свою чергу гнучкими валами називаються такі вали, власні кругові частоти поперечних коливань яких менше кутових швидкостей обертання.

Перевагою гнучких валів є обмеження сил інерції та відповідних реакцій опор, недоліком є можливість розвитку вібрацій з великими амплітудами при проходженні через резонанс у процесі розгону чи гальмування.

Приклад 5.1. Визначити критичну кутову швидкість сталюго вала, закріпленого у двох коротких підшипниках, які можна розглядати як шарнірні опори (рис. 5.5). При розрахунку прийняти  $D = 60 \cdot 10^{-2}$  м;  $d = 12 \cdot 10^{-2}$  м;  $h = 8 \cdot 10^{-2}$  м;  $a = 1$  м;  $b = 1$  м.

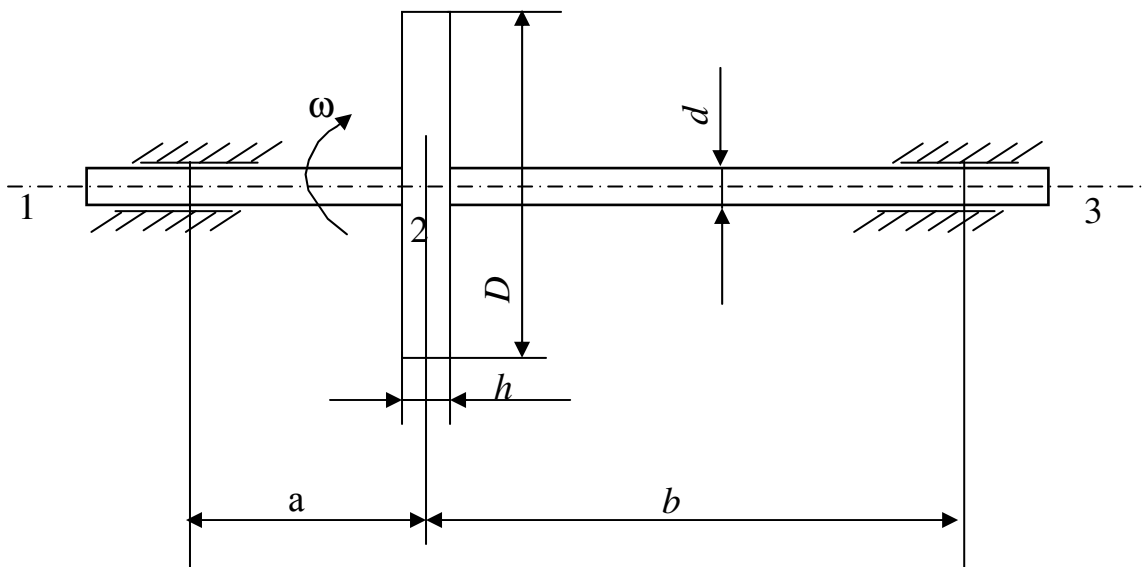


Рисунок 5.5 – Розрахункова схема вала з диском.

Розв'язання. Власна кругова частота поперечних коливань системи  $p$  дорівнює критичній кутовій швидкості  $\omega_{кр}$ .

$$p = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}},$$

де  $\delta_{11}$  – податливість системи у точці 2 м/Н;

$m$  – маса диска, кг.

У відповідності з наведеною формулою визначаємо  $\delta_{11}$ , для чого скористаємося відповідною розрахунковою схемою (рис. 5.6).

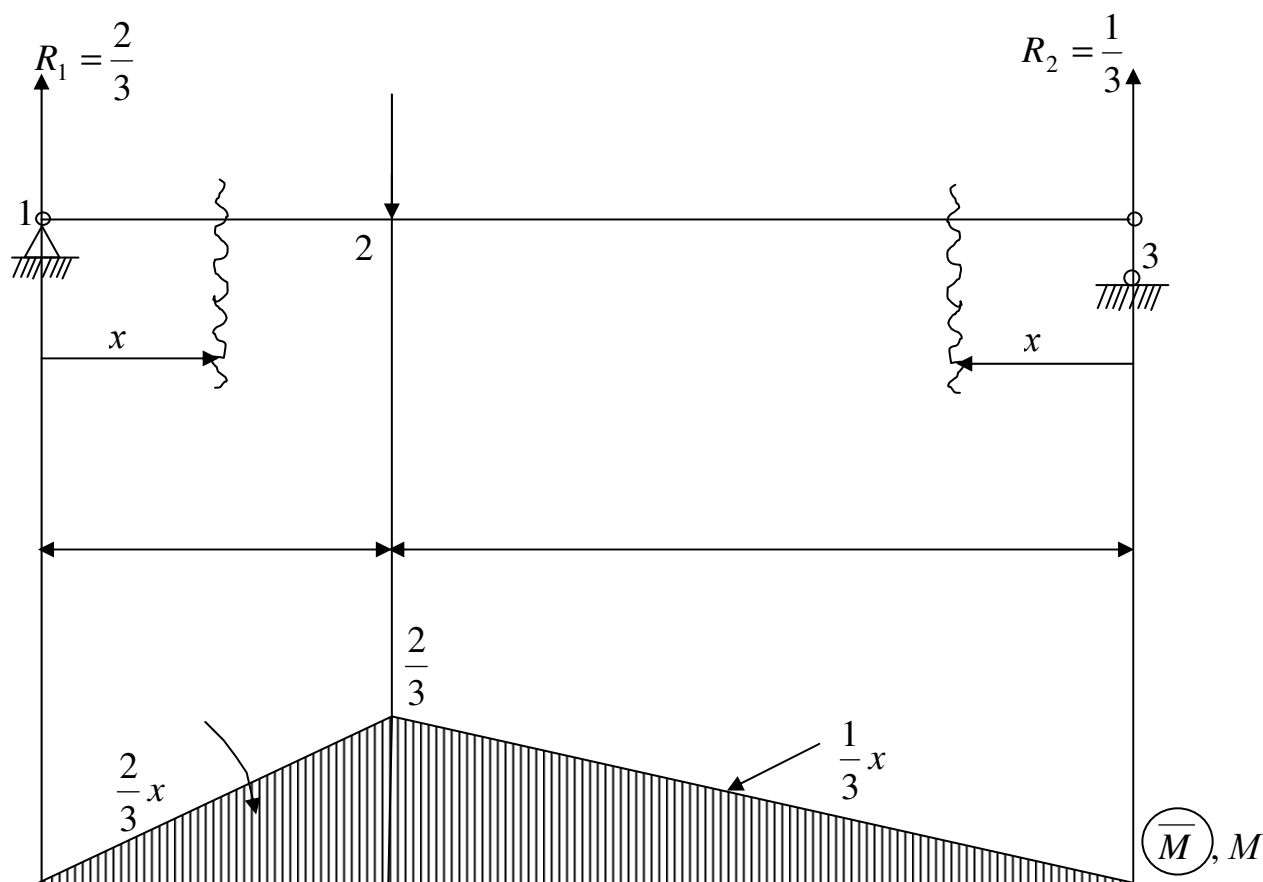


Рисунок 5.6 – Епюра згинаючих моментів

Визначаємо реакції опор:  $R_1 = \frac{2}{3}$ ;  $R_2 = \frac{1}{3}$ . Записуємо функції згинаючих моментів:  $\bar{M}_z(x)_{1-2} = \frac{2}{3}x$ ;  $\bar{M}_z(x)_{3-2} = \frac{1}{3}x$ . Як відомо з курсу опору матеріалів

$$\delta_{11} = \sum_i \int_{l_i} \frac{\bar{M}_{zi}^2(x)}{EJ_{zi}} dx_i,$$

або після підстановки відповідних функцій:

$$\delta_{11} = \int_0^1 \frac{\left(\frac{2}{3}x\right)^2}{EJ_z} dx + \int_0^2 \frac{\left(\frac{1}{3}x\right)^2}{EJ_z} dx = \frac{12}{27EJ_z}.$$

Далі, враховуючи, що  $J_z = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{3,14 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^4}{64}$ , отримуємо:

$$\delta_{11} = \frac{12 \cdot 64}{27 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot (12 \cdot 10^{-2})^4} = 0,218 \cdot 10^{-6} \text{ м/Н.}$$

Маса диска

$$m = \rho \frac{\pi D^2}{4} h = 7,8 \cdot 10^3 \frac{3,14 \cdot (60 \cdot 10^{-2})^2}{4} \cdot 8 \cdot 10^{-2} = 176,34 \text{ кг.}$$

І нарешті:

$$p = \omega_{kp} = \sqrt{\frac{1}{0,218 \cdot 10^{-6} \cdot 176,34}} = 161 \text{ 1/с.}$$

## 5.2. основи розрахунку віброізоляції

Коливання, які виникають при роботі незбалансованого механічного обладнання, передаються на прилеглі конструкції, порушують нормальну роботу суміжних пристроїв. Звідси виникає задача ізоляції об'єкта, який є джерелом коливань, захисту прилеглих конструкцій. Така ізоляція має назву активної віброізоляції.

З іншого боку, захист різного обладнання від опорних пристроїв, які вібрують, складає сутність пасивної віброізоляції.

Задачі активної та пасивної віброізоляції розв'язуються шляхом установлення пружних елементів, а також демпферів між джерелом коливань та опорним пристроєм.

Розглянемо систему активної віброізоляції при гармонічному збудженні (рис. 5.7)

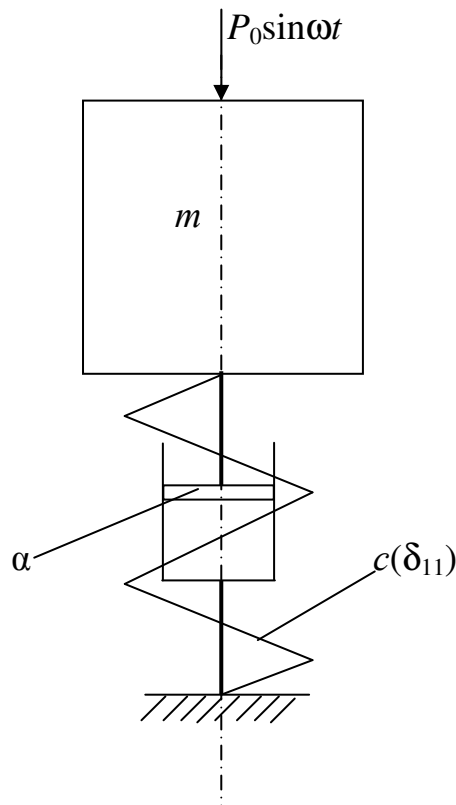


Рисунок 5.7 – Розрахункова схема активної віброізоляції

Рівняння коливань такої системи має наступний вигляд:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + p^2x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t, \quad (5.10)$$

де  $2n = \frac{\alpha}{m}$ ;  $\alpha$  – коефіцієнт пропорційності між силою та швидкістю,

$$p = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11}m}} = \sqrt{\frac{c}{m}} \text{ – власна кругова частота коливань, 1/с;}$$

$\omega$  – кругова частота зовнішнього збудження, 1/с.

$p_0$  – амплітудне значення зовнішнього збудження, Н;

$m$  – маса коливальної системи, кг.

$$x = Ae^{-nt} \sin(p_1t - \varphi) + \frac{P_0\delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \psi), \quad (5.11)$$

де  $A$  – амплітуда вільних коливань, м;

$p_1 = \sqrt{p^2 - n^2}$  – кругова частота власних коливань з урахуванням згасання, 1/с;

$\psi$  – фазовий кут, рад.

Перший доданок у виразі (5.11) швидко обертається у нуль, тоді вимушені коливання системи описуються другим доданком, а саме:

$$x = \frac{P_0\delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \psi). \quad (5.12)$$

У проблемі віброізоляції істотним є не стільки переміщення джерела коливань  $x$ , скільки динамічне зусилля  $R$ , яке передається з пружної сили  $\frac{x}{\delta_{11}}$  та сили в'язкого тертя  $\alpha x$ :

$$R = \frac{x}{\delta_{11}} + \alpha\dot{x} = \frac{P_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \psi) + \frac{P_0\delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2\omega^2}{p^4}}} \left[ \frac{1}{\delta_{11}} \sin(\omega t - \psi) + \alpha\omega \cos(\omega t - \psi) \right]. \quad (5.13)$$

Вираз (5.13) перепишемо у такому вигляді

$$R = R_0 \sin(\omega t - \psi), \quad (5.14)$$

де

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_{11}}\right)^2 + (\alpha \omega)^2} = \\
&= P_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}.
\end{aligned}
\tag{5.15}$$

Відношення амплітуди сили, яка передається опорі, до амплітуди збурюючої сили має назву коефіцієнта віброізоляції  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}
\gamma = \frac{R_0}{P_0} &= \frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}} \sqrt{\left(\frac{1}{\delta_{11}}\right)^2 + (\alpha \omega)^2} = \\
&= P_0 \frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}.
\end{aligned}
\tag{5.16}$$

На рис. 5.8 зображені графіки залежності коефіцієнта віброізоляції  $\gamma$  від відношення  $\omega/p$ .

Рисунок 5.8 – Графіки залежності коефіцієнта віброізоляції  $\gamma$  від відношення  $\omega/p$

При пасивній віброізоляції коливання опори передаються об'єкту, який захищається, через пружну систему (рис. 5.9).

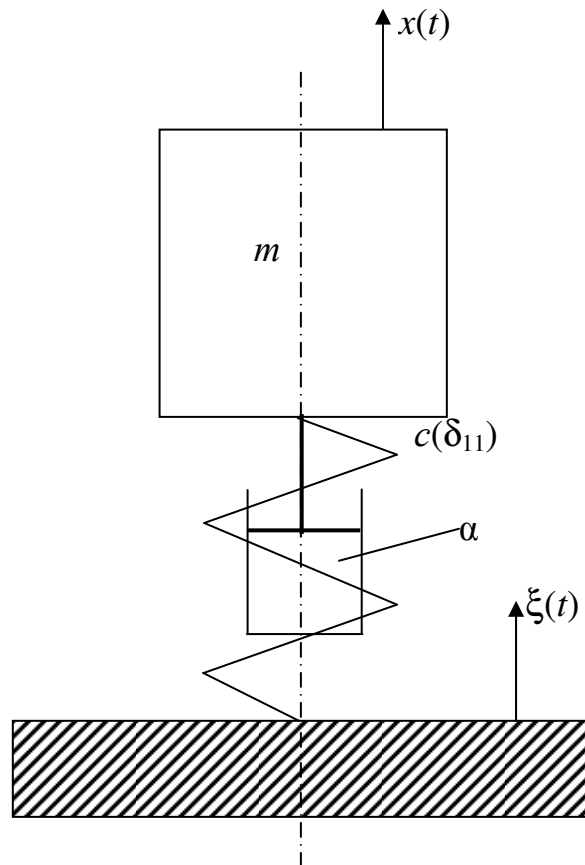


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема пасивної віброізоляції

Коефіцієнтом віброізоляції  $\gamma$  у такому разі називається відношення прискорення об'єкта до прискорення опори.

Складаємо рівняння руху об'єкта

$$m\ddot{x} + \alpha(\dot{x} - \dot{\xi}) + c(x - \xi) = 0, \quad (5.17)$$

де  $x$  – зміщення об'єкта, м;

$\xi$  – зміщення опори, м.

При гармонічному збудженні зміщення опори визначається виразом

$$\xi = a \sin \omega t, \quad (5.18)$$

а зміщення об'єкта –

$$x = \frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}} \sin(\omega t - \psi). \quad (5.19)$$

Після підстановки виразів (5.18) та (5.19) у рівняння (5.17) отримуємо

$$\frac{P_0 \delta_{11}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}} = a \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\delta_{11}}\right)^2 + \alpha^2 \omega^2}{\left(\frac{1}{\delta_{11}} - m\omega^2\right)^2 + \alpha^2 \omega^2}}. \quad (5.20)$$

Безпосередньо з рівності (5.20) шляхом простих перетворень знаходимо коефіцієнт віброізоляції  $\gamma$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\ddot{x}_{\max}}{\xi_{\max}} = \frac{P_0 \delta_{11}}{a \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}} = a \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\delta_{11}}\right)^2 + \alpha^2 \omega^2}{\left(\frac{1}{\delta_{11}} - m\omega^2\right)^2 + \alpha^2 \omega^2}} = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + \frac{4n^2 \omega^2}{p^4}}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Як видно, коефіцієнти віброізоляції, як активної так і пасивної, співпадають.

З графіків залежності коефіцієнтів віброізоляції  $\gamma$  від відношення  $\omega/p$  витікає, що віброізоляція ефективна лише у тому разі, коли  $\omega/p$  має великі значення, тобто якщо власна кругова частота системи мала у порівнянні з круговою частотою зовнішнього збурення, насамперед при  $p > \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ .

При  $p < \frac{\omega}{\sqrt{2}}$  пружна підвіска втрачає сенс, оскільки коефіцієнт віброізоляції стає більшим одиниці. Демпфірування коливань знижує резонансні піки, але погіршує віброізоляцію у зоні високих частот.

### 5.3. Вплив зазорів на динамічні навантаження у приводі

У механічних передачах металургійних машин звичайно мають місце великі зазори, що призводить до значних навантажень під час неусталеного руху.

Для прикладу розглянемо двомасову систему з одним зазором (рис. 5.10).

Момент сил пружності у приводі під час ударного замкнення зазору

$$M_{1-2} = M_{II1} + M_{II2}, \quad (5.22)$$

де  $M_{II1}$  – складова моменту сил пружності у валопроводі при навантаженні привода зовнішнім моментом, Н·м;

$M_{II2}$  – складова моменту сил пружності у валопроводі при додатковому навантаженні, викликаному ударом при зімкненні зазору, Н·м.

Як відомо [ ],



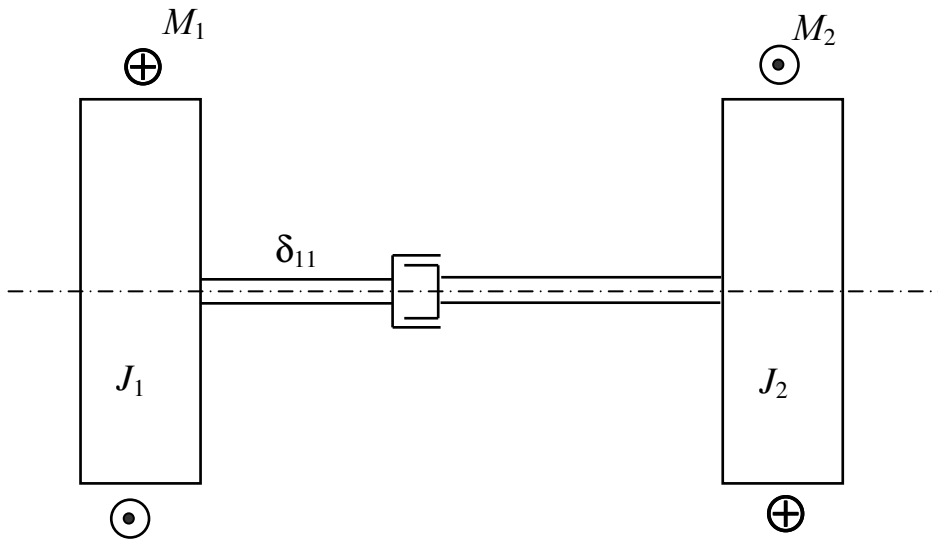


Рисунок 5.10 – Розрахункова схема двомасової системи з зазором

$$M_{II1} = M_a (1 - \cos pt), \quad (5.23)$$

де  $M_a = \frac{M_1 J_2 + M_2 J_1}{J_1 + J_2}$ ;

$p$  – власна кругова частота коливань системи, 1/с;

$$M_{II2} = \sqrt{2M_1 \frac{\theta}{\delta_{11}} \left( \frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)} \sin pt, \quad (5.24)$$

де  $\theta$  – зазор, рад;

$\delta_{11}$  – податливість системи, рад/Н·м;

$J_1$  та  $J_2$  – момент інерції мас, кг·м<sup>2</sup>.

Під впливом постійного зовнішнього навантаження коефіцієнт динамічності з урахуванням ударів у зазорах завжди перевищує число два, збільшується по параболічному закону при збільшенні зазору (рис. 5.11).

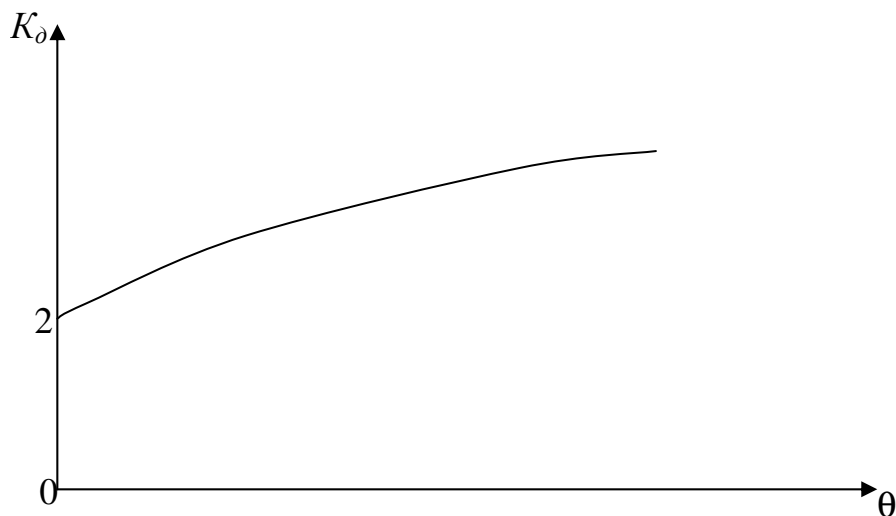


Рисунок 5.11 – Залежність коефіцієнтів динамічності від зазору у валопроводі

На практиці зменшення динамічних навантажень при ударах у зазорах валопроводів досягається шляхом використання спеціальних компенсуючих пристроїв з залученням гумових елементів, підвищення якості виготовлення деталей та вузлів передач, введенням відповідних пристроїв у електродвигуни, які знижують швидкість вибору зазорів на пускових режимах.

#### 5.4. Вплив механічних характеристик електродвигуна на динаміку привода

Для виявлення найбільш загальної картини динамічних процесів у пружних системах привода є реакція вивчення електромеханічної системи в цілому (рис. 5.12).

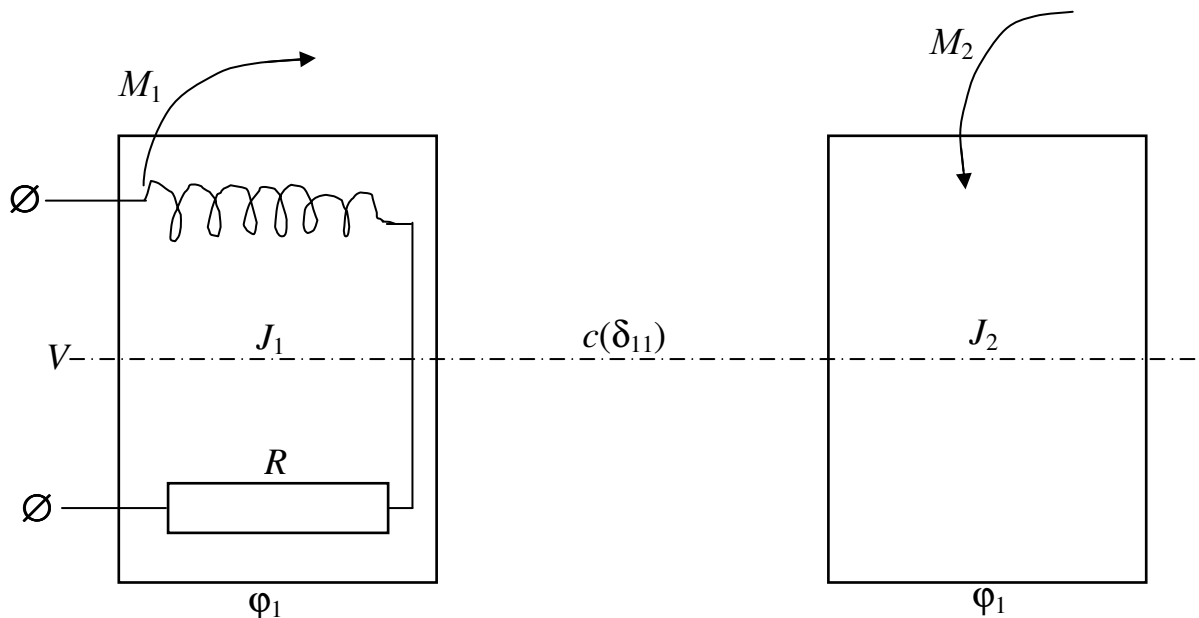


Рисунок 5.12 – Електромеханічна система привода

При цьому існує зв'язок між механічними коливаннями пружної системи та електромагнітними процесами у електродвигуні, який потрібно виявити, маючи на увазі, що ротор, крім обертання, здійснює механічні коливання з частотою, яка дорівнює власній частоті коливань привода. Зв'язок між моментом електродвигуна та кутовою швидкістю ротора визначається його механічною характеристикою (рис. 5.13).

Механічні характеристики електродвигунів діляться на м'які та жорсткі в залежності від похідної  $\beta = \frac{dM}{d\omega}$ , де  $\beta$  – коефіцієнт жорсткості механічної характеристики електродвигуна.

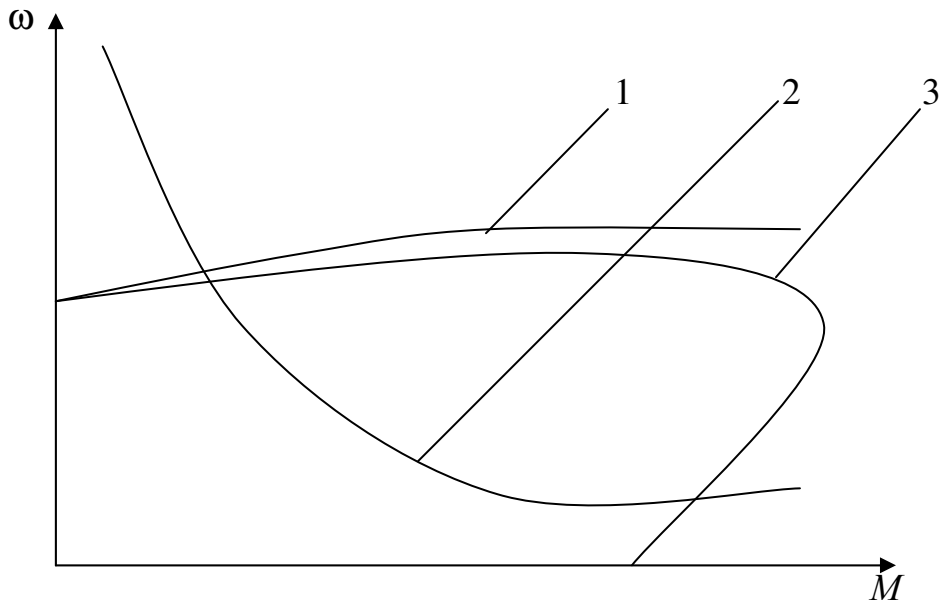


Рисунок 5.13 – Механічні характеристики електродвигунів:

- 1 – постійного струму з паралельним чи незалежним збудженням;
- 2 – постійного струму з послідовним збудженням;
- 3 – перемінного току з фазовим ротором.

Простежимо, як впливає механічна характеристика електродвигуна на динаміку привода на прикладі пуску двомасової системи під впливом моменту електродвигуна з прямолінійною характеристикою (асинхронного, шунтового) (рис. 5.14).

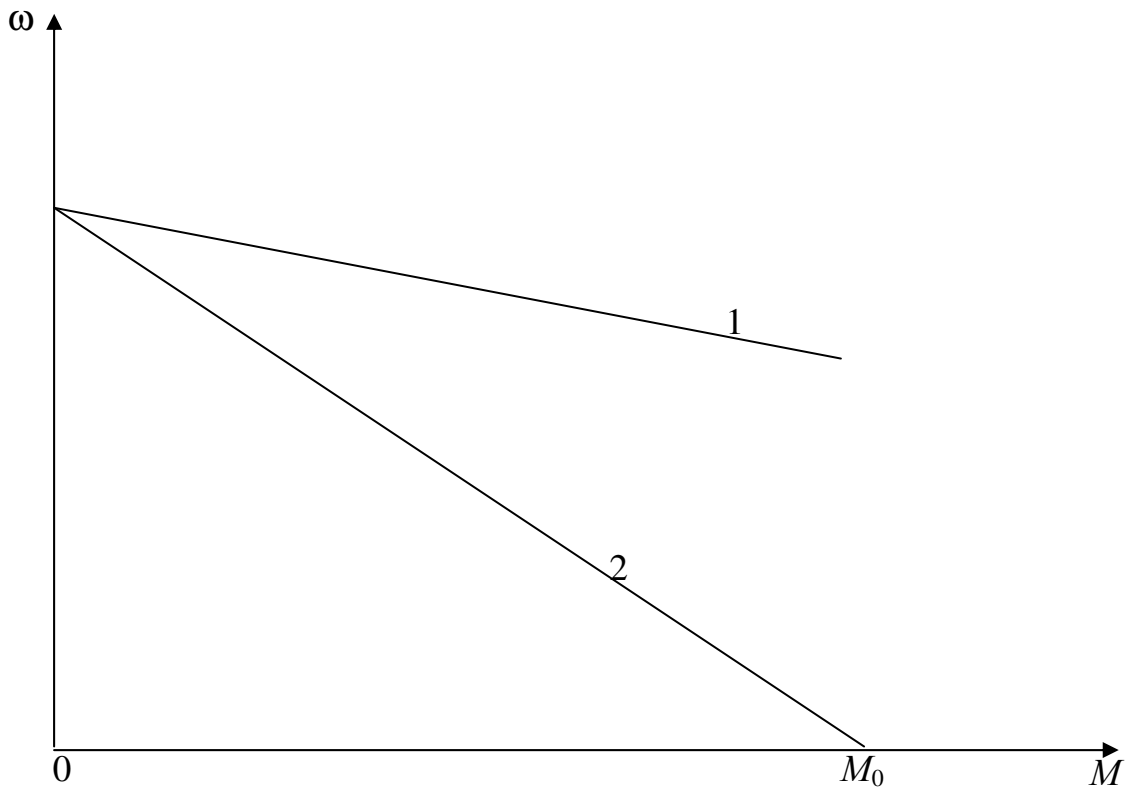


Рисунок 5.14 – Механічна характеристика асинхронного шунтового електродвигуна

- 1 – автоматична характеристика; 2 – пускова характеристика.

$$M_{\partial} = M_0 - \beta \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Записуємо диференціальні рівняння руху мас ротора електродвигуна та робочого органу системи

$$J_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = M_{\partial} - M_{1-2}, \quad (5.26)$$

де  $J_1$  – момент інерції ротора електродвигуна, кг·м<sup>2</sup>;

$M_{\partial}$  – крутячий момент електродвигуна, Н·м;

$M_{1-2}$  – момент сил пружності на ділянці 1–2, Н·м.

$$J_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = M_{1-2} - M_2, \quad (5.27)$$

де  $J_2$  – момент інерції робочого органу, кг·м<sup>2</sup>;

$M_2$  – момент сил опору, Н·м;

Враховуючи рівняння (5.26) та (5.27), отримуємо диференціальне рівняння моменту електродвигуна

$$\frac{d^3 M_{\partial}}{dt^3} + \frac{\beta}{J_1} \frac{d^2 M_{\partial}}{dt^2} + \frac{1}{\delta_{11}} \left( \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} \right) \frac{d M_{\partial}}{dt} + \frac{\beta}{\delta_{11} J_1 J_2} M_{\partial} = \frac{\beta}{\delta_{11} J_1 J_2} M_0. \quad (5.28)$$

Переписуємо рівняння (5.28) з урахуванням нових позначень

$$\frac{d^3 M_{\partial}}{dt^3} + \frac{1}{n_1 T_m} \frac{d^2 M_{\partial}}{dt^2} + p^2 \frac{d M_{\partial}}{dt} + \frac{p^2}{T_m} M_{\partial} = \frac{p^2}{T_m} M_0, \quad (5.29)$$

де  $T_m = (J_1 + J_2)/\beta$  – електромеханічна константа часу електродвигуна, с;

$n_1 = J_1/(J_1 + J_2)$  – коефіцієнт розподілу мас;

$p = \sqrt{(J_1 + J_2)/\delta_{11} J_1 J_2}$  – кругова частота власних коливань системи, 1/с.

Електромеханічна константа часу електропривода – це час, необхідний для досягнення швидкості привода від нуля до номінальної швидкості холостого ходу під впливом початкового моменту  $M_0$ .

Характеристичне рівняння

$$r^3 + \frac{1}{T_m n_1} r^2 + p^2 r + \frac{p^2}{T_m} = 0. \quad (5.30)$$

Його корені знаходимо по методу Кардана [5]:

$$r_1 = v + V - \frac{1}{3T_m n_1}; \quad r_2 = k + ip; \quad r_3 = k - ip,$$

$$\text{де } k = \frac{v + V}{2} + \frac{1}{3T_m n_1} \sqrt[3]{4} \quad p = \frac{\sqrt{3}}{2} (v - V);$$

$$v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + g^2}}; \quad V = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + g^2}};$$

$$q = \left( \frac{1}{3T_m n_1} \right)^3 - \frac{p^2}{6T_m n_1} + \frac{p^2}{2T_m}; \quad g = \frac{p^2}{3} - \left( \frac{1}{3T_m n_1} \right)^2.$$

Тоді розв'язання рівняння (5.29) має наступний вигляд

$$M_{\partial} = M_c - M_u e^{-kt} \cos pt - M_u \frac{k}{p} e^{-kt} \sin pt, \quad (5.31)$$

Таким чином, при пуску електропривода внаслідок пружних коливань системи та коливального руху ротора електродвигуна момент двигуна змінюється по гармонічному закону з затуханням з частотою, яка близька до частоти власних коливань системи.

Момент сил пружності у приводній лінії

$$M_{1-2} = M_{\partial} - J_1 \frac{d^2 \phi_1}{dt^2}, \quad (5.32)$$

або з урахуванням параметрів електродвигуна

$$M_{1-2} = M_c + M_u \sqrt{1 + \left[ \left( -\frac{k}{p} + \frac{J_1 k^2}{\beta p} \right) + \frac{J_1 p^2}{\beta} \right]^2} e^{-kt} \cos(pt + \gamma), \quad (5.33)$$

$$\text{де } \gamma = \arctg \left( \frac{k}{p} - \frac{J_1 k^2}{\beta p} - \frac{J_1 p}{\beta} \right).$$

Як це слідує з наведених викладок, основними факторами, які впливають на динаміку електромеханічної системи, є частота власних коливань системи  $p$ ; а також електромеханічна константа часу привода  $T_m$ . Вплив механічної характеристики електродвигуна виявляється на зменшенні моментів сил пружності у приводі, а саме: чим більший нахил характеристики, тим менші амплітуди моментів сил пружності, чим більша частота коливань системи та моментів інерції ротора при тій же константі часу  $T_m$ , тим менші амплітуди коливань моментів сил пружності. Слід зауважити також, що на зниження динамічних навантажень у приводі впливає розподілення мас, у тому числі підвищення моменту інерції ротора електродвигуна призводить до зниження динамічних навантажень у системі.

#### Питання для самоконтролю

1. Що називається критичним числом обертів вала?
2. Що являє собою ексцентриситет диска?
3. Яке явище має назву електроцентрування?
4. Що являє собою активна віброізоляція?
5. Що являє собою пасивна віброізоляція?
6. Чи відрізняються коефіцієнти віброізоляції при активній та пасивній віброізоляції?
7. У яких випадках пружна підвіска втрачає сенс використання?
8. Як впливає демпфірування коливань на резонансні піки?
9. Як впливає демпфірування коливань на віброізоляцію у зоні високих частот?
10. Яким чином практично можна запобігти підвищення динамічних навантажень при наявності зазорів у передачах?

- 11.Що являє собою механічна характеристика електродвигуна?
- 12.Поясніть сутність електромеханічної константи часу привода.
- 13.Які основні фактори впливають на динаміку електромеханічної системи?

### ЛІТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
2. Бейгул О.А. Динамика и прочность самоходных платформ на пневмоколесном ходу. – К.: ИСМО, 1996. – 138 с.
3. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – 3-е изд., перераб. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972. – 416 с.
5. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., испр. – М.: Наука, 1986. – 544 с.
6. Вайнберг Д.В., Писаренко Г.С. Механические колебания и их роль в технике. – М.: Наука, 1965. – 276 с.
7. Гребенник В.М., Иванченко Ф.К., Ширяев В.И. Расчет металлургических машин и механизмов. – К.: Вища школа, 1988. – 448 с.
8. Иванченко Ф.К., Красношарпа В.А. Динамика металлургических машин. – М.: Металлургия, 1983. – 295 с.
9. Кошевников С.Н. Динамика машин с упругими звеньями. – К.: АН УССР, 1961. – 160 с.
10. Кошевников С.Н. Динамика нестационарных процессов в машинах. – К.: Наукова думка, 1986. – 288 с.
11. Колесник И.А. Колебания комбинированных арочных систем под действием подвижных нагрузок. – Киев-Донецк: Вища школа, 1977. – 151 с.
12. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.
13. Паповко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – 2-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
14. Паповко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. – 2-е изд., доп. – М.: Наука, 1967. – 420 с.
15. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник в 3-х томах. Т.3 / Под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Паповко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
16. Светлицкий В.А., Стасенко И.В. Сборник задач по теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1973. – 454 с.
17. Тимошенко С.П. Теория колебаний в инженерном деле: Перевод с англ. / Пер. Шошин Н.А. – Л. – М.: ГНТИ, 1934. – 344 с.
18. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. – М.: Наука, 1975. – 704 с.

19. Феодосьев В.И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – М.: Наука, 1967. – 376 с.
20. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – 2-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
21. Цзе Ф.С., Морзе И.Е., Хинкл Р.Т. Механические колебания / Под ред. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1966. – 508 с.
22. Яблонский А.А., Норейко С.С. Курс теории колебаний. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1966. – 256 с.