

Міністерство освіти і науки України

Дніпродзержинський державний технічний університет

Ю.С. Постольник, В.Ю. Солод

ІНЖЕНЕРНА ТЕРМОМЕХАНІКА

Навчальний посібник

Дніпродзержинськ

ДДТУ

2006

УДК 536.2+539.77

Ю.С. Постольник, В.Ю. Солод. Інженерна термомеханіка. Навчальний посібник. Дніпродзержинськ, видавництво ДДТУ, 2006. – 247 стор.

Розкриті основи теорії квазістатичної термомеханіки. Викладені наближені методи розв'язання крайових задач теплопровідності та термопружності. Розроблено методики дослідження температурного та термонапруженого стану тіл базової геометрії. На конкретних прикладах проілюстровано широкі можливості практичного використання результатів роботи.

Посібник призначений для студентів-магістрів механічних спеціальностей.

Рецензенти: Цапко В.К. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри "Машини і агрегати металургійного виробництва" Національної металургійної академії України (м. Дніпропетровськ); Дідик Р.П. – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри "Технологія машинобудування" Національного гірничого університету (м. Дніпропетровськ)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів, лист від 25.03.2005 року, № 14/18.2-639.

Друкується за рішенням Вченої ради Дніпродзержинського державного технічного університету, протокол № 8 від 24.12.2004р.

ISBN

© Ю.С.Постольник, В.Ю.Солод, 2006р.
© Видавництво ДДТУ, 2006р.

ПЕРЕДМОВА

Напруження, виникаючі в різних технічних об'єктах у наслідок їх нагрівання чи охолодження, у багатьох випадках помітно впливають на довговічність та надійність агрегатів і машин, на якість матеріалів та виробів, на економічність і продуктивність виробництв, нерідко можуть стати причиною порушення технологічних режимів, а інколи привести навіть до руйнування конструкцій.

Наука, головним предметом якої є вивчення термонапруженого стану тіл, відома як "ТЕРМОМЕХАНІКА". Зародилась вона ще в середині XIX ст., але всебічного глибокого розвитку досягла лише у другій половині XX ст. Це було обумовлено необхідністю детального дослідження термомеханічних процесів, притаманних об'єктам передової техніки (авіаційної, ядерної, космічної та ін.).

У вивченні цієї проблеми зацікавлені й більш "приземлені" виробництва (машинобудування, металургія, теплоенергетика, нафтохімія, гірничодобувна), незаперечною основою яких є широке використання енергії високих температур в усіх можливих варіантах її дії на матеріали, вироби, агрегати, машини, конструкції та технологічні процеси. Не дивлячись на це, до сих пір при проектуванні різного промислового устаткування чи призначенні теплотехнологічних режимів ще явно недостатньо враховуються можливі температурні напруження.

Отже проблема передбачення і дослідження наслідків дії температурного навантаження технічних об'єктів та розрахунку їх термонапруженого стану по суті стає одною із ключових у загальній прикладній механіці. Але успішному розв'язанню цієї прикладної проблеми перешкоджає вкрай

недостатня поінформованість конструкторів, дослідників та інженерно-технічних працівників в питаннях міцності, надійності та довговічності матеріалів і конструкцій в умовах дії нестационарних температур, а також відсутність достатньо простих інженерних методик розрахунку термонапруженого стану об'єктів.

Викласти чіткий всебічний прикладний підхід до цієї теорії, хоча б у спрощених розв'язках, дати відповідні розрахункові методики та формули, проілюструвати їх застосування на конкретних прикладах і цим самим ознайомити майбутніх науковців і висококваліфікованих фахівців з проблемою термоміцності – мета цього посібника.

Професор Постолюк Ю.С.

м. Дніпродзержинськ
21 січня 2006р.

ВСТУП

Застосування нових конструкційних матеріалів, інтенсифікація різних технологічних процесів, зріст тисків, які реалізує сучасна техніка, швидкостей та температур, а також необхідність зниження запасів міцності, матеріалоемності устаткування разом з підвищенням його надійності настійно вимагають розв'язання цілого ряду проблем в галузі механіки твердого деформованого тіла. Одною з таких актуальних проблем є комплекс питань, пов'язаних з дослідженням різних задач теплопровідності.

Але в багатьох випадках визначення температурного поля тіла шляхом розв'язання відповідної крайової задачі теплопровідності виявляється не кінцевою метою, а лише першим етапом у дослідженні якоїсь іншої проблеми (наприклад, кристалізації, плавлення, загартування, зварювання та ін.). До таких проблем відносяться і задачі, пов'язані з визначенням температурних (теплових, термічних) напружень. Ці напруження завжди виникають в тілі, позбавленому можливості вільно змінювати свої розміри у відповідності зі зміною свого температурного стану.

Початок сучасної теорії теплопровідності поклала знаменита монографія Ж.Фур'є [56] ще в 1822 р. Дещо пізніше вийшли роботи француза Дюамеля [55] (1837р.) і німця Нейманна [97] (1841 р.), в яких вперше були сформульовані та розв'язані задачі по визначенню температурних напружень у нерівномірно нагрітому тілі.

Ці чотири праці фактично й стали теоретичним фундаментом, на якому відбувалось зародження та подальший розвиток термомеханіки - науки, яка вивчає механічні процеси, що протікають в твердих деформованих тілах під дією

температури.

За більше 175 років свого існування термомеханіка або, конкретніше, теорія термопружності зазнала величезного розвитку, що знайшло відображення у численній літературі. Достатньо послатись на найбільш відомі роботи Б.Болі та Дж.Уейнера [5], Г.Паркуса [26], С.П.Тимошенка [45, 46].

Потрібно особливо відзначити той величезний внесок в розвиток термомеханіки, який зробила і продовжує робити заснована академіком НАНУ А.Д.Коваленко вітчизняна наукова школа (див. Гл.3 (3.10) у роботі [14]).

Ранніми дослідженнями, що зародили цей науковий напрям в Україні, стала праця О.М.Динника [10], виконана в 1915 р. у Катеринославі і присвячена визначенню термонапруженого стану циліндричних тіл. До задач термопружності згодом звертається і академік А.Д.Коваленко, залучаючи до їх розв'язання багатьох своїх учнів. Так на базі Інституту механіки ім. С.П.Тимошенка (ІМ) НАНУ створюється Українська (Київська) школа термомеханіків, до якої у першу чергу треба віднести, крім її організатора та наукового керівника А.Д.Коваленка академіків НАНУ В.Т.Грінченка та Ю.М.Шевченка, член-кореспондента А.Ф.Улітка, професорів Я.М.Грінченка, В.Г.Карнаухового, І.Ф.Мотовиловця, В.В.Піскуна, В.Г.Савченка та ін.

На початку 60-х років паралельно з Київською зароджується і успішно розвивається Львівська наукова школа з термомеханіки, засновником і науковим керівником якої став академік НАНУ Я.С.Підстригач. Із її представників у першу чергу треба виділити цілу групу вчених Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача (ІППММ) НАНУ член - кореспондентів НАНУ Г.С.Кіта, Я.Й.Бурака, професорів Ю.М.Коляна,

В.М.Вігака, М.Р.Гачкевича, В.М.Гембару, О.М.Кулика, Б.Л.Пелеха, Г.В.Пляцка та ін. Тут розвивається оригінальний операторний метод розв'язання задач термомеханіки. З його допомогою досліджуються термонапружені стани оболонок, ізотропних та анізотропних пластин, у тому числі й з урахуванням в'язкопружності та динамічних ефектів; розробляються теоретичні основи термопружності тіл в умовах періодичної дії електромагнітних полів і багато інших нових питань узагальненої термомеханіки.

Основні досягнення двох гілок (Київської та Львівської) Української термомеханічної школи відображені у багатьох монографіях, а також в численних наукових статтях, опублікованих у 20-тих збірниках "Тепловые напряжения в элементах конструкций" за матеріалами доповідей на Всесоюзних наукових нарадах, які щорічно (1960 – 1980 рр.) організовувались Інститутом механіки НАНУ, а також у збірниках "Математические методы и физико-механические поля", що видаються Інститутом прикладних проблем механіки та математики НАНУ, починаючи з 1975 р.

Є ще один потужний науковий центр, який працює у галузі термомеханіки - це Інститут проблем міцності (ІПМ) НАНУ. Найбільш відомими його представниками є академіки НАНУ Г.С.Писаренко, Г.М.Третьяченко, В.Т.Трощенко, В.А.Баженов та ін. З самого початку заснування (1966 р.) ІПМ проводить експериментальні дослідження жароміцних та тугоплавких матеріалів при різних видах навантаження в умовах високих температур, а також займається створенням у відповідних дослідних машин, приладів та стендів. Одержані результати [28] мають велике значення для потреб сучасної передової техніки (реактивної, газотурбо-, ракетної та реакторобудування).

Крім цих трьох (ІМ, ІППММ та ІПМ) академічних інститутів в Україні деякими питаннями термомеханіки займаються окремі науковці й інших наукових закладів. Так, в Інституті технічної теплофізики (ІТТ) НАНУ (Київ) - професори Л.О.Коздоба та М.І.Никитенко, в Інституті проблем машинознавства ім. Підгорного (ІПМаш) НАНУ (Харків) - член-кореспондент НАНУ Ю. М. Мацевитий.

Великий внесок в розвиток наближених методів термомеханіки зробив професор В.В.Абрамов [1] (Запоріжжя). Ним запропонована методика розрахунку залишкових напружень при пружно-пластичних деформаціях, викликаних спільною дією механічного навантаження та температури. Професор М.Т.Тамуров (Запоріжжя) працює в галузі термомеханіки шаруватих пластин. Цими ж питаннями займаються професор Ю.А.Шевляков (Сімферополь) і професор М.Ю.Швайко (Дніпропетровськ).

У Дніпропетровську - місті, в якому працями академіка О.М.Динника дала перші ростки нині всесвітньо відома Українська термомеханічна школа, плідно розвиваються прикладні питання термомеханіки. Це пов'язано, головним чином, з проблемами термоміцності матеріалів та устаткування в умовах металургійного виробництва. Ініціатором тут, безумовно, був професор Дніпропетровського металургійного інституту Н.Ю.Тайц [43]. Далі цей напрямок розвивали його учні (професори О.Г.Сабельников, М.І.Яловий [49], та ін.). Зараз питаннями прикладної термомеханіки займаються професор В.М.Львовський [23] (ДМетУ, Дніпропетровськ) і професор Ю.С.Постольник [25, 32, 34, 36] (ДДТУ, Дніпродзержинськ).

ГЛАВА 1

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ З ТЕРМОМЕХАНІКИ

1.1. ПРИКЛАДНЕ ЗНАЧЕННЯ ТЕРМОМЕХАНІКИ

В останній час дослідженню температурних напружень приділяється все більше уваги, що пояснюється практичною необхідністю, обумовленою розрахунками на міцність таких особливо важливих об'єктів як ядерні реактори, космічні та надшвидкісні повітряні літальні апарати, парові та газові турбіни, реактивні й ракетні двигуни [6, 7, 50] та ін. Подібних розрахунків потребує багато і менш унікальних конструкцій в будівництві, машинобудуванні, теплоенергетиці та інших галузях техніки, де питання міцності, пов'язані з дією температури, можуть мати вирішальне значення. Цим задачам присвячено багато робіт, наприклад [2, 12, 28, 37, 38, 41, 44].

Вивчення та врахування температурних напружень також необхідне і при розрахунках та удосконаленню багатьох технологічних процесів і режимів, які зустрічаються в хімічному, зварювальному, ливарному і взагалі металургійному виробництві.

Нагрівання металу - це одна з найважливіших ланок виробничого процесу в машинобудуванні і металургії, яка докорінно впливає на продуктивність та енергоємність виробництва, собівартість та якість продукції. Тому призначенню правильної та обґрунтованої технології нагрівання металу приділяється особлива увага. При тепловій обробці в тілі з'являються температурні напруження, рівень яких обумовлений швидкістю зміни і перепадом температури. Звідси без

урахування термонапруженого стану тіла важко обґрунтовано встановити гранично допустиму швидкість протікання теплотехнологічного процесу.

Крім цього, зріст продуктивності металургійних агрегатів, інтенсифікація їх теплової роботи ускладнюють умови служби технологічного устаткування. Це призводить до різкого зростання напружень в окремих деталях, вузлах чи конструкціях. Все частіше проявляється недостатність проектування устаткування чи технології без урахування термомеханічних процесів.

Отже, необхідність дослідження і розрахунків температурних напружень, виникаючих в умовах промислового виробництва, цілком очевидна як в науковому, так і практичному відношенні, що підтверджується і численною спеціальною літературою (наприклад, [1, 23, 25, 32, 42, 43, 49]).

1.2. РОЛЬ НАБЛИЖЕНИХ МЕТОДІВ МЕХАНІКИ ТА МАТЕМАТИКИ

Зміст попереднього підрозділу розкриває ту актуальність, якої набули питання термомеханіки в техніці. Але при розв'язанні цих питань виникає низка нелегко подоланих труднощів як суто теоретичного, так і практичного характеру.

Якщо строго підходити до вивчення термічних напружень, то необхідно враховувати не лише прямий вплив нестационарної температури тіла на його напружено-деформований стан, але і зворотну дію процесу термічного деформування на температурне поле, створене зовнішніми та внутрішніми джерелами тепла (згадайте розігрів металу за рахунок виділення тепла деформування при холодній об-

робці тиском). Цю взаємодію полів температури та деформацій називають "ефектом зв'язаності".

Крім цього, при нестационарній температурі тіла поле його деформацій безперервно змінюється в часі, що створює додаткові (інерційні) зусилля. Таке явище прийнято називати "динамічним ефектом".

Урахування цих ефектів призводить до так званої зв'язаної динамічної задачі термопружності, яка потребує сумісного розв'язання системи диференціальних рівнянь: теплопровідності з внутрішніми джерелами тепла, обумовленими деформуванням тіла та механічної рівноваги, де силові члени визначаються температурним полем. Розв'язати таку зв'язану динамічну задачу досить складно.

Однак, при звичайній тепловій дії вплив ефектів динамічності та зв'язаності настільки незначний, що ним можна знехтувати. Це суттєво спрощує розв'язані задачі термопружності, що в більшості практичних випадків є достатньою компенсацією за ту втрату точності, яка при цьому виникає. Ці спрощуючі допущення носять назву постулатів Дюамеля - Нейманна - вчених, які вперше їх сформулювали.

Отже, в рамках постулатів Дюамеля - Нейманна дослідження термонапруженого стану тіла зводиться до попереднього (цілком автономного) розв'язання відповідної крайової задачі теплопровідності, а потім уже рівнянь статичної пружності, в яких силові члени виражаються через одержану температурну функцію. У такій послідовній постановці ці задачі відомі як задачі квазістатичної термомеханіки. Вони мають найбільше практичне значення.

Але в багатьох існуючих дослідженнях з питань термомеханіки в якості "навантажувальної" функції використовуються точні розв'язки тих чи інших задач теплопровідності, представлені

необмеженими рядами, утримуючими спеціальні інтегральні функції. Це призводить до складних громіздких виразів, мало придатних як для всебічного аналізу, так і практичних розрахунків термонапруженого стану тіла.

Крім цього, багато практично важливих задач теплопровідності взагалі ще не одержали точних розв'язків. В таких випадках швидше за все застосовуються різні чисельні методи. Але одержувана при цьому дискретна форма розв'язку задач теплопровідності дуже незручна для дослідження термонапруженого стану. Застосування ж чисельних методів до повної задачі термомеханіки, як правило, є досить складним в умовах інженерної практики.

Говорячи взагалі про функціонування математики, треба констатувати, що існує два загальні напрямки її розвитку. В одному вона розвивається за своїми специфічними внутрішніми законами на чисто дедуктивному рівні строгості. Змістом і призначенням другого напрямку є розробка математичних методів розв'язання прикладних задач. І якщо "чистий" математик не може собі дозволити ні на йоту поступитися строгістю викладок, то прикладника, як правило, задовольняють і теоретично недосконалі, але практично допустимі розв'язки. Це пояснюється, поперше, тим, що розвиток дедуктивної математики не встигає за потребами фізики; тому прикладники були вимушені самі під тиском практичної необхідності напрацьовувати більш ефективні наближені методи. "Краще знайти задовільний розв'язок задачі, але в строк, чим одержати повний розв'язок задачі на той час, коли вона стане непотрібною" ([2], с. 29). По-друге, всі наші кількісні відомості про властивості конкретних об'єктів і процесів, приаманних реальному фізичному світу, у всякому випадку мають наближену точність. Тому точність самого розв'язку мало що говорить про точність описаного цим розв'язком реального явища.

Таким чином, для інженерних розрахунків термомеханічних

процесів застосування до задач теплопровідності точних методів, викладених у відомих книгах Г.Карслоу і Д.Єгера [15], О.В.Ликова [21], О.М.Тихонова і О.О.Самарського [48] та ін. якщо і можливе, то не завжди прийнятне через значну складність одержуваних функцій розподілу температури. Інженерна практика потребує, щоб розрахункові формули були достатньо точними, простими за формою та зручними для обчислення. Цим умовам можуть задовольнити лише наближені методи, широка розробка яких дозволила б “перекинути місток” від існуючих глибоких теоретичних досліджень, одержаних на строго дедуктивному математичному рівні, до інженерної практики, яка продовжує у ряді випадків залишитися ще на дуже застарілих позиціях.

В деяких галузях промисловості вже давно ведеться широка та плідна робота по впровадженню тематичних методів у виробництво. Так, своїми працями учені-металурги М.О.Глинков, Е.М.Гольдфарб, В.Й.Губінський, Г.П.Іванцов, О.В.Кавадеров, Б.І.Китаєв, Ю.Й.Розенгарт, Й.Д.Семикін, В.Н.Соколов, Н.Ю.Тайц, Ю.Г.Ярошенко та багато інших зробили вагомий внесок в розвиток інженерних методів розв'язання задач теплопровідності, чим фактично створили сучасну металургійну (промисло-ву) теплотехніку як самостійну науку.

Розглядання практичних питань інженерної термомеханіки в даному посібнику і буде проведено на основі розв'язків задач теплопровідності, одержаних саме наближеними аналітичними методами. При цьому перевагу надано найбільш поширеним у теплотехніці методам, які ґрунтуються на “моделі термічного шару” (за термінологією О.В.Ликова) [22]. Згідно цій моделі процес нагрівання тіла розглядається в два етапи: на першому (інерційному) тепло поступово розповсюджується у глибину тіла; на другому (впорядкованому) температура тіла вже змінюється по всьому його обсягу. Слід зауважити, що ця модель під назвою “інженер-

ної моделі теплопровідності" була вперше запропонована і застосована для розв'язання задач металургійної теплотехніки проф. Й.Д.Семикіним ще в 1937-1939рр. [40].

Перенесення моделі термічного шару в теорію квазістатичної термопружності, а також використання одержаних простих функцій температури дозволили дати прийнятні для інженерних розрахунків формули термічних напружень, що, як відомо, завжди було з точки зору широкого технічного застосування досить складною проблемою. Одержані результати знайшли конкретне практичне втілення при розрахунках гранично допустимих температурних перепадів, поверхневих теплових потоків, швидкостей нагрівання, максимальних температурних напружень при нагріванні та охолодженні металу, при розробці методик розрахунку масивних тіл випромінюванням і конвекцією, термонапруженого стану різних (плоских, трубчастих та кулястих) елементів, які широко використовуються в машинобудуванні, пічній теплотехніці та енергетиці.

1.3. ПРЕДМЕТ І ЗАВДАННЯ ІНЖЕНЕРНОЇ ТЕРМОМЕХАНІКИ

Щоб визначитись з предметом, якому присвячена ця книга, згадаємо більш звичні для нас поняття.

Механіка взагалі - це наука про рух матеріальних тіл. При цьому під механічним рухом розуміється зміна за часом взаємного положення тіл або їх частинок у просторі.

В залежності з допущеннями відносно властивостей тіл загально прийнято розрізняти механіку абсолютно твердого тіла, тобто тіла, в якому взаємні відстані між окремими його частками залишаються незмінними, та механіку змінюваного тіла.

За характером викладення предмету та його цілями інколи механіку поділяють на теоретичну і практичну або прикладну, маючи на увазі міру наближення її до потреб практики.

Наш предмет відноситься до так званої механіки твердого деформованого тіла, яка включає в себе такі дисципліни як опір матеріалів, будівельну механіку, теорії пружності та пластичності.

Механіка твердого деформованого тіла (МТДТ) - це наука, вивчаюча поведінку твердих тіл при різних видах навантаження. Напружено-деформований стан і надійність різноманітних технічних об'єктів, форма, властивості і призначення яких задовольняють певним обмежуючим вимогам, складає предмет прикладної механіки твердого тіла. Таким чином утворились такі дисципліни як механіка матеріалів (опір матеріалів), будівельна, суднобудівельна, літакобудівельна та машинобудівельна механіки. Все це - наука про міцність елементів конструкцій та деталей машин, які характерні для певної галузі техніки.

Теорія пружності - це розділ механіки твердого деформованого тіла, який вивчає напружено-деформований стан пружних тіл під дією різних фізичних полів (силових, температурних, електромагнітних, гравітаційних та ін.). Теорія пружності поділяється на математичну та прикладну. Математична теорія пружності свої задачі ставить і розв'язує з усією строгістю, яку здатна забезпечити сучасна математика. Але такі точні розв'язки доки що допускають лише відносно прості і мало цінні для практики-задачі.

Прикладна теорія пружності, вводячи деякі допущення, вилучає з урахування другорядні фактори і, таким чином, розглядає не реальне тіло, а певну розрахункову модель. І якщо введені спрощуючі гіпотези були коректні з точки зо-

ру дійсної малозначності вилучених факторів, то розв'язки прикладної теорії пружності цілком задовольняють вимогам практики.

Створенню теорії термопружності однорідного тіла сприяло використання загальних уявлень класичних теорій пружності та теплопровідності.

Температурні напруження можуть появитись в тілі за різних причин:

1) в статично невизначуваних стержньових системах при експлуатації їх в температурних умовах, відмінних від умов монтажу;

2) при нерівномірному нагріванні або охолодженні спочатку ненапруженого тіла;

3) при нерівномірному охолодженні тіла із рідкого або пластичного стану.

Перші дві причини створюють температурні (термічні) напруження першого роду, а третя - температурні напруження другого роду. Майже всі теоретичні роботи з термопружності присвячені дослідженню напружень першого роду.

Термомеханіка - це наука, яка розглядає основні положення та методи теорії термопружності, включаючи теплопровідність, термічні напруження першого роду, динамічні ефекти при суттєво нестационарних теплових процесах та термомеханічні ефекти деформування. Під прикладною термомеханікою будемо розуміти квазістатичну незв'язану термомеханіку.

Саме прикладна термомеханіка одержала широкий розвиток у зв'язку з нагальними потребами сучасної техніки і технологій.

Важливим напрямком технологічної термомеханіки є вивчення термічних напружень в елементах конструкцій та матеріалах при різноманітних технологічних процесах: зва-

рювання, шліфування, різання, наплавлення, нагрівання, охолодження, гартування металу.

Враховуючи всю цю практичну направленість, можна говорити, що прикладна термомеханіка - це наука, яка займається дослідженням та розрахунками температурно-термонапруженого стану різних об'єктів техніки.

Якщо ж звузити обсяг задач до кола питань, що відображають проблеми якоїсь певної галузі техніки, то ми будемо мати, наприклад, будівельну, гірничу, металургійну, а взагалі – інженерну (прикладну) термомеханіку.

Отже, прикладна термомеханіка - технічна наука, яка вивчає залежності між напруженнями, деформаціями та температурою, а також розробляє методи розрахунку температурних напружень суттєвих для раціонального проектування та експлуатації механічного устаткування, а також встановлення технологічних режимів, оптимальних з позицій термоміцності.

1.4. ОСНОВНІ ГІПОТЕЗИ. РЕАЛЬНИЙ ОБ'ЄКТ І РОЗРАХУНКОВА МОДЕЛЬ

Прикладна теорія пружності, приймаючи низку узагальнюючих гіпотез щодо властивостей, структури та характеру деформування матеріалу, а також вводячи деякі загальні принципи підходу до розрахунків технічних об'єктів, виключає з урахування другорядні фактори і, таким чином, розглядає не реальне тіло, а певну його розрахункову модель.

В залежності від характеру об'єкта і методів та цілей його дослідження, моделі діляться на фізичні та математичні.

Фізичне моделювання - це заміна вивчення певного

об'єкта або явища експериментальним дослідженням його моделі, що має ту ж фізичну природу.

Математичне моделювання - це наближений опис якогось-небудь фізичного об'єкта чи процесу, виражений з допомогою математичних символів. Процес математичного моделювання передбачає 4 етапи:

1) формулювання законів, які зв'язують основні характеристики моделі; ця стадія завершується записом в математичних символах якісних уявлень про зв'язки між об'єктами моделі;

2) дослідження поставленої математичної задачі; основним питанням тут постає визначення можливих шляхів розв'язання задачі; на цьому етапі важливу роль відіграє вибір математичного методу, який би відповідав цілям дослідження;

3) проведення математичного дослідження, тобто безпосереднє розв'язання поставленої математичної задачі та конкретні обчислення;

4) аналіз і фізична інтерпретація одержаних математичних результатів. На цій стадії проводиться також аналіз адекватності прийнятої математичної моделі тим основним уявленням, якими володіє наука про об'єкт вивчення; якщо висновки, одержані на основі прийнятої математичної моделі, не відповідають нашим знанням про досліджуване явище, то виникає необхідність побудови більш досконалої математичної моделі.

Із вище сказаного видно, що будь-яка розрахункова модель має дві сторони правдоподібності: зовнішню і внутрішню.

Зовнішня сторона правдоподібності пов'язана з першим етапом моделювання, на якому визначаються основні риси

об'єкту, які обов'язково треба враховувати, і побічні риси, якими можна знехтувати.

Внутрішня ж сторона правдоподібності формується на другому та третьому етапах і зумовлена рівнем точності розв'язку поставленої математичної задачі.

Цілком очевидно, що якість математичної моделі повністю визначається цими двома сторонами правдоподібності. Про це детально говориться в досить цікавій і корисній для прикладника книзі [4].

Найкращим є шлях побудови такої моделі, яка була б задовільною за зовнішньою правдоподібністю і в той же час своєю простотою забезпечувала б високий рівень внутрішньої правдоподібності. Але таке співвідношення дуже рідко досягається, і дослідник змушений робити вибір між громіздкою моделлю з високим рівнем зовнішньої правдоподібності, але, через складність задачі, з низьким рівнем внутрішньої правдоподібності, і більш простою моделлю, у якої зовнішня правдоподібність дещо знижена, але розв'язок можна досить легко одержати з високою точністю, при чому очікуваний підсумковий рівень адекватності розв'язку в обох випадках однаковий.

У подібних випадках, як правило, другий тип моделей кращий, так як в них бувають більш ясними зроблені припущення, процес розв'язання задач більш зрозумілий і менш громіздкий, а, крім того, у ряді випадків виявляється також більш наглядним вплив врахованих параметрів на досліджуваний фізичний процес.

“Можно сказать, что в определенном смысле цель ученого состоит в том, чтобы построить простейшую модель, отображающую реальную действительность с приемлемой точностью и полнотой... Модель, содержащая всего неско-

лько параметров, может отображать действительность более точно, чем модель, описываемая целым сонмом переменных, если в первой соотношения между переменными ближе к реальным зависимостям, чем во второй” ([4], с. 160).

Для побудови теоретичних основ термомеханіки перш за все використовуються фундаментальні гіпотези класичної теорії пружності.

Гіпотеза суцільності: матеріал як до, так і після деформації залишається суцільним, тобто обмежений поверхнею тіла об’єм заповнений суцільною масою. Цією гіпотезою нехтуються всі (макро і мікро) порожнини.

Гіпотеза однорідності: матеріал тіла однорідний, тобто при переході від точки до точки тіла фізико–механічні властивості матеріалу не змінюються.

Гіпотеза ізотропності: матеріалу тіла притаманна кульова ізотропія, тобто в будь–якій точці тіла його фізико–механічні характеристики однакові в усіх напрямках.

Гіпотеза ідеальної пружності: матеріал ідеально пружний, тобто після його розвантаження повністю відновлюються початкові розміри та форма тіла.

Гіпотеза про пропорційне деформування тіла (закон Гука): деформації тіла прямопропорційні діючим на нього навантаженням.

Гіпотеза малості деформацій: у порівнянні з лінійними розмірами тіла деформації настільки малі, що зміною положення зовнішніх сил, діючих на тіло, можна цілком знехтувати.

Крім цих загальних гіпотез механіки деформованого тіла при розв’язанні тої чи іншої конкретної задачі вводяться додаткові (робочі) гіпотези.

Тепер сформулюємо основні принципи, якими корис-

туються в теорії пружності.

Принцип Сен–Венана: на ділянках, віддалених від місця прикладення навантаження, напружено–деформований стан тіла не залежить від характеру розподілу сил по площадці навантаження. Отже, якщо систему зовнішніх сил, діючих на малу (у порівнянні з лінійними розмірами тіла) ділянку тіла, замінити на будь–яку іншу статично еквівалентну систему сил, то це вплине на локальні (місцеві) деформації у малому об’ємі поблизу зони безпосередньої дії сил, а на загальних деформаціях тіла не позначиться.

Цей принцип вперше запропонував французький вчений Барре де Сен–Венан у середині ХІХ століття.

Принцип незалежності дії сил (принцип суперпозиції або принцип накладання): результат сумісної дії системи сил дорівнює алгебраїчній сумі результатів дії кожної сили окремо. Інколи цей принцип формулюють і так: кінцевий результат дії декількох сил не залежить від послідовності їх прикладання.

Принцип заморожування: на стадії складання рівнянь статички (умов рівноваги) навантажене тіло вважається затверділим (недеформованим). Цей принцип є логічним наслідком гіпотези малості деформацій і дає змогу досить просто (методами теоретичної механіки) визначити як реакції зовнішніх зв’язків, так і внутрішні зусилля в тілі.

Слід зазначити, що якщо за цими допущеннями і принципами сформульована і поставлена задача розв’язана без додаткових фізико–механічних і математичних спрощень, то такий розв’язок вважається строгим.

Для прикладних досліджень потрібні додаткові спрощення. Зазначимо, що прикладна термомеханіка включає в себе прикладну теорію термопружності та прикладну теорію

теплопровідності.

Отже, за основу прикладної термопружності приймемо квазістатичну теорію, яка базується на вже знайомих нам гіпотезах Дюамеля – Неймана, що виключають з поля зору ефекти динамічності та зв'язаності, а також на принципі суперпозиції механічної дії сил і температури.

Принцип же Сен–Венана дещо розширимо стосовно теплового навантаження.

Член кореспондент АН Білорусії А.І. Вейник сформулював принцип стабільності теплового потоку, згідно якому тепловий потік вирівнюється (стабілізується) у глибині тіла незалежно від форми його поверхні.

Цей принцип дозволив з достатньою для інженерної практики точністю розраховувати теплові режими тіл довільної форми, користуючись розв'язками відповідних задач теплопровідності базових тіл. При цьому тіла розподіляються на три класи.

Перший клас охоплює тіла один розмір яких (товщина) набагато менший двох інших (довжини та ширини). Базовим тілом першого класу є необмежена пластина.

До другого класу відносяться тіла, у яких один розмір (довжина) значно більший двох інших (ширини та товщини), що мають розміри одного порядку. Базовим тілом другого класу вважається необмежений циліндр.

Третій клас охоплює тіла, всі три розміри яких мають один порядок. Базовим тілом третього класу є куля.

До речі, як зазначає Вейник, принцип стабільності теплового потоку дає можливість оцінити не тільки температурний, але і термонапружений стан тіл складної геометрії.

Враховуючи вище сказане, об'єктами досліджень технічної термомеханіки будуть тіла трьох класичних форм: нео-

бмежена пластина, необмежений (суцільний і порожнистий) коловий циліндр та суцільна й порожниста куля.

Інженерна термомеханіка, як прикладна наука, змушена іти на такі спрощення, так як складність форми більшості технічних об'єктів ставить на шляху дослідника непоборні перепони. При аналізі температурних напружень він змушений вводити спрощення і будувати умовні моделі, досить наближено відображаючи фізичні реалії. Таким чином, у ряді випадків розрахунки температурних напружень можуть носити оцінний характер. Але і такі оцінні розрахунки мають дуже велике практичне значення, так як дають загальні відомості про граничне допустимі розміри тих чи інших конструктивних елементів, граничні температурні режими їх служби або оптимальні з позицій термоміцності технологічні режими теплової обробки металу.

Нарешті, остання спрощуюча гіпотеза – це модель термічного шару.

Постановку і розв'язання задач прикладної термомеханіки ми будемо вести при допущенні, що процес нагрівання тіла іде у два етапи. На першому (інерційному) етапі тепло поступова розповсюджується у глибину тіла; на протязі усього цього етапу в тілі залишається все менша ділянка з початковою температурою T_0 . Через певний проміжок часу $t_0 > 0$ тіло прогріється на всю глибину і почнеться другий (впорядкований) етап, на протязі якого температура тіла вже змінюється в кожній точці об'єму тіла.

Автор цієї моделі професор Й.Д. Сенинін [40] назвав її інженерною моделлю теплопровідності, а ми цю модель перенесли в прикладну теорію термопружності. Тому у подальших викладах і будемо користуватись терміном “інженер-

на термомеханіка”.

ГЛАВА 2 ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМАХ

2.1. ПЕРЕМІЩЕННЯ ВІД ДІЇ ТЕМПЕРАТУРИ

Перш за все треба зауважити, що самі по собі пружні переміщення елементів конструкцій та деталей машин настільки малі, що їх у ряді випадків можна і не враховувати, як це робить теоретична механіка. Але в інженерній практиці зустрічаються задачі, розв'язання яких не можливо без урахування деформацій. Це необхідно при розрахунках, по-перше, на жорсткість; по-друге, на динамічне навантаження; по-третє, статично невизначених систем. Перші два випадки до нашого предмета не відносяться, третій же має відношення, так як температурні напруження можуть з'явитись у стержньовій системі лише при її статичній невизначеності. Саме цим і пояснюється необхідність уміння визначати деформації (переміщення).

В будівельній механіці стержньових систем прийнято розрізняти три зовнішні фактори, кожен з яких може бути причиною виникнення тих чи інших переміщень.

Перший фактор – силовий, тобто обумовлений заданими силами або навантаженням.

Другий фактор – задані зміщення опор або інших зовнішніх зв'язків.

Третій фактор – температурний, який проявляється при зміні температури в порівнянні з початковою, при якій монтувалась конструкція.

Одним із найбільш поширених універсальних методів

визначення переміщень пружних стержньових систем є відомий з опору матеріалів (наприклад, [27]) метод Максвелла - Мора.

За цим методом будь - яке переміщення довільного перерізу визначається формулою (інтегралом Мора)

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{N}_i(x) N_F(x)}{EA} dx + \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{M}_i(x) M_F(x)}{EJ} dx, \quad (2.1)$$

де $N_F(x)$, $M_F(x)$ – поздовжня сила та згинальний момент в довільному перерізі (x) k -ої ділянки стержньової системи, обумовлені заданим навантаженням $\{F\}$; $\bar{N}_i(x)$, $\bar{M}_i(x)$ – допоміжні (фіктивні, „одиничні”) поздовжня сила та згинальний момент у тому ж перерізі x , обумовлені дією узагальненої одиничної сили $\bar{Q}_i = 1$, яка відповідає шуканому, переміщенню Δ_{iF} ; n – кількість ділянок навантаження системи; E – модуль поздовжньої пружності матеріалу; A , J – площа та відповідний осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня на k -ій ділянці. Зауважимо, що формула (2.1) записана для випадку, коли в розрахунках враховуються лише поздовжні сили та згинальні моменти.

Слід розшифрувати поняття „узагальненої одиничної сили $\bar{Q}_i = 1$, яка відповідає шуканому переміщенню Δ_{iF} ”.

По-перше, “узагальненою силою” може бути все, що викликає переміщення: зосереджена сила, пара сил, зосереджений момент, розподілене навантаження, зміна температури та ін.

По-друге, узагальнена одинична сила \bar{Q}_i – це умовна “сила”, яка безрозмірна по силі, чисельно рівна одиниці і прикладена до звільненої від заданого навантаження $\{F\}$ системи в місці та напрямку шуканого переміщення Δ_{iF} . За ві-

дповідну силу приймають: зосереджену силу $\bar{F}_i = 1$, коли шукають лінійне переміщення; зосереджений момент $\bar{M}_i = 1$ – якщо визначають кут повороту перерізу (розмірність $\bar{M}_i = [\mu]$).

На рис.2.1. зображена консоль AB під дією рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю q .

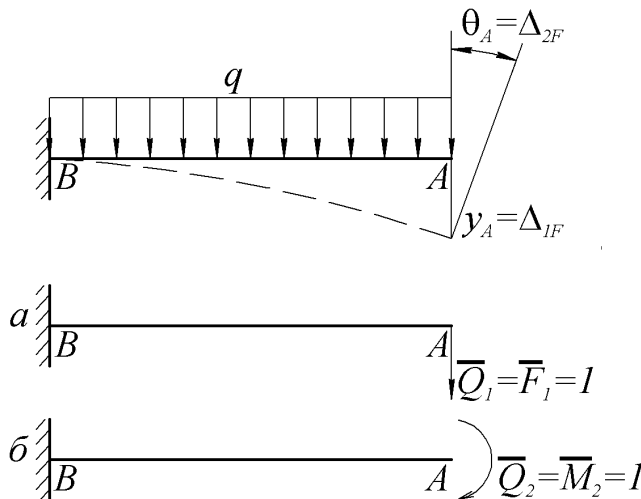


Рис. 2.1. Вибір узагальненої "сили", яка відповідає певному переміщенню.

Якщо треба, наприклад, визначити прогин $y_A = \Delta_{1F}$ перерізу A , то до вільної від навантаження консолі в точці A треба прикласти вертикальну силу $\bar{Q}_1 = \bar{F}_1 = 1$ (а); при визначенні кута повороту $\theta_A = \Delta_{2F}$ до перерізу A прикладається момент $\bar{Q}_2 = \bar{M}_2 = 1$ м (б).

Інтеграл Мора має найбільш поширений вигляд у формі (2.1). Але для зручності подальшого викладу надамо формулі (2.1) дещо іншого виду.

З опору матеріалів [27] відомо, що в елементарному відтинку dx стержня (рис.2.2) зусилля $N_F(x)$ викликає видовження $\Delta(dx)_F$, а згинальний момент $M_F(x)$ – кут повороту $d\theta_F$, які визначаються формулами

$$\Delta(dx)_F = \frac{N_F(x)dx}{EA}; \quad d\theta_F = \frac{M_F(x)dx}{EJ}.$$

Враховуючи це, інтеграл Мора (2.1) можна зобразити так:

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \bar{N}_i(x) \Delta(dx)_F + \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \bar{M}_i(x) d\theta_F. \quad (2.2)$$

Доки що ми мали на увазі визначення переміщень, обумовлених дією першого фактору – зовнішніх сил. Але формулою (2.2) користуються і при розрахунках переміщень від дії температури.

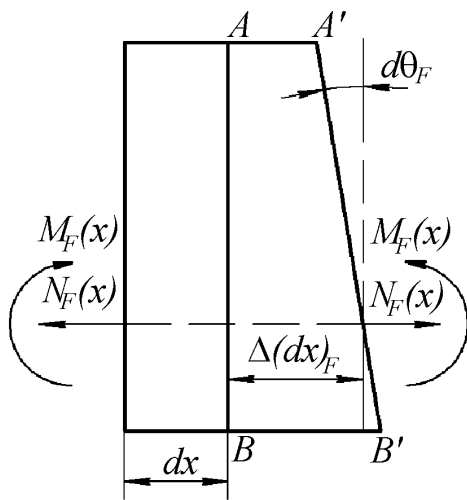


Рис. 2.2. Переміщення перерізу AB елемента dx під дією поздовжньої сили $N_F(x)$ і згинального моменту $M_F(x)$.

Ще раз наголосимо, що у подальших викладках при дослідженні температурних переміщень і напружень мова буде іти виключно про так звану надлишкову температуру $(T - T_0)$ і лише заради стислості будемо заміняти це поняття терміном “температура”.

Для спрощення розрахунків температурних переміщень стержневих систем звичайно вважається, що в межах будь-якого перерізу стержня температура розподіляється за площинним законом, тобто у напрямку головної осі, перпендикулярної площині конструкції, температура стала, а у напрямку головної осі, співпадаючої з площиною конструкції, вона змінюється за лінійним законом (рис.2.3).

Розіб’ємо графік температури (рис. 2.3) на два лінійних графіки (рис.2.4). Графік (а) має вигляд прямокутника з висотою T , яка відповідає температурі на повздовжній осі стержня. Легко показати, що цю температуру можна визначити за формулою

Розіб’ємо графік температури (рис. 2.3) на два лінійних графіки (рис.2.4). Графік (а) має вигляд прямокутника з висотою T , яка відповідає температурі на повздовжній осі стержня. Легко показати, що цю температуру можна визначити за формулою

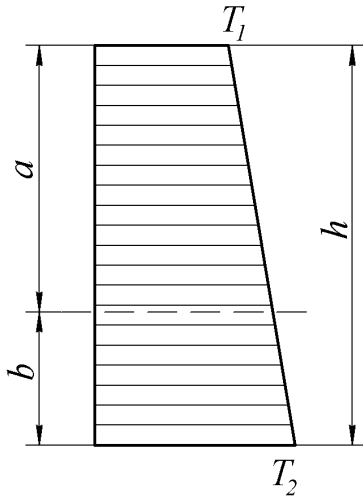


Рис. 2.3. Розподіл температури по висоті стержня.

$$T = \frac{aT_2 + bT_1}{a + b}. \quad (2.3)$$

Якщо центр ваги лежить в середині перерізу ($a = b$), то $T = (T_1 + T_2)/2$. Графік (б) отримується як різниця між дійсним графіком (рис.2.3) та графіком (а) (рис.2.4). Очевидно

$$T' = |T_2 - T_1|. \quad (2.4)$$

Цілком зрозуміло, що рівномірна по перерізу зміна температурного поля (рис.2.4, а) спричинить подовження (при нагріванні) або укорочення (при охолодженні) вільного стержня. Випадок же нерівномірного нагрівання з нульовою температурою в центрі ваги перерізу (рис. 2.4, б) призводить до викривлення осі стержня без зміни його довжини.

Підкреслимо, що в статично визначних стержньових системах зміна температури викликає переміщення але не спричинює появу внутрішніх зусиль, деформуючих тіло. Це пояснюється тим, що геометрична незмінюваність такої стержньової системи забезпечена мінімально необхідною для цього кількістю зв'язків, що дає змогу статично визначній системі вільно реагувати на зміну її температурного стану. Тому в таких системах мають місце подовження чи укорочення, але не розтяг-

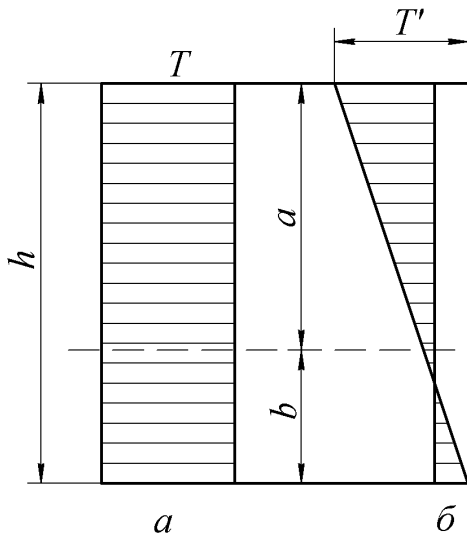


Рис. 2.4. Розподіл температурної функції на сталу і змінну складові.

нення чи стиснення; вони також можуть викривлятися, але не згинатись.

Згідно розподілу температури за рис. 2.3 вилучений з стержня елемент довжиною dx змінить свою форму, як показано на рис. 2.5. При цьому за відомим з фізики законом лінійного температурного розширення твердих тіл

$$\Delta(dx)_{T_1} = \alpha_T T_1 dx; \quad \Delta(dx)_{T_2} = \alpha_T T_2 dx$$

і, з урахуванням (2.3),

$$\Delta(dx)_T = \frac{\Delta(dx)_{T_2} a + \Delta(dx)_{T_1} b}{a + b} = \alpha_T T dx \quad (2.5)$$

кут повороту $d\theta_{T'}$ перерізу $A'B'$ визначається за формулою

$$d\theta_{T'} = \frac{\Delta(dx)_{T'}}{a + b} = \alpha_T T' dx / h. \quad (2.6)$$

У формулах (2.5), (2.6) α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення (КЛТР) матеріалу, а T (2.3), T' (2.4).

Порівнюючи рис. 2.5 з рис. 2.2, бачимо, що для одержання універсальної формули температурних переміщень стержньових систем у виразі (2.2) поздовжнє $\Delta(dx)_F$ та кутове $d\theta_F$ переміщення від дії сил достатньо замінити на відповідні переміщення (2.5) та (2.6), викликані зміною температури:

$$\Delta_{iT} = \pm \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \alpha_T T_k \bar{N}_i(x) dx \pm \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \alpha_T T'_k \bar{M}_i(x) dx / h_k. \quad (2.7)$$

Якщо вздовж кожної ділянки (k) системи температура незмінна і КЛТР α_T від неї не залежить, то

$$\Delta_{iT} = \pm \sum_{k=1}^n \alpha_T T_k \int_{(l_k)} \bar{N}_i(x) dx \pm \sum_{k=1}^n \alpha_T T'_k \int_{(l_k)} \bar{M}_i(x) dx / h_k. \quad (2.8)$$

В формулі (2.8) інтеграли $\int \bar{N}_i(x) dx$ і $\int \bar{M}_i(x) dx$ дорівнюють площам епюр фіктивних поздовжніх сил та згинальних

моментів, обумовлених дією відповідних узагальнених одиничних сил $\bar{Q}_i = 1$.

Отже, можна записати формулу (2.8) так:

$$\Delta_{iT} = \pm \sum_{k=1}^n \alpha_T T_k \omega_{ik} (\bar{N}_i) dx \pm \sum_{k=1}^n \alpha_T T'_k \omega_{ik} (\bar{M}_i) dx / h_k. \quad (2.9)$$

Тепер щодо вибору знаків у цих формулах. Якщо і температура T' і фіктивний “момент” \bar{M}_i викликають викривлення стержня в один і той же бік, то перед другою складовою формул (2.7)...(2.9) ставиться знак “плюс”, якщо ж ці викривлення протилежні - то “мінус”. Те ж саме стосується і першої складової формул (2.7)...(2.9): якщо і температура T і фіктивна поздовжня сила \bar{N}_i діють в одному напрямку (або на видовження, або на скорочення), то береться “плюс”, як-

що у протилежних напрямках - то “мінус”.

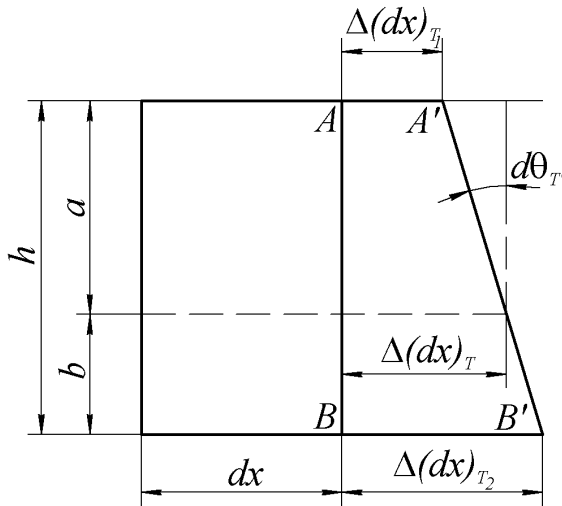


Рис. 2.5. Переміщення перерізу AB елемента dx під дією сталої (T) та змінної (T') складових температурного поля перерізу стержня.

Коли при підрахунках за формулами (2.7)...(2.9) переміщення отримується від'ємним, то це означає, що насправді воно здійснюється в сторону, протилежну дії відповідної одиничної сили $\bar{Q}_i = 1$; якщо ж результат позитивний, то напрямок переміщення співпадає з напрямком прикладеної нами сили $\bar{Q}_i = 1$.

Приклад 2.1. Визначимо горизонтальне (Δ_{1T}), вертикальне (Δ_{2T}) та кутове (Δ_{3T}) переміщення правого кінця C консольної балки (рис. 2.6, a), зумовлені нерівномірною (вздовж h) зміною температури, якщо $a = 1$ м; $h = 10$ см; $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} K^{-1}$; початкова температура $T_0 = 300$ °K; нижні волокна нагріто до температури

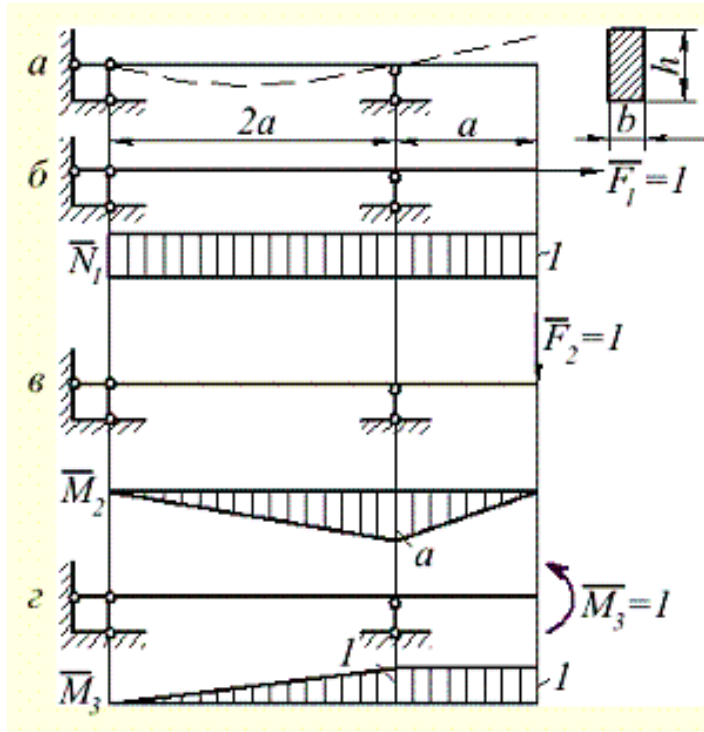


Рис. 2.6. До прикладу 2.1

$\bar{F}_1 = 1$. Ця “сила” викличе в стержні поздовжнє розтягуюче (позитивне) зусилля \bar{N}_1 , еюра якого зображена графіком (б).

Для визначення вертикального переміщення Δ_{2T} перерізу C треба прикласти вертикальну одиничну “силу” $\bar{F}_2 = 1$, що зумовить появу лише згинальних моментів \bar{M}_2 , еюра яких подана графіком (в). Зауважимо, що еюра M будується з боку стиснутих волокон балки.

Нарешті, для розрахунку куткового переміщення Δ_{3T} перерізу C там же необхідно прикласти одиничний “момент”

350 °K, а – верхні охолоджено до температури 290 °K. Температури крайніх волокон зміняться на величину $T_1 = 290 - 300 = -10$ °C; $T_2 = 350 - 300 = 50$ °C.

Щоб знайти горизонтальне переміщення Δ_{1T} перерізу C , необхідно до цього перерізу в горизонтальному напрямку прикласти фіктивну “силу”

$\bar{M}_3 = l(\mu)$ епюра згинальних моментів від дії якого має вигляд (з).

Визначаємо площі епюр

$$\omega_1(\bar{N}_1) = 1 \cdot 3a = 3m^2; \quad \omega_2(\bar{M}_2) = a \cdot 3a/2 = 1,5m^2;$$

$$\omega_3(\bar{M}_3) = 1 \cdot a + 1 \cdot \frac{2a}{2} = 2m^2,$$

а також розрахункові температури (2.3), (2.4)

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} = 2 \frac{50 - 10}{2} = 20^\circ C; \quad T' = T_2 - T_1 = 50 + 10 = 60^\circ C.$$

Тоді за формулою (2.9) знаходимо:

1) горизонтальне переміщення ($\bar{N}_1 \neq 0; \bar{M}_1 = 0$)

$$\Delta_{1T} = \alpha_T T \omega_1(\bar{N}_1) = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 3 = 7,2 \cdot 10^{-4} m;$$

2) вертикальне переміщення ($\bar{N}_2 = 0; \bar{M}_2 \neq 0$)

$$\Delta_{2T} = \frac{\alpha_T T' \omega_2(\bar{M}_2)}{h} = -\frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 1,5}{0,1} = -1,08 \cdot 10^{-2} m;$$

3) кутове переміщення ($\bar{N}_3 = 0; \bar{M}_3 \neq 0$)

$$\Delta_{3T} = \frac{\alpha_T T' \omega_3(\bar{M}_3)}{h} = \frac{12 \cdot 10^{-6} \cdot 2}{0,1} = 1,44 \cdot 10^{-2} рад.$$

У першому випадку знак “плюс” вибраний тому, що і сила \bar{F}_1 , і середня температура T працюють на видовження стержня. Отже, горизонтальне переміщення перерізу C стержня здійснюється в тому ж напрямку, що і “сила” $\bar{F}_1 = 1$, тобто вправо.

Аналогічна картина і в третьому випадку: знак “плюс” взято тому, що і температура $T'(a)$, і момент $\bar{M}_3 = 1$ (з) вигинають балку в одну сторону (стиснутими волокнами зверху). Тому дійсний напрямок повороту Δ_{3T} перерізу C буде таким же, як і напрямок моменту \bar{M}_3 .

У другому випадку вибрано знак “мінус” тому, що “сила” $\bar{F}_2 = 1$ згинає балку, як зображено на рис. (в), а від дії температури T' викривлення здійснюється у протилежному напрямку (а), так як $T_2 > T_1$. Таким чином, переміщення Δ_{2T} направлене вгору, тобто у протилежний \bar{F}_2 бік.

2.2. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ ПРО СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНІ СТЕРЖНЬОВІ СИСТЕМИ

Статично невизначною називається стержньова система, внутрішні зусилля в якій не можуть бути визначені з допомогою лише рівнянь статки. Це пояснюється тим, що така система утримує в собі більше зв'язків, чим того вимагає

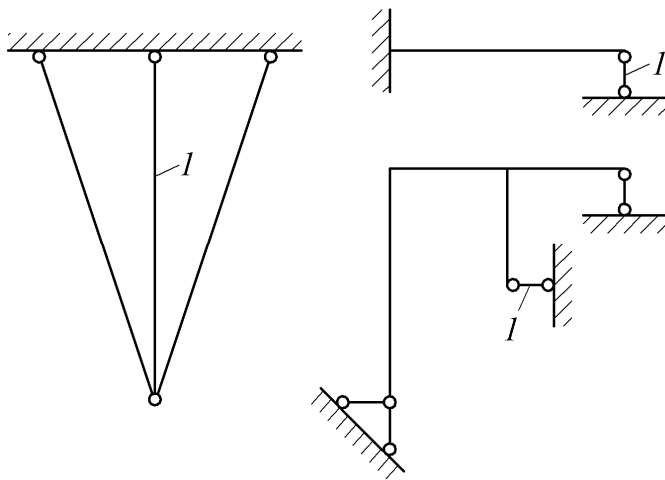


Рис. 2.7. Приклади "зайвих" зв'язків у статично невизначених системах.

забезпечення її геометричної незмінюваності. Таким чином, визначальною рисою статично невизначених систем є наявність зайвих зв'язків. На рис. 2.7 зображено три статично невизначні системи, в яких, наприклад зв'язки l можна прийняти як зайві. Слід зауважити, що “зайвими” вони

вважаються лише з позиції механіки абсолютно твердого тіла, яка, оперуючи відомими умовами рівноваги, стверджує, що завжди існує мінімальна кількість зв'язків, необхідна і достатня для забезпечення нерухомості цілком твердого тіла

при дії на нього довільної системи сил. І якщо зв'язків більше цього “теоретичного” мінімуму, то це говорить про те, що серед них є зв'язки, які непотрібні (зайві) для забезпечення геометричної незмінності даної стержньової системи при її навантаженні. З позиції ж інженерної практики такі зв'язки досить і часто виявляються не тільки не зайвими, а конче необхідними, особливо при проектуванні оптимальних конструкцій, задовольняючих умовам лише міцності та жорсткості, але і економічності.

Треба мати на увазі, що не всякий зв'язок можна вважати зайвим. Взагалі зв'язки поділяються на абсолютно не-

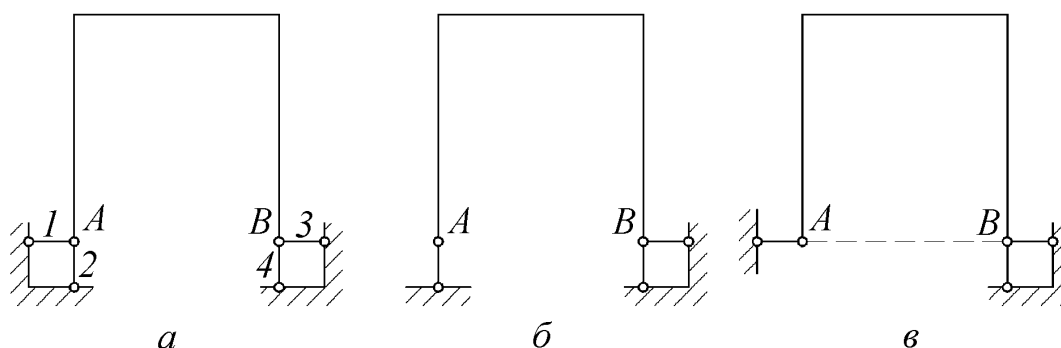


Рис. 2.8. Абсолютно необхідні та умовно необхідні зв'язки.

обхідні та умовно необхідні. До перших відносяться зв'язки, при відкиданні яких система втрачає геометричну незмінність і перестає бути несучою конструкцією; до других відносяться зв'язки, усунення яких ніяк не впливає на геометричну незмінність системи. І зайві зв'язки можуть належати лише до умовно необхідних. Наприклад, на рис. 2.8, а зображена рама, на яку накладено чотири зовнішні зв'язки. Отже, один зв'язок зайвий, так як маємо плоску систему з трьома умовами рівноваги. Якщо відкинути зв'язок 1, то одержимо звичайну статично визначну раму (б), цілком не-

сучоспроможну. Якщо ж зняти зв'язок 2, (в) напрямки всіх трьох залишених зв'язків перетнуться в одній точці B , яка стане так званим миттєвим центром обертання, і система (в) вже не здатна нести будь-яке навантаження. Таким чином, зв'язки 2 та 4 абсолютно необхідні, а 1 та 3 – умовно необхідні; один із останніх і можна прийняти за зайвий.

Розглянемо стержень, який уявно розділимо лінією I–I на дві частини A і B (рис. 2.9, а). Очевидно, що для суцільно-

ГО

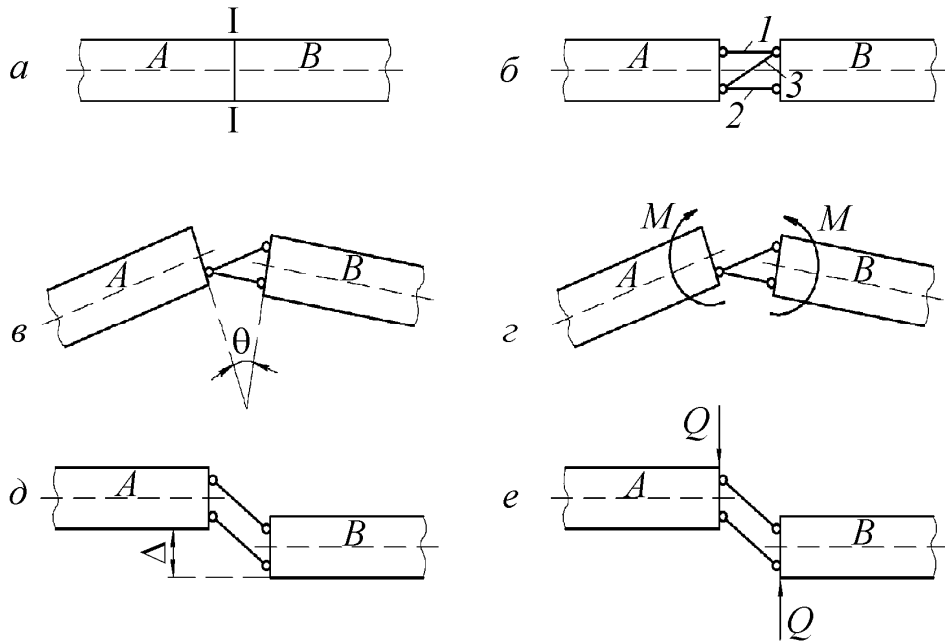


Рис. 2.9. Модель суцільності стержня

стержня як цілком твердого тіла частина A не може зміщуватися відносно частини B по перерізу I–I ні в горизонтальному, ні в вертикальному, ні в обертовому напрямках. Це умовно можна зобразити у вигляді трьох зв'язків, перешкоджаючим цим зміщенням (б).

Якщо відкинути зв'язок 1 (або 2), то з'явиться можливість взаємного повороту частин A і B на кут θ (в). Щоб його ліквідувати, або не допустити, треба прикласти два моменти M (з). При

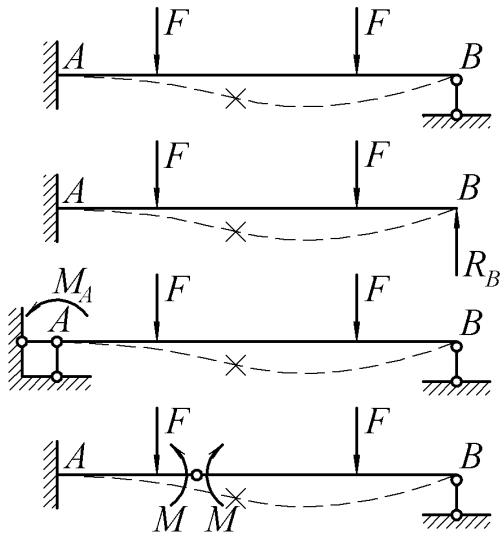


Рис. 2.10. Приклади вибору зайвого зв'язку.

усуненні зв'язку 3 з'явиться можливість взаємного вертикального зміщення - зсуву Δ (δ), і для відтворення початкового стану (a) необхідно прикласти дві рівні і протилежно направлені поперечні сили Q (e).

Таким чином, маючи на увазі вище сказане, зайвими можна вважати як зовнішні, так і внутрішні зв'язки. Наприклад, на рис. 2.10 зображена один раз статично невизначна балка і три варіанти мож-

ливого вибору зайвого зв'язку. Там же показано, який силовий фактор відповідає відкинутому зв'язку. У випадку (b) реакція R_B повинна виконати роль опори B , тобто бути такою, щоб прогин правого кінця; балки (b) був відсутній; у випадку (c) M_A повинен утримувати від повороту переріз A . Це були два зайві зовнішні зв'язки. У випадку (d) усунено внутрішній зв'язок, аналогічний рис. 2.9, e . Отже "врізаний" нами шарнір дав можливість двом сусіднім перерізам у місці розрізу обертатись один відносно другого. Тому, щоб забезпечити паралельність цих перерізів (відсутність взаємного кута повороту), треба прикласти два рівні і протилежно направлені згинальні моменти M (d).

Як уже говорилося, для знаходження внутрішніх зусиль в статично невизначній системі одних лише рівнянь статички не досить. Потрібні якісь додаткові рівняння. Кількість цих рівнянь визначається ступенем статичної невизначеності системи. Ступінь статичної невизначеності співпадає з числом зайвих зв'язків.

У найпростіших випадках кількість (s) зайвих зв'язків можна визначити як різницю між кількістю невідомих сил (n) і кількістю рівнянь статички (m),

$$s = n - m \quad (2.10)$$

Наприклад, на рис. 2.11 зображена балка, яка має п'ять зовнішніх зв'язків і, природно, п'ять невідомих реакцій опор (R_A, R_B, R_C, H_C, M_C). Незалежних же рівнянь статички для плоскої системи сил можна скласти три ($\sum F_x = 0; \sum F_y = 0; \sum M_C = 0$).

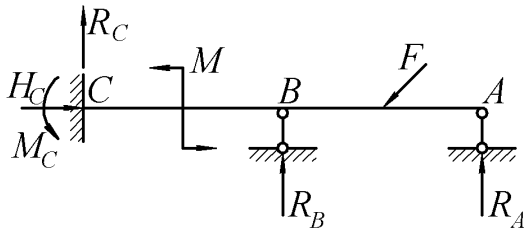


Рис. 2.11. Приклад статично невизначеної балки

Отже, $n = 5$, $m = 3$ і $s = 5 - 3 = 2$ – система двічі статично невизначена.

Для більш складних плоских систем ступінь статичної невизначеності розраховується за універсальною формулою

$$s = 3K - III,$$

де K – кількість замкнутих контурів у системі; III – кількість простих (одичних) шарнірів. При цьому контури беруться найменші, тобто ті, що не вміщують у собі менших контурів. Простим шарніром вважається шарнірне з'єднання двох твердих тіл; у складному шарнірів простих налічується на один менше, чим з'єднаних в ньому тіл.

На рис. 2.12 римськими цифрами позначені замкнуті контури ($K = 5$), арабськими – кількість простих шарнірів у кожному шарнірному з'єднанні ($III = 10$). Звертаємо увагу, що у вузлі A з'єднано чотири стержні, тому там $III_A = 3$, а у вузлі B з'єднано шарнірно лише два тіла і $III_B = 1$. Аналогічно у вузлах D

($Ш_D = 1$) і C ($Ш_C = 1$). Таким чином, $s = 3 \cdot 5 - 10 = 5$ – рама п'ять раз статично невизначна.

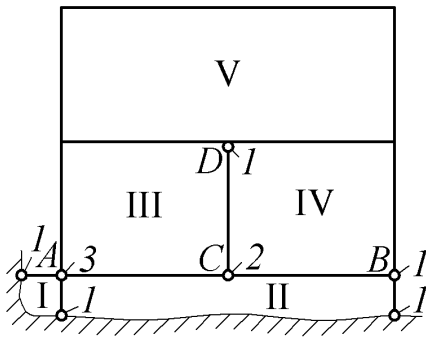


Рис. 2.12. Складна статично невизначена рама

Наведений вище приклад (рис.2.12) підказує нам ще один факт: на раму накладено три зовнішні зв'язки, реакції яких можна визначити, розглядаючи рівновагу рами в цілому. Отже, відносно реакцій опор система статично визначна. Але після розрахунку цих реакцій внутрішні зусилля в елементах рами ми все-таки визначити не зможемо. Таким чином, сте-

ржньові системи можуть бути як зовнішньо, так і внутрішньо статично невизначні.

Ми вже говорили про необхідність доповнення системи рівнянь статички s додатковими рівняннями. Для складання цих рівнянь відходять від позицій абсолютно твердого тіла і розглядають деформований стан стержньової системи. Це вже задача механіки деформованого тіла. Очевидно, що ці додаткові рівняння разом з рівняннями статички утворять замкнуту алгебраїчну систему $n = s + m$ (див.(2.10)) рівнянь, розв'язками якої визначаються всі (n) невідомі силові фактори.

2.3. РОЗКРИТТЯ СТАТИЧНОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПОРІВНЯННЯ ДЕФОРМАЦІЙ

Існує декілька загальних методів розкриття статичної невизначеності стержньових систем. Це методи: сил, переміщень та змішаний. Ними користуються при розрахунках складних, багато

раз статично невизначних систем. При цьому широке застосування знаходить сучасна обчислювальна техніка з відповідним програмним забезпеченням.

Але, для розрахунку один-два рази статично невизначних конструкцій нерідко застосовують простіші методи, найбільш поширеним із яких є метод порівняння деформацій (метод Релея), відомий з опору матеріалів, де головним чином, розглядалось силове навантаження стержнєвої системи. Ми ж тут будемо акцентувати головну увагу на дії температурного фактора.

Суть метода полягає в порівнянні температурних переміщень системи, звільненої від зайвих зв'язків, з відповідними переміщеннями, викликаними реакціями цих зв'язків. Детальне застосування цього методу покажемо на декількох прикладах.

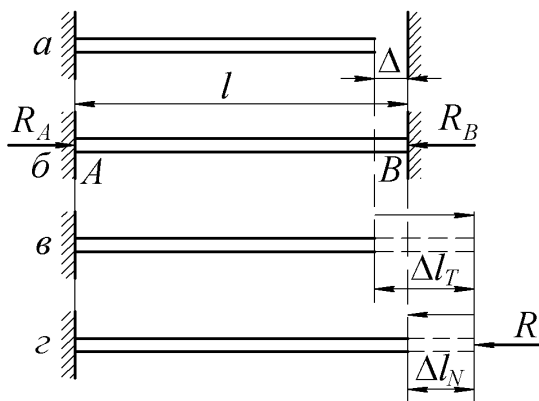


Рис. 2.13. До прикладу 2.2

Приклад 2.2. Розглянемо стержень (рис. 2.13, *a*), закріплений одним кінцем (A) і маючий обмежену рухомість на другому (B).

Якщо підняти температуру на величину T °C, то зазору Δ_0 може не вистачити для вільного температурного подовження стержня, і правий його кінець упреться у жорстку стінку B .

З боку стінок з'являться опорні реакції (\bar{b}), які викличуть у стержні внутрішні стискуючі зусилля N .

Складаючи єдино можливе для даного випадку рівняння статички

$$\sum F_x = R_A - R_B = 0, \quad (2.11)$$

бачимо, що система один раз статично невизначна, так як невідомих (n) дві, а рівнянь (m) одне ($s = n - m = 2 - 1 = 1$). Із (2.11) маємо $R_A = R_B = R$.

Якби опорної стінки B не було, то стержень цілком вільно видовжився б на величину Δl_T (ϵ), і щоб такий стержень вставити в прольоті AB , його необхідно було б стиснути силою K на величину Δl_N (ϵ). При цьому очевидно, що

$$\Delta l_N = \Delta l_T - \Delta_0. \quad (2.12)$$

Вираз (2.12) і є тим додатковим рівнянням, яке дозволяє розв'язати поставлену задачу. Застосувавши відповідні закони фізики (закони Гука та лінійного температурного розширення), рівнянню (2.12) надамо наступну форму:

$$\frac{Rl}{EA} = \alpha_T l T - \Delta_0,$$

звідки знаходимо невідому реакцію

$$R = EA \left(\alpha_T T - \frac{\Delta_0}{l} \right)$$

і температурні напруження від зусилля $N = -R$

$$\sigma = \frac{N}{A} = -E \left(\alpha_T T - \frac{\Delta_0}{l} \right). \quad (2.13)$$

Як бачимо, в даному випадку це напруження не залежить від розмірів поперечного перерізу стержня і буде тим більшим, чим меншим буде зазор Δ_0 . Якщо $\Delta_0 = 0$, то

$$\sigma = -\alpha_T E T.$$

Нагадаємо, що T – це різниця між даною та початковою температурами стержня. І якщо стержень нагрівався, тобто різниця $T > 0$, то температурні напруження будуть стискую-

чи, якщо ж стержень охолоджувався ($T < 0$) – то напруження розтягуючи.

Формула (2.13) підказує один із можливих шляхів зменшення температурних напружень. Для цього в конструкції треба передбачити компенсаційні зазори Δ_0 . Якщо (для даного випадку) $\Delta_0 \geq \alpha_T l T$, то температурні напруження будуть взагалі відсутні.

Приклад 2.3. Визначити температурні напруження, що виникнуть у стержнях конструкції, зображеної на рис. 2.14 якщо температуру середнього стержня підвищити на T^0 С.

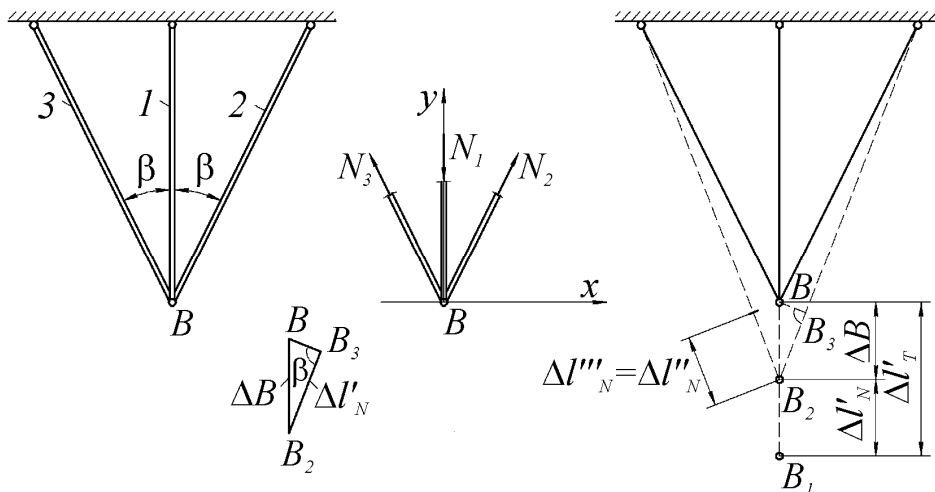


Рис. 2.14. До прикладу 2.3.

Очевидно, що стержні 2 і 3 перешкоджають вільному розширенню стержня 1. Отже в стержнях 2, 3 виникнуть розтягуючи, а в стержні 1 – стискуючи зусилля. Вирізуючи вузол B і розглядаючи умови його рівноваги, маємо два рівняння статки

$$\begin{aligned} \sum F_x &= N_2 \sin \beta - N_3 \sin \beta = 0; \\ \sum F_y &= N_2 \cos \beta - N_3 \cos \beta - N_1 = 0; \end{aligned} \quad (2.14)$$

утримуючі три невідомі зусилля (N_1, N_2, N_3) . Отже система один раз $(s = 3 - 2 = 1)$ статично невизначена.

Розглянемо деформований стан конструкції. Відокремимо від вузла B нижній кінець стержня 1 . У такому разі він вільно видовжиться на величину $\Delta l'_T$, відповідаючи його температурі T . Якщо тепер силовим шляхом з'єднати всі стержні в шарнірі B , то він займе положення B_2 (б). При цьому стержні 2 і 3 стануть довшими на $\Delta l''_{N_3} = \Delta l'''_{N_3}$.

З рис. 2.14, б видно, що зміщення вузла B можна, з одного боку, визначити як різницю $\Delta_B = \Delta l'_T - \Delta l'_{N_1}$, а з іншого боку – як гіпотенузу трикутника BB_2B_3 : $\Delta_B = \Delta l''_{N_2} / \cos \beta$. Прирівнюючи праві частини цих виразів, маємо

$$\frac{\Delta l''_{N_2}}{\cos \beta} = \Delta l'_T - \Delta l'_{N_1}$$

або після використання фізичних законів Гука та лінійного температурного розширення,

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2 \cos \beta} = \alpha_{1T} l_1 T - \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}$$

Враховуючи те, що $l_2 = l_1 / \cos \beta$, та вводячи позначення коефіцієнтів жорсткостей стержнів $K_1 = E_1 A_1$ і $K_2 = E_2 A_2 \cos^2 \beta$, разом (2.14) маємо систему двох рівнянь

$$N_2 + \frac{K_2}{K_1} N_1 = K_2 \alpha_{1T} T;$$

$$2N_2 \cos \beta - N = 0.$$

Розв'язуючи її, знаходимо зусилля

$$N_1 = \frac{2K_2 \alpha_{1T} T \cos \beta}{1 + 2 \cos \beta K_2 / K_1}; \quad N_2 = \frac{K_2 \alpha_{1T} T}{1 + 2 \cos \beta K_2 / K_1},$$

а з ними і температурні напруження $\sigma_1 = -N_1/A_1$;

$\sigma_2 = \sigma_3 = N_2/A_2$:

$$\sigma_1 = -\frac{2K_2\alpha_{1T}T \cos \beta}{(1 + 2\cos \beta \cdot K_2/K_1)A_1}; \quad \sigma_2 = -\frac{K_2\alpha_{1T}T}{(1 + 2\cos \beta \cdot K_2/K_1)A_2}.$$

Ці вирази наглядно показують, як впливають ті чи інші параметри на величину температурних напружень.

Для прикладу простежимо вплив жорсткості бокових стержнів на напруження σ_1 в середньому. Якщо $K_2 = 0$, то напруження відсутні, що і повинно бути, так як нема перепон для вільного розширення стержня. Умова $K_2 = 0$ може бути у трьох випадках: 1) $E_2 \approx 0$ – стержень дуже еластичний; 2) $A_2 \approx 0$ – площа перерізу бокових стержнів незрівнянно менша першого; 3) $\cos \beta = 0$ – кут нахилу $\beta \cong 90^\circ$; у такому положенні стержні 2 і 3 не будуть перешкоджати температурному подовженню стержня 1.

Цей аналіз показує, що зменшення температурних напружень в конструкції можна досягти шляхом введення не лише компенсаційних зазорів, а й легко податливих елементів.

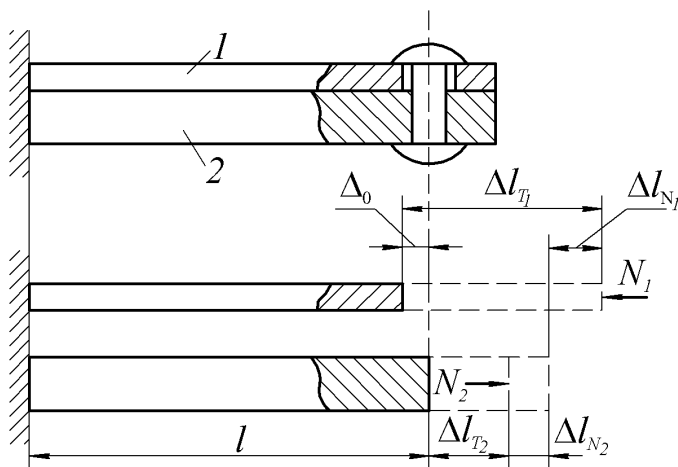


Рис. 2.15. До прикладу 2.4.

Приклад 2.4. Розглянемо дві штаби, з'єднані на кінцях болтом, як показано на рис. 2.15, а. При різній зміні їх температур штаби спочатку будуть вільно подовжуватись, доки не зникне зазор Δ_0 . Після цього, в наслідок різниці в характеристиках

(відповідно $\alpha_{1T}, E_1, A_1, T_1$ і $\alpha_{2T}, E_2, A_2, T_2$), почнеться їх взаємодія, що призведе до появи поздовжніх зусиль, деформацій та напружень. Якщо штаби звільнити від з'єднання, то під дії температур вони вільно видовжаться відповідно на величини $\Delta l_{T1} = \alpha_{1T} l T_1$ та $\Delta l_{T2} = \alpha_{2T} l T_2$. І щоб з'єднати їх знову в одне ціле, треба прикласти відповідні сили N_1 і N_2 .

З єдиного рівняння статички $N_1 - N_2 = 0$ знаходимо $N_1 = N_2 = N$. Залишилося одне невідоме зусилля N ($n=1$), а не використаних рівнянь вже немає ($m=0$): система один раз статично невизначна.

Додаткове рівняння легко записати з рис. 2.15, б:

$$\Delta l_{T1} - \Delta l_{N1} - \Delta = \Delta l_{T2} - \Delta l_{N2},$$

або

$$N \left(\frac{1}{E_1 A_1} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) = \alpha_{1T} l T_1 - \alpha_{2T} l T_2 - \Delta_0,$$

звідки одержуємо

$$N = K \alpha_{1T} E_1 T_1 A_1,$$

де введено позначення безрозмірної величини [6]

$$K = \frac{1 - \alpha_{2T} T_2 / (\alpha_{1T} T_1) - \Delta_0 / (\alpha_{1T} l T_1)}{1 - E_{2T} A_2 / (E_1 A_1)}. \quad (2.15)$$

Таким чином знаходимо температурні напруження

$$\sigma_1 = -\frac{N}{A_1} = -K \alpha_{1T} E_1 T_1; \quad \sigma_2 = \frac{N}{A_2} = -\frac{A_1}{A_2} \sigma_1. \quad (2.16)$$

Якщо $K > 0$, то $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 0$; якщо ж $K < 0$ – $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 < 0$.

З формул (2.15) і (2.16) видно, що наявність зазору Δ_0 зменшує величину коефіцієнта K , а разом з цим і напружень σ_1 , σ_2 .

Щоб визначити найменшу величину $\bar{\Delta}_0$, при якій не буде напружень, покладемо $K = 0$, звідки маємо[6]

$$\bar{\Delta}_0 = l(\alpha_{1T}T_1 - \alpha_{2T}T_2).$$

Отже, величина зазору $\bar{\Delta}_0$, при якій температурні напруження будуть відсутні, залежить від довжини штаб.

Якщо, наприклад, $\alpha_{T_1} = 1,6 \cdot 10^{-5} K^{-1}$; $T_1 = 50^\circ C$; $\alpha_{T_2} = 1,2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$; $T_2 = 20^\circ C$, то $\bar{\Delta}_0 = 0,56 \cdot 10^{-3}$ і при $l = 100$ мм, $\bar{\Delta}_0 = 0,56$ мм, а при $l = 5000$ мм, $\bar{\Delta}_0 = 2,8$ мм. Цей типовий приклад показує, що при малих довжинах навіть незначні зазори у з'єднанні зводять температурні напруження практично до нуля. Але при значній довжині з'єднаних елементів реальні зазори майже не впливають на величину температурних напружень.

Для штаб з однакового матеріалу ($\alpha_{1T} = \alpha_{2T} = \alpha_T$; $E_1 = E_2 = E$) із (2.15), (2.16) одержуємо

$$\sigma_1 = -\frac{\alpha_T E (T_1 - T_2) - E \Delta_0 / l}{1 + A_2 / A_1}; \quad \sigma_2 = -\frac{A_1}{A_2} \sigma_1.$$

Приклад 2.5. Тепер візьмемо приклад на згин. На рис. 2.16, а зображена консоль AB , підперта додатковою опорою B і нерівномірно підігріта на температури поверхонь T_1 та $T_2 > T_1$. Очевидно, що ця система один раз статично невизначна. Якщо опору B визнати як зайву й відкинути, то під дією температури балка викривиться (б).

Знайдемо температурні переміщення перерізу B вільної балки (б). Згідно § 2.1

$$\begin{aligned} y_{BT} &= \frac{\alpha_T T'}{h} \bar{\omega}_1 = \frac{\alpha_T T l^2}{2h}; \\ \theta_{BT} &= \frac{\alpha_T T'}{h} \bar{\omega}_2 = \frac{\alpha_T T l}{h}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

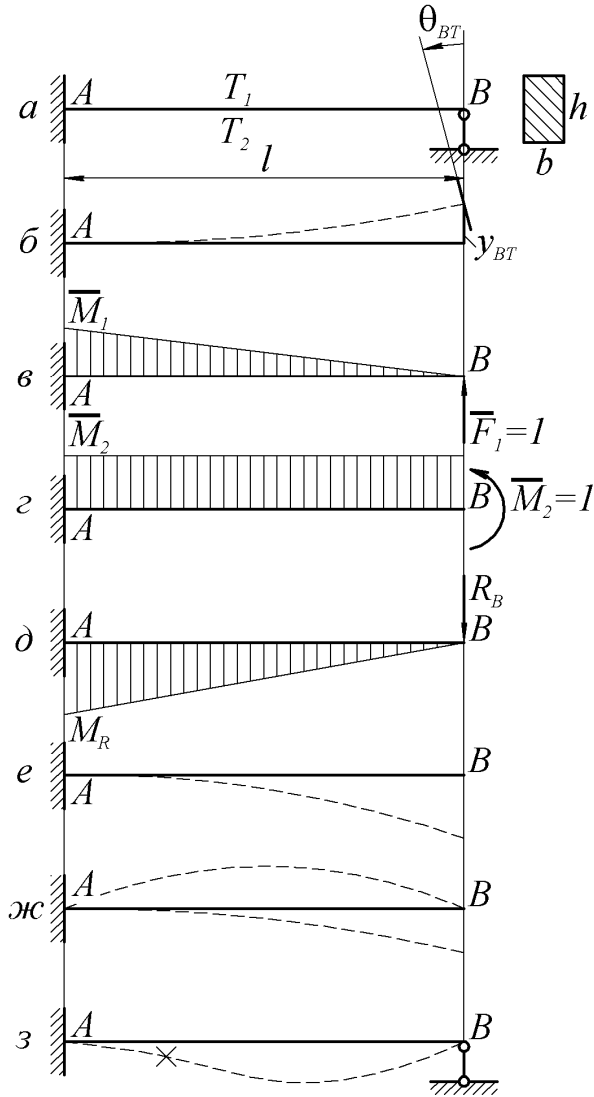


Рис. 2.16. До прикладу 2.5.

Тепер прикладемо поки що невідому реакцію $R_B(g)$ відкинутого зв'язку. Із опору матеріалів відомо [123]

$$y_{BR} = -\frac{R_B l^3}{3EJ}; \quad (2.18)$$

$$\theta_{BR} = -\frac{R_B l^2}{2EJ},$$

де знаки “мінус” говорять про те, що напрямки переміщень (2.18) (д) і (2.17) (б) відповідно протилежні. Так опора B виключає можливість вертикального переміщення правого кінця балки, то за абсолютною величиною прогин y_{BT} ввєрх повинен дорівнювати прогину y_{BR} вниз:

$$|y_{BR}| = |y_{BT}|.$$

Підставляючи відповідні переміщення, знаходимо

$$R_B = \frac{3\alpha_T EJT'}{2lh} \quad (2.19)$$

Епюра - (e) згинальних моментів M_R від дії цієї сили побудована з боку стиснутих волокон балки. Якщо крім R_B інших зовнішніх сил немає, то, згідно епюрі M_R , зігнута вісь балки повинна прийняти форму 1, або 2 (e). Однак, за характером закріплення обидва, ці варіанти зігнутої осі неможли-

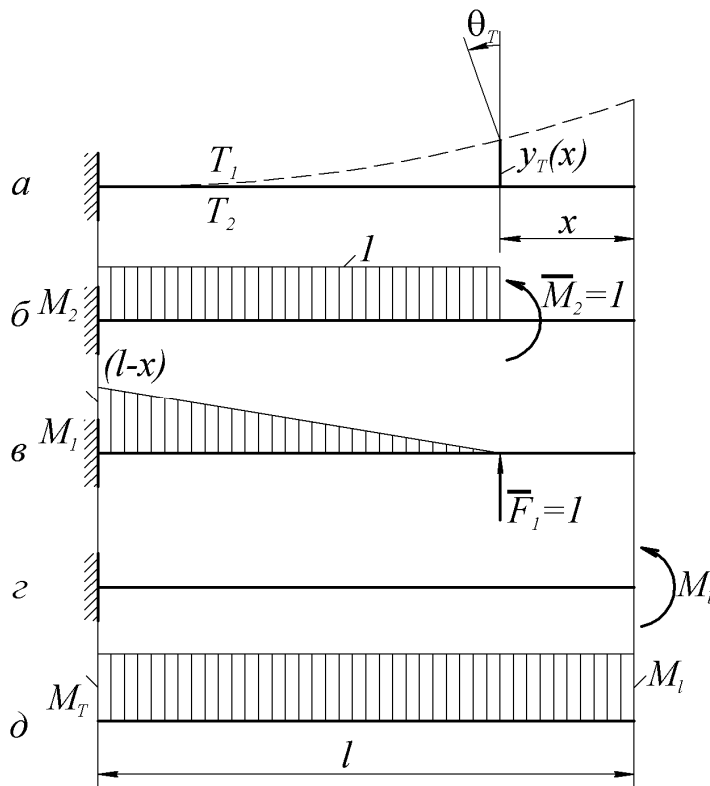


Рис. 2.17. Визначення температурних переміщень в балках

ві, так як у випадку 1 повинен бути $\theta_A = 0$, а у випадку 2 – $y_B = 0$. Крім цього, обидва варіанти (e) передбачають поворот перерізу B за годинниковою стрілкою, а насправді він протилежний, що очевидно з формул (2.17) та (2.18) з урахуванням (2.19):

$$\begin{aligned} \theta_B &= \theta_{BT} - \theta_{BR} = \\ &= \frac{\alpha_T T l}{h} - \frac{R_B l^2}{2EJ} = \frac{\alpha_T T l}{4h}. \end{aligned}$$

При умовах закріплення балки (a) вигнута вісь повинна мати точку O перегину (ж), згідно якій кривизна пружної лінії на ділянці OB буде позитивна, а на ділянці OA – негативна. Звідси впливає двозначність і епюри згинальних моментів, що може бути лише при наявності силових факторів протилежної дії.

Знайдемо вертикальне $y_T(x)$ та кутове $\theta_T(x)$ переміщення довільного перерізу x від дії температури (рис. 2.17). Згідно § 2.1 прикладаємо по чергово відповідні одиничні “силу” $\bar{F}_1 = 1$ та “момент” $\bar{M}_2 = 1$ і, користуючись формулою (2.9), маємо

$$\begin{aligned} y_T(x) &= \frac{\alpha_T T'}{h} \frac{(l-x)^2}{2}; \\ \theta_T(x) &= \frac{\alpha_T T'}{h} (l-x). \end{aligned} \quad (2.20)$$

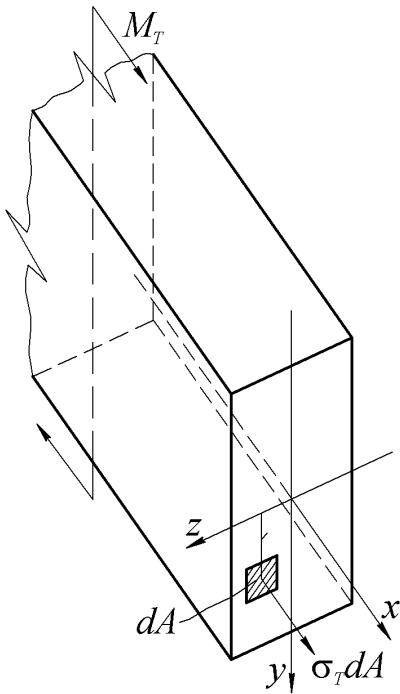


Рис. 2.18. Визначення температурних напружень в балках

Цьому моментові відповідає еюра (ε), яка говорить про те, що у кожному перерізі балки діють згинальні (внутрішні) моменти. Поява цих моментів зумовлена тією частиною σ'_T напружень σ_T , яка відповідає температурні T' і викликає поворот перерізу балки навколо нейтральної осі z (рис. 2.18).

Так як відносна поздовжня деформація – це відношення абсолютної деформації до по-

з опору матеріалів відомо, що за такими законами змінюються функції $y(x)$ та $\theta(x)$ при наявності на кінці B балки (a) зосередженого моменту M :

$$y_M(x) = \frac{(l-x)^2}{2EJ}; \quad (2.21)$$

$$\theta_M(x) = \frac{M(l-x)}{EJ}.$$

Порівнюючи відповідні вирази (2.26) та (2.21), встановлюємо, що форми вгнутих осей від дії температури T' та моменту M повністю співпадуть, якщо прикласти еквівалентний момент (ε)

$$M_e = \frac{\alpha_T T' EJ}{h}. \quad (2.22)$$

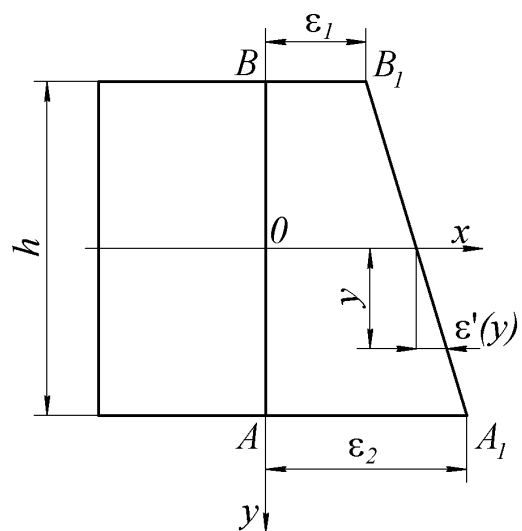


Рис. 2.19. Визначення температурних деформацій і напружень

чаткової довжини волокна ($\varepsilon = \Delta l/l$), згідно рис. 2.3 та 2.19,

$$\varepsilon'_T = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{h} y, \text{ де } \varepsilon_1 = \alpha_T T_1; \varepsilon_2 = \alpha_T T_2; -h/2 \leq y \leq h/2.$$

За відомим законом Гука ($\sigma = E\varepsilon$) знаходимо

$$\sigma'_T(y) = E\varepsilon'(y) = E\alpha_T T' y/h.$$

Ці напруження інтегрально і створюють у довільному перерізі стержня згинальний момент M_T :

$$\begin{aligned} M_T &= \int_{(A)} \sigma'_T(y) y dA = \\ &= \alpha_T E b \int_{-h/2}^{h/2} T' y^2 dy / h = \alpha_T E J \frac{T'}{h}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Отже, підтверджується наявність згинальних моментів, які визначаються за формулою (2.23) і відповідають еквівалентному зовнішньому моменту M_B (2.22).

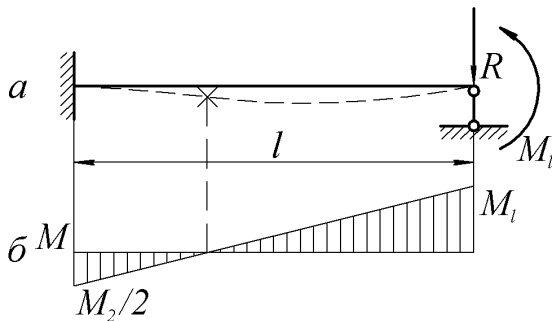


Рис. 2.20. Силове навантаження еквівалентне дії температури

Таким чином, розрахунок стержньової системи на дію температури можна замінити розрахунком на відповідне (еквівалентне) силове навантаження. Для нашого прикладу це еквівалентне навантаження виглядає так, як показано на рис. 2.20 (а). Тепер вже пружна лінія балки та епюра згинальних моментів (б) повністю відповідають одна одній. Після цього температурні напруження визначаються за відомою із опору матеріалів формулою

$$\sigma_T = \frac{M(x)}{J_z} y = \frac{M_B - R_B x}{J_z} y, \quad (2.24)$$

яка, з урахуванням (2.19), (2.22), має вигляд

$$\sigma_T = \frac{\alpha_T ET'}{h} \left(1 - \frac{3x}{2l} \right) y;$$

$$\sigma_T^{\max} = \sigma_T \Big|_{\substack{x=0 \\ y=h/2}} = \frac{\alpha_T ET'}{2}.$$

Приклад 2.6. На

закінчення розглянемо “ламаний” стержень, зображений на рис. 2.21, температура зовнішніх сторін якого підвищена на T_1 а внутрішніх – на $T_2 > T_1$. Так як замкнута контурів $K=1$, а $III=2$, то $s=3K-III=3 \cdot 1-2=1$ – система один раз статично не визначена.

Звільнимо стержень від опорного зв'язку B . Маючи можливість вільно реагувати на зміну температури, він прийме форму, зображену штриховою лінією (б).

Для визначення вертикального Δ_{BT} та кутового θ_{BT} переміщень перерізу B по чергово прикладемо

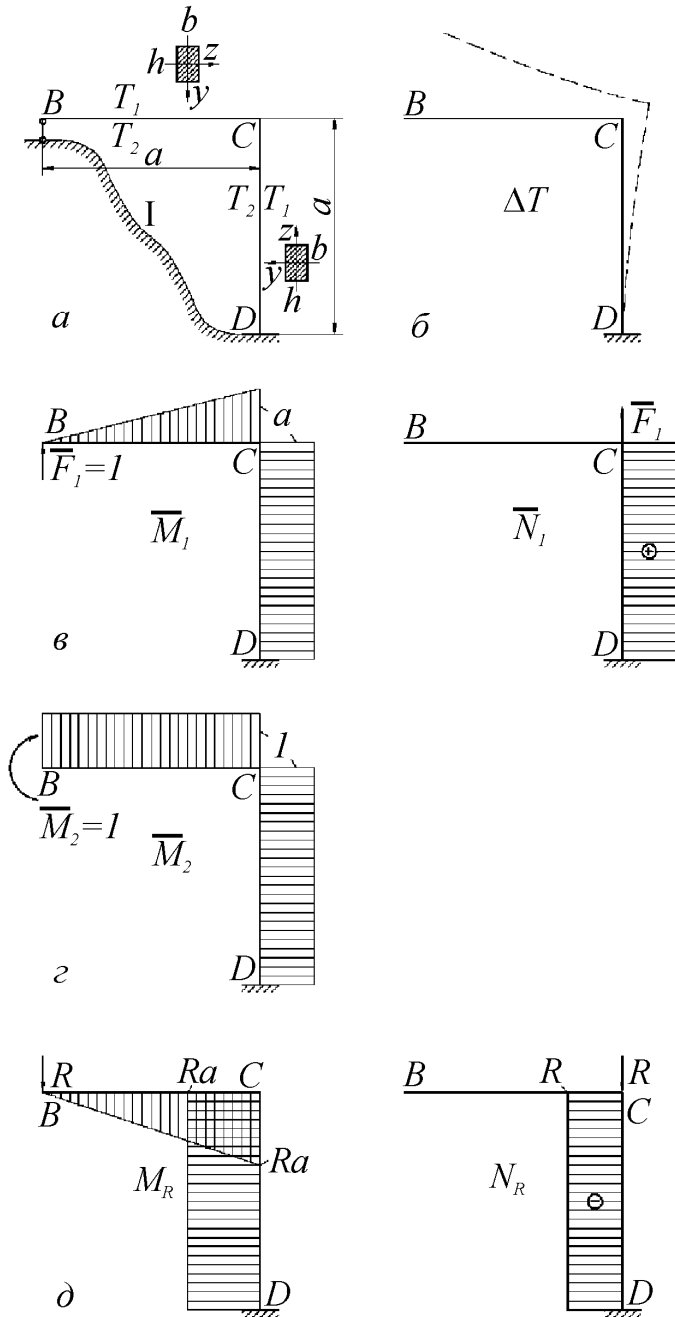


Рис. 2.21. До прикладу 2.6.

відповідні одиничні “силу” $\bar{F}_1 = 1$ та “момент” $\bar{M}_2 = 1$ і побудуємо відповідні епюри (б), (з). Тоді, згідно (2.9),

$$\Delta_{BT} = \alpha_T T \omega_1(\bar{N}_i) + \frac{\alpha_T T' \omega_i(\bar{M}_i)}{h} = \alpha_T T a \left(1 + \frac{3T'a}{2Th} \right); \quad (2.25)$$

$$\theta_{BT} = \frac{\alpha_T T' \omega_2(\bar{M}_2)}{h} = \frac{2\alpha_T T'a}{h}. \quad (2.26)$$

З другого боку, реакція R у зворотному напрямку викличе прогин Δ_{BR} та кут повороту θ_{BR} , які дорівнюють добуткам епюр N_R , M_R (б) та N_1 , M_1 (в) і M_R та \bar{M}_2 (з) [27]

$$\Delta_{BR} = - \left(\frac{Ra^3}{3EJ} + \frac{Ra^3}{EJ} + \frac{Ra}{EA} \right) = - \frac{4Ra^3}{3EJ} \left(1 + \frac{3i^2}{4a^2} \right); \quad (2.27)$$

$$\theta_{BR} = - \left(\frac{Ra^2}{2EJ} + \frac{Ra^2}{EJ} \right) = - \frac{3Ra^2}{2EJ},$$

де $i = \sqrt{J/A}$ – радіус інерції перерізу стержня.

Наявність опори B забезпечує відсутність вертикального переміщення перерізу B , тобто

$$\Delta_B = \Delta_{BT} + \Delta_{BR} = 0.$$

Підставляючи сюди значення (2.25) та (2.27) заходимо невідому реакцію

$$R = \frac{9\alpha_T ET'J}{8ah} K, \quad (2.28)$$

де

$$K = \frac{1 + \frac{2Th}{3T'a}}{1 + \frac{3i^2}{4a^2}}. \quad (2.29)$$

Аналізуючи вплив опори B на дію температури, бачимо, що зв'язок B чинить перешкоду: повністю-переміщенню перерізу B і частково-кутовому переміщенню цього ж перерізу та вертикальному переміщенню вузла C . Таким чином,

якщо підібрати еквівалентні момент M_B і силу F_B (рис. 2.22), то розрахунок системи на температуру можна замінити розрахунком на відповідне силове навантаження.

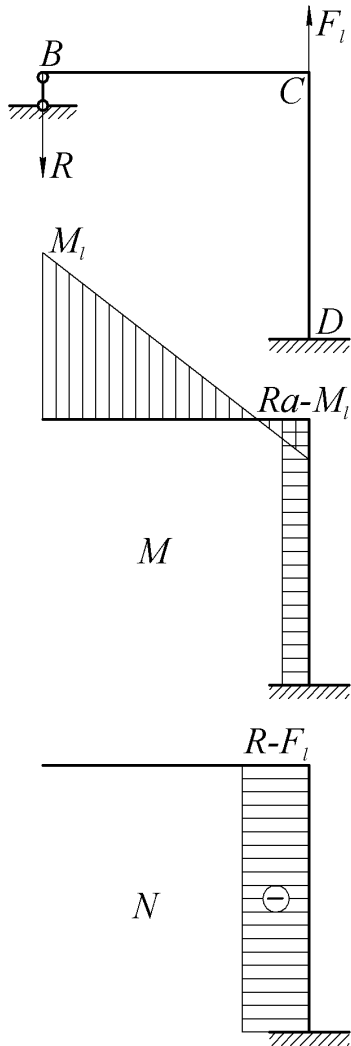


Рис. 2.22. Силове навантаження еквівалентне дії температури.

Кутове переміщення θ_{BM} вузла B від дії моменту M_B і вертикальне переміщення Δ_{CF} сили F_B визначаються за формулами [27]

$$\theta_{BM} = \frac{2M_B a}{EJ}; \quad (2.30)$$

$$\Delta_{CF} = \frac{F_B a}{EA}.$$

Аналогічні температурні переміщення мають вигляд (2.26) та

$$\Delta_{CT} = \alpha_T T a \quad (2.31)$$

Порівнюючи (2.26), (2.31) та (2.30), знаходимо еквівалентне навантаження

$$M_B = \alpha_T T' EJ/h; \quad (2.32)$$

$$F_B = \alpha_T EAT.$$

Тепер вже температурні напруження можна визначити за звичайними формулами опору матеріалів: у ригелі – (2.24), у стійці –

$$\sigma_T = \frac{M_B - R}{J} y - \frac{R - F_B}{A}, \quad (2.33)$$

де M_B , F_B (2.32), R (2.28), (2.29). Враховуючи ці вирази, маємо: у ригелі IJ

$$\sigma_T(x, y) = \frac{\alpha_T ET'}{h} \left(1 - \frac{9}{8} K \frac{x}{a} \right) y; \quad (2.34)$$

у стійці

$$\sigma_T(y) = \alpha_T ET' \left[\left(1 - \frac{9}{8} K \right) \frac{y}{h} + \left(1 - \frac{9}{8} K \frac{T' i^2}{T ah} \right) \frac{T}{T'} \right].$$

Максимальне напруження визначається за формулою (2.34) при $x = 0$; $y = h/2$:

$$\sigma_T^{\max} = \frac{\alpha_T ET'}{2}.$$

2.4. МЕТОД СИЛ

Як ми вже говорили, у будівельній механіці існує три загальні методи розкриття статичної невизначеності стержньових систем. При цьому у методі сил за зайві невідомі вважаються сили, відповідні відкинутим зв'язкам; у методі переміщень за невідомі беруться переміщення вузлів системи; у змішаному методі – частково сили, а частково переміщення.

Розглянемо найбільш поширений з цих методів – метод сил. Перш за все метод базується на використанні так званих основної та еквівалентної систем.

Основною системою зветься статично визначена стержньова система, яка одержують із заданої системи шляхом відкидання зайвих зв'язків. Підкреслимо що основна система залежить лише від конструкції і не залежить від навантаження.

Еквівалентна – це основна система, навантажена заданими зовнішніми деформуючими факторами (силами, зміщеннями опор, температурами) та зайвими невідомими X_i , що відповідають відкинутим зв'язкам. Еквівалентною вона зветься тому, що прикладені до неї зайві невідомі повинні бути такими, щоб її деформований стан був еквівалентним деформованому стану початкової системи. Це цілком зрозуміло ілюструється рис. 2.23, де

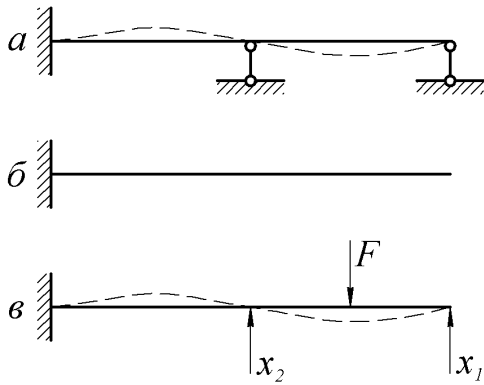


Рис. 2.23. Основна та еквівалентна системи для статично невизначеної балки

для двічі статично невизначної системи (а) показано один з варіантів основної (б) та еквівалентної (в) систем.

Зауважимо, що для будь-якої статично невизначної системи завжди існує безмежна кількість основних систем. Це впливає з §2.2, де розглядалась можливість за зайві брати внутрішні зв'язки в довільному перерізі.

При визначенні зайвих невідомих методом сил для основної стержньової системи записується так звана [27] система канонічних рівнянь методу сил (СКРМС)

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1s}X_s + \Delta_{1F} + \Delta_{1T} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2s}X_s + \Delta_{2F} + \Delta_{2T} &= 0; \\ \dots & \\ \delta_{s1}X_1 + \delta_{s2}X_2 + \dots + \delta_{ss}X_s + \Delta_{sF} + \Delta_{sT} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2.35)$$

де $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ – коефіцієнти, впливу (переміщення, яке відповідає “силі” $\bar{X}_i = \bar{1}$ викликане силою $\bar{X}_j = \bar{1}$); Δ_{iF} та Δ_{iT} – переміщення, відповідаючи силі $\bar{X}_i = \bar{1}$, а викликані заданими навантаженням $\{F\}$ і температурою T ; s – ступінь статичної незначності початкової системи, тобто кількість зайвих невідомих X_i ($i = 1, 2, \dots, s$).

Для визначення коефіцієнтів впливу δ_{ij} та вільних членів Δ_{iF} , Δ_{iT} , як правило, використовують метод Максвелла-Мора [див. (2.2), (2.7)]:

$$\begin{aligned}\delta_{ij} = \delta_{ji} &= \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{N}_i \bar{N}_j}{EA} dx + \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EJ} dx; \\ \Delta_{iF} &= \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{N}_i N_F}{EA} dx + \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \frac{\bar{M}_i M_F}{EA} dx; \\ \Delta_{iT} &= \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \alpha_T T \bar{N}_i dx + \sum_{k=1}^n \int_{(l_k)} \alpha_T \frac{T'}{h} \bar{M}_i dx.\end{aligned}$$

Якщо хоча б один із двох множників, що входять до підинтегральних функцій, змінюється за лінійним законом (в межах кожної ділянки), то для обчислення інтегралів Мора використовують відомий з опору матеріалів спосіб Верещагіна. Згідно йому величина інтеграла дорівнює добутку площі криволінійної епюри на ординату прямолінійної, взяту під центром ваги криволінійної [див. (2.9)]:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\omega}_{ik}(\bar{N}_i) \bar{Y}_k(\bar{N}_j)}{EA} + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\omega}_{ik}(\bar{M}_i) \bar{Y}_k(\bar{M}_j)}{EJ}; \quad (2.36)$$

$$\Delta_{iF} = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\omega}_{ik}(\bar{N}_i) \bar{Y}_k(N_F)}{EA} + \sum_{k=1}^n \frac{\bar{\omega}_{ik}(\bar{M}_i) \bar{Y}_k(M_F)}{EJ}; \quad (2.37)$$

$$\Delta_{iT} = \sum_{k=1}^n \alpha_T T_k \bar{\omega}_{ik}(\bar{N}_i) + \sum_{k=1}^n \alpha_T \frac{T'_k}{h} \bar{\omega}_{ik}(\bar{M}_i). \quad (2.38)$$

Вирази (2.36)...(2.38) записані для досить поширеного випадку, коли всі епюри (\bar{N}_i , N_F , \bar{M}_i , M_F) прямолінійні, а α_T , T і T' сталі вздовж кожної ділянки системи.

Для подальшого використання виразів (2.36) ... (2.38) слід нагадати відому з опору матеріалів універсальну формулу перемноження трапецієвидних епюр (рис. 2.24)

$$\{\omega_1 \times \omega_2\} = \frac{1}{6} (2ac + ad + bc + 2bd) = \frac{1}{6} \|\times\|. \quad (2.39)$$

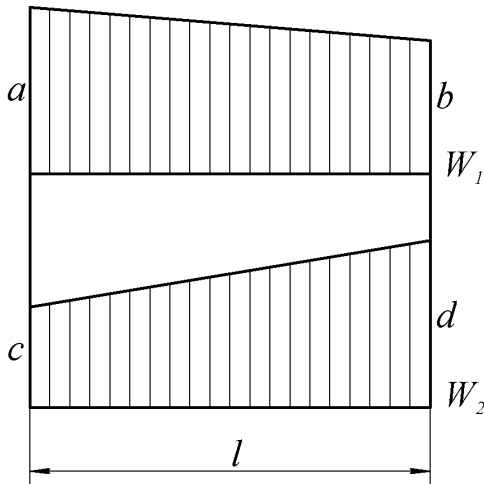


Рис. 2.24. "Перемноження" епюр за способом Верещагіна

Остання символічна позначка допомагає запам'ятати, що вираз у дужках складає суму подвоєних добутків тих сторін трапецій, які знаходяться на однакових боках, і одинарних добутків сторін, розташованих (навхрест) на протилежних боках.

При визначенні переміщень вираз (2.39) треба поділити: на поздовжню жорсткість EA , якщо w_1 і w_2 – епюри відповідних повздовжніх сил; на

згинальну жорсткість EJ , якщо w_1 та w_2 – епюри згинальних моментів; на α_T^{-1} – якщо епюра T ; і, нарешті, на $(\alpha_T/h)^{-1}$ – при температурі T' .

Послідовність розкриття статичної невизначеності стержневої системи методом сил проілюструємо на конкретному прикладі.

Приклад 2.7. Розглянемо раму, зображену на рис. 2.25, при наступних вихідних даних: $a = 2$ м; $l = 4$ м; $h = 0,2$ м; $b = 0,1$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К $^{-1}$; $T_1 = 10$ °С; $T_2 = 50$ °С; ширина перерізу ригеля $2b = 0,2$ м.

1. Визначаємо недостаючи розрахункові параметри:

$$T = \frac{10 + 50}{2} = 30 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$T' = 50 - 10 = 40 \text{ } ^\circ\text{C};$$

$$A_0 = 0,1 \cdot 0,2 = 0,02 \text{ м}^2;$$

$$J_0 = \frac{0,1 \cdot 0,2^3}{12} = \frac{2}{3} \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

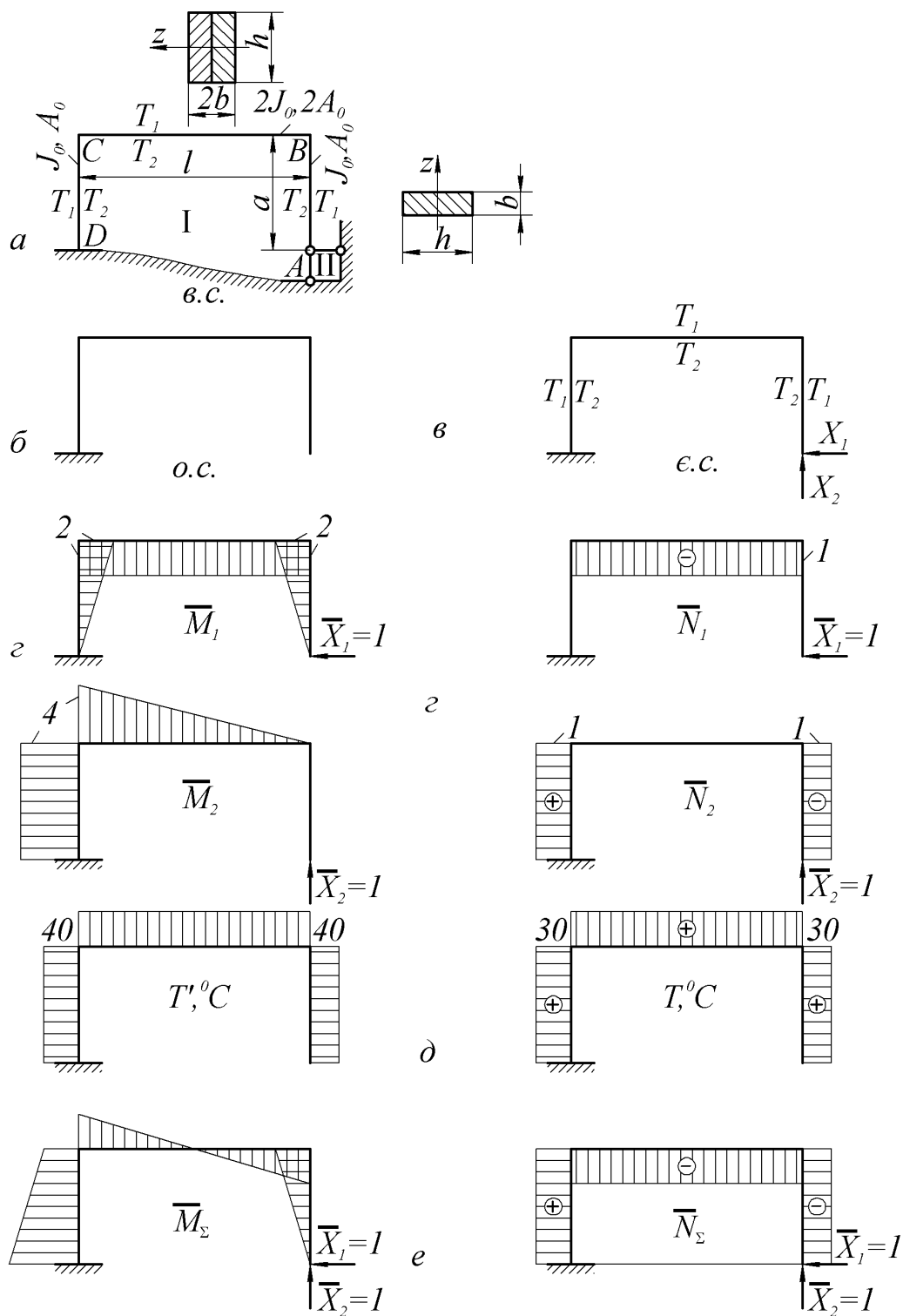


Рис. 2.25. Розрахунок статично невизначеної рами.

2. Знаходимо ступінь статичної невизначеності рами: $K = 2$; $III = 4$; $s = 3K - III = 3 \cdot 2 - 4 = 2$. Система два рази статично невизначена і СМРКС (2.35) має вигляд.

$$\left. \begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1T} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2T} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.40)$$

3. Вибираємо основну (δ) та еквівалентну (ϵ) системи і будуємо відповідні епюри \bar{M}_i , \bar{N}_i , T' , T (ϵ), (δ), а також сумарні \bar{N}_Σ та \bar{M}_Σ (ϵ) для подальшої перевірки коефіцієнтів δ_{ij} і вільних членів Δ_{iT} .

4. Визначаємо δ_{ij} та Δ_{iT} , користуючись формулами (2.36)...(2.39):

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{6EJ} \{\bar{M}_1 \times \bar{M}_1\} + \frac{1}{6EA} \{\bar{N}_1 \times \bar{N}_1\} = \\ &= \frac{4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 1}{6EA_0 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{6EJ_0} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2}{6EJ_0 \cdot 2} = \frac{2}{EA_0} + \frac{40}{3EJ_0}; \\ \delta_{22} &= \frac{1}{6EJ} \{\bar{M}_2 \times \bar{M}_2\} + \frac{1}{6EA} \{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2\} = \\ &= \frac{4 \cdot 6}{6EA_0} \cdot 2 + \frac{4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4}{6EJ_0 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4}{6EJ_0} = \frac{4}{EA_0} + \frac{128}{3EJ_0}; \\ \delta_{12} = \delta_{21} &= \frac{1}{6EJ} \{\bar{M}_1 \times \bar{M}_2\} = \\ &= \frac{4(2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4)}{6EA_0} + \frac{2(2 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4)}{6EJ_0} = -\frac{16}{EJ_0}; \\ \Delta_{1T} &= \frac{\alpha_T}{6h} \{\bar{M}_1 \times T'\} + \frac{\alpha_T}{6} \{\bar{N}_1 \times T\} = \\ &= \frac{-\alpha_T}{6 \cdot 0,2} [2(2 \cdot 240 + 2 \cdot 40)2 + 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 40] - \alpha_T \frac{4 \cdot 6 \cdot 30}{6} = -2520\alpha_T; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{2T} &= \frac{\alpha_T}{6h} \{\bar{M}_2 \times T'\} + \frac{\alpha_T}{6} \{\bar{N}_2 \times T\} = \\ &= \frac{\alpha_T}{6 \cdot 0,2} [4(2 \cdot 4 \cdot 40 + 4 \cdot 40) + 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 30] = -3200\alpha_T.\end{aligned}$$

5. Перевіряємо правильність одержаних результатів. Суть перевірки полягає в тому, що повинні виконуватись наступні рівняння:

$$\begin{aligned}\delta_{\Sigma\Sigma} &= \frac{1}{6EJ} \{\bar{M}_\Sigma \times \bar{M}_\Sigma\} + \frac{1}{6EA} \{\bar{N}_\Sigma \times \bar{N}_\Sigma\} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s \delta_{ij}; \\ \Delta_{\Sigma T} &= \frac{\alpha_T}{6h} \{\bar{M}_\Sigma \times T'\} + \frac{\alpha_T}{6} \{\bar{N}_\Sigma \times T\} = \sum_{i=1}^s \Delta_{iT}.\end{aligned}$$

Для цієї перевірки і були побудовані сумарні одиничні епюри \bar{M}_Σ та \bar{N}_Σ (e).

Розрахуємо:

$$\begin{aligned}\delta_{\Sigma\Sigma} &= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{6EJ_0} + \frac{4(2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2)}{12EJ_0} + \\ &+ \frac{2}{6EJ_0} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 4) + \\ &+ \frac{2 \cdot 6}{6EA_0} 2 + \frac{4 \cdot 6}{12EA_0} = \frac{24}{EJ_0} + \frac{6}{EA_0}; \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \delta_{ij} &= \frac{2}{EA_0} + \frac{40}{3EJ_0} - \frac{16}{EJ_0} \cdot 2 + \frac{4}{EJ_0} + \frac{128}{3EJ_0} = \frac{24}{EJ_0} + \frac{6}{EA_0} (!) \\ \Delta_{\Sigma T} &= \frac{\alpha_T}{6 \cdot 0,2} [-2(2 \cdot 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40) + 4(2 \cdot 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40 - \\ &- 2 \cdot 40 - 2 \cdot 2 \cdot 40) + 2(2 \cdot 2 \cdot 40 + 2 \cdot 40 + 4 \cdot 40 - 2 \cdot 4 \cdot 40)] + \\ &+ \frac{\alpha_T}{6} (-2 \cdot 6 - 4 \cdot 6 + 2 \cdot 6) 30 + 680\alpha_T; \\ \sum_{i=1}^2 \Delta_{iT} &= (-2520 + 3200)\alpha_T = 680\alpha_T (!)\end{aligned}$$

Впевнившись у правильності δ_{ij} та Δ_{iT} , розрахуємо їх остаточно:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \frac{2/0,02 + 40/(2 \cdot 10^{-4})}{2 \cdot 10^5} = 1,0005; \\ \delta_{22} &= \frac{4/0,02 + 128/(2 \cdot 10^{-4})}{2 \cdot 10^5} = 3,201; \\ \delta_{12} &= \frac{16/(2 \cdot 10^{-4})}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} = -1,2; \\ \Delta_{1T} &= -2520 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = -0,03024; \\ \Delta_{2T} &= 3200 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 0,0384.\end{aligned}\tag{2.41}$$

6. Підставляємо (2.41) у (2.40):

$$\left. \begin{aligned}1,0005X_1 - 1,2X_2 &= 0,03024 \\ 1,2X_1 - 3,201X_2 &= 0,0384\end{aligned} \right\}\tag{2.42}$$

Розв'язуючи систему (2.42), знаходимо

$$\begin{aligned}X_1 &= 2,8775 \cdot 10^{-2} \text{ МН} = 28,775 \text{ кН}; \\ X_2 &= -0,1209 \cdot 10^{-2} \text{ МН} = -1,209 \text{ кН}.\end{aligned}\tag{2.43}$$

7. Перевіряємо правильність одержаних результатів. Для цього підставляємо (2.43) в (2.42):

$$\begin{aligned}1,0005 \cdot 28,775 - 1,2(-1,209) - 0,03024 \cdot 10^3 &= 0(!) \\ 1,2 \cdot 28,775 - 3,201(-1,209) - 0,0384 \cdot 10^3 &= 0(!)\end{aligned}$$

Отже, рівняння (2.42) розв'язані вірно. Від'ємний знак зусилля X_2 (2.43) говорить про те, що напрямок цієї невідомої ми попередньо встановили невірно. В дійсності вона направлена вниз.

8. Обчислюємо згинальні моменти від дії сил (2.43) за формулою

$$M(x) = M_F(x) + \bar{M}_1(x) \cdot X_1 + \bar{M}_2(x) \cdot X_2.$$

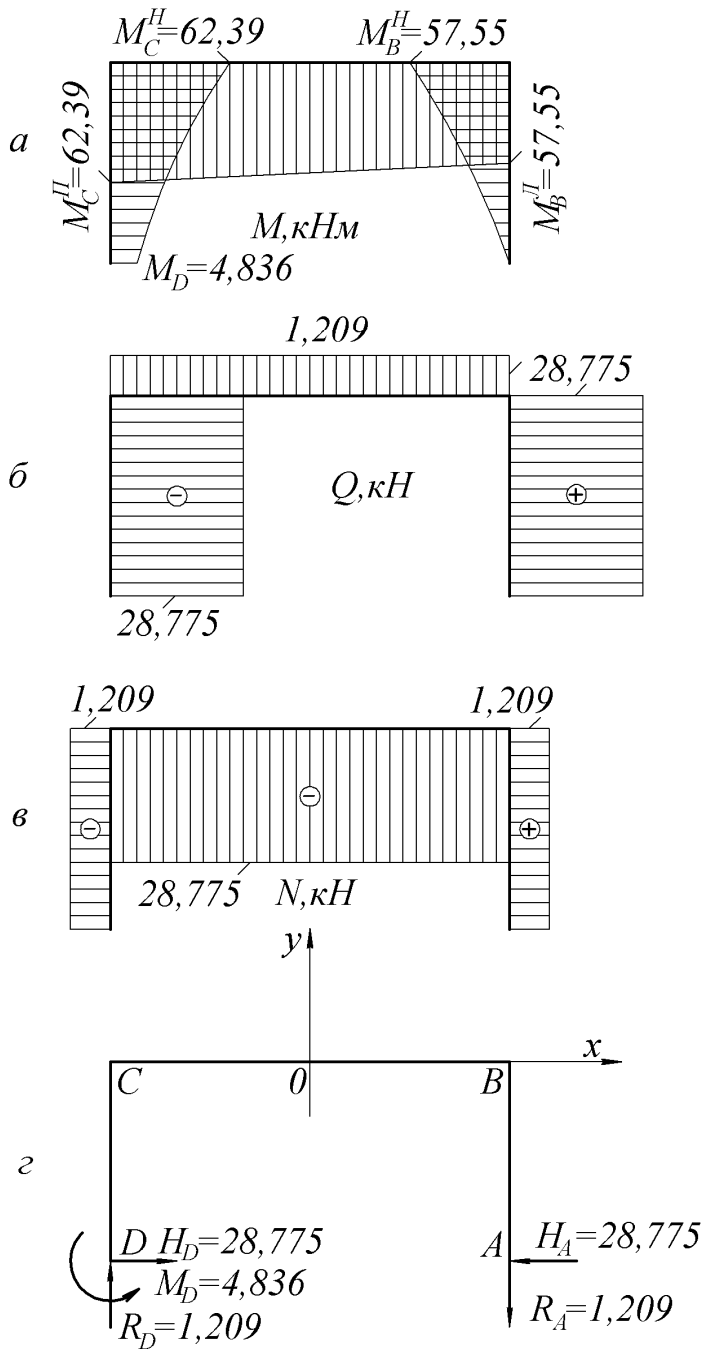


Рис. 2.26. Епюри внутрішніх зусиль.

Так як у нашому випадку зовнішнього силового навантаження нема, то $M_F(x) = 0$. Тоді, умовно приймаючи за позитивні – моменти, розміщені зверху ригеля і справа стійки, а за негативні – навпаки, маємо:

$$M_A = 0; \quad M_B^H = -2 \cdot 28,775 = -57,55 \text{ кНм} = M_B^J,$$

$$M_C^H = -2 \cdot 28,775 + 4(-1,209) = -63,386 \text{ кНм} = -M_C^H$$

$$M_D = -4(-1,209) = 4,836 \text{ кНм},$$

де M_B^H та M_C^H – моменти в перерізах стійки, що примикають знизу до вузлів B і C ; M_B^H та M_C^H – моменти в перерізах ригеля безпосередньо ліворуч і праворуч цих вузлів.

Будуємо епюру M , рис. 2.26, *a*.

Поперечні сили розраховуємо за формулою [27] (для лінійних епюр M)

$$Q = \operatorname{tg} \beta,$$

де β – кут нахилу дотичної до епюри моментів; при цьому; $\beta \leq 0$ – якщо лінію M повернути від осі стержня проти годинникової стрілки, і $\beta \geq 0$ – якщо за:

$$Q_{AB} = \frac{M_B^H}{a} = \frac{57,55}{2} = 28,775 \text{ кН};$$

$$Q_{BC} = \frac{M_C^H - M_B^H}{l} = \frac{62,386 - 57,55}{4} = 1,209 \text{ кН};$$

$$Q_{CD} = \frac{M_C^H - M_D}{a} = \frac{62,386 - 4,836}{2} = 28,775 \text{ кН}.$$

Будуємо епюру Q (*б*).

10. Поздовжні зусилля N визначаємо, розглядаючи рівновагу вирізаних вузлів D та C ; при цьому навантажуюмо їх згідно правилам побудови епюр M та Q . Нагадуємо, що епюра моментів M нанесена на стиснутих волокнах стержнів, а позитивна поперечна сила Q обертає вузол за годинниковою стрілкою. Невідомі поздовжні сили попередньо вважаємо розтягуючими. Навантаження вузлів B та C показані на рис. 2.27. Складаємо умови їх рівноваги.

Для вузла C :

$$\sum M_C = M_C^H - M_C^H = 62,386 - 62,386 = 0(!)$$

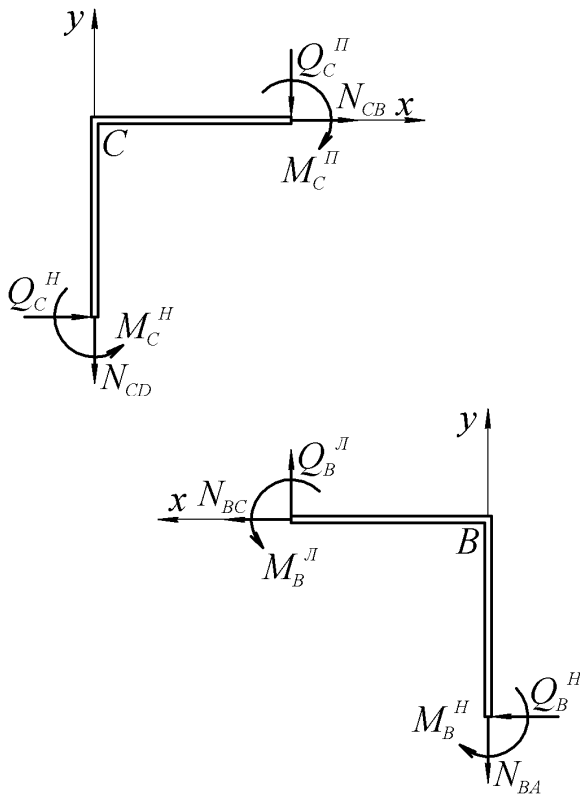


Рис. 2.27. Перевірка умов рівноваги вузлів рами.

$$\begin{aligned}\sum F_x &= N_{CB} + Q_C^{\text{II}} = 0; \\ \sum F_y &= N_{CB} + Q_C^{\text{I}} = 0; \\ N_{CB} &= -Q_C^{\text{H}} = -28,775 \text{ кН}; \\ N_{CD} &= -Q_C^{\text{II}} = -1,209 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Отже, ригель і ліва стійка стиснуті, про що говорять знаки “мінус”.

Для вузла B:

$$\begin{aligned}\sum M_B &= M_B^{\text{H}} - M_B^{\text{II}} = \\ &= 57,55 - 57,55 = 0(!) \\ \sum F_x &= N_{BC} + Q_B^{\text{H}} = 0; \\ N_{BC} &= -Q_B^{\text{H}} = -28,775 \text{ кН}; \\ \sum F_y &= N_{BC} + Q_B^{\text{II}} = 0; \\ N_{BA} &= -Q_B^{\text{II}} = 1,209 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Права стійка розтягнута, так як $N_{BA} > 0$. Будуємо епюру N (в).

11. Проводимо деформаційну перевірку епюр M та N . Ця перевірка полягає в тому, що, наприклад, горизонтальне переміщення опорного перерізу A від сумісної дії сил X_1 , X_2 та температур T' і T повинно бути відсутнім, тобто $\Delta_{1M} + \Delta_{1N} = \Delta_{1T'} + \Delta_{1T}$.

Знаходимо

$$\begin{aligned}\Delta_{1X_1} &= \frac{1}{6EJ} \{\bar{M}_1 \times M\} + \frac{1}{6EA} \{\bar{N}_1 \times N\} = \frac{2}{6EJ_0} 2 \cdot 2 \cdot 57,55 + \\ &+ \frac{4}{6EJ_0 \cdot 2} (2 \cdot 57,55 \cdot 2 + 57,55 \cdot 2 + 62,386 \cdot 2 + 2 \cdot 62,386 \cdot 2) + \\ &+ \frac{2}{6EJ_0} (2 \cdot 2 \cdot 62,386 + 4,836 \cdot 2) + \frac{4}{6EA_0 \cdot 2} \cdot 6 \cdot 28,775 = \frac{1206}{3EJ_0} +\end{aligned}$$

$$+ \frac{57,55}{EA_0} = \frac{10^{-3}}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-4}} (1206 + 0,58) = 0,0302;$$

$$\Delta_{1T'} + \Delta_{1T} = \frac{\alpha_T}{6h} \{\overline{M}_1 \times T'\} + \frac{\alpha_T}{6h} \{\overline{N}_1 \times T\} = \frac{\alpha_T}{0,2} (40 \cdot 12) +$$

$$= \alpha_T 30 \cdot 4 = 2520\alpha_T = 2520 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 0,0302 \text{ м.}$$

$$\Delta_{1A} = \Delta_{1T} - \Delta_{1X_1} = 0,0302 - 0,0302 = 0(!)$$

12. Наносячи, згідно епюрам M , Q , N (рис. 2.26, а, б, в), на основну систему всі реакції опор (ε), проводимо заключну перевірку рівноваги рами:

$$\sum F_y = R_D - R_A = 1,209 - 1,209 = 0(!)$$

$$\sum F_x = H_D - H_A = 28,775 - 28,775 = 0(!)$$

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= M_D + H_D \cdot a - R_D \cdot 1/2 - R_A \cdot 1/2 - H_A \cdot a = \\ &= 4,836 + 28,775 \cdot 2 - 1,209 \cdot 2 - 1,209 \cdot 2 - 28,775 \cdot 2 = 0(!) \end{aligned}$$

Таким чином, статична невизначеність рами розкрита. Діючі на неї зовнішні сили (реакції опор) збалансовані, про що говорить п. 12. Але в перерізах стержнів діють самоврівноваженні чисто температурні внутрішні зусилля, зумовлені тим, що зв'язки в опорі перешкоджають вільним деформаціям периферійних перерізів рами під дією температури.

Згідно міркуванням, викладеним у попередньому прикладі, визначимо силове навантаження, еквівалентне дії чисто температурних напружень.

Як і в (2.32) маємо (рис. 2.28)

$$F'_B = \alpha_T EA_0 T;$$

$$F''_B = \alpha_T EA_0 T = 2F'_B;$$

$$M_B = \alpha_T EJ_0 T'/h.$$

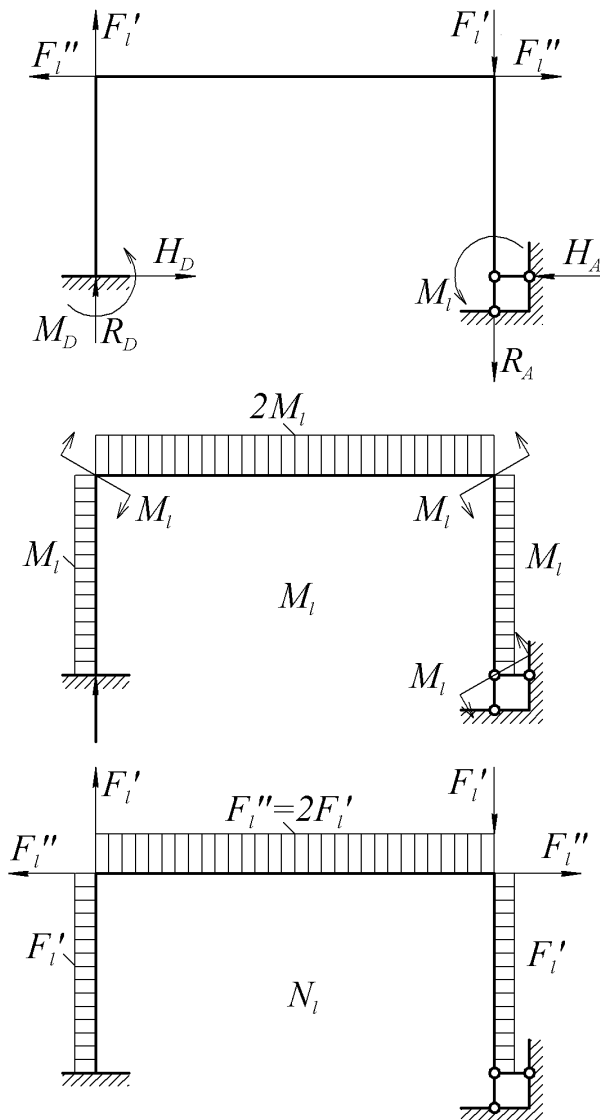


Рис. 2.28. Силове навантаження еквівалентне дії температури.

Отже, максимальні напруження, які, очевидно, будуть в перерізі або ригеля, або стійки, що примикають до вузла С, визначимо за формулою опору матеріалів, подібною (2.33):

$$\sigma_C^{\Pi}(y) = \frac{2M_B - M_C^{\Pi}}{2J_0} y + \frac{F_B'' - H_A}{2A_0};$$

$$\sigma_C^H(y) = \frac{M_B - M_C^H}{J_0} y + \frac{F_B' - R_D}{A_0}.$$

Розрахуємо максимальні напруження (при $y = \pm h/2$). Знаходимо еквівалентні силові фактори:

$$M_B = \alpha_T E J_0 T' / h = \frac{1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 40 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{0,2 \cdot 3} =$$

$$= 0,032 \text{ МН} \cdot \text{м};$$

$$F_B' = \alpha_T E A_0 T = 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot 30 \times 2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 1,44 \text{ МН};$$

$$F_B'' = 2 \cdot 1,44 = 2,88 \text{ МН};$$

$$\max \sigma_C^n \Big|_{y=\frac{h}{2}} = \frac{2 \cdot 0,032 - 62,386 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 10^{-4}} \cdot 0,1 +$$

$$+ \frac{2,88 - 28,775 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}} = 1 \cdot 2 + 72 = 73,2 \text{ МПа (зверху);}$$

$$\begin{aligned} \max \sigma_C^H \Big|_{y=-\frac{h}{2}} &= \frac{0,032 - 62,386 \cdot 10^{-3}}{\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}} \cdot (-0,1) + \\ &+ \frac{1,44 - 1,209 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-2}} = 45 + 72 = 117 \text{ МПа (зліва)}. \end{aligned}$$

Отже, небезпечним є переріз C^H , в якому діють $\sigma_{\max} = 117 \text{ МПа}$.

ГЛАВА 3

ПОСТАНОВКА ТА ЗАГАЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

3.1. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Як уже було сказано, врахування ефектів динамічності та зв'язаності приводить до зв'язаної динамічної задачі термопружності, розв'язання якої досить утруднене. Але при звичайній дії тепла, коли температура тіла змінюється поступово (з малими швидкістю та прискоренням), а зміна форми та розмірів тіла при цьому знаходиться в межах пружних деформацій, вплив ефектів динамічності та зв'язаності настільки незначний, що ним можна знехтувати. Це суттєво спрощує задачу та її розв'язання. В такій постановці задача термопружності носить назву квазістатичної і пов'язана з іменами Дюамеля та Нейманна [53,57].

Таким чином, квазістатична теорія термопружності базується на наступних припущеннях: повна лінійна деформація є суперпозиція пружної деформації, вираженої через напруження за відомим [27] узагальненим законом Гука, та відносного лінійного температурного розширення, створюваного температурним полем, тобто

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T T; \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T T; \\ \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_T T,\end{aligned}\tag{3.1}$$

де ν коефіцієнт Пуассона.

Отже, у рамках постулатів Дюамеля - Неймана дослідження термонапруженого стану тіла зводиться до розв'язання рівнянь

статичної термопружності, в яких силові члени виражаються через температурну функцію. Остання одержується шляхом автономного розв'язання крайової задачі теплопровідності.

Розглянемо загальну постановку і розв'язання задач квазістатичної термопружності тіл плоскої, циліндричної та сферичної геометрії, які ми в інженерній термомеханіці прийняли за базові.

3.2. ТЕРМОПРУЖНІ НАПРУЖЕННЯ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ПЛАСТИНІ

Нехай необмежена пластина має температурне поле, що змінюється лише по її товщині H (рис.3.1).

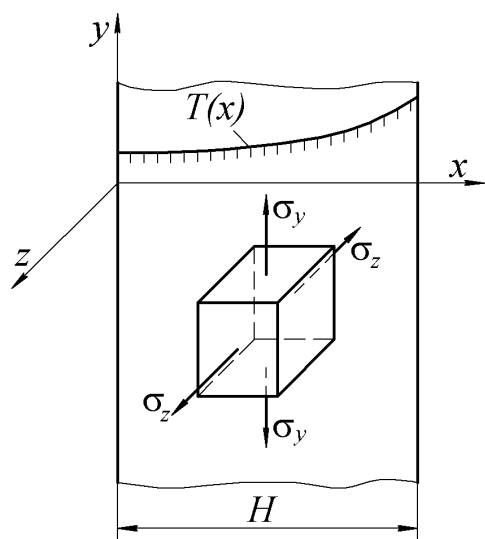


Рис. 3.1. Термонапружений стан необмеженої пластини.

У напрямках y та z кожне волокно має свою температуру, відмінну від температур сусідніх волокон. І якби волокна були вільні, то вони б одержали різні відносні подовження, відповідаючи їх температурам. Але всі волокна в твердому тілі нерозривно зв'язані. Тому вільному температурному видовженню кожного волокна будуть перешкоджати сусідні волокна, які мають іншу температуру. Таким чином, в цих напрямках у пластині з'являться напруження $\sigma_y(x) = \sigma_z(x) = \sigma(x)$. У напрямку x усі волокна однаково нагріті, тому $\sigma(x) = 0$.

У такому разі з рівнянь (3.1) маємо

$$\varepsilon_z(x) = \varepsilon_y(x) = \varepsilon(x) = \frac{1-\nu}{E} \sigma_x + \alpha_T T(x).$$

При цьому із шести умов нерозривності деформацій Сен-Венана залишається лише одна $\partial^2 x / \partial x^2 = 0$, яка при $E = const$ та $\nu = const$ і приводить до диференціального рівняння

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[\sigma(x) + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(x) \right] = 0. \quad (3.2)$$

Дві сталі, що з'являться при інтегруванні рівняння другого порядку (3.2), знаходять з умов силового балансу в довільному перерізі пластини

$$\sum F = \int_0^H \sigma(x) dx = 0; \quad \sum M = \int_0^H \sigma(x) x dx = 0. \quad (3.3)$$

Інтегруючи рівняння (3.2) двічі по x , маємо

$$\sigma(x) = B + Cx - \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(x). \quad (3.4)$$

Після підстановки функції (3.4) в інтегральні умови рівноваги (3.3) одержуємо систему двох алгебраїчних рівнянь

$$\left. \begin{aligned} D + \frac{H \cdot C}{2} &= \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)H} \int_0^H T(x) dx \\ D + \frac{2H \cdot C}{3} &= \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)H^2} \int_0^H T(x) x dx \end{aligned} \right\}$$

розв'язуючи яку, знаходимо

$$D = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)H} \left[4 \int_0^H T(x) dx - 6 \int_0^H T(x) \frac{x}{H} dx \right];$$

$$C = \frac{6\alpha_T E}{(1-\nu)H^2} \left[- \int_0^H T(x) dx + \int_0^H T(x) \frac{x}{H} dx \right].$$

Підставляючи значення C і D (3.5) в розв'язок (3.4) отримуємо формулу температурних напружень, якій надамо звичного [34] вигляду

$$\sigma(x) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)H} \left[\int_0^H T(x) dx + 12 \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right) \int_0^H T(x) \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right) dx - HT(x) \right].$$

Одержаний розв'язок (3.6) описує напружений стан плити, повністю позбавленої зовнішніх зв'язків, що дає їй можливість вільно (в інтегральному розумінні) розширюватись і вигинатись. Якщо ж закріплення країв пластини виключає можливість лише вигину, то у формулі (3.6) треба відкинути другий доданок, а якщо лише лінійному розширенню - то перший. Коли ж зовнішні зв'язки перешкоджають і вигину і розширенню, то напруження визначається формулою

$$\sigma(x) = \frac{\alpha_T E T(x)}{(1-\nu)}.$$

Якщо температурне поле пластини симетричне відносно центральної площини (рис. 3.2), то після введення заміни

$$H = 2R; \quad x = r + R$$

формула (3.6) набуває наступного вигляду:

$$\sigma(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R} \left[\int_0^R T(r) dr - RT(r) \right]. \quad (3.7)$$

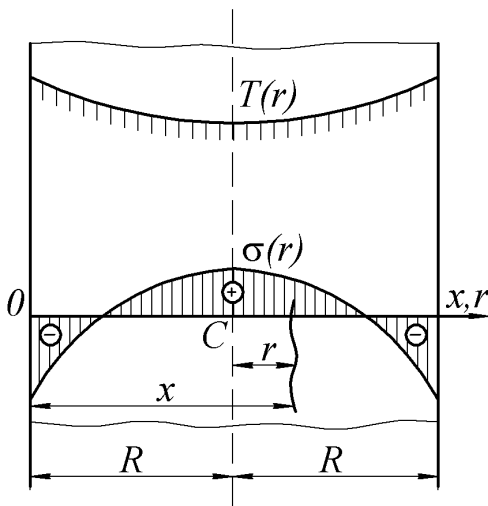


Рис. 3.2 Розподіл температур і напружень в пластині, яка симетрично нагрівається.

Розподіл температурних напружень (3.7) при симетричному нагріванні вільної пластини зображено на рис. 3.2. Як бачимо, при поверхневій стиснуті, а центральна зона перерізу розтягнута. Якщо ж температурне поле $T(x)$ несиметричне, то розподіл температурних напружень, який відповідає формулі (3.6), може бути встановлений лише в кожному конкретному випадку температурного стану пластини.

3.3. ТЕРМОПРУЖНІ НАПРУЖЕННЯ В НЕОБМЕЖЕНОМУ ЦИЛІНДРІ

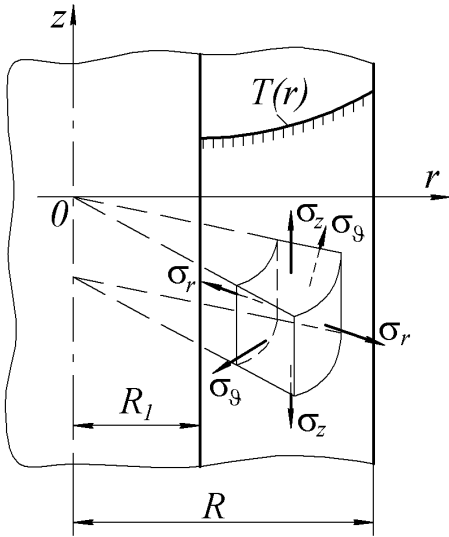


Рис. 3.3. Термонапружений стан довгого циліндра, який симетрично нагрівається

Розглянемо необмежений порожнистий циліндр, осесиметрично нагріваний збоку зовнішньої поверхні ($r = R$), рис. 3.3. Такий циліндр знаходиться в об'ємному напруженому стані, який характеризується радіальними (σ_r), коловими (σ_θ), та осьовими (σ_z) напруженнями. Розв'язання відповідної задачі термопружності можна вести як в напруженнях, так і в переміщеннях.

А). При постановці задачі в напруженнях для випадку одновимірного осесиметричного температурного поля спочатку знаходимо радіальне напруження шляхом розв'язання рівняння суцільності, яке приймає вигляд

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} T(r) \right] = 0. \quad (3.8)$$

Дві сталі, що з'являються при інтегруванні цього рівняння визначаються із умов відсутності зовнішнього тиску на вільних поверхнях $r = R$ та $r = R_1$ циліндра:

$$\sigma_r(r) \Big|_{r=R_1} = 0; \quad \sigma_r(r) \Big|_{r=R} = 0. \quad (3.9)$$

Інтегруючи рівняння (3.8) двічі по r , маємо

$$\sigma_r(r) = \frac{C}{2} + \frac{D}{r^2} - \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)r^2} \int_{R_1}^R T(r) \cdot r dr. \quad (3.10)$$

Використовуючи умови (3.9), одержуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}C + \frac{1}{R^2}D &= 0 \\ \frac{1}{2}C + \frac{1}{R^2}D &= \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^2} \int_{R_1}^R T(r)rdr \end{aligned} \right\},$$

розв'язуючи яку, знаходимо

$$C = \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)(R^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^R T(r)rdr; \quad D = -\frac{1}{2}R_1^2 C. \quad (3.11)$$

Після підстановки (3.11) в (3.10) отримуємо формулу для визначення радіальних напружень

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)r^2} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R T(r)rdr - \int_{R_1}^r T(r)rdr \right]. \quad (3.12)$$

Колове напруження $\sigma_g(r)$ одержимо з відомого з теорії пружності [29, 45, 46] рівняння статичної рівноваги елемента циліндра

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_g - \sigma_r}{r} = 0.$$

Звідкіля, очевидно, маємо

$$\sigma_g(r) = r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r = \frac{d}{dr}(r\sigma_r). \quad (3.13)$$

Підставляючи сюди функцію σ_r (3.12), після диференціювання по r визначаємо

$$\sigma_g(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)r^2} \left[\frac{r^2 - R_1^2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R T(r)rdr - \int_{R_1}^r T(r)rdr - r^2 T(r) \right]. \quad (3.14)$$

При дослідженні осьового напруження $\sigma_z(r)$ необхідно враховувати характер закріплення циліндра [26]. Якщо його торці закріплені нерухомо, то подовжня деформація ε_z буде відсутня. У такому випадку третє рівняння (3.1) приводить до формули

$$\sigma_z(r) = \nu[\sigma_r(r) + \sigma_g(r)] - \alpha_T E T(r). \quad (3.15)$$

Якщо ж торці циліндра вільні, то []

$$\sigma_z(r) = \sigma_r(r) + \sigma_g(r). \quad (3.16)$$

Враховуючи (3.12), (3.14), приходимо до формул для осьових напружень:

у випадку (3.15) (циліндр закріплений)

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[\frac{2\nu}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R T(r) r dr - T(r) \right]; \quad (3.17)$$

у випадку (3.16) (циліндр вільний)

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \left[\frac{2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R T(r) r dr - T(r) \right]. \quad (3.18)$$

Для суцільного циліндра відповідні формули одержуємо, поклавши в (3.12), (3.14), (3.17), (3.18) $R_1 = 0$:

$$\sigma_r(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^2} \left[\int_0^R T(r) r dr - \frac{R^2}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right]; \quad (3.19)$$

$$\sigma_g(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^2} \left[\int_0^R T(r) r dr - \frac{R^2}{r^2} \int_0^r T(r) r dr - R^2 T(r) \right]; \quad (3.20)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^2} \left[2\nu \int_0^R T(r) r dr - R^2 T(r) \right]; \quad (3.21)$$

$$\sigma_z(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^2} \left[2 \int_0^R T(r) r dr - R^2 T(r) \right], \quad (3.22)$$

де формула (3.21) відноситься до закріпленого, а (3.22) - до вільного циліндра.

Б). При постановці задачі термопружності циліндра в переміщеннях розв'язується диференціальне рівняння [15, 18, 26, 46] подібно рівнянню в задачі Ляме

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rU) \right] = \alpha_T \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{dT}{dr}, \quad (3.23)$$

де $U(r)$ - радіальне переміщення.

Сталі інтегрування визначаються з тих же граничних умов (3.9), які необхідно записати в переміщеннях. Для цього рівняння (3.1) розв'язуються відносно напружень. У позначеннях для циліндра маємо

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon_z) - (1+\nu)\alpha_T T]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z) - (1+\nu)\alpha_T T]; \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) - (1+\nu)\alpha_T T],\end{aligned}\quad (3.24)$$

де радіальна (ε_r), колова (ε_θ), та осьова (ε_z) деформації подаються через переміщення відповідними співвідношеннями Коші.

Для випадку осесиметричного температурного поля і закріплених торців циліндра відмінним від нуля буде лише радіальне переміщення $U(r)$, через яке деформації мають наступні вирази [18]:

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{U}{r} \quad \varepsilon_z = 0. \quad (3.25)$$

З урахуванням першого рівняння (3.24) та співвідношень (3.25) граничні умови (3.9) запишуться так:

$$\left[(1-\nu) \frac{dU}{dr} + \nu \frac{U}{r} - (1+\nu)\alpha_T T(r) \right] \Big|_{r=R_1}^{r=R} = 0. \quad (3.26)$$

Інтегруючи рівняння (3.23), маємо

$$U(r) = \frac{\alpha_T(1+\nu)}{(1-\nu)r} \left[\int_{R_1}^r T(r)rdr + D + \frac{Cr^2}{2} \right] \quad (3.27)$$

Використовуючи умови (3.26), одержуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}C - \frac{1-2\nu}{R_1^2}D &= 0; \\ \frac{1}{2}C - \frac{1-2\nu}{R^2}D &= \frac{1-2\nu}{R^2} \int_R^{R_1} T(r)rdr, \end{aligned} \right\}$$

звідки знаходимо

$$D = \frac{R_1^2}{R^2 - R_1^2} \int_R^{R_1} T(r)rdr; \quad C = 2(1-2\nu) \frac{D}{R_1^2}.$$

Після цього розв'язок (3.27) приймає вигляд

$$v(r) = \frac{\alpha_T(1+\nu)}{(1-\nu)r} \left\{ \frac{R_1^2 + (1-2\nu)r^2}{R^2 - R_1^2} \int_{R_1}^R T(r)rdr + r \int_{R_1}^r T(r)rdr \right\} \quad (3.28).$$

Маючи функцію (3.28) і вирази (3.25), з узагальненого закону Гука (3.24) отримуємо функції температурних напружень (3.12) та (3.18).

На рис. 3.4 зображені орієнтовні графіки розподілу напружень в нерівномірно (по радіусу) нагрітому вільному порожнистому (а) та суцільному (б) циліндрах.

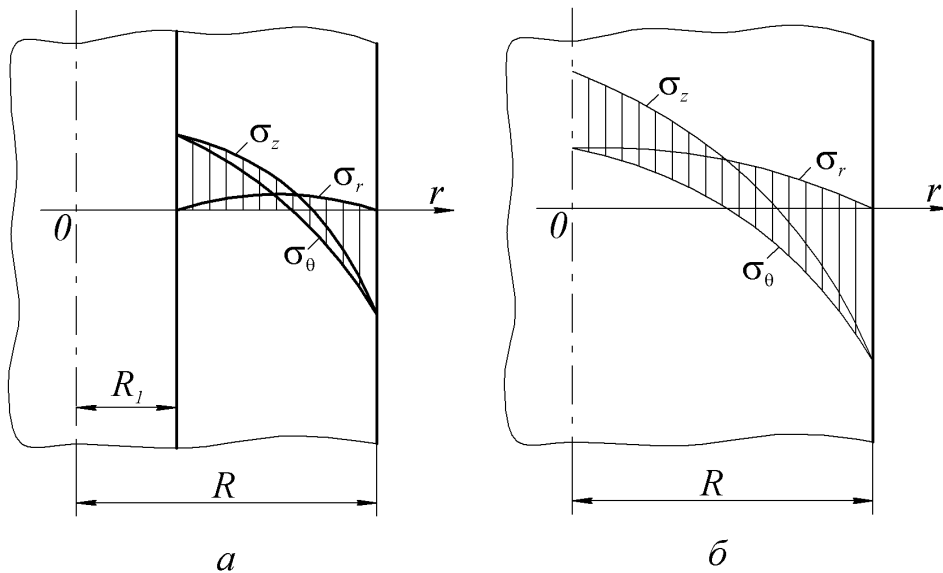


Рис. 3.4. Розподіл температурних напружень по перерізу вільного порожнистого (а) та суцільного (б) циліндрів.

У випадку (а) на обох поверхнях $\sigma_r = 0$ і $\sigma_z = \sigma_\theta$. У випадку (б) в центрі перерізу, а $\sigma_r = \sigma_\theta$, $\sigma_z = 2\sigma_\theta$; на зовнішній поверхні $\sigma_r = 0$; $\sigma_z = \sigma_\theta$. В закріпленому циліндрі на поверхнях $r = R_1$ та $r = R$, а $\sigma_z \neq \sigma_\theta$, точніше, $\sigma_z < \sigma_\theta$, так як $\nu < 1$.

3.4. ТЕРМОПРУЖНІ НАПРУЖЕННЯ В КУЛІ

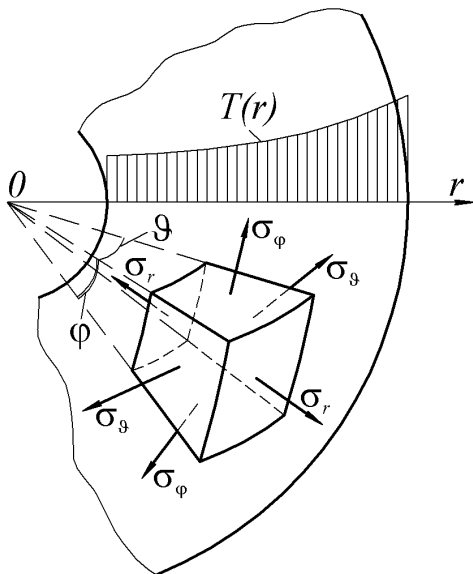


Рис. 3.5. Термонапружений стан кулі з центральносиметричним температурним полем.

Розглянемо порожнисту кулю з температурним полем $T(r)$, залежній лише від радіальної координати r . Тут, як і в циліндрі, також виникає об'ємний напружений стан (рис. 3.5), характеризуємий радіальним (σ_r) та двома взаємно перпендикулярними тангенціальними напруженнями ($\sigma_\theta = \sigma_\phi$). Інколи останні розрізняють як меридіанне (σ_θ) та азимутальне (σ_ϕ), але враховуючи їх рівність при кульовій симетрії, у подальших викладках ми будемо говорити лише про два напруження: σ_r та σ_θ .

Ця задача теж може розв'язуватись як в напруженнях, так і в переміщеннях. Маючи з попереднього підрозділу принципову уяву про хід розв'язання задачі термопружності в напруженнях, тут ми розглянемо лише другий метод.

При постановці задачі термопружності кулі в переміщеннях розв'язується рівняння [5, 26]

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 U) \right] = \alpha_T \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{dT}{dr}.$$

Сталі інтегрування визначаються із тих же умов (3.9) відсутності радіальних напружень на вільних поверхнях $r = R_1$ та $r = R$ кулі. При цьому

$$\varepsilon_r = \frac{dU}{dr}; \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{U}{r}.$$

Враховуючи це, а також те, що $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$, узагальнений закон Гука (3.24) для кулі запишеться так:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[(1-\nu) \frac{dU}{dr} + 2\nu \frac{U}{r} - (1+\nu) \alpha_T T(r) \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{U}{r} + \nu \frac{dU}{dr} - (1+\nu) \alpha_T T(r) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Отже, граничні умови (3.9) приймуть вигляд

$$\left[(1-\nu) \frac{dU}{dr} + 2\nu \frac{U}{r} - (1+\nu) \alpha_T T(r) \right]_{r=R_1}^{r=R} = 0. \quad (3.30)$$

Інтегруючи рівняння (3.21) двічі по r , маємо

$$U(r) = \frac{\alpha_T (1+\nu)}{(1-\nu)r^2} \left[\int_{R_1}^r T(r) r^2 dr + D + \frac{Cr^3}{3} \right] \quad (3.31)$$

Використовуючи умови (3.30), одержуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} C - 6 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{D}{R_1^3} &= 0; \\ C - 6 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{D}{R^3} &= \frac{6(1-2\nu)}{(1+\nu)R^3} \int_R^{R_1} T(r) r^2 dr, \end{aligned} \right\}$$

розв'язками якої є

$$D = \frac{R_1^3}{R^3 - R_1^3} \int_{R_1}^R T(r) r^2 dr; \quad C = 6 \frac{1-2\nu}{1+\nu} \frac{D}{R_1^3}.$$

Після цього вираз (3.31) набуває вигляду

$$U(r) = \frac{\alpha_T(1+\nu)}{(1-\nu)r^2} \left[\frac{R_1^3 + 2\frac{1-2\nu}{1+\nu}}{R^3 - R_1^3} \int_{R_1}^R T(r)r^2 dr + \int_{R_1}^r T(r)r^2 dr \right]. \quad (3.32)$$

Маючи функцію $U(r)$ (3.32), з узагальненого закону Гука (3.29) знаходимо

$$\sigma_r(r) = \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)r^3} \left[\frac{r^3 - R_1^3}{R^3 - R_1^3} \int_{R_1}^R T(r)r^2 dr - \int_{R_1}^r T(r)r^2 dr \right]; \quad (3.33)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)r^3} \left[\frac{2r^3 - R_1^3}{R^3 - R_1^3} \int_{R_1}^R T(r)r^2 dr + \int_{R_1}^r T(r)r^2 dr - r^3 T(r) \right]. \quad (3.34)$$

Для суцільної кулі ($R_1 = 0$)

$$\sigma_r(r) = \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)R^3} \left[\int_0^R T(r)r^2 dr - \frac{R^3}{r^3} \int_0^r T(r)r^2 dr \right]; \quad (3.35)$$

$$\sigma_\theta(r) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^3} \left[2 \int_0^R T(r)r^2 dr + \frac{R^3}{r^3} \int_0^r T(r)r^2 dr - R^3 T(r) \right]. \quad (3.36)$$

Зазначимо, що в цьому випадку для одержання формули напружень в центрі кулі у виразах (3.35), (3.36) треба розкрити невизначеність виду $0:0$ за правилом Лопіталя:

$$\frac{1}{r^3} \int_0^r T(r)r^2 dr \Big|_{r \rightarrow 0} = \frac{T(0)}{3}.$$

Тоді для центра кулі маємо

$$\sigma_r(0) = \frac{2\alpha_T E}{(1-\nu)R^3} \left[\int_0^R T(r)r^2 dr - \frac{R^3}{3} T(0) \right];$$

$$\sigma_\theta(0) = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)R^3} \left[2 \int_0^R T(r)r^2 dr - \frac{R^3}{3} T(0) \right].$$

Орієнтовні графіки розподілу напружень в порожнистій (а) і суцільній (б) кулі показані на рис. 3.6.

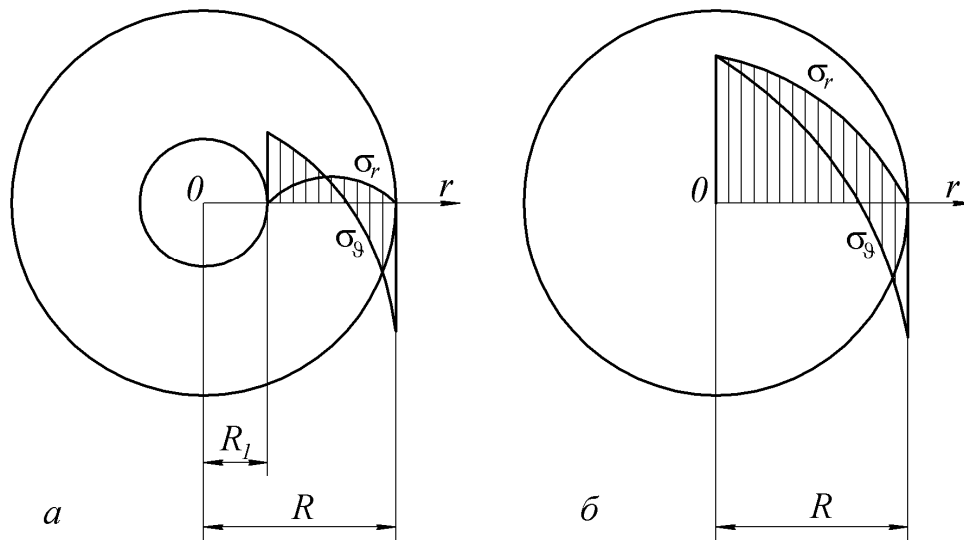


Рис. 3.6. Розподіл температурних напружень по перерізу порожнистої (а) та суцільної (б) кулі.

Звертаємо увагу на те, що в центрі суцільної кулі всі напруження мають однакову величину і знак $\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0) = \sigma_\varphi(0)$, тобто має місце всебічне рівномірне розтягання при нагріванні або стиснення при охолодженні.

Ми тут зупинились на досить простих постановках задач термопружності. Але оволодіння цими основами термомеханіки необхідне, по-перше, тому, що без розуміння простого важко розраховувати на оволодіння більш складним, а, по-друге, ці прості задачі найбільш розповсюджені в практичному відношенні, так як об'єкти плоскої, циліндричної та кульової геометрії широко застосовуються в техніці.

ГЛАВА 4 КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

4.1. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У попередньому розділі показано, що при дослідженні напруженого стану тіла на основі квазістатичної теорії термопружності першим етапом повинно бути одержання так званої „навантажувальної” функції (температури T) шляхом автономного розв'язання крайової задачі теплопровідності. Теорія теплопровідності, постановка та розв'язання її задач детально розробленні і є предметом досліджень таких курсів „Теплообмін”, „Теплопередачі”, „Математичка фізика” та ін. [13, 15, 21, 48, 54]. Не зважаючи на це, включення цього розділу, в даний посібник вважаємо доцільним тому, що, по-перше, зміст його набуває певної цільності і повноти, а, по-друге, для полегшення розуміння подальшого матеріалу читачеві необхідно нагадати деякі відомості в теорії теплопередачі.

Процес поширення тепла у різних середовищах при передачі його від більш нагрітих тіл до менш нагрітих називається теплопередачею або теплообміном. Існують три види теплообміну: кондуктивний (теплопровідність), конвективний та радіаційний (променистий).

Теплопровідністю називається теплообмін між контактуючими частинками, що складають єдине суцільне тіло. Фізична суть кондуктивної теплопередачі полягає в тому, що мікрочастинки (молекули), які рухаються з великою швидкістю, при зіткненні з сусідніми молекулами меншої швидкості передають їм частку своєї кінетичної енергії і цим самим примушують їх рухатись швидше, після чого останні теж стикаються уже з своїми

менш рухомими "сусідками" і т.д. Таким чином протікає процес розповсюдження тепла у всьому об'ємі тіла. Теплопередача теплопровідністю в повній мірі спостерігається лише в твердих тілах, значно менше проявляється в рідинах і зовсім мало - в газах.

Кількісною мірою кондуктивної здатності речовини є коефіцієнт теплопровідності λ - теплофізична характеристика, що визначає кількість тепла Q , здатного пройти за час $t = 1 \text{ с}$ скрізь стінку площею $A = 1 \text{ м}^2$ і товщиною $H = 1 \text{ м}$ при перепаді температур по товщині $\Delta T = 1^\circ \text{ C}$:

$$\lambda = \frac{QH}{\Delta T A t}.$$

Враховуючи те, що тепло вимірюється в Джоулях, а $\text{Дж} = \text{Вт} \cdot \text{с}$, розмірність коефіцієнта теплопровідності буде $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Орієнтовні значення λ , для деяких матеріалів подані в табл. 4.1.

Як бачимо, діапазон значень λ , дуже великий як для різних, так і у межах подібних матеріалів.

Вивчення процесів нагрівання та охолодження твердих тіл базується на теорії теплопровідності, сучасний стан якої відображений у багатьох роботах, наприклад [11, 14, 15, 16].

Аналітичний шлях дослідження процесу теплопровідності будь-якого тіла передбачає такі основні етапи: постановка задачі, її розв'язання, аналіз одержаних результатів, числові розрахунки конкретного об'єкта. Усі етапи відображають різні сторони єдиного узагальнюючого поняття математична модель процесу.

Постановка крайової задачі теплопровідності полягає у виборі математичної моделі, в тій чи іншій мірі відповідаючи досліджуваному фізичному явищу. В цю математичку модель на стадії її постановки входять: диференціальне рівняння теплопровідності; умови теплообміну на поверхні тіла (граничні умови); темпе-

ратурний стан тіла перед початком дослід жувального процесу (початкова умова).

Таблиця 4.1. Пересічні значення коефіцієнта теплопровідності деяких матеріалів

Матеріал	$\lambda, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$
Метали	
Алюміній	200...230
Латунь	100
Мідь	360
Сталь вуглецева	45...55
Сталь легована	17...45
Чавун	56...64
Будівельні матеріали	
Бетон	1,30
Цегла вогнетривка	0,80...1,70
Дерево вздовж волокон	0,35...0,70
Дерево впоперек волокон	0,14...0,20
Скло	0,75
Ізоляційні матеріали	
Плита з повсті	0,05...0,10
Азбест	0,15...0,20
Тирса	0,07
Інші матеріали	
Сажа	0,06...0,10
Накип котельний	0,70...2,30
Попіл	0,12
Гази різні	0,006...0,6

Диференціальне рівняння теплопровідності встановлює зв'язок між температурою T , часом t і просторовими координатами x, y, z в довільно вибраному елементарному об'ємі тіла. В загальному випадку, коли температура є функція трьох координат і часу, а теплофізичні характеристики матеріалу можна вважати сталими, диференціальне рівняння теплопровідності в декартовій системі координат має вигляд

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \omega = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1)$$

де $T(x, y, z)$ - температура тіла в точці з координатами x, y, z в момент часу t ; λ - коефіцієнт теплопровідності, $Вт/(м \cdot К)$; c - питома теплоємність, $Дж/(кг \cdot К)$; γ - густина, $кг/м^3$; ω - питома потужність внутрішніх джерел тепла, $Вт/м^3$.

Нагадаємо, що рівняння виду (4.1) в літературі має назву рівняння Фур'є-Кірхгофа, а без внутрішніх джерел ($\omega = 0$) - просто Фур'є.

Аналітичні методи розв'язання задач теплопровідності найбільшого застосування знайшли при дослідженні процесів кондуктивного теплообміну в одновимірних об'єктах. В такому випадку (при зміні температури лише в напрямку визначального розміру тіла) маємо:

для необмеженої пластини ($0 \leq x \leq H$)

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \omega = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (4.2)$$

для необмеженого циліндра ($0 \leq r \leq R$)

$$\left(\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t}; \quad (4.3)$$

для кулі ($0 \leq r \leq R$)

$$\left(\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (4.4)$$

Якщо ввести узагальнюючий параметр m форми то (4.2)...(4.4) можна об'єднати в узагальнене рівняння [34]

$$\left(\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \omega = c\gamma \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.5)$$

або

$$\frac{\alpha}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\omega}{c\gamma} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.6)$$

де $\alpha = \frac{\lambda}{c\gamma}$ - коефіцієнт температуропроводності, m^2 / c ; $m = 0$ - пластина; $m = 1$ - циліндр; $m = 2$ - куля.

Звертаємо увагу, що рівняння (4.1)...(4.6) передбачають сталість параметрів $\lambda, c, \gamma, \alpha$. Якщо ж теплофізичні характеристики матеріалу залежать від координат і часу, то рівняння теплопровідності ускладнюються, а при залежності λ, c, γ від температури - стають нелінійними (нелінійність 1-го роду).

4.2. КРАЙОВІ УМОВИ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Так як диференціальне рівняння теплопровідності (4.5), (4.6) має похідні другого порядку по координаті і першого - в часі, то його загальний розв'язок буде утримувати відповідну кількість довільних сталих (або функцій) інтегрування. Для одержання однозначного розв'язку ці сталі повинні бути визначені. Тому при розв'язанні кожної конкретної задачі теплопровідності до диференціального рівняння кондуктивної теплопередачі необхідно приєднати відповідні умови однозначності, які мають назву крайових (граничних та початкових) умов.

Як початкова умова повинна бути задана температура тіла в початковий момент часу $t = 0$:

$$T(r, t)|_{t=0} = T(r, 0) = T_0(r).$$

При розв'язанні багатьох практичних задач початкове температурне поле вважається однорідним (безградієнтним); в такому випадку

$$T(r, 0) = T_0(r) = const. \quad (4.7)$$

Встановлення граничних умов - це більш складне питання. Розрізняють чотири роди граничних умов теплообміну.

Гранична умова 1-го роду передбачає завдання значення шуканої функції температури на поверхні (П) тіла:

$$T(r, t)|_{r=R} = T_{II}(t). \quad (4.8)$$

Отже, $T_{II}(t)$ - наперед відомий закон зміни у часі температури поверхні тіла. Найбільш простий випадок умови (4.8)

$$T(r, t)|_{r=R} = T_{II} = const \quad (4.9)$$

можливий або при високоінтенсивному (контактному) теплообміні (температурний удар), або при умові штучного забезпечення незмінності температури поверхні на протязі усього процесу теплопередачі (термостатичність).

При граничній умові II-го роду на поверхні тіла задається тепловий потік

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = q_{II}(t), \quad (4.10)$$

де $q_{II}(t)$ - поверхневий питомий тепловий потік, тобто кількість тепла, що проходить через одиницю площі поверхні тіла, $Вт / м^2$.

В деяких випадках умова (4.10) може бути стаціонарна (тепловий удар)

$$-\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = q_{II} = const. \quad (4.11)$$

Нагадаємо, що знак „мінус” в лівих частинах умов (4.10), (4.11) введений тому, що напрямок зростання температури (її градієнт) протилежний напрямку теплового потоку.

Якщо поверхня тіла теплоізолювана, то $q_{II} = 0$ і умова (4.11) набуває вигляду

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = 0. \quad (4.12)$$

Гранична умова III-го роду передбачає відомим зв'язок між температурою та її нормальною похідною (тепловим потоком) на поверхні тіла. Якщо цей зв'язок лінійний, то гранична умова, у відповідності з відомим законом конвективного теплообміну Ньютона-Ріхмана, має вигляд

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \alpha [T_c(t) - T_{II}(t)], \quad (4.13)$$

де $T_c(t)$ - задана (взагалі нестационарна) температура навколишнього середовища, K ; α - коефіцієнт тепловіддачі (КТВ), $Вт/(м^2 \cdot K)$. В окремих випадках, коли $\alpha \rightarrow \infty$ та $\alpha = 0$, гранична умова третього роду (4.13) переходить відповідно в граничну умову першого (4.8) та другого (4.12) роду.

Якщо ж зв'язок між температурою та тепловим потоком на поверхні тіла нелінійний, то така гранична умова робить всю крайову задачу теплопровідності нелінійною (нелінійність II-го роду). Найбільш розповсюдженою граничною умовою цього виду є умова, що описує, згідно відомому закону Стефана-Больцмана, теплообмін при випромінюванні (радіації):

$$\left. \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} = \sigma_B [T_c^4(t) - T_{II}^4(t)] \quad (4.14)$$

де σ_B - видимий коефіцієнт променистого теплообміну, $Вт/(м^2 \cdot K^4)$. В окремому випадку, коли температура поверхні тіла значно нижча температури випромінювача ($T_{II} \ll T_c$), (4.14) переходить у граничну умову II-го роду (4.10) $q_{II} = \sigma_B T_c^4$.

Ще раз про знаки в умовах (4.13), (4.14). Забезпеченість узгодження знаків правих і лівих частин цих умов залежить від вибору напрямку координатної осі r та виду теплової обробки тіла. Для системи координат, в яких записані вирази (4.13), (4.14) (рис. 4.1) у випадку нагрівання тіла (а) $T_c - T_{II} > 0$ і похідна, як тангенс

кута β нахилу дотичної до кривої $T(r)$, теж позитивна $\operatorname{tg}\beta > 0$; у випадку охолодження (*б*) $T_c - T_{II} < 0$ і $\operatorname{tg}\beta < 0$. Отже, в обох випадках знаки правих і лівих частин в умовах (4.13), (4.14) автоматично узгодженні.

Граничні умови IV-го роду відображають так званий спряжений теплообмін, який передбачає існування температурного і

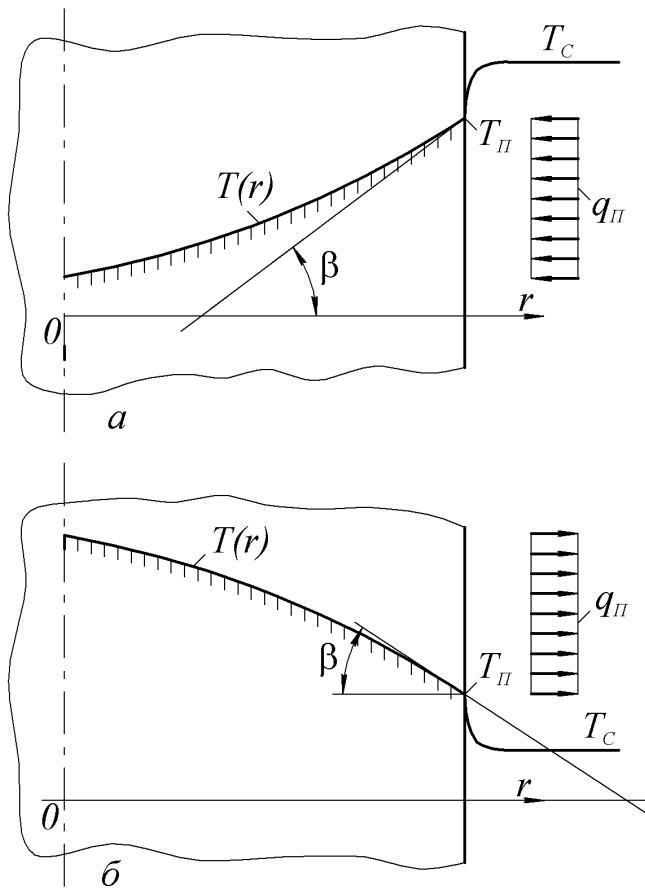


Рис. 4.1. Нагрівання (*а*) та охолодження (*б*) поверхні тіла.

теплого балансу на поверхні контакту спряжених середовищ. Це виражається наступними умовами:

$$T_1(r, t)|_{II} = T_2(r, t)|_{II};$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} \Big|_{II} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} \Big|_{II}, \quad (4.15)$$

де індекс 1 відноситься до першого тіла, а 2 - до другого; II - їх сумісна поверхня. Найбільш часто умови (4.15) використовують при розрахунках процесів теплопровідності у багатошарових стінках. Інколи ними користуються і при дослідженні конвективного теплообміну твердого тіла з рідиною, так як закон

Ньютона-Ріхмана (4.13) не завжди дає надійні результати, що пояснюється складністю і умовністю визначення КТО α . Треба зазначити, що в останньому випадку змінюються і рівняння теплопровідності.

4.3. КРИТЕРІЇ ТА ЧИСЛА ПОДІБНОСТІ

Описаний тою чи іншою математичною моделлю процес теплопровідності суттєво залежить не від кожного із багатьох утримуваних у ній параметрів, а від їх декількох цілком визначених комбінацій, які являють собою безрозмірні функції, незалежні змінні та комплекси (критерії, числа).

Перехід до безрозмірних величин зручний тим, що полегшує процедуру розв'язання задачі, уніфікує діапазон існування функцій та незалежних змінних, дає можливість узагальнення кінцевих результатів і виявлення основних залежностей шуканої функції від численних фізичних і геометричних параметрів.

Для ілюстрації, як передбачено об'єктами досліджень інженерної термомеханіки, обмежимося одновимірними лінійними рівняннями нестационарної теплопровідності (4.6) при зміні координати в межах $0 \leq r \leq R$, де R - половина товщини пластини ($m = 0$), або радіус циліндра ($m = 1$), кулі ($m = 2$).

Перш за все введемо відносну надлишкову (перевищення над початковою) функцією температури

$$\theta(\rho, Fo) = [T(\rho, Fo) - T_0] / (T^* - T_0); \quad (4.16)$$

безрозмірні незалежні змінні

$$\rho = \frac{r}{R}; \quad Fo = \frac{\alpha t}{R^2} \quad (4.17)$$

та критерій

$$Po = \frac{\omega R^2}{\lambda(T^* - T_0)} \quad (4.18)$$

де $T^* = const$ - деяка характерна (масштабна) температура, K ; це може бути температура або гріючого середовища $T_c = const$, або поверхні тіла $T_{\Pi} = const$ та ін.

При врахуванні позначень (4.16)...(4.18) рівняння (4.6) приймає вигляд

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) + Po = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}, \quad (4.19)$$

а початкова умова (4.7) стає однорідною

$$\theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0. \quad (4.20)$$

Граничні умови теж спрощуються. Умова 1-го роду (4.8) буде мати вигляд

$$\theta(\rho, Fo)|_{\rho=1} = \theta(Fo). \quad (4.21)$$

Для досить широкого на практиці випадку лінійної залежності

$$T(r, t)|_{\rho=1} = T_{II}(t) = T_0 + V_T t,$$

де V_T - швидкість зростання температури поверхні, K/c , маємо

$$\theta(\rho, Fo)|_{\rho=1} = Pd \cdot Fo \quad (4.22)$$

При цьому з'являється критерій

$$Pd = \frac{V_T R^2}{\alpha(T^* - T_0)}. \quad (4.23)$$

У випадку $T_{II} = const$ і $T^* = T_{II}$ умова (4.9) буде

$$\theta(\rho, Fo)|_{\rho=1} = 1. \quad (4.24)$$

При перетворенні граничної умови II – го роду (4.10) одержуємо

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Ki(Fo), \quad (4.25)$$

де через $Ki(Fo)$ позначено нестационарний комплекс

$$Ki(Fo) = \frac{q_{II}(Fo)R}{\lambda(T^* - T_0)}. \quad (4.26)$$

який у випадку $q_{II} = const$ і $T^* = T_c$ (4.11) переходить у критерій

$$Ki = \frac{q_{II} R}{\lambda(T_c - T_0)}. \quad (4.27)$$

Перетворюючи граничну умову III-го роду (4.13), при $T^* = T_C^{\max}$ маємо

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Bi[\theta_c(Fo) - \theta_{II}(Fo)], \quad (4.28)$$

де введено критерій

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}. \quad (4.29)$$

Якщо температура гарячого середовища $T_c(Fo) = const$, то

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Bi[1 - \theta_{II}(Fo)] \quad (4.30)$$

У випадку променистого теплообміну, коли крайова задача теплопровідності утримує нелінійну граничну умову (4.14), зведення початкової умови (4.7) до однорідного вигляду (4.20) суттєво ускладнює умову (4.14). Тому при дослідженні променевого нагрівання тіла безрозмірна функція температури приймається у вигляді

$$\bar{\theta}(\rho, Fo) = \frac{T(\rho, Fo)}{T_C^{\max}}, \quad (4.31)$$

де T, T_C^{\max} - абсолютні температури, за шкалою Кельвіна.

У такому випадку умови (4.7) і (4.14) записуються так:

$$\bar{\theta}(\rho, 0) = \bar{\theta}_0;$$

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Sk[\theta_c^4(Fo) - \theta_{II}^4(Fo)],$$

а при $T_c = const$:

$$\left. \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Sk[1 - \theta_{II}^4(Fo)], \quad (4.32)$$

де з'явився критерій

$$Sk = \frac{\sigma_B T_C^3 R}{\lambda}. \quad (4.33)$$

Граничні умови IV-го роду, очевидно, будуть

$$\bar{\theta}_{1II}(Fo) = \bar{\theta}_{2II}(Fo); \quad \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial \rho_1} \right|_{\rho_1=\rho_{II}} = \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho_2} \right|_{\rho_2=\rho_{II}},$$

де $K = \frac{k_2}{k_1}$, а $k_j = \frac{\lambda_j}{R_j}$, ($j = 1; 2$) - коефіцієнти теплопередачі кондукцією, $\frac{Bm}{m^2 K}$.

Більшість притаманних теорій теплообміну критеріїв та чисел відомі під назвами прізвищ вчених, які або вперше їх застосували, або плідно працювали саме в цьому конкретному напрямку досліджень. Так, у наведених вище випадках введені критерії мають назви: Po (4.18) - Померанцева; Pd (4.23) - Предводителева; Ki (4.27) - Кирпичова, а $Ki(Fo)$ (4.26) - число, аналогічне цьому критерію; Bi (4.29) - Біо; Sk (4.33) - Старка; Fo (4.17) - число Фур'є.

Таким чином, при переході до критеріального запису крайових задач теплопровідності безрозмірна температурна функція $\theta(\rho, Fo)$ (4.16) і просторова координата ρ (4.17) змінюються вже в стандартних межах $0 \leq \theta(\rho) \leq 1$ та $0 \leq \rho \leq 1$ незалежно від величини відповідних абсолютних величин T, T_0, T^*, r, R . Суттєво зменшилась і кількість параметрів, від яких залежить функція температури.

Наприклад, в рівнянні (4.6) з умовами (4.7) і (4.11) входять десять параметрів ($m, r, t, \omega, T_0, q_{II}, R, C, \gamma, \lambda$), а в безрозмірному вигляді відповідна крайова задача (4.19), (4.20), (4.27) вже має їх лише п'ять: m, ρ, Fo, Po, Ki . Очевидно, що і якісний аналіз і чис-

лові розрахунки виконувати значно простіше, використовуючи наведенні вище критеріальні залежності.

Але, заради справедливості, треба все-таки зазначити, що критеріальна форма запису залежності температури від характеристик процесу дещо затінює роль окремих параметрів; це дає привід негативного становлення деяких вчених до подібних критеріальних переходів.

При конкретних розрахунках процесів нагрівання чи охолодження тіла необхідно знати теплофізичні характеристики матеріалу, із якого воно виготовлено. До цих характеристик, перш за все, відносяться: коефіцієнт теплопровідності λ ; питома теплоємність c ; густина ρ , або об'ємна теплоємність $C_v = c\rho$; коефіцієнт температуропровідності α . До них добавляються і характеристики зовнішнього теплообміну: коефіцієнт конвективного теплообміну α та видимий коефіцієнт випромінювання σ_B .

Треба зауважити, що всі ці характеристики залежать від стану речовини, зокрема, від її температури. Вище вже говорилося, що з урахуванням залежності властивостей матеріалу від температури крайова задача теплопровідності стає нелінійною. У зв'язку з певними математичними труднощами точні розв'язки на даний час одержано лише для найпростіших нелінійних задач в окремих випадках функціональної залежності коефіцієнтів переносу. Звичайно ж до розв'язання таких задач залучаються різні наближені методи, які можна розділити на дві категорії.

До першої відносяться добре відомі [15, 21, 48 та ін.] методи розв'язання лінійних задач теплопровідності. Але застосуванню цих методів до нелінійних задач повинна передувати відповідна лінеаризація. Досить ґрунтовні відомості по цьому питанню викладені в роботах [3, 16, 19, 22].

Наближені методи другої категорії дозволяють безпосередньо розв'язувати нелінійні крайові задачі без їх попередньої лі-

неаризації. Це, перш за все, чисельні методи (сіток, скінчених різниць, скінченого елемента, граничного елемента та ін.), а також аналітичні (інтегральні, варіаційні, збурення, еквівалентних джерел).

Заміна функціональних термічних характеристик якимись сталими величинами по суті є найпростішою лінеаризацією, яка має досить поширене практичне застосування. При проведенні інженерних теплотехнічних розрахунків звичайно значення відповідних характеристик беруть пересічними в передбачуваному робочому інтервалі зміни температури тіла.

Слід зауважити, що такий підхід повністю придатний в тих випадках, коли діапазони зміни температури помірні. Якщо ж температура тіла змінюється в широкому інтервалі, то заміна змінних характеристик будь-якими сталими величинами може привести до суттєвої похибки кінцевих результатів дослідження чи розрахунку.

В цих випадках, в разі необхідності одержати більш точний результат, пропонується або розв'язувати нелінійну задачу, або, розбивши увесь інтервал зміни температури на декілька підінтервалів, брати пересічні характеристики в межах цих підінтервалів і послідовно розв'язувати декілька лінійних задач, спряжуючи розв'язки на „стиках” розбивки.

На заключення повідомимо, що дані про теплофізичні характеристики різних матеріалів подаються в спеціальній довідковій літературі.

ГЛАВА 5

ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

5.1. ПОПЕРЕДНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Теорія теплопровідності остаточно сформувалась як наука в першій третині XIX століття з виходом у світ знаменитої монографії Жозефа Фур'є. В ній автор поставив ряд крайових задач теплопровідності і одержав їх точні розв'язки з допомогою розроблених ним методів. В результаті подальшого розвитку теорії теплопровідності розширювалось коло задач, створювались нові методи їх розрахунку. І зараз ми маємо досить широкий арсенал аналітичних методів, з допомогою яких одержано цілу низку точних розв'язків різних задач теплопровідності, що досить повно відображено перш за все в теоретичних курсах математичної фізики (наприклад, [48], теорії теплопровідності та теплопередачі [13, 15, 21, 24, 54 та ін.], а також в спорідненій суто технічній літературі, наприклад, [43, 49, 53 та ін.]

Але всі задачі теплопровідності (за деякими несуттєвими виключеннями), які на даний час мають точні розв'язки, відносяться до класу лінійних задач і стосуються лише тіл класичної геометрії (пластини, циліндри, кулі, призми та деяких інші). До того ж кінцеві результати (розв'язки) нестационарних задач теплопровідності, як правило, мають досить складний вигляд, так як представленні нескінченними рядами, утримуючими спеціальні функції математичної фізики.

Більш прості розв'язки мають відповідні стаціонарні задачі. У випадку $\partial T/\partial t = 0$ для одновимірних тіл (пластина, циліндр, куля) задачі теплопровідності перетворюються у звичайні диференціальні рівняння з відповідними граничними умовами. Розглянемо деякі з них.

5.2. СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НЕОБМЕЖЕНОЇ ПЛАСТИНИ

У випадку стаціонарного температурного поля температурна функція утримує лише одну незалежну змінну (координату x), і рівняння теплопровідності пластини у частинних похідних (4.3) при $\omega = 0$ і $\partial T / \partial t = 0$ перетворюється у звичайне диференціальне рівняння

$$d^2T/dx^2 = 0 \quad (5.1)$$

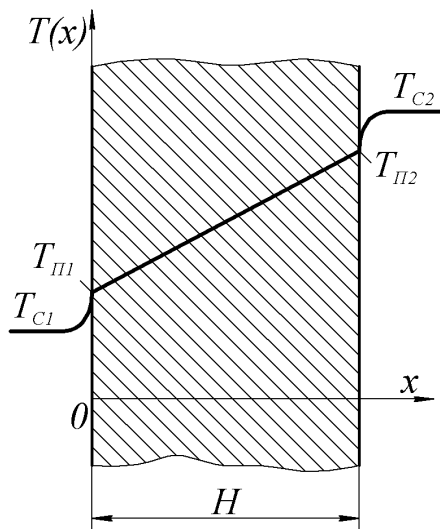
або, у безрозмірних величинах

$$\theta(\xi) = \frac{T(\xi) - T_{C1}}{T_{C2} - T_{C1}}; \quad \xi = \frac{x}{H}; \quad (T_{C2} > T_{C1}), \quad (5.2)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = 0 \quad (5.3)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.3) очевидно має вигляд

$$\frac{d\theta}{d\xi} = A; \quad \theta(\xi) = A\xi + B. \quad (5.4)$$



Згідно рис. 5.1 $B = \theta_{II1}$;

$$A = \theta_{II2} - \theta_{II1} = \Delta\theta.$$

Тоді

$$\theta(\xi) = \theta_{II1} + \Delta\theta\xi, \quad (5.5)$$

де $\theta_{II1}, \theta_{II2}, \Delta\theta$ визначаються відповідними умовами теплообміну на поверхнях $\xi = 0$ та $\xi = 1$.

Але вже очевидно, що, незалежно від умов однозначності, температурне поле пластини у стаціонарному стані описується лінійною функцією координати (5.5).

Рис. 5.1. Температурне поле пластини зі сталим коефіцієнтом теплопровідності при несиметричному усталеному

Розглянемо випадок конвективного теплообміну (4.15)

$$\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda_1(T_{C1} - T_{П1}); \quad \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=H} = -\lambda_2(T_{C2} - T_{П2}),$$

або, враховуючи (5.2) та (4.32)

$$\frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = Bi_1 \theta_{П1}; \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = Bi_2 \theta_{П2} \quad (5.6)$$

Підставляючи розв'язок (5.4), (5.5) у (5.6) приходимо до системи двох рівнянь

$$\left. \begin{aligned} (1 + Bi_1)\theta_{П1} - \theta_{П2} &= 0 \\ \theta_{П1} - (1 + Bi_2)\theta_{П2} &= Bi_2 \end{aligned} \right\},$$

розв'язок якої дає наступні вирази для температурних функцій поверхонь пластини:

$$\theta_{П1} = Bi_2 (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)^{-1}; \quad (5.7)$$

$$\theta_{П2} = Bi_2 (1 + Bi_1) (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)^{-1}; \quad (5.8)$$

$$\Delta\theta = \theta_{П2} - \theta_{П1} = Bi_1 Bi_2 (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)^{-1}. \quad (5.9)$$

Отже розв'язок (5.5) набуває вигляду

$$\theta(\xi) = Bi_2 (1 + Bi_1) (Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2)^{-1}. \quad (5.10)$$

Нарешті, розглянемо випадки, коли на одній із поверхонь відомий тепловий потік $q_{П}$, тобто

$$\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = q_{П1}; \quad \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=H} = -\lambda_2(T_{C2} - T_{П2})$$

або

$$\lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda_1(T_{C1} - T_{П1}); \quad \lambda \frac{dT}{dx} \Big|_{x=H} = q_{П2}.$$

В безрозмірних величинах (5.2), (4.30), (4.32) це буде:

$$\frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = Ki_1; \quad \frac{d\theta}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = Bi_2 (1 - \theta_{П2}) \quad (5.11)$$

або

$$\left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=0} = Bi_1 \theta_{\Pi 1}; \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = Ki_2. \quad (5.12)$$

Очевидно, що одержані вище для випадку граничних умов (5.6) розв'язки (5.7) - (5.10) придатні і для умов (5.11), (5.12), якщо в (5.7) - (5.10) відповідно змінити

$$Bi_1 = \frac{Ki_1}{\theta_{\Pi 1}} - \text{у випадку (5.11)} \quad (5.13)$$

або

$$Bi_2 = \frac{Ki_2}{(1 - \theta_{\Pi 2})} - \text{у випадку (5.12)}, \quad (5.14)$$

одержуємо

$$\theta_{\Pi 2} = \frac{1 - Ki_2}{Bi_2}; \quad \theta_{\Pi 1} = \theta_{\Pi 2} - Ki_1; \quad \Delta\theta = Ki_1;$$

$$\theta(\xi) = \theta_{\Pi 1} + Ki_1 \xi = \theta_{\Pi 2} - Ki_1(1 - \xi); \quad (5.15)$$

$$\theta_{\Pi 2} = \frac{Ki_2(1 + Bi_1)}{Bi_1}; \quad \theta_{\Pi 1} = \frac{Ki_2}{Bi_1}; \quad \Delta\theta = Ki_2;$$

$$\Theta(\xi) = \theta_{\Pi 1} + Ki_2 \xi = \theta_{\Pi 2} - Ki_2(1 - \xi). \quad (5.16)$$

Тепер розглянемо випадок нелінійного (радіаційно- конвективного) теплообміну, коли на поверхнях пластини виконуються наступні умови:

$$\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=0} = \alpha_1 (T_{\Pi 1} - T_{C1});$$

$$\lambda \left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=H} = \sigma_{B2} (T_{C2}^4 - T_{\Pi 2}^4) + \alpha_2 (T_{C2} - T_{\Pi 2}). \quad (5.17)$$

Для подальшої зручності одержання аналітичних розв'язків відносно більшої температури поверхні (у нашому випадку $T_{\Pi 2} > T_{\Pi 1}$, див. рис.5.1) перенесемо початок координат на праву поверхню, тобто введемо нову незалежну змінну

$$r = H - x. \quad (5.18)$$

Після цього у безрозмірних величинах

$$\bar{\theta}(\xi) = \frac{T(\rho)}{T_{C2}}; \quad \bar{\theta}_{C1} = \frac{T_{C1}}{T_{C2}}; \quad \rho = \frac{r}{H} \quad (5.19)$$

граничні умови (5.17) набувають вигляду

$$\left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -Bi_1(\bar{\theta}_{II1} - \bar{\theta}_{C1}); \quad (5.20)$$

$$\left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=0} = -Sk_2(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) - Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2}).$$

У нових координатах (5.18) розв'язок (5.4) рівняння (5.1), очевидно, буде

$$\bar{\theta}(\rho) = \bar{\theta}_{II2} - A\rho \quad (5.21)$$

Підставляючи функцію (5.21) у першу граничну умову (5.20), маємо

$$A = Bi_1(\bar{\theta}_{II2} - A - \bar{\theta}_{C1}),$$

звідки одержуємо

$$A = Bi_1 \frac{\bar{\theta}_{II2} - \bar{\theta}_{C1}}{1 + Bi_1}. \quad (5.22)$$

Друга гранична умова дає

$$A = Sk_2(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) + Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2}). \quad (5.23)$$

Прирівнюючи праві частини виразів (5.22), (5.23), приходимо до наступного алгебраїчного рівняння:

$$\bar{\theta}_{II2}^4 + a_1 \bar{\theta}_{II2} = a_0, \quad (5.24)$$

де

$$a_1 = \frac{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2}{(1 + Bi_1) Sk_2}; \quad a_0 = 1 + \frac{Bi_1 \bar{\theta}_{C1} + Bi_1 Bi_2 + Bi_2}{(1 + Bi_1) Sk_2}. \quad (5.25)$$

Із алгебри відомий розв'язок рівняння виду (5.24):

$$\bar{\theta}_{II2} = \frac{\sqrt{\frac{2a_1}{b_1} - b_1^2} - b_1}{2}. \quad (5.26)$$

Тут

$$b_1 = \sqrt{u+v}; \quad \left. \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{\frac{a_1^2}{2} \pm \sqrt{\Delta}}; \quad \Delta = \left(\frac{4a_0}{3}\right)^3 + \left(\frac{a_1^2}{2}\right)^2.$$

Після визначення величин $\bar{\theta}_{II2}$ температуру $\bar{\theta}_{III}$ знаходимо, прирівнявши праві частини граничних умов (5.20)

$$\bar{\theta}_{III} = \bar{\theta}_{C1} + \frac{Sk_2(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) + Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2})}{Bi_2}. \quad (5.27)$$

Якщо рівняння (5.24) помножити на Sk_2 , а потім покласти $Sk_2 = 0$, то прийдемо до розв'язків, одержаних вище для лінійних граничних умов (5.6).

5.3. СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ НЕОБМЕЖЕНОГО ЦИЛІНДРА

Стационарне $\partial T / \partial t = 0$ температурне поле порожнистого не-

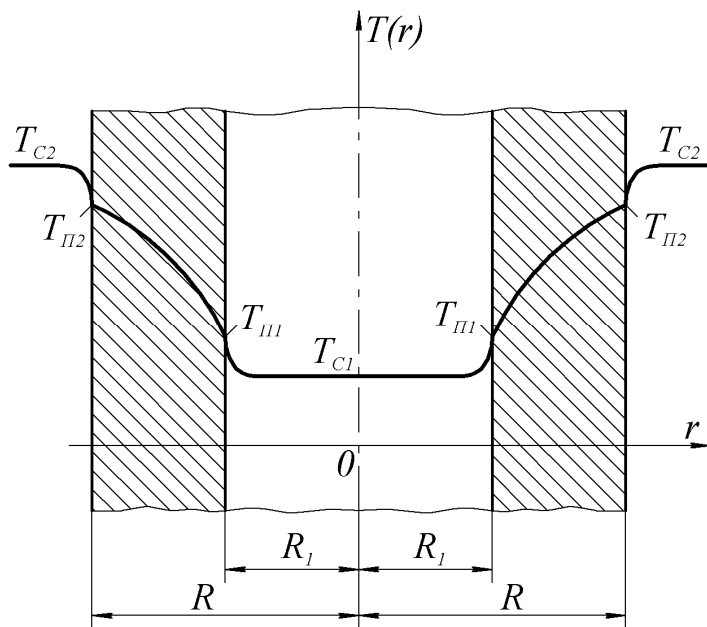


Рис. 5.2. Температурне поле порожнистого циліндра зі сталим коефіцієнтом теплопровідності при віссиметричному

обмеженого циліндра (рис. 5.2) при віссиметричних умовах двобічного теплообміну у відсутності внутрішніх джерел тепла $w = 0$, згідно (4.7) ($m = 1$), описується наступним звичайним диференціальним рівнянням:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

або, в безрозмірних величинах

$$\theta(\rho) = \frac{T(\rho) - T_{c1}}{T_{c2} - T_{c1}}; \quad \rho = \frac{r}{R_2}; \quad k = \frac{R_1}{R_2}, \quad (5.28)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\rho \frac{d\theta}{d\rho} \right) = 0. \quad (5.29)$$

Інтегруванням рівняння (5.29) одержуємо загальний розв'язок

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{A}{\rho}; \quad \theta(\rho) = B + A \ln \rho. \quad (5.30)$$

Так як, згідно рис. 5.2 і виразу (5.30)

$$B = \theta_{\Pi 2}; \quad A = -\frac{\theta_{\Pi 2} - \theta_{\Pi 1}}{\ln k} = -\frac{\Delta\theta}{\ln k}, \quad (5.31)$$

то

$$\theta(\rho) = \theta_{\Pi 2} - \Delta\theta \frac{\ln \rho}{\ln k} \quad (5.32)$$

Отже, стаціонарне температурне поле циліндра у загальному випадку вже нелінійне.

Для визначення температур поверхонь приймемо умови, аналогічні (5.6):

$$\left. \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=0} = Bi_1 \theta_{\Pi 1}; \quad \left. \frac{d\theta}{d\rho} \right|_{\rho=1} = Bi_2 (1 - \theta_{\Pi 2}) \quad (5.33)$$

Підставляючи функції (5.30), з урахуванням (5.31), в умови (5.33), приходимо до системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\Pi 1} (1 - k \ln k Bi_1) - \theta_{\Pi 2} &= 0 \\ \theta_{\Pi 1} - (1 - Bi_2 \ln k) \theta_{\Pi 2} &= Bi_2 \ln k \end{aligned} \right\},$$

розв'язками якої будуть вирази

$$\begin{aligned} \theta_{\Pi 1} &= Bi_2 (k Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2 k \ln k)^{-1}; \\ \theta_{\Pi 2} &= Bi_2 (1 - Bi_1 k \ln k) (k Bi_1 + Bi_2 - Bi_1 Bi_2 k \ln k)^{-1}; \\ \Delta\theta = \theta_{\Pi 2} - \theta_{\Pi 1} &= -Bi_1 Bi_2 k \ln k (k Bi_1 + Bi_2 + Bi_1 Bi_2 k \ln k)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Отже, розв'язок (5.32) набуває остаточного вигляду

$$\theta(\rho) = \frac{Bi_2 \left(1 + Bi_1 k \ln \frac{\rho}{k} \right)}{kBi_1 + Bi_2 - Bi_1 Bi_2 k \ln k}. \quad (5.35)$$

Для випадку (5.11), (5.13) при

$$Bi_1 = \frac{Ki_1}{\theta_{\Pi 1}}$$

маємо

$$\begin{aligned} \theta_{\Pi 2} &= 1 - \frac{kKi_1}{Bi_2}; & \theta_{\Pi 1} &= \theta_{\Pi 2} + Ki_1 k \ln k; \\ \Delta\theta &= -Ki_1 k \ln k; & \theta(\rho) &= \theta_{\Pi 2} + Ki_1 k \ln \rho. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для випадку (5.12), (5.14) при

$$Bi_2 = \frac{Ki_2}{(1 - \theta_{\Pi 2})}$$

маємо

$$\begin{aligned} \theta_{\Pi 2} &= \frac{Ki_2 (1 - Bi_1 k \ln k)}{kBi_1}; & \theta_{\Pi 1} &= \frac{Ki_2}{kBi_1}; \\ \Delta\theta &= -Ki_2 \ln k; & \theta(\rho) &= \theta_{\Pi 2} + Ki_2 \ln \rho. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Для випадку нелінійних граничних умов

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=k} &= Bi_1 (\bar{\theta}_{\Pi 1} - \theta_{C1}); \\ \left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=1} &= Sk_2 (1 - \bar{\theta}_{\Pi 2}^4) + Bi_2 (1 - \bar{\theta}_{\Pi 2}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

шляхом, аналогічним попередньому для пластини, підстановкою розв'язку (5.30) у (5.38) одержуємо також рівняння (5.24), але тут

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{Bi_2 (1 - Bi_1 k \ln k) + kBi_1}{(1 - Bi_1 k \ln k) Sk_2}; \\ a_0 &= 1 + \frac{Bi_2 (1 - Bi_2 k \ln k) + kBi_1 \bar{\theta}_{C1}}{(1 - Bi_1 k \ln k) Sk_2}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Температура $\bar{\theta}_{\Pi 2}$ визначається розв'язком (5.26), (5.39), а $\bar{\theta}_{\Pi 1}$ - формулою

$$\bar{\theta}_{II1} = \theta_{C1} - \frac{Sk_2(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) + Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2})}{kBi_1}. \quad (5.40)$$

Одержані розв'язки при $Sk \rightarrow 0$ співпадають з попередніми результатами, що відповідають умовам (5.33) чисто конвективно-го теплообміну. Треба лише пам'ятати, що

$$\bar{\theta} = \frac{T}{T_{C2}}; \quad \theta = \frac{(T - T_{C1})}{T_{C2} - T_{C1}} = \frac{(\bar{\theta} - \bar{\theta}_{C1})}{(1 - \bar{\theta}_{C1})}.$$

5.4. СТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ КУЛІ

Стаціонарне $\partial T / \partial t = 0$ температурне поле порожнистої кулі (рис. 5.3) при центросиметричному двобічному теплообміні і відсутності внутрішніх джерел тепла ($w = 0$) визначається, згідно (4.7), ($m = 2$), розв'язком наступного диференціального рівняння:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

або, враховуючи (5.28),

$$\frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) = 0.$$

Інтегруючи, маємо

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{A}{\rho^2}; \quad \theta(\rho) = B - \frac{A}{\rho}. \quad (5.41)$$

Як бачимо, і в кулі, як і в циліндрі, на відміну від пластини, залежність температури від координати нелінійна.

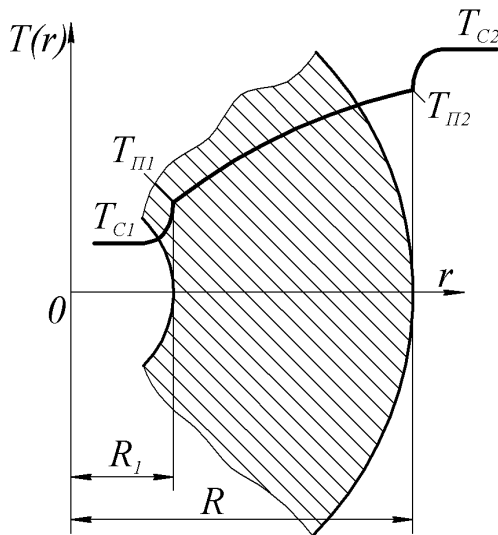


Рис. 5.3. Температурне поле порожнистої кулі зі сталим коефіцієнтом теплопровідності при центро-симетричному теплообміні

Очевидно, що

$$\left. \begin{aligned} B - A/k &= \theta_{II1} \\ B - A &= \theta_{II2} \end{aligned} \right\},$$

звідки знаходимо

$$B = \frac{\theta_{II2} - k\theta_{II1}}{1-k} = \theta_{II1} + \frac{\Delta\theta}{1-k};$$

$$A = \frac{(\theta_{II2} - \theta_{II1})k}{1-k} = \frac{\Delta\theta k}{1-k}.$$

Після цього функцію (6.41) можна записати так:

$$\theta(\rho) = \theta_{II1} + \frac{\Delta\theta}{1-k} \left(1 - \frac{k}{\rho} \right). \quad (5.42)$$

Підставляючи розв'язок (5.42) в умови (5.33) одержуємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} [1 + k(1-k)Bi_1]\theta_{II1} - \theta_{II2} &= 0 \\ k\theta_{II1} - [k + (1-k)Bi_2]\theta_{II2} &= -(1-k)Bi_2 \end{aligned} \right\},$$

звідки знаходимо

$$\theta_{II1} = Bi_2 [k^2 Bi_1 + Bi_2 + k(1-k)Bi_1 Bi_2]^{-1};$$

$$\theta_{II2} = Bi_1 [1 + k(1-k)Bi_1] [k^2 Bi_1 + Bi_2 + k(1-k)Bi_1 Bi_2]^{-1}. \quad (5.43)$$

Таким чином розв'язок (5.42) набуває наступного остаточного вигляду:

$$\theta(\rho) = \frac{Bi_2 \left[1 + kBi \left(1 - \frac{k}{\rho} \right) \right]}{k^2 Bi_1 + Bi_2 + k(1-k)Bi_1 Bi_2}. \quad (5.44)$$

Для випадку (5.11), (5.13) при

$$Bi_1 = Ki_1 / \theta_{II1}$$

маємо

$$\begin{aligned}\theta_{\Pi 2} &= 1 - \frac{k^2 Ki_1}{Bi_2}; & \theta_{\Pi 1} &= \theta_{\Pi 2} - k(1-k)Ki_1; \\ \Delta\theta &= -k(1-k)Ki_1; & \theta(\rho) &= \theta_{\Pi 1} + kKi_1 \left(1 - \frac{k}{\rho}\right).\end{aligned}\quad (5.45)$$

Для випадку (5.12), (5.14) при

$$Bi_2 = \frac{Ki_2}{(1 - \theta_{\Pi 2})}$$

маємо

$$\begin{aligned}\theta_{\Pi 2} &= \frac{Ki_2 [1 + k(1-k)Bi_1]}{k^2 Bi_1}; & \theta_{\Pi 1} &= \frac{Ki_2}{k^2 Bi_1}; \\ \Delta\theta &= Ki_2 \frac{1-k}{k}; & \theta(\rho) &= \theta_{\Pi 1} + \frac{Ki_2}{k} \left(1 - \frac{k}{\rho}\right).\end{aligned}\quad (5.46)$$

Для нелінійних граничних умов (5.38) загальний розв'язок (5.41) приводить до алгебраїчного рівняння (5.24) з коефіцієнтами

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{Bi_2 [1 + k(1-k)Bi_1] + k^2 Bi_1}{[1 + k(1-k)Bi_1] Sk_2}; \\ a_0 &= 1 + \frac{Bi_2 [1 + k(1-k)Bi_1] + k^2 Bi_1 \bar{\theta}_{C1}}{[1 + k(1-k)Bi_1] Sk_2}.\end{aligned}\quad (5.47)$$

Отже і для порожньої кулі температура $\bar{\theta}_{\Pi 2}$ визначається розв'язком (5.26) рівняння (5.24), (5.47), а температура $\bar{\theta}_{\Pi 1}$ - формулою

$$\theta_{\Pi 1} = \theta_{C1} - \frac{Sk_2 (1 - \bar{\theta}_{\Pi 2}^4) + Bi_2 (1 - \bar{\theta}_{\Pi 2})}{k^2 Bi_1}.\quad (5.48)$$

Вирази $\bar{\theta}_{\Pi 1}$ і $\bar{\theta}_{\Pi 2}$ для пластини ($m = 0$) (5.25), (5.27), циліндра ($m = 1$) (5.39), (5.40) та кулі ($m = 2$) (5.47), (5.48) можна узагальнити:

$$a_{1m} = \frac{Bi_2 [1 + k_1 Bi_1] + k^m Bi_1}{[1 + k_1 Bi_1] Sk_2}; \quad (5.49)$$

$$a_0 = 1 + \frac{Bi_2 [1 + k_1 Bi_1] + k^m Bi_1 \bar{\theta}_{C1}}{[1 + k_1 Bi_1] Sk_2}.$$

$$\bar{\theta}_{П1} = \theta_{C1} - \frac{Sk_2 (1 - \bar{\theta}_{П2}^4) + Bi_2 (1 - \bar{\theta}_{П2})}{k^m Bi_1}, \quad (5.50)$$

де

$$k_1 = \begin{cases} 1, & m = 0; \\ -k \ln k, & m = 1; \\ k(1 - k), & m = 2. \end{cases}$$

Викладенні в §§ 5.2 ... 5.4 розв'язки знаходять практичне застосування в розрахунках температурного стану відповідних об'єктів, які тривалий час перебувають в умовах усталеного теплового режиму.

5.5. ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ЩОДО РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

У попередніх параграфах даного розділу були розглянуті стаціонарні задачі теплопровідності, які мають досить прості точні розв'язки, подані у вигляді замкнутих формул. Але в § 5.1 зазначалось, що точні розв'язки допускають і деякі нестационарні задачі теплопровідності, хоча при цьому кінцеві результати значно ускладнюються і вже не мають замкнутої форми, а подаються, як правило, необмеженими рядами.

Аналіз проведений О.В. Ликовим [21], показав, що розв'язки багатьох задач нестационарної теплопровідності мають вигляд нескінченного ряду

$$\bar{\theta}(\rho, \tau) = 1 - \theta(\rho, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(\mu_n \rho) \exp(-\mu_n^2 \tau), \quad (5.51)$$

кожен член якого складається із трьох множників: сталої інтегрування A_n , яка залежить від граничних умов та форми тіла; координатної функції $\Phi(\mu_n \rho)$, яка враховує залежність розподілу температурного поля від координати, розмірів тіла і коефіцієнтів теплообміну; експоненціальної функції, визначаючої зміну температури тіла за часом. При цьому узагальнений характерний розмір R_m визначається як відношення об'єму тіла до його поверхні $R_m = V/S$; для пластини ($m=0$) $R_0 = R$; для циліндра ($m=1$) $R_1 = R/2$; для кулі ($m=2$) $R_2 = R/3$.

Характеристичні числа задовольняють нерівностям $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_n < \dots$ і кожен наступний член ряду (5.51) із збільшенням часу τ буде зникаючи малим у порівнянні з попереднім, а сума усіх коренів μ_n буде мало відрізнятися від величини першого числа μ_1 . Тому, починаючи з певного значення $\tau = \tau_1$, можна обмежитись лише першим членом ряду (5.51):

$$\bar{\theta}(\rho, \tau) = \frac{T_c - T(\rho, \tau)}{T_c - T_0} = A_1 \Phi_1(\mu_1 \rho) \exp(-\mu_1^2 \tau), \quad (5.52)$$

Починаючи з цього моменту τ_1 залежить між $[T_c - T(\rho, \tau)]$ та часом τ буде визначатись звичайною експонентою.

Логарифмуючи (5.52) маємо

$$\ln \frac{T_c - T(\rho, \tau)}{T_c - T_0} = \ln[A_1 \Phi_1(\mu_1 \rho)] - \mu_1^2 \tau.$$

Таким чином залежність між $\ln(T_c - T)$ та часом τ має вигляд похилої прямої. При тривалому нагріванні ($\tau \rightarrow \infty$) температура у всіх точках тіла стає однакою (наступає стаціонарний стан $T(\rho) \equiv T_c$).

Отже, увесь процес нагрівання (або охолодження) можна розділити на три етапи. Перший етап - це неупорядкований режим, який характеризується тим, що тут велику роль грає початковий температурний стан тіла і температурне поле описується усім рядом (5.31). Другий етап в техніці відомий як регулярний режим: зміна температури в часі здійснюється за простою експонентою, а розподіл температурного поля по координаті описується функцією $\Phi_1(\mu_1\rho)$ і не залежить від початкового значення температури, так як A_1 вже виступає єдиним сталим множником і відіграє просто роль масштабного коефіцієнта. На цьому побудована широко відома теорія регулярного теплового режиму, створена визначним теплофізиком Г.М. Кондратьєвим.

Ця теорія відштовхується від основного співвідношення Кондратьєва

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} \ln[T_C - T(\rho, \tau)] = m_k = const, \quad (5.53)$$

де

$$m_k = \frac{\alpha S}{c\gamma V} \frac{T_C - T_{II}}{T_C - \bar{T}} \quad (5.54)$$

(\bar{T} - середня по об'єму температура тіла).

О. В. Ликов запропонував [21] більш загальний критерій регулярності:

$$\frac{dT}{d\tau} \frac{1}{T_C - T} = m_l = const. \quad (5.55)$$

Як бачимо, хоча вихідна нестационарна задача теплопровідності і має точний розв'язок, але при його застосуванні використовують різні прийоми спрощення. Це пояснюється складністю та громіздкістю розв'язків мало придатних для інженерної практики. У роботі [21] (з посиланням на Пешля) вказується, що для того, щоб (для прикладу) підрахувати з точністю до третього зна-

ку після коми температури поверхні θ_{II} для „часу” $\tau = 0,0003$, необхідно взяти 36 (!) членів ряду (5.31).

Цей приклад дуже наглядно ілюструє ті незручності, які з’являються при використанні точних розв’язків нестационарних задач. Але ці розв’язки дуже потрібні, так як, по-перше, при необхідності дають змогу одержати розрахунки з наперед заданою точністю, а, по-друге, оцінити похибки наближених розв’язків, які широко використовуються в теплотехніці.

ГЛАВА 6

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

6.1. ПОПЕРЕДНІ ЗАУВАЖЕННЯ

Аналітичне дослідження більшості теплових процесів пов'язане з постановкою відповідних крайових задач теплопровідності, загальні розв'язки яких дозволяють описати температурне поле, визначити в довільний момент пересічну температуру та температурний перепад, термін нагрівання до потрібної температури, кількість поглиненого або виділеного тепла; розрахувати температурні напруження і встановити запаси міцності чи допустимі режими теплової обробки, забезпечуючи необхідну термоміцність, і т.д.

У добре відомих роботах [15, 21, 48, 53 та ін.] детально викладені існуючі точні методи розв'язання задач теплопровідності (розподілу змінних, миттєвих джерел, операційні та ін.). Це, як правило, стосується лінійних задач для тіл простої геометрії. Вище вже зазначалось, що структурна складність більшості одержаних точних розв'язків створює певні труднощі для їх успішного практичного використання, особливо при дослідженні питань термомеханіки. Більшість же задач теплопровідності взагалі ще не одержали точного розв'язання. Тому в інженерній практиці широке розповсюдження знаходять різні наближені методи (аналітичні, чисельні, аналогові, графічні).

Так, вчені своїми працями зробили фундаментальний внесок у розвиток інженерних методів розв'язання задач теплопровідності стосовно теплотехніки. Розробці та використанню наближе-

них аналітичних методів в галузі теплопровідності присвячено багато праць. Поряд з аналітичними одержали розвиток різні аналогові, чисельні та змішані аналітично-чисельні методи.

Широке впровадження чисельних методів у повсякденну інженерну практику потребує суттєвого збільшення парку обчислювальних машин, достатньої їх простоти, надійності в експлуатації та своєчасної доступності. У ефективному застосуванні чисельних методів з використанням ЕОМ не останню роль відіграє також рівень відповідної підготовки дослідника, його досвід, інтуїція, здатність хоча б у загальних рисах передбачити основну картину досліджуваного процесу, без чого не може бути надійного контролю достовірності одержаних машиною результатів. І в цьому плані нерідко досить ефективним стає той чи інший “симбіоз” чисельних та наближених аналітичних методів.

У ряді випадків деякі наближені розв'язки, маючи певну простоту і достатню точність, виявляються більш вигідними чисельних, так як дають можливість, по-перше, отримати кінцевий результат з меншими витратами часу та засобів, а, по-друге, одержати загальну формулу, яка дозволяє проводити розрахунки при довільних вихідних даних. Тому наближені аналітичні методи не втратили своєї практичної вартості і повинні розвиватися і широко застосовуватись в дослідженні математичних моделей теплопровідності, особливо в нелінійній їх постановці.

На даний час існує немало різних наближених аналітичних методів (ітераційних, варіаційних, розкладання в степеневі ряди, збурення або малого параметру, теплового балансу, коллокацій, моментів, усереднення, еквівалентних джерел та ін.), які з тим чи іншим успіхом застосовуються до розв'язання різних задач теплопровідності. Більш повно зі станом цього питання та суттю самих методів можна ознайомитись з робіт оглядового характеру [3, 16, 19, 22].

Особливо плідним для розвитку наближених методів дослідження нестационарних процесів теплопровідності виявилось введення та використання моделі теплового приграничного шару.

6.2. ПОНЯТТЯ ТЕРМІЧНОГО ШАРУ

Одним із наріжних каменів класичної теорії теплопровідності є так званий перший закон Фур'є

$$q = -\lambda \partial T / \partial x, \quad (6.1)$$

що передбачає миттєве розповсюдження теплового збурення на необмежену відстань. В останні три-чотири десятиріччя з'явилося декілька робіт, в яких одержано нові диференціальні рівняння, враховуючі обмеженість швидкості протікання процесу теплопровідності. Так, виходячи із загальних принципів термодинаміки, запропоновано рівняння теплопровідності гіперболічного типу [21]

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} + t_r \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (6.2)$$

при отриманні якого замість (6.1) було введено узагальнений закон теплопровідності

$$q = -\lambda \partial T / \partial x - t_r \partial q / \partial t,$$

де t_r – період релаксації, тобто час, за який настає термодинамічна рівновага в мікроскопічних фізичних системах (газах, рідинах, твердих тілах).

Слід зазначити, що величина періоду релаксації t_r залежить від багатьох внутрішніх і зовнішніх параметрів системи. Наприклад, електрони в металах досягають рівноваги за $10^{-13} \dots 10^{-14}$ с. Отже, для твердих тіл параметр t_r настільки малий, що розв'язок узагальненого (гіперболічного) рівняння (6.2) практично на всій

часовій вісі співпадає з розв'язком загальноприйнятого (параболічного) рівняння Фур'є

$$a \partial^2 T / \partial x^2 = \partial T / \partial t.$$

Цим і пояснюється добре узгодження результатів класичної теорії теплопровідності з експериментальними даними, одержуваними звичайно при $t \gg t_r$.

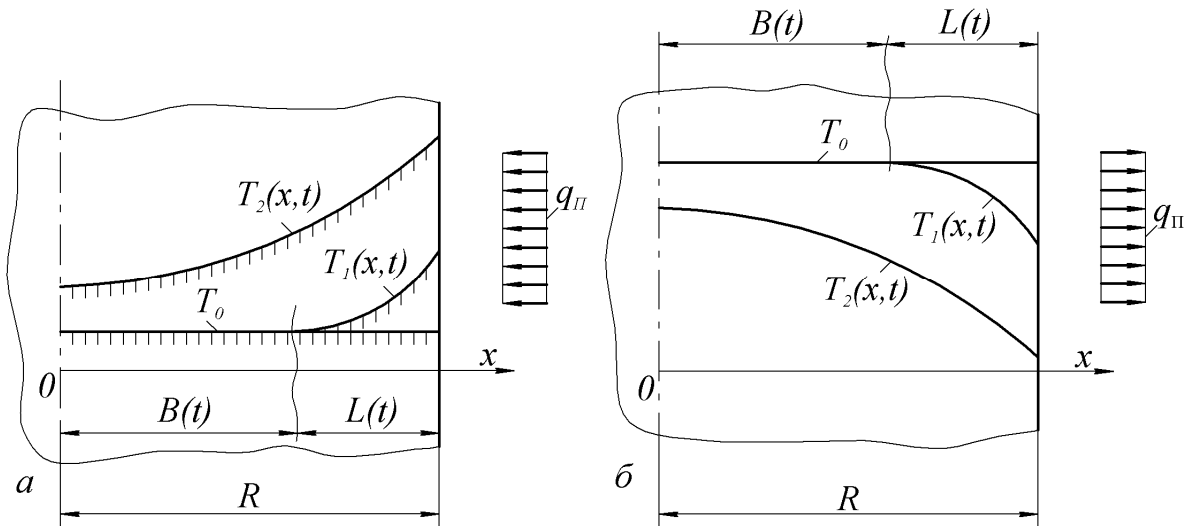


Рис. 6.1. Модель внутрішнього теплового приграничного шару (інженерна модель теплопровідності)

Таким чином, на ґрунті поглибленого теоретичного аналізу розроблено більш строгі математичні моделі процесу теплопровідності, враховуючі обмеженість швидкості поширення тепла у твердому тілі. Однак ще задовго до одержання узагальнених рівнянь типу (6.2) було ясно, що процес теплопровідності, як і всякий інший фізичний процес, не може відбуватись миттєво. Очевидно, що при нагріванні холодного тіла (температура $T_0 = const$, рис.6.1, а) спочатку здійснюється його прогрівання (температура T_1 , а потім уже нагрівання у межах усього об'єму (температура T_2). Підведений тепловий потік поступово проникає в глибину тіла, товщина $L(t)$ теплового приграничного (прогрітого) шару

безперервно зростає, і лише через певний відтинок часу $t_0 > 0$ тіло прогріється по всьому об'єму. Саме у цей час закінчується перший (так званий інерційний) і починає другий (впорядкований) етап нагрівання, який характеризується участю всього тіла в даному процесі. Подібна картина відбувається і при охолодженні рівномірно нагрітого тіла (рис.6.1, б).

Основи та можливості практичного використання такого підходу були сформульовані Й. Д.Семикіним [40], який і дав йому назву інженерної моделі процесу теплопровідності.

Слід зауважити, що таке уявлення про нагрівання (або охолодження) тіла “інженерним” (у розумінні наближеним) назвати не можна, бо воно точно відображає дійсну принципову картину розвитку реального фізичного явища: так як швидкість поширення тепла, безумовно, обмежена, то для наскрізного прогрівання тіла потрібен певний час. Наближеність же запропонованої моделі полягає в тому, що на обох етапах (інерційному та впорядкованому) процес звичайно описується класичним рівнянням теплопровідності типу (6.3), яке базується на законі (6.1), тобто на припущенні про миттєве розповсюдження тепла.

При розв'язанні задачі з використанням інженерної моделі на першому етапі ($0 \leq t \leq t_0$) до тих чи інших умов теплообміну на поверхні необхідно додати якість співвідношення на рухомому фронті теплового збурення. Це, наприклад, можуть бути цілком природні умови нерозривності температурних полів разом з тепловими потоками на спільній межі $x = B(t)$ прогрітої (T_1) та не прогрітої (T_0) зон перерізу тіла (рис. 6.1) [34].

$$T_1(x, t)|_{x=B(t)} = T_0; \quad \partial T / \partial x|_{x=B(t)} = 0. \quad (6.4)$$

Умови спряження (6.4) відображають те, що лєвова доля одержаного тілом тепла акумулюється на обмеженій ділянці $L(t)$.

Крім цього треба зауважити, що лінійна теплопровідність ($\lambda = const$) у рамках класичної теорії Фур'є (без релаксаційних явищ) припускає виникнення в усьому тілі миттєвого теплового потоку при будь-якій локальній зміні температури. Це суперечить фізичним уявленням про теплопровідність як скінчено швидкісний процес. Якщо ж коефіцієнт теплопровідності залежить від температури, убуваючи з її зниженням і приймаючи нульове значення при нульовій абсолютній температурі (ідеальний радіаційний теплообмін), то в цьому випадку тепло не може розповсюджуватись миттєво, тобто буде існувати чітка межа розподілу прогрітої і холодної областей тіла. Ця рухома межа і є фронт хвилі теплового збурення. Цим пояснюються можливість виникнення ударних теплових хвиль. Отже в деяких випадках можливе прийняття й умов, відмінних від (6.4). На другому етапі ($t_0 \leq t < \infty$) граничні умови використовуються у відповідності з постановкою вихідної задачі, а за початкову умову (при $t = t_0$) приймається розподіл температури в кінці інерційного етапу

$$T_2(x, t_0) = T_1(x, t_0). \quad (6.5)$$

Інколи (у випадку симетрії температурного поля) для спрощення за початкову умову для другого етапу береться рівність температур центра $T_{Ц}$ і початкової T_0 у момент $t = t_0$, тобто

$$T_2(0, t_0) = T_{Ц}(t_0) = T_0. \quad (6.6)$$

Існує ціла низка наближених методів розв'язання задач нестационарної теплопровідності, в основу яких покладена ідея поділу єдиного (за Фур'є) процесу на два послідовних етапи. О.В.Ликов [22] подібні методи об'єднав під загальною назвою "методи термічного шару". Найбільш поширені з них інтегральний метод теплового балансу Т.Гудмена, вилучення змінних А.І.Вейника, миттєво регулярного режиму Е.М.Гольдфарба ітераційний М.С.Швеця, варіаційні М.Біо та Л.В.Канторовича, еквівалентних джерел Ю.С.Постольника та ін.

Детальніше про ці методи можливо дізнатися з робіт [3, 19, 22, 34, 36]. Ми розглянемо лише один метод – метод еквівалентних джерел.

6.3. ОСНОВИ МЕТОДУ ЕКВІВАЛЕНТНИХ ДЖЕРЕЛ

Для теплотехнічних розрахунків доцільно мати метод, якому була б притаманна основна позитивна якість методів термічного шару (простота кінцевих результатів) і в той же час були б не потрібні ніякі апріорні уявлення. Таким методом є метод еквівалентних джерел (МЕД), запропонований професором Ю.С.Постольником [25, 32, 33, 34, 35 та ін.].

Нехай потрібно розв'язати рівняння теплопровідності (4.19) при $Po = 0$ (без внутрішніх джерел)

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta}{\partial Fo} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}; \quad (6.7)$$

з певними крайовими умовами

$$\theta; \partial \theta / \partial \rho \Big|_{\rho=1} = \varphi(Fo); \quad \theta(\rho, 0) = 0 \quad (6.8)$$

Використовуючи модель термічного шару (див. рис. 6.1), на першому (інерційному) етапі ($0 \leq Fo \leq Fo^0$) введемо умови спряження (6.4) в безрозмірному вигляді

$$\theta(\rho, Fo) \Big|_{\rho=\beta(Fo)} = \theta_0 = 0; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\beta(Fo)} = 0, \quad (6.9)$$

де

$$\beta(Fo) = B(Fo)/R.$$

Припустимо, що поставлена задача розв'язується методом послідовних наближень: якщо знайдено n -е наближення $\theta_n(\rho, Fo)$, то для визначення $(n+1)$ -ї ітерації $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial \theta_n}{\partial Fo}. \quad (6.10)$$

Такий алгоритм був, наприклад, використаний М.Е.Швецем [52].

Так як збіжність ітераційних процесів взагалі доведена, то можна стверджувати, що при достатній величині n різниця $\theta_{n+1} - \theta_n$ практично буде близька до нуля. Але добре відомо, що в багатьох випадках через повільну збіжність метод послідовних наближень може виявитися мало придатним для одержання ефективних наближених розв'язків.

Припустимо, що основна розбіжність між сусідніми наближеннями θ_n і θ_{n+1} обумовлена різницею зміни їх у часі. Тому, з метою більш швидкого одержання задовільної апроксимації відшуканої функції $\theta(\rho, Fo)$, введемо у рівняння (6.10) додатковий поправочний член $\omega_{n+1}(Fo)$

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) + \omega_{n+1}(\tau) = \frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} \quad (6.11)$$

Збіжність цього алгоритму, природно, буде залежати від того, наскільки вдало вибрана послідовність визначення коректуючої функції $\omega_{n+1}(Fo)$. Щоб виключити небажаний процес “угадання” автором було запропоновано наступний шлях.

Нехай $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ наближений розв'язок рівняння (6.7) потрібної точності. У такому разі можна покласти

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) - \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial Fo} = 0 \quad (6.12)$$

Виконаємо формальне інтегрування рівнянь (6.11) та (6.12) по координаті ρ в межах термічного шару $[\beta(Fo) - 1 \leq \rho \leq 1]$

$$\int_{\beta(Fo)}^1 \frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) d\rho - [1 - \beta(Fo)] \omega_{n+1}(Fo) - \int_{\beta(Fo)}^1 \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial Fo} d\rho = 0;$$

$$\int_{\beta(Fo)}^1 \frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) d\rho - \int_{\beta(Fo)}^1 \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial Fo} d\rho = 0. \quad (6.13)$$

Віднімаючи з першого рівняння друге, знаходимо

$$\omega_{n+1}(Fo) = \frac{1}{1 - \beta(Fo)} \int_{\beta(Fo)}^1 \left(\frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} + \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial Fo} \right) d\rho. \quad (6.14)$$

Цією інтегральною умовою і пропонується визначити присутню в рівнянні (6.11) коректуючу функцію $\omega_{n+1}(Fo)$.

Легко доказати наступну теорему: для забезпечення точності апроксимації $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ у розумінні виконання умови (6.13) на будь-якому кроці розв'язання рівняння (6.11), необхідно і достатньо, щоб коректуюча функція $\omega_{n+1}(Fo)$ визначалася інтегральною умовою (6.14).

Очевидно, що викладки, які привели до умови (6.14), водночас є доказом її необхідності. Підставляючи функцію (6.14) розв'язуюче рівняння (6.11) та інтегруючи його в межах $[\beta(Fo), 1]$, одержуємо інтегральне рівняння (6.14), що і доказує достатність існування виразу (6.14) для забезпечення потрібної точності розв'язку $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ у розумінні (6.13).

Таким чином, запропонований метод можна сформулювати так: якщо відоме n -е наближення $\theta_n(\rho, Fo)$ задачі то (6.7), (6.8), то $(n + 1)$ -а апроксимація $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ визначається розв'язуючим рівнянням (6.11) з крайовими (6.8) та інтегральною (6.14) умовами.

Подальші дії на шляху одержання наближеного розв'язку полягають у наступному.

Інтегруючи розв'язуюче рівняння (6.11) двічі по ρ , маємо

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho^m} \int \rho^m \frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} d\rho - \frac{\omega_{n+1}(Fo)}{m+1} \rho + \frac{A_{n+1}(Fo)}{\rho^m};$$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1}(\rho, Fo) = & \int \frac{1}{\rho^m} \int \rho^m \frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} d\rho d\rho - \frac{\omega_{n+1}(Fo)}{2(1+m)} \rho^2 + \\ & + \frac{A_{n+1}(Fo)}{1-m} \rho^{1-m} + B_{n+1}(Fo). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Функції інтегрування $A_{n+1}(Fo)$ та $B_{n+1}(Fo)$ після використання умов спряження (6.9) виражаються через $\omega_{n+1}(Fo)$ та $\beta(Fo)$, а зв'язок між останніми встановлюється граничною умовою (6.8). Тоді наближений розв'язок $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ стає цілком визначеною функцією ρ, Fo та $\omega_{n+1}(Fo)$:

$$\theta_{n+1}(\rho, Fo) = \theta_{n+1}(\rho; Fo; \omega_{n+1}(Fo)) \quad (6.16)$$

Підстановка цього розв'язку в інтегральну умову (6.14) приводить до звичайного диференціального рівняння відносно ще невідомої функції $\omega_{n+1}(Fo)$. Розв'язанням цього рівняння і закінчується процес одержання апроксимації θ_{n+1} (6.16). Аналогічно розв'язується задача і на другому (впорядкованому) етапі ($Fo^0 \leq Fo < \infty$). Для цього в умові (6.16) треба покласти в $(Fo^0) = 0$, а за початкову умову прийняти (6.5) або (6.6).

Тепер щодо назви методу. Структура розв'язуючого рівняння (6.11) (якщо усунути індекси n та $n+1$) аналогічна рівнянню теплопровідності (4.19) з внутрішніми джерелами. А так як виконуюча роль “джерела” функція $\omega_{n+1}(Fo)$ еквівалентна розбіжності, що виникає при підстановці Θ_{n+1} - в ліву, а Θ_n - в праву частини рівняння (6.11), то викладений метод і одержав назву як “метод еквівалентних джерел” (МЕД).

Треба підкреслити, що головна суть методу полягає не в умові (6.14), визначаючій “еквівалентне джерело” $\omega_{n+1}(Fo)$, а в заміні висхідного рівняння (6.7) розв'язуючим рівнянням МЕД (6.11).

Важливо зазначити, що метод еквівалентних джерел допускає й інші варіанти розв'язуючого рівняння та відповідної інтегральної умови, визначаючої $\omega_{n+1}(Fo)$.

Наприклад, розкривши ліву частину рівняння (6.7), маємо

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{m}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \frac{\partial \theta}{\partial Fo}$$

У такому випадку за розв'язуюче можна взяти рівняння

$$\frac{\partial^2 \theta_{n+1}}{\partial \rho^2} + \omega_{n+1}(Fo) = \frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} - \frac{m}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho}, \quad (6.17)$$

де “еквівалентне джерело” $\omega_{n+1}(Fo)$ уже буде визначатись умовою

$$\omega_{n+1}(Fo) = \frac{1}{1 - \beta(Fo)} \int_{\rho(Fo)}^1 \left[\left(\frac{\partial \theta_n}{\partial Fo} - \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial Fo} \right) - \frac{m}{\rho} \left(\frac{\partial \theta_n}{\partial \rho} - \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \rho} \right) \right] d\rho \quad (6.18)$$

Вирази (6.17), (6.17) надалі будемо називати другим варіантом МЕД, маючи на увазі, що (6.11), (6.14) – перший (основний) варіант. Очевидно, що для пластини ($m = 0$) обидва варіанти тотожні.

Критерієм вибору того чи іншого варіанту МЕД є умова простоти розв'язуючого рівняння: не торкаючись вищої похідної, функцію еквівалентного джерела треба скласти з таких членів висхідного рівняння, щоб одержане розв'язуюче рівняння МЕД інтегрувалось у квадратурах.

Як бачимо, метод еквівалентних джерел теж належить до класу інтегральних методів термічного шару, про що було сказано і раніш (§ 6.2), але за багатьма ознаками вигідно відрізняється від інших.

На відміну від методів Біо, Вейника, Гудмена, Канторовича МЕД не потребує апріорного завдання профілю температурного поля: інтегрування ведеться як у просторі ρ , так і в часі Fo . Отже, залежність відшукуваної функції від усіх змінних встановлюється не вгадуванням, а в процесі розв'язання поставленої задачі. Введення коректуючої функції $\omega_{n+1}(Fo)$ значно покращує збіжність МЕД у порівнянні з ітераційним методом Швеця. Достатня для звичайних

вимог практики точність досягається, як правило, вже у першому наближенні. До того ж, при необхідності, точність розв'язку можна збільшити шляхом одержання вищих апроксимацій за алгоритмом квазіітераційного типу (6.11), (6.14) цілком визначеним у методі.

При використанні МЕД одержуємо розв'язок, єдино можливий для прийнятого варіанту розв'язуючого рівняння. Такою “єдинністю” розв'язку не володіють методи, що базуються на апріорних апроксимаціях, вибір яких важко обґрунтовувати та контролювати, тому що вони залежать від таких чисто суб'єктивних якостей, як досвід та інтуїція дослідника.

У роботі [33] показана ще одна позитивна якість МЕД: після встановлення із розв'язуючого рівняння (6.11) координатної залежності відшукуваної функції $\theta_{n+1}(\rho, Fo)$ “еквівалентне джерело” $\omega_{n+1}(Fo)$ може бути визначене не лише з умов (6.14), але з допомогою й інших інтегральних методів (Біо, Гудмена, Вейника або Канторовича).

Таким чином, застосування основної ідеї методу еквівалентних джерел з подальшим використанням інших методів термічного шару звільняє останні від їх загальних недоліків: зникає проблема апріорного вибору просторової залежності відшукуваної функції; забезпечується певна “єдність” розв'язку; відпадає необхідність пошуку недостаючих умов однозначності; гарантується достатня точність уже першого наближення, а при необхідності мається можливість його уточнення. Запропонований “симбіоз” МЕД із тими методами термічного шару, які до цього базувались на апріорних залежностях, створює перспективи їх подальшого розвитку та уточнення.

Метод еквівалентних джерел знайшов широке застосування при розв'язанні самих різних задач термомеханіки [9, 34, 35 та ін.]. Його ефективність підтверджена багатьма теоретичними і практичними розробками, наприклад [8, 25, 29, 32 та ін.].

ГЛАВА 7

НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТІЛ ОСНОВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

7.1. ЗАГАЛЬНЕ НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНОВИМІРНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Для зручності подальших викладок розташуємо початок координат на поверхні тіла ($\xi = 1 - \rho$). У такому випадку узагальнене рівняння теплопровідності (4.19) пластини ($m = 0$), циліндра ($m = 1$) та кулі ($m = 2$) при $Po = 0$ набуває вигляду

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^m \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad \theta(\xi, 0) = 0, \quad (7.1)$$

де

$$\xi = 1 - r/R; \quad \tau = Fo = at/R^2 \quad (7.2)$$

Зазначимо, що (з метою досягнення певної компактності запису математичних виразів) надалі безрозмірну незалежну змінну часу будемо позначати не символом Фур'є Fo , а буквою τ .

Розв'яжемо рівняння (7.1) в рамках моделі термічного шару.

На інерційному етапі ($0 \leq \xi \leq l(\tau); (0 \leq \tau \leq \tau_0)$) неперервність температурного поля вимагає виконання умов спряження (6.9), які у вибраній системі координат (7.2) мають вигляд

$$\theta_1(\xi, \tau) \Big|_{\xi=l(\tau)} = 0; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} \Big|_{\xi=l(\tau)} = 0, \quad (7.3)$$

де $l(\tau) = L(\tau)/R$ – відносна товщина теплозбуреного (термічного) шару.

За першим варіантом МЕД (6.11), (6.14) у першому наближенні (при $\theta_{l=0} = \theta_0 = 0$) розв'язуюче рівняння буде

$$\frac{1}{(1-\xi)^m} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1-\xi)^m \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} \right] + \omega_{11}(\tau) = 0, \quad (7.4)$$

де

$$\omega_{11}(\tau) = -\frac{1}{l(\tau)} \int_0^{l(\tau)} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \tau} d\xi. \quad (7.5)$$

Інтегруючи рівняння (7.4) двічі по ξ і визначаючи функції інтегрування $A_{11}(\tau)$ та $B_{11}(\tau)$ із умов (7.3), одержуємо

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = -\frac{\omega_{11}(\tau)(1-l)^2}{2(1-m^2)} \left[(1+m) - 2 \left(\frac{1-\xi}{1-l} \right)^{1-m} + (1-m) \left(\frac{1-\xi}{1-l} \right)^2 \right] \quad (7.6)$$

Підставляючи розв'язок (7.6) в інтегральну умову (7.5), після деяких спрощень [34] приходимо до диференціального рівняння

$$\frac{d}{d\tau} [\omega_{11}(\tau) l^3(\tau)] = 6(1+m)\omega_{11}(\tau) l(\tau). \quad (7.7)$$

Якщо використати другий варіант МЕД (6.17), (6.18), то в першому наближенні розв'язуюче рівняння буде

$$\partial^2 \theta_{11} / \partial \xi^2 + \omega_{11}(\tau) = 0, \quad (7.8)$$

де

$$\omega_{11}(\tau) = -\frac{1}{l(\tau)} \int_0^{l(\tau)} \left[\frac{\partial \theta_{11}}{\partial \tau} + \frac{m}{1-\xi} \frac{\partial \theta_{11}}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (7.9)$$

Розв'язання рівняння (7.8) з використанням умов (7.3) дає

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = -\omega_{11}(\tau) l^2(\tau) [1 - \xi/l(\tau)]^2 / 2. \quad (7.10)$$

Підставляючи вираз (7.10) в умову (7.9), після деяких спрощень [34], приходимо до того ж диференціального рівняння (7.7).

Отже, в першому наближенні на інерційному етапі товщина термічного шару визначається диференціальним рівнянням (7.7),

незалежно від вибору варіанта розв'язуючого рівняння МЕД. Температура ж $\theta_{11}(\xi, \tau)$ і зв'язок між функціями $\omega_{11}(\tau)$ та $l(\tau)$ вже залежать від варіанта МЕД, що видно із формул (7.6) та (7.10).

На впорядкованому етапі ($0 \leq \xi \leq 1$; $\tau_0 \leq \tau \leq \infty$ симетричного нагріву має місце умова

$$\left. \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = 0, \quad (7.11)$$

з урахуванням якої обидва варіанти МЕД приводять до однакового розв'язку

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = -\frac{\omega_{21}(\tau)(1-\xi^2)}{2(1+m)} + B_{21}(\tau), \quad (7.12)$$

де

$$\omega_{21}(\tau) = -\int_0^1 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \tau} d\xi = -\frac{d}{d\tau} \int_0^1 \theta_{21}(\xi, \tau) d\xi. \quad (7.13)$$

Ми одержали загальний розв'язок рівняння (7.1). Остаточний же розв'язок відповідних крайових задач одержимо далі, розглянувши різні варіанти граничних умов на поверхні ($\xi = 0$) теплообміну. Цими умовами і визначаються: зв'язок між $\omega_{11}(\tau)$ і $l(\tau)$ – на першому етапі, та функція $B_{21}(\tau)$ – на другому.

7.2. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ І-ГО РОДУ

Нагадаємо, що під граничною умовою І-го роду розуміється завдання зміни температури поверхні тіла взагалі як функції координат і часу $T_{II} = T_C(x, y, z, t)$. В одновимірному випадку, який є предметом нашого розгляду, $T_{II}(t) = T_C(t)$.

Такі граничні умови беруться при формулюванні математичних моделей задач розігрівання кладки печей, термообробки металу з потрібною швидкістю, гартування, витримки, розігрівання або охолодження тіл у рідких середовищах і т.д.

Отже, гранична умова I-го роду має вигляд

$$\theta(\xi, \tau)|_{\xi=0} = \theta_{II}(\tau) = \theta_C(\tau), \quad (7.14)$$

де

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{T(\xi, \tau) - T_0}{T^*}; \quad \theta_C(\tau) = \frac{T(\tau) - T_0}{T^*};$$

T^* – певна (масштабна) температура, наприклад T_0 ; $T_C(0) = T_C^0$; T_C^{\max} ; $T_C^{\max} - T_0$; $T_C^0 - T_0$ та ін.

Так як тривалість τ_0 інерційного етапу відносно мала, то вибір варіанту розв'язку задачі на цьому етапі не повинен суттєво впливати на подальші результати. Тому, для одержання більш простого розв'язку, на інерційному етапі скористуємось функцією $\theta_{11}(\xi, \tau)$ (7.10), одержаною за другим варіантом МЕД. Підставляючи (7.10) в (7.14), знаходимо зв'язок

$$\omega_{11}(\tau) = -2\theta_C(\tau)/l^2(\tau),$$

після чого вирази (7.10) та (7.7) набувають вигляду

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \theta_C(\tau)[1 - \xi/l(\tau)]^2; \quad (7.15)$$

$$\frac{d}{d\tau}[\theta_C(\tau)l(\tau)] = 6(1+m)\theta_C(\tau)/l(\tau). \quad (7.16)$$

Інтегруючи рівняння (7.16) з початковою умовою $l(0) = 0$, одержуємо формули

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{12(1+m)}{\theta_C^2(\tau)} \int_0^\tau \theta_C^2(\eta) d\eta}; \quad (7.17)$$

$$\int_0^{\tau_0} \theta_C^2(\eta) d\eta = \frac{\theta_C^2(\tau_0)}{12(1+m)}, \quad (7.18)$$

визначаючи глибину $l(\tau)$ прогрівання та тривалість τ_0 існування інерційного етапу в кожному конкретному випадку завдання функції $\theta_c(\tau)$.

Зазначимо, що використання розв'язку (7.6) за першим варіантом МЕД замість (7.15) приведе до функції [34]

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) \frac{(1+m)(1-l)^2 - 2(1-l)^{1+m}(1-\xi)^{1-m} + (1-m)(1-\xi)^2}{(1-m) + (1+m)(1-l)^2 - 2(1-l)^{1+m}} \quad (7.19)$$

або, окремо для пластини ($m=0$) (7.15); для циліндра ($m=1$), після розкриття невизначеності виду $0:0$,

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) \frac{(1-\xi)^2 - (1-l)^2 - 2(1-l)^2 \ln[(1-l)/(1-\xi)]}{1 - (1-l)^2 + 2(1-l)^2 \ln(1-l)},$$

для кулі ($m=2$)

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) \frac{(1-\xi)^2 - (1-l)^2 - 2(1-l)^2(l-\xi)}{1 - (1-l)^2 + 2(1-l)^2 \ln(1-l)}$$

За першим варіантом МЕД розв'язок (7.19) дещо складніший, ніж за другим (7.15), але зате він більш точно описує температурне поле в процесі прогрівання циліндра та кулі.

На впорядкованому етапі ($\tau \geq \tau_0$) шукана температурна функція у першому наближенні МЕД має вигляд (7.12). Використовуючи умову (7.14), знаходимо

$$B_{21}(\tau) = \theta_{21}(\xi, \tau)|_{\xi=1} = \theta_{2u}(\tau) = \theta_c(\tau) + \frac{\omega_{21}(\tau)}{2(2+m)}; \quad (7.20)$$

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) + \omega_{21}(\tau) \frac{1 - (1-\xi)^2}{2(1+m)}.$$

Підставляючи функцію (7.20) в інтегральну умову (7.13), приходимо до диференціального рівняння

$$\omega_{21}(\tau) + 3(1+m)\omega_{21}(\tau) = -3(1+m)\theta_c(\tau)$$

з розв'язком [34]

$$\omega_{21}(\tau) = \left\{ \omega_{21}^0 - 3(1+m) \int_{\tau_0}^{\tau} \theta_c(\eta) \exp[3(1+m)(\eta - \tau_0)] d\eta \right\} \times \quad (7.21)$$

$$\times \exp[-3(1+m)(\tau - \tau_0)].$$

Із початкової умови $\theta_{2u}(\tau_0) = \theta_0 = 0$ визначаємо сталу інтегрування

$$\omega_{21}^0 = -2(1+m)\theta_c(\tau_0) = -2(1+m)\theta_c^0,$$

після чого розв'язок (8.20) набуває остаточного вигляду

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) - \Delta\theta_{21}(\tau) [1 - (1 - \xi)^2] \quad (7.22)$$

де введено функцію перепаду температур

$$\Delta\theta_{21}(\tau) = \theta_{2n}(\tau) - \theta_{2u}(\tau) = \left\{ \theta_c^0 - 1,5 \int_{\tau_0}^{\tau} \theta_c(\eta) \exp[3(1+m)(\eta - \tau_0)] d\eta \right\} \times \quad (7.23)$$

$$\times \exp[-3(1+m)(\tau - \tau_0)].$$

Таким чином, одержано наближений розв'язок задачі (7.1), (7.11), (7.14) для загального завдання довільної хоча б ступінчато-неперервної та диференціюємої функції $\theta_c(\tau)$.

У роботах [32, 34] наводяться приклади, ілюструючи достатню збіжність наближеного розв'язку (7.23) з точним [21]. Розглянемо деякі з них.

1. Температура поверхні $\theta_{II}(\tau) = \theta_c = const$; $T^* = T_c + T_0$. Цей найпростіший випадок має практичне застосування при дослідженні температурного стану тіл у рідкому середовищі, при витримці металу в методичних печах або загартуванні в маслі та ін.

Розв'язок (7.15), (7.17), (7.18), (7.22), (7.23) спрощується до вигляду

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = [1 - \xi/l(\tau)]^2; \quad 0 \leq \xi \leq l(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0;$$

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = 1 - \Delta\theta_2(\tau) [1 - (1 - \xi)^2]; \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \tau \geq \tau_0;$$

$$l(\tau) = 2\sqrt{3(1+m)\tau}; \tau_0 = 1/[12(1+m)];$$

$$\Delta\theta_{21}(\tau) = \exp[-3(1+m)(\tau - \tau_0)]. \quad (7.24)$$

2. Температура поверхні змінюється за лінійним законом (4.22)

$$T_c(t) = T_0 + V_T \cdot t; \theta_c(\tau) = Pd \cdot \tau; Pd = \frac{V_T R^2}{aT^*} \quad (7.25)$$

Цей закон використовується, наприклад, при дослідженні та розрахунках теплових процесів розігрівання кладки печей або при термообробці металу з потрібною швидкістю.

Якщо, наслідуючи О.В.Ликова [21], ввести нову функцію температури

$$\bar{\theta}(\xi, \tau) = \theta(\xi, \tau)/(Pd \cdot \tau), \quad (7.26)$$

і визначити при цьому температурний перепад (7.23)

$$\Delta\bar{\theta}(\tau) = \frac{1 - [1 - 2(1+m)\tau_0] \exp[-3(1+m)(\tau - \tau_0)]}{2(1+m)\tau} \quad (7.27)$$

то із виразів (7.15), (7.22) отримуємо

$$\bar{\theta}_{11}(\xi, \tau) = [1 - \xi/l(\tau)]^2; 0 \leq \tau \leq \tau_0; 0 \leq \xi \leq l(\tau);$$

$$\bar{\theta}_{21}(\xi, \tau) = 1 - \Delta\bar{\theta}_2(\tau)[1 - (1 - \xi)^2]; \tau \geq \tau_0; 0 \leq \xi \leq 1; \quad (7.28)$$

$$l(\tau) = 2\sqrt{(1+m)\tau}; \tau_0 = 1/[4(1+m)];$$

Останні формули одержані після підстановки функції (7.25) у вирази (7.17), (7.18).

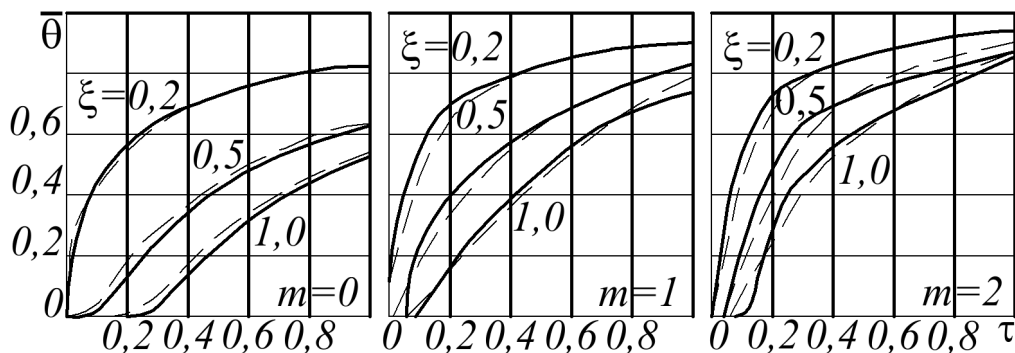


Рис. 7.1. Зміна температурної функції θ в точках перерізу пластини ($m = 0$), циліндра ($m = 1$) та кулі ($m = 2$).

На рис. 7.1 наведені графіки зміни температурної функції $\bar{\theta}(\xi, \tau)$ (7.26) у точках $\xi = 0,2; 0,5; 1,0$ перерізу пластини ($m = 0$), циліндра ($m = 1$) та кулі ($m = 2$), побудовані за точним [21] (штрихові лінії) та наближеним (7.27), (7.28) розв'язками задачі (7.1), (7.14), (7.25). Співставлення показує досить високу точність уже першого наближення МЕД.

7.3. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПРИ СТУПІНЧАТОМУ НАГРІВАННІ ТІЛА

На практиці досить часто використовується ступінчатий режим термообробки, при якому швидкість V_m зміни температури поверхні тіла є сталою, але різною на кожній ступені величиною.

У цьому окремому випадку граничної умови I-го роду (7.14) функцію поверхні тіла в розмірних величинах можна описати виразом

$$T(\xi, t)|_{\xi=0} = T_{II}(t) = T_0 + \sum_{j=1}^{N-1} V_{Tj} \Delta t_{j, j-1} + V_{TN} (t - t_{N-1}), \quad N = k, \quad (7.29)$$

де $\Delta t_{1,0} = t_1$; $\Delta t_{j, j-1} = t_j - t_{j-1}$ ($j = 2, 3, 4, \dots, N-1$); k – кількість усіх ступенів.

Для тіл великої теплової масивності інерційний етап може завершитися на I-й ($i > 1$) ступені, тобто тривалість t_0 прогріву буде знаходитись в інтервалі $t_{i-1} \leq t_0 \leq t_i$.

Використовуючи розв'язки (7.15), (7.22), після повернення до розмірного вигляду та врахуванні функції (8.29), визначаємо [34]

$$\Delta T_{II}(t) = \sum_{j=1}^{p-1} (V_{Tj} - V_{Tj+1}) t_j V_{T.p.} \cdot t; \quad p \leq i; \quad t_{i-1} \leq t \leq t_i; \quad (7.30)$$

$$\Delta T_{21}(t) = \frac{R^2}{2a} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i-1} (V_{T_j} - V_{T_{j+1}}) \frac{t_j}{t_0} - V_{T_i} \right] \Phi_m(t - t_0) + \right. \quad (7.31)$$

$$\left. + 2 \sum_{j=1}^{N-1} (V_{T_j} - V_{T_{j+1}}) \Phi_m(t - t_j) + V_{T_N} / (1 + m) \right\}, \quad j \leq N \leq k, \quad t \geq t_0.$$

Тут введена функція

$$\Phi_m(t - t_j) = \frac{\exp[-3(1+m)(t - t_j)]}{2(1+m)}, \quad m = 0, 1, 2. \quad (7.32)$$

Тоді із розв'язку (7.22) в розмірних величинах одержуємо загальний вираз для температури $T(r, t)$ на N -ій ($i \leq N \leq k$) ступені нагрівання:

$$\Delta T_{21}(r, t) = T_n(t) - \frac{V_{T_N}}{2(1+m)a} (R^2 - r^2) - \frac{R^2 - r^2}{2a} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{i-1} (V_{T_j} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - V_{T_{j+1}}) \frac{t_j}{t_0} - V_{T_i} \right] \Phi_m(t - t_0) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} (V_{T_j} - V_{T_{j+1}}) \Phi_m(t - t_j) \right\}, \quad (7.33)$$

$$N \geq i, \quad t \geq t_0.$$

де температура $T_n(t)$ поверхні задана умовою (7.29), а функції $\Phi_m(\Delta t_{j, j-1})$ формулою (7.32).

Для ілюстрації методики практичного використання цих розв'язків і оцінки їх точності розглянемо два конкретні приклади [34].

Приклад 7.1. Визначити температуру $T_k^* = T(r^*, t_k)$ на відстані $x^* = 0,1$ м від поверхні симетрично нагріваємої сталевій плити ($m = 0$) через час $t_k = 2$ год. після посадки її в піч, якщо $R = 0,2$ м; $r^* = R - x^* = 0,1$ м; $T_0 = 273$ К; $a = 0,02$ м²/год.; $V_{T_2} = 300$ град/год.; $V_{T_3} = -100$ град/год.; $t_1 = 1$ год.; $t_2 = 1,5$ год.; $t_3 = t_k = 2$ год.

Знаходимо температуру поверхні (7.29) в момент $t_k = 2 \text{ год.}$:

$$\begin{aligned} T_n(t_k) &= T_{nk} = T_0 + V_{T1}t_1 + V_{T2}(t_2 - t_1) + V_{T3}(t_3 - t_2) = \\ &= 273 + 500 \cdot 1 + 300(1,5 - 1) - 100(2 - 1,5) = 873 \text{ K.} \end{aligned}$$

За останньою формулою (7.28) (при $m = 0$) визначаємо час закінчення прогріву: $\tau_0 = 0,25$;

$$t_0 = R^2 \tau_0 / a = 0,04 \cdot 0,25 / 0,02 = 0,5 \text{ год.} < t_1.$$

Отже, інерційний етап завершиться на першій ступені ($i = 1$). В такому разі для $r = r^*$ і $t = t_k$ розв'язок (7.33) набуває вигляду

$$\begin{aligned} T_{2k}^*(r^*, t_k) &= T_{nk}^* - \frac{V_{T3}(R^2 - r^{*2})}{2(1+m)a} - \frac{R^2 - r^2}{2a} \{V_{T1}[1 - 0,5\Phi_0(\Delta\tau_{10})] \times \\ &\times \Phi_0(\Delta\tau_{31}) + V_{T2}[1 - \Phi_0(\Delta\tau_{21})]\Phi_0(\Delta\tau_{32}) - V_{T3}\Phi_0(\Delta\tau_{32})\}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Розрахуємо числа Фур'є $\tau_j = F_{oj} = at_j / R^2$, які відповідають часу закінчення ступенів: $\tau_1 = 0,02 \cdot 1 / 0,04 = 0,5$;
 $\tau_2 = 0,02 \cdot 1,5 / 0,04 = 0,75$ $\tau_3 = 0,02 \cdot 2 / 0,04 = 0,5$. Тоді
 $\Delta\tau_{j,j-1} = \tau_j - \tau_{j-1} = 0,25$ ($j = 1, 2, 3$) і $\Delta\tau_{3,1} = \tau_3 - \tau_1 = 0,50$. За формулою (7.32) (при $m = 0$) знаходимо

$$\begin{aligned} \Phi_0(\Delta\tau_{32}) &= 0,5 \cdot \exp(-3 \cdot 0,25) = 0,236 \quad (j = 1, 2, 3) \text{ і} \\ \Phi_0(\Delta\tau_{31}) &= 0,5 \cdot \exp(-3 \cdot 0,50) = 0,112. \end{aligned}$$

Тепер розраховуємо потрібну температуру T_k^* (7.34):

$$\begin{aligned} T_{2k}^* &= 873 - (-100)(0,2^2 - 0,1)/(2 \cdot 0,02) - [(0,2^2 - 0,1^2)/0,02] \times \\ &\times [500(1 - 0,236/2) \cdot 0,112 + 300(1 - 0,236) \cdot 0,236 - (-100) \cdot 0,236] = \\ &= 758 \text{ K.} \end{aligned}$$

Знайдемо і температуру центра ($r = 0$):

$$\begin{aligned} T_{2uk} &= 873 - (-100) \cdot 0,2^2 / (2 \cdot 0,2) - 0,2^2 / 0,02 \cdot [500 \cdot (1 - 0,236/2) \times \\ &\times 0,112 + 300 \cdot (1 - 0,236) \cdot 0,236 - (-100) \cdot 0,236] = 719 \text{ K.} \end{aligned}$$

Аналогічні розрахунки з використанням точного розв'язку [21] задачі (7.1), (7.14) дали такі результати [33]: $T_k^* = 774 \text{ K}$; $T_{uk}^* = 712 \text{ K}$. Розбіжність складає

$$\delta T_k^* = (T_{2k}^* - T_k^*) \cdot 100 / T_k^* = (758 - 774) \cdot 100 / 774 = -2,07\% ;$$

$$\delta T_{uk}^* = (T_{2uk}^* - T_u^*) \cdot 100 / T_{uk}^* = (719 - 712) \cdot 100 / 712 = 1,02 \% .$$

Приклад 7.2. Визначити температурний перепад вздовж радіуса R поперечного перерізу циліндричного ($m=1$) сталевого зливка через $t_k = 3 \text{ год.}$ після посадки, якщо $R = 0,3 \text{ м}$; $T_0 = 273 \text{ K}$; $a = 0,015 \text{ м}^2 / \text{год.}$; $V_{T1} = 300 \text{ град/год.}$; $V_{T2} = 200 \text{ град/год.}$; $V_{T3} = 0$; $V_{T4} = 400 \text{ град/год.}$; $t_1 = 0,5 \text{ год.}$; $t_2 = 1,5 \text{ год.}$; $t_3 = 2 \text{ год.}$; $t_4 = t_k = 3 \text{ год.}$

Як і в прикладі 7.1 розраховуємо $\tau_0 = 1/(4 \cdot 2) = 0,125$; і $t_0 = R^2 \tau_0 / a = 0,09 \cdot 0,125 / 0,015 = 0,75 \text{ год.} > t_1 = 0,5 \text{ год.}$; ($i = 2$). Тоді (при $a/R^2 = 0,015/0,09 = 0,167$) $\Delta\tau_{4,0} = 0,167(3 - 0,75) = 0,375$; $\Delta\tau_{4,1} = 0,167(3 - 0,5) = 0,417$; $\Delta\tau_{4,2} = 0,167(3 - 1,5) = 0,250$; $\Delta\tau_{4,3} = 0,167(3 - 2) = 0,167$ і $\Phi_1(0,375) = 0,027$; $\Phi_1(0,417) = 0,02$; $\Phi_1(0,250) = 0,055$; $\Phi_1(0,167) = 0,093$.

Так як прогрівання закінчується на другій ступені ($t_1 < t_0 < t_2$), то температурний перепад необхідно визначити при $i = 2$; $N = 4$. Підставляючи відповідні дані у вираз (7.31), одержуємо

$$\Delta T_2(t_k) = \{[(300 - 200) \cdot 0,50 / 0,75 - 200] \cdot 0,027 / 2 + (200 - 0) \times \\ \times 0,055 + (0 - 400) \cdot 0,093 + 400 / 4\} \cdot 0,3^2 / 0,15 = 432 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Температуру центра при $t_k = 3 \text{ год.}$ знаходимо за формулою (7.33) (при $m = 1$, $r = 0$; $i = 2$; $N = k = 4$):

$$T_{2uk} = 273 + 300 \cdot 0,5 + 200 \cdot 1 + 0 \cdot 0,5 + 400 \cdot 1 - (0,3^2 / 0,015) \times$$

$$\times 400/[2(1+1)] - (0,3^2/0,015)[(100 \cdot 0,5/0,75 - 200) \cdot 0,027/2 + (200 - 0) \cdot 0,55 + (0 - 400) \cdot 0,093] = 591 \text{ K}.$$

Розраховуючи цей же приклад [21] точним розв'язком одержуємо наступні результати [43]: $\Delta T_k = 427 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_{uk} = 596 \text{ K}$. Похибка складає $\delta(\Delta T_k) = 1,2 \%$; $\delta T_{uk} = -0,9 \%$.

Розглянуті вище приклади показують, що запропонована методика розрахунку багатоступеневого нагрівання за своєю простістю та точністю цілком придатна для практичного використання.

7.4. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ГРАНИЧНОЮ УМОВОЮ II-ГО РОДУ

Нагадаємо, що гранична умова II-го роду передбачає, що питомий тепловий потік на поверхні тіла є наперед відома функція в загальному випадку координат x, y, z і часу t , а в одновимірних тілах – тільки часу $q_n(t)$ (4.10), (4.25)

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -Ki(\tau) \quad (7.35)$$

де $Ki(\tau) = \frac{q_{II}(\tau)R}{\lambda T^*}$ - нестационарний аналог відомого критерію Кірпічова (4.27).

Досить поширений окремий випадок граничної умови II-го роду $q_{II} = const$:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -Ki = const. \quad (7.36)$$

Такі граничні умови приймаються при дослідженні процесів нагрівання металу в нагрівальних колодязях, камерних печах та інших нагрівальних агрегатах.

На інерційному етапі ($0 \leq \tau \leq \tau_0$), підставляючи функцію (7.10) в умову (7.35), виявляємо зв'язок між $\omega_{11}(\tau)$ та $l(\tau)$:

$$\omega_{11}(\tau) = -\frac{Ki(\tau)}{l(\tau)}. \quad (7.37)$$

Після цього вираз (7.10) набуває вигляду

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} Ki(\tau) l(\tau) \left[1 - \frac{\xi}{l(\tau)} \right]^2. \quad (7.38)$$

Розв'язання диференціального рівняння (7.7), з урахуванням (7.37), дає формули [34]

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{6(1+m)}{Ki(\tau)} \int_0^\tau Ki(\eta) d\eta}; \quad (7.39)$$

$$\int_0^{\tau_0} Ki(\eta) d\eta = \frac{Ki(\tau_0)}{6(1+m)} \quad (7.40)$$

визначаючи закон руху фронту $l(\tau)$ та тривалість τ_0 цього етапу. Якщо $Ki = const$, то із виразів (7.39), (7.40) випливають формули $l(\tau) = \sqrt{6(1+m)\tau}$; $\tau_0 = [6(1+m)]^{-1}$. При лінійній зміні $q_n(t) = V_q \cdot t$; $Ki(\tau) = PK \cdot \tau$; $PK = V_q \cdot R^3 / (\lambda a T^*)$, знаходимо $l(\tau) = \sqrt{3(1+m)\tau}$; $\tau_0 = [3(1+m)]^{-1}$.

В час $\tau = \tau_0$ закінчення інерційного етапу температурне поле описується функцією (7.38), у якій треба покласти $l(\tau_0) = 1$:

$$\theta_{11}(\xi, \tau_0) = \theta_1^0(\xi) = \frac{1}{2} Ki(\tau_0)(1 - \xi)^2. \quad (7.41)$$

Для другого етапу ($\tau \geq \tau_0$) розв'язок (7.12) разом з умовою (7.35) дають [34]:

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = B_{21}(\tau) + \frac{1}{2} Ki(\tau)(1 - \xi^2). \quad (7.42)$$

Функція $B_{21}(\tau) = \theta_{21}(\tau)$ визначається інтегральною умовою (7.13):

$$B_{21}(\tau) = \theta_{2y}(\tau) = (1+m) \int_{\tau_0}^{\tau} Ki(\eta) d\eta - \frac{Ki(\tau) - Ki(\tau_0)}{6}. \quad (7.43)$$

Тоді можна записати

$$\theta_{21}(\tau) = \theta_{2y}(\tau) + \Delta\theta_{21}(\tau)(1-\xi)^2, \quad (7.44)$$

де $\theta_{2y}(\tau)$ (7.43), а температурний перепад

$$\Delta\theta_{21}(\tau) = \theta_{2n}(\tau) - \theta_{2y}(\tau) = \frac{Ki(\tau)}{2}. \quad (7.45)$$

Таким чином одержано наближений розв'язок задачі (7.1), (7.35) при довільному законі зміни поверхневого питомого теплового потоку $q_{II}(t)$.

В окремому випадку (7.36) $q_{II}(t) = Ki = const$

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} Ki \left[(1-\xi)^2 + 2(1+m)(\tau - \tau_0) \right],$$

а при $q_{II}(T) = V_q \cdot t$, $Ki(\tau) = PK \cdot \tau$, $PK = \frac{V_q R^3}{\lambda a (T_c - T_0)}$, (7.46)

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \frac{1}{2} PK \cdot \tau \left[(1-\xi)^2 - \frac{1-\frac{\tau_0}{\tau}}{3} + (1+m)\tau \left(1 - \frac{\tau_0^2}{\tau^2} \right) \right].$$

У роботі [34] звертається увага на те, що при $Ki = const$ і в другому наближенні МЕД приводить до того ж виразу (7.46). Це пояснюється тим, що розв'язок (7.46) точно задовольняє вихідному рівнянню (7.1) і всім крайовим умовам для другого етапу. Тому в усіх наближених методах, які використовують апріорний вибір профілю температурного поля, спроба уточнити розв'язок задачі (7.1), (7.36) шляхом підвищення степеня параболи або прийняттям непараболічних координатних функцій приводить до погіршення результатів. Метод же еквівалентних джерел уже в першому наближенні дає найбільш прийнятний розв'язок, то-

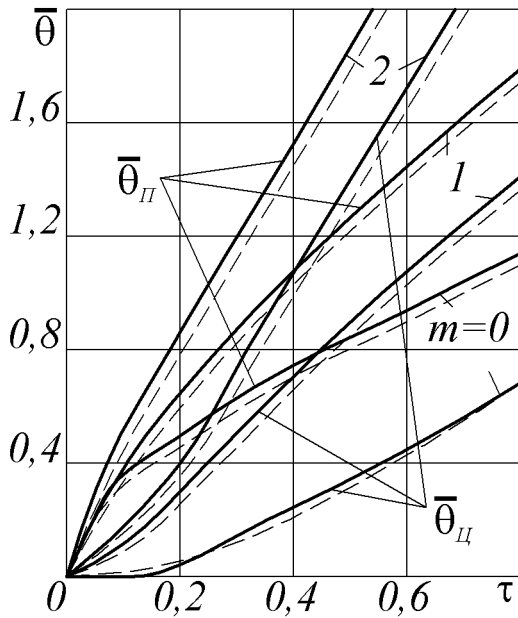


Рис. 7.2. Зміна температурної функції θ поверхні та центра перерізу пластини ($m=0$), циліндра ($m=1$) та кулі ($m=2$).

антові МЕД. При граничній умові (7.36) цей розв'язок набуває вигляду [34]

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = Ki \frac{(1+m)(1-l)^2 - 2(1-l)^{1+m}(1-\xi)^{1-m} + (1-m)(1-\xi)^2}{2(1-m^2)[1-(1-l)^{1+m}]} \quad (7.47)$$

де

$$\left. \begin{aligned} l(\tau) &= \sqrt{6\tau}; \quad \tau_0 = 1/6; \quad (m=0); \\ l^2(\tau) - 4l(\tau) - 8 \ln[1 - l(\tau)/2] &= 24\tau \end{aligned} \right\}; \quad (m=1);$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= (8 \ln 2 - 3)/24 \approx 1/9 \\ \left\{ 1 - \left[\arctg(\sqrt{3} - 21/\sqrt{3}) \right] 3/\pi \right\} 2\pi/\sqrt{3} - 21 - \\ - \ln(1 - l + l^2/3) &= 12\tau \end{aligned} \right\}; \quad (m=2);$$

$$\tau_0 = \left[\pi + \sqrt{3} \ln 3 - 2\sqrt{3} \right] / (12\sqrt{3}) \approx 1/13$$

У роботі [34] розглядається ще один випадок, який має практичне значення. Як відомо, більшість точних розв'язків

тожність якого з розв'язком у другому наближенні й підтверджує цю високу збіжність.

На рис. 7.2 показані графіки температурної функції $\bar{\theta}(\xi, \tau) = \theta(\xi, \tau)/Ki$ для поверхні $\bar{\theta}_n$ та центра $\bar{\theta}_c$ перерізу пластини ($m=0$), циліндра ($m=1$) і кулі $m=2$, побудовані за точним [21] (штрихові лінії) та наближеним (7.47), (7.46) розв'язками задачі (7.1), (7.36). Звертаємо увагу, що на інерційному етапі розрахунки велись [34] за розв'язком (7.6), одержаним згідно першому варі-

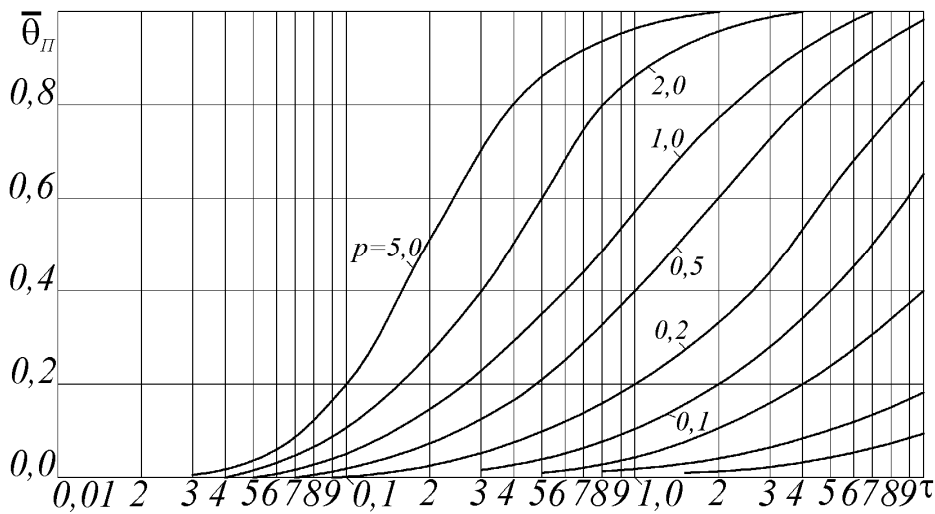
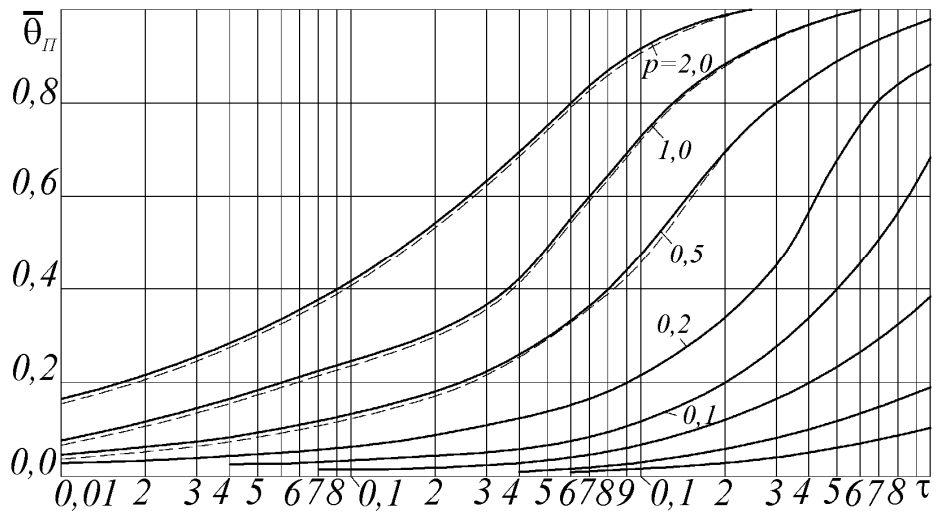


Рис. 7.3. Зміна температурної функції θ поверхні та центру перерізу циліндра.

крайових задач теплопровідності у виразах питомих теплових потоків утримують експоненціальні функції часу. Покладаючи у загальному розв'язку (7.38) ... (7.45)

$$Ki(\tau) = Ki_0 \exp(-p\tau), \quad (7.48)$$

визначаємо [34]

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = Ki_0/2 [1 - \xi/l(\tau)]^2 \exp(-p\tau) \quad (7.49)$$

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = (Ki_0/2) \left\{ (1-\xi)^2 + \frac{2(1+m)}{p} [\exp(p\tau) - \exp(-p\tau)] \right\} \exp(-p\tau); \quad (7.50)$$

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{6(1+m)}{p} [\exp(p\tau) - 1]}; \quad (7.51)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{p} \ln \left[1 + \frac{p}{6(1+m)} \right]$$

Одержаний у роботі [24] точний розв'язок задачі (7.1), (7.35), (7.48) має дуже складний вигляд, тоді як наближений розв'язок (7.49)...(7.51) незрівнянно простіший та практично зручніший. Що стосується точності, то наведені на рис. 7.3 графіки зміни температурних функцій $\bar{\theta}(\xi, \tau) = \frac{p\theta(\xi, \tau)}{2Ki_0}$ поверхні (а) та центра (б) перерізу циліндра, побудовані за точним (штрихові лінії) [24] і наближеним (7.49)...(7.51) розв'язками задачі, показують досить високу збіжність одержаних апроксимацій.

7.5. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЛІНІЙНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ ІІІ-ГО РОДУ

Граничні умови ІІІ-го роду передбачають відомими в загальному випадку нестационарну температуру $T_c(t)$ гріючого середовища, а також закон теплообміну між цим середовищем і поверхнею тіла. В залежності від цього закону граничні умови можуть бути лінійні і нелінійні.

Якщо теплообмін між поверхнею тіла і омиваючим його середовищем відбувається за законом Ньютона-Ріхмана (4.13), (4.28) з нестационарним коефіцієнтом тепловіддачі $\alpha(t)$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -B_i(\tau) [\theta_c(\tau) - \theta_n(\tau)] \quad (7.52)$$

то в теорії теплопровідності цей вираз має назву граничної умови III-го роду, де $B_i(\tau) = \frac{\alpha(\tau)R}{\lambda}$ - нестационарний аналог відомого критерію Bi (4.29).

Умова (7.52) лінійна і описує конвективний теплообмін, який має місце в низькотемпературних печах або зонах, нагрівальних колодязях і рідких середовищах, при охолодженні виробів повітрям, водою та ін.

На інерційному етапі ($0 \leq \tau \leq \tau_0$), підставляючи функцію (7.10) в граничну умову (7.52), одержуємо зв'язок між $\omega_{11}(\tau)$ та $l(\tau)$:

$$\omega_{11}(\tau) = -\frac{2B_i(\tau)\theta_c(\tau)}{[2 + B_i(\tau)l(\tau)]l(\tau)}.$$

Після цього вираз (7.10) і рівняння (7.7) записуються так:

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \frac{\theta_c(\tau)Bi(\tau)l(\tau)}{2 + Bi(\tau)l(\tau)} \left[1 - \frac{\xi}{l(\tau)} \right]^2 = \Delta\theta_{11}(\tau) \left[1 - \frac{\xi}{l(\tau)} \right]^2 \quad (7.53)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{\theta_c(\tau)B_i(\tau)l^2(\tau)}{2 + B_i(\tau)l(\tau)} \right] = 6(1+m) \frac{\theta_c(\tau)B_i(\tau)}{2 + B_i(\tau)l(\tau)}. \quad (7.54)$$

Розглянемо деякі окремі випадки [25, 34], в яких рівняння (7.54) допускає розв'язки у загальному вигляді. Перш за все при $\theta_c(\tau) = const$ рівняння (7.54) має точний розв'язок, який визначається трансцендентним виразом

$$l^2(\tau) + \frac{4l(\tau)}{Bi(\tau)} - \frac{8}{Bi^2(\tau)} \ln \left[1 + \frac{Bi(\tau)l(\tau)}{2} \right] = 12(1+m)\tau. \quad (7.55)$$

Крім цього, можна привести [25, 34] ще два наближені розв'язки рівняння (7.54) для малих і великих B_i :

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{6(1+m)}{Bi(\tau)\theta_c(\tau)} \int_0^\tau Bi(\eta)\theta_c(\eta)d\eta}; \quad Bi(\tau) \ll 2 \quad (7.56)$$

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{12(1+m)}{\theta_c^2(\tau)} \int_0^\tau \theta_c^2(\eta)d\eta}; \quad Bi(\tau)l(\tau) \gg 2. \quad (7.57)$$

При помірних величинах критерію $Bi(\tau)$ необхідно розв'язувати рівняння (7.54) для кожного конкретного випадку завдання функцій $\theta_c(\tau)$ та $Bi(\tau)$.

Час τ_0 закінчення інерційного етапу визначається формулами (7.55)...(7.57) при $l(\tau) = 1$. Якщо $\theta_c = const$, то

$$\tau_0 = \frac{1}{12(1+m)} \left\{ 1 + \frac{4}{Bi(\tau_0)} - \frac{8}{Bi^2(\tau_0)} \ln \left[1 + \frac{Bi(\tau_0)}{2} \right] \right\};$$

при $Bi \ll 2$:

$$\int_0^{\tau_0} Bi(\eta)\theta_c(\eta)d\eta = \frac{Bi(\tau_0)\theta_c(\tau_0)}{6(1+m)}; \quad (7.58)$$

при $Bi \gg 2$:

$$\int_0^\tau \theta_c^2(\eta)d\eta = \frac{\theta_c^2(\tau_0)}{12(1+m)}. \quad (7.59)$$

Покладаючи в (7.53) $\tau = \tau_0$ і $l(\tau) = 1$, одержуємо функцію температури на кінець інерційного етапу

$$\theta_{11}(\xi, \tau_0) = \theta_1^0(\xi) = \frac{\theta_{11}(\tau_0)Bi(\tau_0)}{2 + Bi(\tau_0)}(1 - \xi)^2.$$

На впорядкованому етапі $\tau \geq \tau_0$ загальний наближений розв'язок (7.12) після використання умови (7.52) набуває виразу

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) = \frac{\omega_{21}(\tau)}{2(1+m)} \left[\frac{2 + Bi(\tau)}{Bi(\tau)} - (1 - \xi)^2 \right]. \quad (7.60)$$

Підставляючи функцію (7.60) в умову (7.13), приходимо до диференціального рівняння, із розв'язку якого визначається температурний перепад

$$\theta_{21}(\tau) = -\frac{\omega_{21}(\tau)}{2(1+m)} = \left\{ \frac{Bi(\tau_0)\theta_c(\tau_0)}{2+Bi(\tau_0)} + \right. \\ \left. + 1,5 \int_{\tau_0}^{\tau} g(\eta) \exp \left[\int_{\tau_0}^{\eta} h(\eta') d\eta' \right] d\eta \right\} \exp \left[- \int_{\tau_0}^{\tau} h(\eta) d\eta \right], \quad (7.61)$$

де

$$g(\tau) = \frac{Bi(\tau)\dot{\theta}_c(\tau)}{3+Bi(\tau)}; \quad h(\tau) = 3 \frac{(1+m)Bi^2(\tau) - \dot{Bi}(\tau)}{[3+Bi(\tau)]Bi(\tau)}. \quad (7.62)$$

Після цього одержуємо остаточний розв'язок

$$\theta_{21}(\xi, \tau) = \theta_c(\tau) - \Delta\theta_{21}(\tau) \left[\frac{2+Bi(\tau)}{Bi(\tau)} - (1-\xi)^2 \right] \quad (7.63)$$

Таким чином поставлена задача (7.1), (7.52) розв'язана у загальному вигляді при довільних хоча б кусково-неперервних і диференціюємих функціях в $Bi(\tau)$ та $\theta_c(\tau)$.

Наближеному дослідженню та розрахункам конвективного нагрівання з використанням МЕД присвячені роботи [9,25,32,34,36 та ін.]. Там же дано і порівняння результатів МЕД з іншими наближеними (аналітичними та чисельними) методами, яке показало добру збіжність уже першого наближення МЕД.

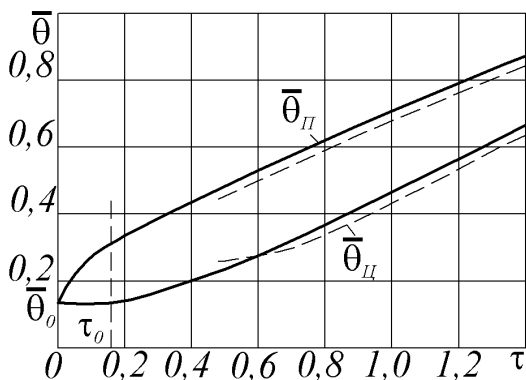


Рис. 7.4. Зміна температурної функції θ поверхні та центра перерізу пластини.

Так, на рис. 7.4 [34], подані графіки зміни температурної функції

$\bar{\theta}(\xi, \tau) = T(\xi, \tau)/T_c^0 = \theta(\xi, \tau) + \bar{\theta}_0$ поверхні $\bar{\theta}_m$ і серединної площини $\bar{\theta}_u$ пластини ($m=0$), побудовані за розв'язками чисельного методу (штрихові лінії) і МЕД (7.53), (7.63) задачі (7.1), (7.52) при наступних даних конвективного теплообміну:

$$Bi(\tau) = Bi_0 \cdot \exp \tau; \quad Bi_0 = 0,5; \quad \bar{\theta}_c(\tau) = 1 + Pd \cdot \tau;$$

$$Pd = 0,075; \quad \bar{\theta}_0 = 0,15.$$

Наведемо ще один приклад. У роботі [34] за розв'язком (7.53), (7.63) були розраховані відносні (T/T_c) температури поверхні $\bar{\theta}$ та центра $\bar{\theta}_y$ перерізу циліндра ($m = 1$) при таких даних:

$$Bi(\tau) = Bi_0 + b \cdot \tau; \quad \bar{\theta}_0 = 0,2; \quad Bi_0 = 1,5; \quad b = 0,45 \quad (7.64)$$

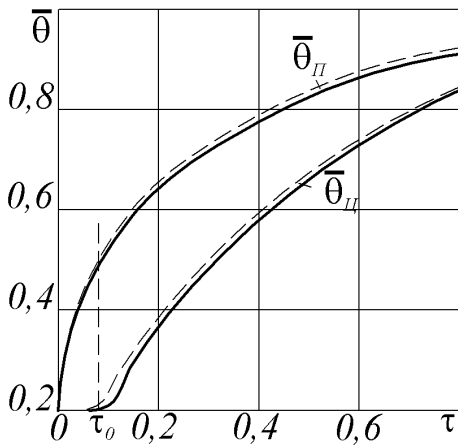


Рис. 7.5. Зміна температурної функції θ поверхні і центра перерізу циліндра.

На рис. 7.5. показані відповідні графіки, одержані за розв'язками МЕД та по номограмам В.В. Саломатова (штрихові лінії). Тепер розглянемо випадок конвективного нагрівання (чи охолодження) при постійному КТО ($\alpha = const$) і нестационарній температурі $T_c(t)$ гріючого середовища. Покладаючи в загальному розв'язку (7.53)...(7.57), (7.61)...(7.63) $Bi(\tau) = Bi = const$, маємо [34]:

$$\theta_1(\xi, \tau) = \begin{cases} \frac{\theta_c(\tau)Bi l(\tau)}{2 + Bi l(\tau)} \left[1 - \frac{\xi}{l(\tau)} \right]^2, & 0 \leq \xi \leq l(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0; \\ \theta_c(\tau) - \Delta\theta_{21}(\tau) \left[(2 + Bi)/Bi - (1 - \xi)^2 \right], & \\ 0 \leq \xi \leq 1; \quad \tau_0 \leq \tau < \infty, & \end{cases} \quad (7.65)$$

де

$$\Delta\theta_{21}(\tau) = \left\{ \frac{\theta_c(\tau_0)Bi}{2 + Bi} + \frac{1,5Bi}{3 + Bi} \int_{\tau_0}^{\tau} \dot{\theta}_c(\eta) \exp[\mu_m(\eta - \tau_0)] d\eta \right\} \exp[\mu_m(\tau - \tau_0)];$$

$$\mu_m = \frac{3(1+m)Bi}{3 + Bi}. \quad (7.66)$$

Товщина $l(\tau)$ прогрітого шару при помірних величинах B_i визначається розв'язком диференціального рівняння (7.54), а в розглянутих раніш окремих випадках малих та великих B_i - формулами (7.57), (7.59) ($B_i l(\tau) \gg 2$) та (7.56), (7.58) (при $B_i = \text{const} \ll 2$):

$$l(\tau) = \sqrt{\frac{6(1+m)}{\theta_c(\tau)} \int_0^\tau \theta_c(\eta) d\eta}; \quad \int_0^\tau \dot{\theta}_c(\eta) d\eta = \frac{\theta_c(\tau_0)}{6(1+m)}. \quad (7.67)$$

У граничному випадку $B_i \rightarrow \infty$ функції (7.65)...(7.67) перетворюються у розв'язки (7.15)...(7.18), (7.22), (7.23) при граничній умові I-го роду (7.14).

Одержані наближені розв'язки задач теплопровідності з нестационарними лінійними граничними умовами мають при очевидній простоті достатню для повсякденної практики точність і пропонуються для відповідних термомеханічних розрахунків.

7.6. РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПОРОЖНИСТИХ ТІЛ

7.6.1. Загальний розв'язок

В різних галузях техніки широке застосування знаходять як цілі конструкції, так і окремі їх елементи типу порожнистих циліндра або кулі. В металургії та теплоенергетиці це, наприклад, кожухи або корпуси печей, петльові рекуператори, різні трубопроводи, ролики МНРС та пічних рольгангів, глісажні труби, котли та ін. Тому розрахунки температурного і термонапруженого стану таких об'єктів мають неабияке і практичне значення.

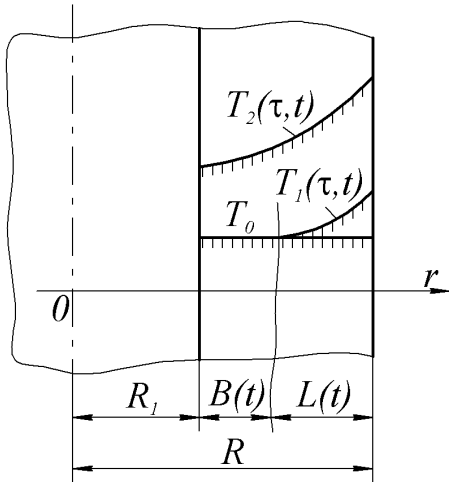


Рис. 7.6. Модель термічного шару для порожнистого циліндра з ізолюваною внутрішньою поверхнею.

Розглянемо симетричне нагрівання порожнистого циліндра ($m=1$) та кулі ($m=2$) збоку зовнішньої поверхні ($r=R$). Внутрішню поверхню ($r=R_1$) приймемо теплоізолюваною (див. рис. 7.6). В цьому випадку розв'язок задачі для інерційного періоду буде таким же, як і для суцільних тіл, з тою лише різницею, що прогрівання порожнистого тіла закінчується при

$$Li(t_0) = R - R_1;$$

$$l(\tau) = 1 - k; \quad k = R_1/R.$$

Для одержання розв'язків на впорядкованому етапі зручніше розмістити початок координат у центрі перерізу ($\rho = 1 - \xi$) (рис. 7.6), після чого рівняння (7.1) набуває вигляду (6.1)

$$\frac{1}{\rho^m} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^m \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}; \quad \theta_2(\rho, \tau_0) = \theta_1(\rho, \tau_0). \quad (7.68)$$

$$(k \leq \rho \leq 1; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \infty).$$

У відповідності з введеним вище припущенням про теплоізоляцію внутрішньої поверхні одною з граничних умов

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=k} = 0 \quad (7.69)$$

Загальний розв'язок (6.15) рівняння (7.68) за першим варіантом МЕД (6.11), (6.14) у першому наближенні ($\theta_{n=0} = 0$) має вигляд

$$\theta_{21}(\rho, \tau) = B_{21}(\tau) + \frac{A_{21}(\tau)}{1-m} \rho^{1-m} - \frac{\omega_{21}(\tau)}{2(1+m)} \rho^2. \quad (7.70)$$

Підставляючи вираз (7.70) в умову (7.69), визначасмо $A_{12}(\tau)$,

після чого маємо

$$\theta_{21}(\rho, \tau) = \theta_{2n_1}(\tau) - \frac{\omega_2(\tau)}{2(1-m^2)} \left[(1-m)\rho^2 + (1+m)k^2 - 2k^{1+m}\rho^{1-m} \right], \quad (7.71)$$

де, подібно (7.12),

$$\omega_2(\tau) = -\frac{1}{1-k} \int_k^1 \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \tau} d\rho = -\frac{1}{1-k} \frac{d}{d\tau} \int_k^1 \theta_{21}(\rho, \tau) d\rho. \quad (7.72)$$

Якщо ж поставлену задачу (7.68), (7.69) розв'язувати за другим варіантом МЕД (6.17), (6.18), то у першому наближенні ($n=0$) шукана функція, очевидно, буде мати вигляд

$$\theta_{21}(\rho, \tau) = B_{21}(\tau) + A_2(\tau)\rho - \omega_{21}(\tau)\rho^2/2,$$

або, після використання умови (6.18)

$$\theta_{21}(\rho, \tau) = \theta_{2n_1}(\tau) - \omega_{21}(\tau)(\rho - k)^2/2. \quad (7.73)$$

У цьому варіанті МЕД, згідно

$$\omega_{21}(\tau) = -\frac{1}{1-k} \int_k^1 \left(\frac{\partial \theta_{21}}{\partial \tau} - \frac{m}{\rho} \frac{\partial \theta_{21}}{\partial \rho} \right) d\rho. \quad (7.74)$$

Розпишемо одержані загальні розв'язки задач теплопровідності порожнистих тіл для різних умов теплообміну на “активній” поверхні ($\rho=1$).

7.6.2. Гранична умова I-го роду

Якщо на теплосприймаючій поверхні здійснюється температурний удар

$$\theta(\rho, \tau)|_{\rho=1} = 1,$$

то за першим варіантом МЕД (7.71) знаходимо

$$\theta_2(\rho, \tau) = 1 + \frac{\omega_2(\tau)}{2(1-m^2)} \left[(1-m)(1-\rho^2) - 2k^{1+m}(1-\rho^{1-m}) \right]. \quad (7.75)$$

Підстановка функції (7.75) в інтегральну умову (7.74) при-

водить до диференціального рівняння типу $\frac{d\omega_2}{\omega_2} = C \cdot d\tau$, інтеграл

якого має вигляд

$$\omega_2(\tau) = \omega_2(\tau_0) \exp \left[\frac{6(1+m)(\tau - \tau_0)}{(1-k)(2+k)(1-2k^{1+m}\chi_m)} \right],$$

де введено позначення

$$\chi_m = \left(1 + \frac{k^{2-m}}{1-k} \ln k \right) / (3-2m),$$

яке одержується після розкриття невизначенності виду 0:0 при підстановці значень $m=1$ або $m=2$.

Використовуючи розв'язок (7.75) і очевидну початкову умову $\theta_2(k, \tau_0) = \theta_{2m_1}(\tau_0) = 0$ знаходимо

$$\omega_2(\tau_0) = -2(1-m^2) / [(1-m) + (1+m)k^2 - 2k^{1+m}].$$

Таким чином функція (7.75) набуває остаточного вигляду

$$\theta_2(\rho, \tau) = 1 - \frac{(1-m)(1-\rho^2) - 2(1-\rho^{1+m})k^{1+m}}{(1-m) + (1+m)k^2 - 2k^{1+m}} \times \\ \times \exp \left[- \frac{6(1+m)(\tau - \tau_0)}{(1-k)(2+k)(1-2k^{1+m}\chi_m)} \right].$$

Якщо ж цю задачу розв'язувати за другим варіантом МЕД (7.73), то після всіх аналогічних попереднім викладень одержуємо

$$\theta_2(\rho, \tau) = 1 - \frac{1-2k(1-\rho) - \rho^2}{(1-k)^2} \times \exp \left[-3 \frac{(1-k)(1+m) + mk \ln k}{(1-k)^3} (\tau - \tau_0) \right].$$

7.6.3. Гранична умова II-го роду

При тепловому ударі на теплосприймаючий поверхні

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Ki.$$

за першим варіантом МЕД (9.128) маємо (7.76)

Підставляючи (7.76), (7.71) в (7.72) і враховуючи початкову умову $\theta_2(k, \tau_0) = 0$, визначаємо функцію

$$\theta_{2n_1}(\tau) = (1+m)Ki(\tau - \tau_0)/(1 - k^{1+m}).$$

Після цього розв'язок (7.71) набуває вигляду

$$\theta_2(\rho, \tau) = \frac{Ki}{2(1 - k^{1+m})} \times \left[(\rho^2 - k^2) + \frac{2k^2}{1-m} \left(1 - \frac{\rho^{1-m}}{k^{1-m}} \right) + 2(1+m)(\tau - \tau_0) \right]. \quad (7.77)$$

За другим же варіантом МЕД розв'язок (7.73) має вираз

$$\theta_2(\rho, \tau) = \frac{Ki}{2(1-k)} \left[(\rho - k)^2 + 2(1-m) \left(1 + \frac{m}{1+m} \frac{k \ln k}{1-k} \right) (\tau - \tau_0) \right]. \quad (7.78)$$

Відомо, що при нагріванні тіла незмінним тепловим потоком на регулярному етапі досить швидко встановлюється сталий перепад температур.

Одержані тут наближені розв'язки дають наступні формули для визначення температурних перепадів по товщині стінки порожнистих тіл:

за першим варіантом (7.77)

$$\Delta\theta_2 = \frac{Ki}{2} \left[1 - \frac{2k^{1+m} - (1+m)k^2}{1-m} \right] / (1 - k^{1+m}); \quad (7.79)$$

за другим варіантом (7.78)

$$\Delta\theta_2 = \frac{Ki}{2} (1-k). \quad (7.80)$$

На рис. 7.7 показані порівняльні графіки зміни узагальненого температурного перепаду $\Delta\bar{\theta}_2 = 2\Delta\theta_2/Ki$ в залежності від параметра $k = R_1/R$.

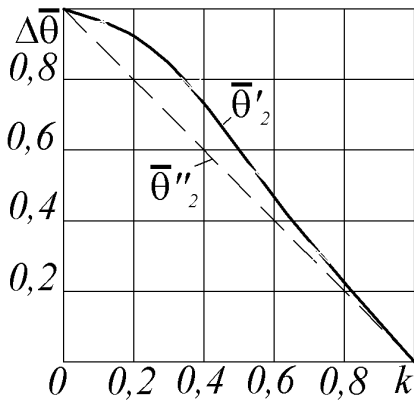


Рис. 7.7. Визначення температурного перепаду $\Delta\bar{\theta}_2 = 2\Delta\theta_2/Ki$ за першим ($\Delta\theta'$), другим ($\Delta\theta''$) варіантами МЕД та точними розв'язками задачі.

З цих графіків видно, що перший варіант МЕД (на рис. 7.7 суцільна лінія) привів до формули (7.79), результати розрахунку за якою практично співпадають з даними точного розв'язку [21] (крапки на кривій $\Delta\bar{\theta}'_2$).

Стосовно ж формули (7.80), одержаної за другим варіантом МЕД (на рис. 7.7 штрихова лінія), то її можна пропонувати для відповідних розрахунків порожнистих тіл з відносно тонкими стінками ($\approx 0,8 \leq k < 1$).

7.6.4. Гранична умова III-го роду

Якщо на зовнішній поверхні здійснюється конвективний теплообмін

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = Bi[1 - \theta_{2m}(\tau)],$$

то за другим варіантом МЕД (7.73), (7.74) в уже звичній послідовності приходимо до наступної функції температури:

$$\theta_2(\rho, \tau) = 1 - \frac{Bi}{(1-k)[2 + Bi(1-k)]} \left[\frac{Bi + 2(1-k)}{Bi} - 2k(1-\rho) - \rho^2 \right] \times \\ \times \exp \left\{ -3(1+m) \frac{Bi \left(1 + \frac{m}{1+m} \frac{k \ln k}{1-k} \right)}{(1-k)[3 + (1-k)Bi]} (\tau - \tau_0) \right\}.$$

За першим варіантом МЕД (7.71), (7.72) аналогічний розв'язок теж отримати неважко, але він більш громіздкий (про-

понуємо це зробити самостійно читачеві, хоча б заради цікавості).

На закінчення цього підрозділу слід зазначити, що усі наведені тут формули та функції $\theta_2(\rho, \tau)$ (як за першим, так і за другим варіантом МЕД) при $k = 0$ співпадають з розв'язками відповідних задач симетричного нагрівання суцільних тіл, викладеними у §§7.2; 7.4; 7.5.

7.7. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ПЛИТИ ПРИ НЕСИМЕТРИЧНОМУ НАГРІВАННІ

До цих пір ми розглядали задачі теплопровідності в такій постановці, що одною з крайових умов була відсутність теплового потоку або в центрі перерізу тіла (умова симетрії), або на внутрішній поверхні (для симетричного нагрівання зовні порожнистих тіл).

На конкретній задачі покажемо можливість використання МЕД для наближеного розв'язання задач теплопровідності при несиметричному нагріванні тіл.

Розглянемо нагрівання плити товщиною H , (рис. 7.8), на

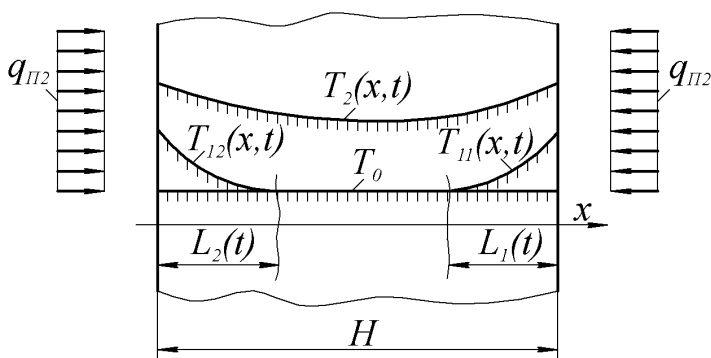


Рис. 7.8. Схема несиметричного нагрівання плити в рамках МТШ.

бокових поверхнях якої здійснюється конвективний теплообмін з різними коефіцієнтами тепловіддачі α_1 та α_2 .

При дослідженні інерційного періоду скористуємось результатами одержаними в § 7.5.

Згідно прийнятим там позначенням наближені температурні функції, що описують температурне поле плити на стадії прогріву, мають вигляд

$$\theta_{11}(\xi, \tau) = \frac{Bi_1 l_1(\tau)}{2 + Bi_1 l_1(\tau)} \left[1 - \frac{1 - \xi}{l_1(\tau)} \right]^2, \quad 1 - l_1(\tau) \leq \xi \leq 1; \quad (7.81)$$

$$\theta_{12}(\xi, \tau) = \frac{Bi_2 l_2(\tau)}{2 + Bi_2 l_2(\tau)} \left[1 - \frac{1 - \xi}{l_2(\tau)} \right]^2, \quad 0 \leq \xi \leq l_2(\tau). \quad (7.82)$$

Товщини $l_1(\tau)$ та $l_2(\tau)$ прогрітих зон визначаються рівняннями (7.55)

$$l_j^2(\tau) + 4 \frac{l_j(\tau)}{Bi_j} - \frac{8}{Bi_j^2} \ln \left[1 + \frac{Bi_j l_j(\tau)}{2} \right] = 12\tau, \quad j = 1; 2. \quad (7.83)$$

Коли два фронти теплового збурення зустрінуться, то цим часом будемо визначати період τ_0 початкового прогрівання плити. Очевидно, що в цей момент виконується умова

$$l_1(\tau_0) + l_2(\tau_0) = 1 \quad (7.84)$$

Прирівнюючи ліві частини виразів (7.83) ($j = 1$ та $j = 2$) при $\tau = \tau_0$ і враховуючи (7.8), приходимо до наступного трансцендентного рівняння:

$$\begin{aligned} & \frac{4 + Bi_1}{Bi_1} - 2l_2^0 \frac{2Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + 2Bi_2}{Bi_1 Bi_2} = \\ & = \frac{8}{Bi_1^2} \ln \left[1 + \frac{Bi_1(1 - l_2^0)}{2} \right] - \frac{8}{Bi_2^2} \ln \left[1 + \frac{Bi_2 l_2^0}{2} \right], \end{aligned} \quad (7.85)$$

з якого (або способом ітерацій, або графічно) можна визначити величину $l_2^0 = l_2(\tau_0)$ а потім по формулі (7.83) ($j = 2$) розрахувати і тривалість τ_0 прогріву плити.

Для визначення температурного поля в упорядкований період ($\tau \geq \tau_0$) необхідно розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}. \quad (7.86)$$

при наступних крайових умовах:

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\xi=0} = -Bi_2 [1 - \theta_2(0, \tau)]; \quad (7.87)$$

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \rho} \right|_{\xi=1} = Bi_1 [1 - \theta_2(1, \tau)]; \quad (7.88)$$

$$\theta_2(l_2^0, \tau_0) = 0. \quad (7.89)$$

Після інтегрування розв'язуючого рівняння МЕД (7.11) (при $m = 0$; $n = 0$)

$$\frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi^2} + \omega_2(\tau) = 0;$$

$$\omega_2(\tau) = -\frac{d}{d\tau} \int_0^1 \theta_2(\xi, \tau) d\xi.$$

з урахуванням умов (7.87)...(7.89) одержуємо шуканий розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} \theta_2(\xi, \tau) = & 1 - \frac{4(Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2)^2}{(2 + Bi_1)(2 + Bi_2)(2Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + 2Bi_2)} \times \\ & \times \left[\frac{(2 + Bi_1)(2 + Bi_2 \xi)}{Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2} - \xi^2 \right] \times \\ & \times \exp \left[\frac{12(Bi_1 + Bi_1 Bi_2 + Bi_2)(\tau - \tau_0)}{2(2 + Bi_1) + 2(2 + Bi_2) + (2 + Bi_1)(2 + Bi_2)} \right]. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Зазначимо, що з рівняння (7.85) отримати загальний аналітичний вираз для l_2^0 у явному вигляді практично неможливо. Тому при використанні початкової умови (7.89) значення l_2^0 відшукувалось [36] із умови

$$\left. \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} \right|_{\xi=l_2^0} = 0,$$

що привело до досить простої формули

$$l_2^0 = (2 + Bi_1)Bi_2 / [2(Bi_1 + Bi_1Bi_2 + Bi_2)],$$

яка дає незначні відхилення від розрахунків за рівнянням (7.85).

Отже, вирази (7.81)...(7.83), (7.90) і складають наближений розв'язок поставленої задачі. При $Bi_1 = Bi_2 + 2Bi$ одержуємо розв'язки (7.65)...(7.67) ($m = 0$; $\theta_c = 1$; $H = 2R$).

При $Bi_2 = 0$; $Bi_1 = Bi$ функція (7.90) дає розв'язок [25, 34, 36]

$$\theta_2(\xi, \tau) = 1 - \frac{Bi}{2 + Bi} \left(\frac{Bi}{2 + Bi} - \xi^2 \right) \exp \left[-\frac{3Bi(\tau - \tau_0)}{3 + Bi} \right]. \quad (7.91)$$

задачі теплопровідності при однобічному нагріванні плити з тепловою ізоляцією протилежної ($\xi = 0$) поверхні. Наведене на рис. 7.7 ($a - \xi = 0$; $\delta - \xi = 1$) співставлення наближеного (7.91) та точного [21] (штрихові лінії) розв'язків задачі однобічного конвективного нагрівання плити при різних величинах критерію $Bi = 0,1; 1,0; 10$ показує достатню для практики точність одержаних наближених формул.

Якщо на поверхні $\xi = 0$ в процесі однобічно конвективно нагріваємої плити весь час підтримується початкова температура $[\theta_2(0, \tau)] = 0$, то МЕД приводить [35] наступного наближеного розв'язку на впорядкованому етапі нагрівання:

$$\theta_2(\xi, \tau) = \frac{Bi\xi}{1 + Bi} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{1 + Bi}{2 + Bi} \xi \right) \exp \left[-\frac{12(1 + Bi)}{4 + Bi} (\tau - \tau_0) \right] \right\} \quad (7.92)$$

інерційний етап ($0 \leq \tau \leq \tau_0$) розраховується за формулами § 7.5.

Граничним переходом ($Bi \rightarrow \infty$) із виразу (7.92) одержуємо розв'язок

$$\theta_2(\xi, \tau) = \xi \{ 1 - (1 - \xi) \exp[-12(\tau - \tau_0)] \}, \quad (7.93)$$

аналогічної задачі теплопровідності з умовою теплообміну першого роду ($\theta(1, \tau) = 1$).

Для повноти дамо в готовому вигляді розв'язок задачі одnobічного нагрівання плити сталим тепловим потоком (4.25) ($Ki = const$):

$$\theta_2(\xi, \tau) = Ki\xi \{1 - (1 - \xi/2)\exp[-3(\tau - \tau_0)]\}.$$

На заключення зазначимо, що багато розглянутих тут задач добре вивчено з допомогою точних методів. Але ми детально зупинились на них, по-перше, для більш повної ілюстрації МЕД і його відмінності від інших МТШ, а, по-друге (і це головне), для подальшого використання одержаних наближених розв'язків різних задач теплопровідності при дослідженні термонапруженого стану тіл.

ГЛАВА 8

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН (ТНС) ТІЛ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

8.1. ПОПЕРЕДНІ ЗАУВАЖЕННЯ. ТНС НЕОБМЕЖЕНОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ СТАЦІОНАРНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

У главі 3 викладені точні розв'язки задач прикладної термопружності, а в главі 5 – точні розв'язки стаціонарних задач теплопровідності для тіл плоскої, циліндричної та сферичної геометрії.

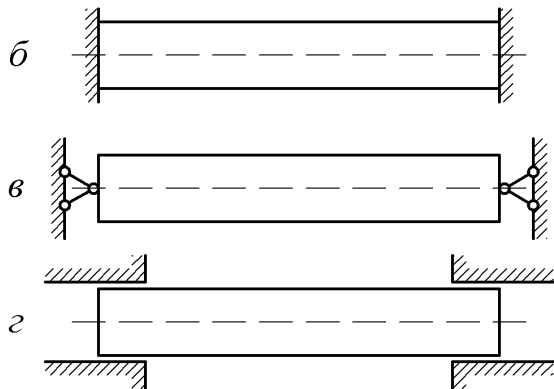


Рис. 8.1. Закріплення плити невіддатливими опорами.

Наявність розв'язків задач прикладної термомеханіки дозволяє одержати формули для аналізу та розрахунку термонапруженого стану тіл в умовах стаціонарного температурного режиму.

Розглянемо необмежену пластину, повністю вільну від зовнішніх зв'язків (рис. 8.1, а).

У такому випадку її термонапружений стан буде визначатись виразом (3.6), який у безрозмірних величинах (5.2) та

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{K_{\sigma}}; \quad K_{\sigma} = \frac{\alpha_T E T^*}{1-\nu} \quad (8.1)$$

($T^* = T_{C2} - T_{C1}$) набуває наступного вигляду:

$$\bar{\sigma}(\xi) = \int_0^1 \theta(\xi) d\xi + 12(\xi - 1/2) \int_0^1 \theta(\xi)(\xi - 1/2) d\xi - \theta(\xi). \quad (8.2)$$

Підставляючи в (8.2) температурну функцію $\theta(\xi)$ (5.9), переконуємось, що $\bar{\sigma}(\xi) \equiv 0$. Отже, якщо у повністю вільній пластині температурне поле розподіляється по товщині за лінійним законом (5.5), то температурні напруження у ній будуть відсутні. При наявності ж зв'язків, так чи інакше обмежуючих деформаційне реагування пластини на її температуру, у ній з'являться температурні напруження.

Так, у § 3.2 зазначалось, що при повному закріпленні торців пластини із розв'язків (3.6), (8.2) треба вилучити перші два доданки. У такому випадку, з урахуванням (5.5), маємо

$$\bar{\sigma}(\xi) = -\theta(\xi) = -[\theta_{II1} + \Delta\theta\xi]. \quad (8.3)$$

По всьому перерізу пластини діють стискуючі температурні напруження, які на поверхнях досягають величин

$$\bar{\sigma}(0) = -\theta_{II1}; \quad \bar{\sigma}(10) = -\theta_{II2}.$$

Таким чином, поле температурних напружень (8.3) тотожне з полем температур (рис. 8.2, а та б).

Якщо накладені на торці пластини зв'язки виключають можливість лише її повздовжнього видовження (рис. 8.1, в), то із формул (3.6), (8.2) треба відкинути перший доданок. Отже, в цьому випадку

$$\bar{\sigma}(\xi) = -12(\xi - 1/2) \int_0^1 \theta(\xi)(\xi - 1/2) d\xi - \theta(\xi), \quad (8.4)$$

що, після підстановки функції (5.5), приводить до виразу

$$\bar{\sigma}(\xi) = -\tilde{\theta} = const, \quad (8.5)$$

де введена середня температура $\tilde{\theta} = (\theta_{II1} - \theta_{II2})/2$.

Отже поле напружень (8.5) рівномірне (рис. 8.2, в), що повністю відповідає характеру закріплення, виключаючому осьове

розширення. У цьому випадку виникають лише поздовжні стискуючі зусилля N , які викликають стискуючі напруження

$$\sigma = N/A. \quad (8.6)$$

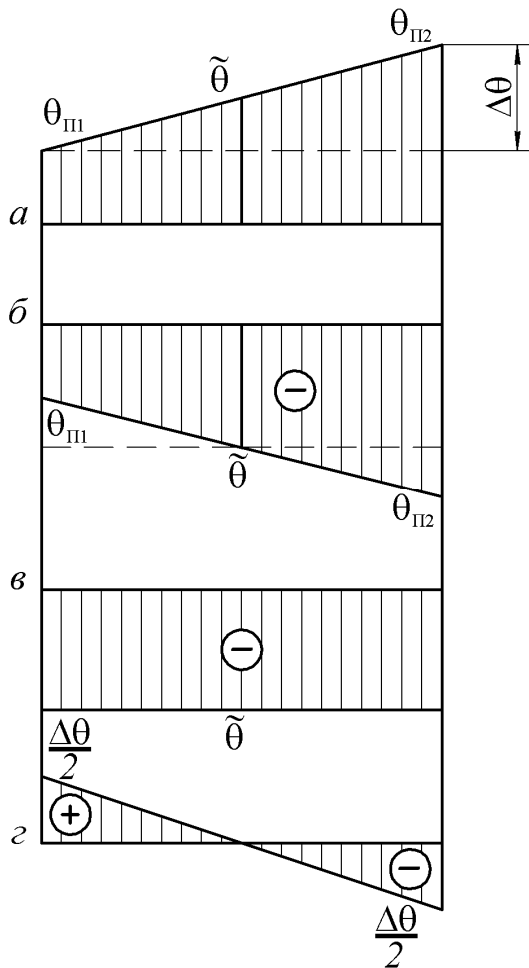


Рис. 8.2. Розподіл температури (а) і температурних напружень (б, в, г) по перерізу плити при різних варіантах її закріплення.

можливість її вигину (рис. 8.1, г). У такому разі треба відкинути у формулах (3.6), (8.2) другий доданок, що приводить до виразу

$$\bar{\sigma}(\xi) = \int_0^1 \theta(\xi) d\xi - \theta(\xi),$$

а після підстановки $\theta(\xi)$ (5.5) до функції

Якщо повернутись до розмірних величин (8.1) і прирівняти праві частини виразів (8.6), (8.5), то знайдемо відповідне еквівалентне зусилля

$$N_e = \alpha_T EA \tilde{T} / (1 - \nu), \quad (8.7)$$

де $\tilde{T} = [(T_{II1} + T_{II2})/2 - T_{C1}]$ - надлишкова (перевищення над $\min T_C = T_{C1}$) середня температура. Про це вже йшла мова у розд. 2, але тут формула (8.7) для пластини, на відміну від подібної формули (2.33) для стержня, утримує параметр ν (коефіцієнт Пуассона). Це пояснюється тим, що у стержні діє одновісний (лінійний) напружений стан, а в пластині – двовісний (плоский).

Тепер розглянемо ще один можливий випадок закріплення торців пластини: відсутня лише

відсутня лише

$$\bar{\sigma}(\xi) = \Delta\theta(1 - 2\xi)/2. \quad (8.8)$$

Отже, температурні напруження по товщині плити розподіляються, як і температура, за лінійним законом і досягають найбільших значень $\bar{\sigma}_{\max} = \pm \Delta\theta/2$ на поверхнях ($\xi = 0$ - розтягуючих та $\xi = 1$ - стискуючих) (рис. 8.2, з). Це теж відповідає суті закріплення (рис. 8.1, з): воно перешкоджає поворотів торця плити. Отже, з боку опори на плиту діє реактивний момент M_B , який викликає напруження згину

$$\sigma(y) = \frac{M_B}{I_z} y. \quad (8.9)$$

Якщо у формулі (7.8) ввести нову координату $y = x - H/2$ і, після повернення до розмірних величин (8.1), прирівняти праві частини виразів (8.8) та (8.9), то одержимо

$$M_B = \frac{\alpha_T EI}{(1 - \nu)H} \Delta T, \quad (8.10)$$

що співпадає з відповідним виразом (2.33) (з вище поданими поясненнями появи коефіцієнта ν).

З рис. 8.2 видно, що напружений стан (б) є суперпозиція напружених станів (в) та (з).

8.2. ТНС НЕОБМЕЖЕНОГО ЦИЛІНДРА ПРИ СТАЦІОНАРНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

Використовуючи безрозмірні величини (5.28), (5.1), загальний розв'язок (3.12), (3.14) та (3.17), (3.18) задачі термонапруженості циліндра можна записати у вигляді

$$\bar{\sigma}_r(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \theta(\rho) \rho d\rho - \int_k^\rho \theta(\rho) \rho d\rho \right]; \quad (8.11)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \theta(\rho) \rho d\rho + \int_k^\rho \theta(\rho) \rho d\rho - \rho^2 \theta(\rho) \right]; \quad (8.12)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho) = \frac{2j}{1 - k^2} \int_k^1 \theta(\rho) \rho d\rho - \theta(\rho), \quad (8.13)$$

де введено коефіцієнт j , об'єднуючий в один вираз формулу осьових напружень $\bar{\sigma}_z$ для вільного ($j=1$) та закріпленого ($j=\nu$) циліндра.

Підставляючи в (8.11)...(8.13) одержаний в § 5.3 розв'язок $\theta(\rho)$ (5.32) відповідної стаціонарної задачі теплопровідності, маємо

$$\bar{\sigma}_r(\rho) = \frac{\Delta\theta}{2 \ln k} \left(\ln \rho - \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} \frac{k^2}{\rho^2} \ln k \right); \quad (8.14)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho) = \frac{\Delta\theta}{2 \ln k} \left(1 + \ln \rho + \frac{1 + \rho^2}{1 - k^2} \frac{k^2}{\rho^2} \ln k \right); \quad (8.15)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho) = \frac{\Delta\theta}{2 \ln k} \left(j + 2 \frac{jk \ln k + (1 - k^2) \ln \rho}{1 - k^2} \right) - (1 - j) \theta_{II2}. \quad (8.16)$$

Не важко перевірити, що одержані формули відповідають вихідним умовам задачі термопружності $\bar{\sigma}_r(k) = \bar{\sigma}_r(1) = 0$; $\bar{\sigma}_z = \bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_g$ - при $j=1$ або $\bar{\sigma}_z = \nu(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_g) - (1 - \nu)\theta(\rho)$ - при $j=\nu$.

Радіальні (σ_r) температурні напруження для порожнистого циліндра досить незначні, а тангенціальні (σ_g) та осьові (σ_z) досягають найбільших значень на поверхнях циліндра:

$$\bar{\sigma}_g(1) = \frac{\Delta\theta}{2 \ln k} \left(1 + \frac{k^2 \ln k^2}{1 - k^2} \right); \quad (8.17)$$

$$\bar{\sigma}_g(k) = \frac{\Delta\theta}{2 \ln k} \left(1 + \frac{\ln k^2}{1 - k^2} \right); \quad (8.18)$$

$$\bar{\sigma}_z(1) = \frac{\Delta\theta}{2\ln k} j \left(1 + \frac{k^2 \ln k^2}{1-k^2} \right) - (1-j)\theta_{II2}; \quad (8.19)$$

$$\bar{\sigma}_z(k) = \frac{\Delta\theta}{2\ln k} \left(j + \frac{1-(1-j)k^2}{1-k^2} \right) - (1-j)\theta_{II2}. \quad (8.20)$$

При нагріванні зовнішньої та охолодженні внутрішньої поверхонь $\Delta\theta = \theta_{II2} - \theta_{II1} > 0$. А так як $k = R_1/R < 1$; $\ln k < 0$; $|\ln k^2/(1-k^2)| < 0 < 1$, $|k^2 \ln k^2/(1-k^2)| < 0 > 1$, то $\bar{\sigma}_g(1) < 0$; $\bar{\sigma}_z(1) > 0$ (на зовнішній поверхні діють стискуючі напруження), а $\bar{\sigma}_g(k) > 0$; $\bar{\sigma}_z(k) > 0$ (на внутрішній поверхні напруження розтягуючі для вільного циліндра $j = 1$). Якщо ж циліндр торцями закріплений ($j = \nu$), то $\bar{\sigma}_g(k)$ буде також розтягуючим, а от $\bar{\sigma}_z$ може мати будь-який знак в залежності від параметрів температурного поля θ_{II2} та $\Delta\theta$

Дійсно, із виразу (8.20) легко встановити, що при виконанні умови

$$\frac{\theta_{II1}}{\theta_{II2}} = 1 - \frac{\Delta\theta}{\theta_{II2}} > \frac{1-k^2 + \ln k^2}{1-k^2 + [k^2 + (1-k^2)/\nu] \ln k^2}, \quad (8.21)$$

по всьому перерізу циліндра будуть діяти стискуючі осьові напруження. Наприклад, прийнявши для сталеві труби $\nu = 0,3$; $k = 0,5$ знаходимо

$$\frac{T_{II1} - T_{C1}}{T_{II2} - T_{C1}} > \frac{1 - 0,25 + \ln 0,25}{1 - 0,25 + (0,25 - 0,75)/0,3 \ln 0,25} = 0,2$$

тобто при відношенні надлишкових температур поверхонь більшому ніж 0,2 осьові напруження будуть лише стискуючі. При цьому, на відміну від вільного ($j = 1$), на зовнішній поверхні закріпленого циліндра $\bar{\sigma}_z(1) \neq \sigma_g(1)$. Вираз (8.19), з урахуванням (8.17) при $j = \nu$, можна записати так

$$\bar{\sigma}_z(1) = \nu \bar{\sigma}_g(1) - (1-\nu)\theta_{II2}. \quad (8.22)$$

Прирівнявши $\bar{\sigma}_z(1)$ (7.22) до $\bar{\sigma}_g(1)$, знаходимо

$$\bar{\sigma}_g^*(1) = -\theta_{II2}. \quad (8.23)$$

Отже, якщо формула (8.17) дає величину $|\bar{\sigma}_g(1)| > |\bar{\sigma}_g^*(1)| = \theta_2$, то осьові напруження за абсолютною величиною будуть більші тангенціальних, тобто $|\bar{\sigma}_z| > |\bar{\sigma}_g|$, якщо ж $|\bar{\sigma}_g(1)| < \theta_2$ менші ($|\bar{\sigma}_z| < |\bar{\sigma}_g|$).

Цей аналіз досить важливий при розрахунках термоміцності відповідних трубчастих елементів устаткування.

З опору матеріалів [27] відомо, що при плоскому (чи об'ємному) напруженому стані для оцінки міцності треба користуватись певною теорією міцності. Однією з найбільш поширених вважається III – я теорія міцності, згідно з якою розрахункове напруження визначається за формулою

$$\sigma_{розр.}^{III} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} \leq \sigma_{adm}. \quad (8.24)$$

В цю умову при розрахунках на стиск для зовнішньої поверхні циліндра треба підставляти $\sigma_{\max}(1) = \sigma_r(1) = 0$; $\sigma_{\min}(1) = -\max\{|\sigma_g(1)|; |\sigma_z(1)|\}$. Отже, тут у розрахунках приймає участь лише одне із головних напружень: або $\bar{\sigma}_g(1)$ або $\bar{\sigma}_z(1)$, в залежності від того, яке з них більше за модулем.

Що ж стосується внутрішньої поверхні, то там (при $j = \nu$) осьові напруження можуть бути як розтягуючі, так і стискуючі. Якщо $\bar{\sigma}_z(k) > 0$, то в розрахунках на міцність теж буде використане лише одне (більше) напруження: $\sigma_{\max}(k) = \max\{\sigma_g(k), \sigma_z(k)\}$, так як $\sigma_{\min}(k) = \sigma_r(k) = 0$.

Якщо ж $\bar{\sigma}_z(k) < 0$, а це буде при умові (8.21), то в такому разі $\sigma_{\max}(k) = \sigma_g(k)$; $\sigma_{\min}(k) = \sigma_z(k)$, і розрахункове напруження $\sigma_{розр.}^{III}$ (8.24) буде визначатись сумою

$$\sigma_{розр.}^{III}(k) = \sigma_g(k) + |\sigma_z(k)| \leq \sigma_{adm}. \quad (8.25)$$

Цей випадок, очевидно, може виявитись найбільш небезпечним.

Ми тут розглянули трубчастий циліндр. Покладаючи в виразах (3.12), (3.14) та (3.17), (3.18) $k = 0$, одержуємо розв'язки (3.19)...(3.22) задачі термопружності суцільного ($R_1 = 0$) циліндра. Це у загальному випадку. Тут же розглядається стаціонарне температурне поле. А в суцільному циліндрі перша гранична умова (5.33) (відсутня поверхня - відсутній і теплообмін, $Bi_1 = 0$) перетвориться в умову, що відображає осьову симетрію температурного поля. У такому разі із розв'язку (5.30) стаціонарної задачі теплопровідності маємо $A = 0$ і $\theta(\rho) = \theta_{II2} = const$. Отже, по всьому перерізу циліндра температурне поле буде однорідне (температурний перепад $\Delta\theta = 0$). Враховуючи це, а також формули (8.14)...(8.16), заключаємо, що у суцільному циліндрі при стаціонарному температурному режимі температурне поле однорідне і температурні напруження будуть діяти лише в закріпленому циліндрі:

$$\bar{\sigma}_z = -(1-\nu)\theta_{II2} \text{ або } \sigma_z = -\alpha_T E(T_C - T_0), \quad (8.26)$$

що відповідає випадкові (2.13) при $\Delta_0 = 0$.

8.3. ТНС КУЛІ ПРИ СТАЦІОНАРНІЙ ТЕМПЕРАТУРІ

У безрозмірних величинах (5.28), (8.1) загальний розв'язок (3.33), (3.34) задачі термопружності кулі набуває вигляду

$$\bar{\sigma}_r(\rho) = \frac{2}{\rho^3} \left[\frac{\rho^3 - k^3}{1 - k^3} \int_k^1 \theta(\rho) \rho^2 d\rho - \int_k^\rho \theta(\rho) \rho^2 d\rho \right]; \quad (8.27)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho) = \frac{1}{\rho^3} \left[\frac{2\rho^3 + k^3}{1 - k^3} \int_k^1 \theta(\rho) \rho^2 d\rho + \int_k^\rho \theta(\rho) \rho^2 d\rho - \rho^3 \theta(\rho) \right]. \quad (8.28)$$

Підставляючи в (8.27), (8.28) температурну функцію $\theta(\rho)$ (5.42), маємо

$$\bar{\sigma}_r(\rho) = \frac{\Delta\theta k(1+k)}{\rho^3} \left[\frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} - \frac{\rho^3 - k^3}{1 - k^3} \right] \quad (8.29)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho) = \frac{\Delta\theta k(1+k)}{2\rho^3} \left[\frac{\rho^2 + k^2}{1 - k^2} - \frac{2\rho^3 + k^3}{1 - k^3} \right] \quad (8.30)$$

З цих виразів одержуємо формули для напружень $\bar{\sigma}_g$, діючих на поверхнях $\rho = k$ та $\rho = 1$ кулі:

$$\bar{\sigma}_g(k) = \frac{\Delta\theta(2+k)}{2(1+k+k^2)}; \quad \bar{\sigma}_g(1) = \frac{\Delta\theta(1+2k)}{2(1+k+k^2)}. \quad (8.31)$$

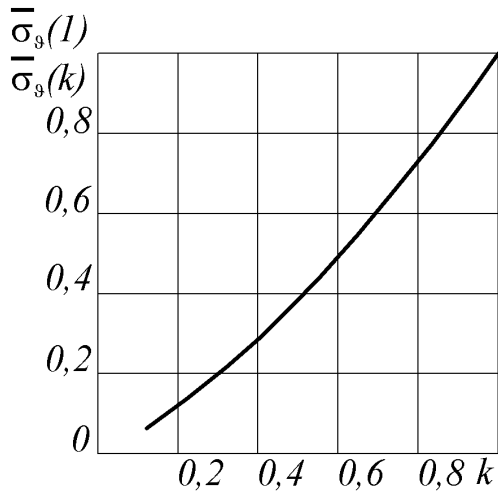


Рис. 8.3. Залежність відношення η від параметра k .

У суцільній кулі ($k=0$) неоднорідне стаціонарне температурне поле неможливе. Отже при $k \rightarrow 0$, $\Delta\theta \rightarrow 0$ і температурні напруження відсутні.

Виконаємо деякий аналіз одержаних результатів (8.29)...(8.31). З порівняння виразів $\bar{\sigma}_g(k)$ та $\bar{\sigma}_g(1)$ (8.31) видно, що

$$\frac{\bar{\sigma}_g(1)}{\bar{\sigma}_g(k)} < 1 \quad (8.32)$$

На рис. 8.3 зображений графік залежності відношення

(8.32) від параметра k .

Для визначення характеру залежності напруження $\bar{\sigma}_g(\rho)$ (8.30) від координати ρ дослідимо похідну функції (8.30). Для спрощення подальших викладок запишемо цю функцію так:

$$\bar{\sigma}_g(\rho) = \bar{\sigma}^* \left[-2(1+k) + \frac{1+k+k^2}{\rho} + \frac{k^2}{\rho^3} \right], \quad (8.33)$$

де введена константа $\bar{\sigma}^* = \frac{\Delta\theta k}{2(1-k^3)}$.

Похідна функції (8.33) по ρ , очевидно, має вигляд

$$\frac{d\bar{\sigma}_g}{d\rho} = \text{tg}\beta(\rho) = -\bar{\sigma}^* \frac{3k^2 + (1+k+k^2)\rho^2}{\rho^4} \quad (8.34)$$

Покладаючи в (8.34) $\rho = k$ та $\rho = 1$, знаходимо

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\beta(k) &= \left. \frac{d\bar{\sigma}_g}{d\rho} \right|_{\rho=k} = -\bar{\sigma}^* \frac{4+k+k^2}{k^2}; \\ \operatorname{tg}\beta(1) &= \left. \frac{d\bar{\sigma}_g}{d\rho} \right|_{\rho=1} = -\bar{\sigma}^* (1+k+4k^2) \end{aligned} \quad (8.35)$$

Порівнюючи вирази (8.35), бачимо, що, по-перше, $\beta(\rho) < 0$,

і, по-друге, $|\beta(k)| > |\beta(1)|$, де β - кут нахилу дотичної до кривої Врховуючи це, а також (8.32), визначаємо форму епюри $\bar{\sigma}_g(\rho)$. На рис. 8.4 вона зображена для випадку $k = 0,5$.

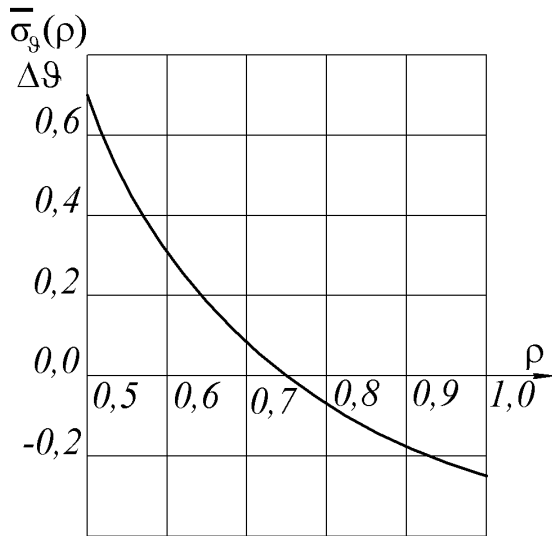


Рис. 8.4. Залежність функції $\bar{\sigma}_g(\rho) / \Delta\theta$ для трубчатого циліндра

В одержаних у цьому розділі виразах для стаціонарних температурних напружень присутні параметри температурного поля θ_{II1} , θ_{II2} , $\Delta\theta = \theta_{II2} - \theta_{II1}$, які можна розрахувати за формулами, наведеними в главі 6 в залежності від умов теплообміну на поверхнях тіл.

Отже, результати глав 5 та 8 дозволяють провести повний аналіз та розрахунки термонапруженого стану тіл плоскої, циліндричної та сферичної геометрії при різних, у тому числі і нелінійних граничних умовах в усталених режимах теплообміну.

ГЛАВА 9

ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕП- ЛОВОГО "НАВАНТАЖЕННЯ"

9.1. МОДЕЛЬ ТЕРМІЧНОГО ШАРУ В ПРИКЛАДНІЙ ТЕОРІЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

В главах 6, 7 було показано, наскільки ефективним виявилось використання моделі теплового граничного шару для наближеного розв'язання крайових задач теплопровідності тіл основної геометрії. Згодом було встановлено, що і в теорії термопружності ця модель не менш ефективна. Це підтвердили роботи [9, 32], в яких вперше дослідження термонапруженого стану тіл було виконано в рамках моделі термічного шару.

В роботі [9] шляхом розв'язання задач термопружності пластини, циліндра та кулі окремо для інерційного ($0 \leq t \leq t_0$) і впорядкованого ($t \geq t_0$) етапів були одержані потрібні вирази для напружень. Але ці вирази можна отримати і без окремого розв'язання задач термопружності на інерційному етапі. Для цього достатньо у відомі з теорії термопружності розв'язки відповідних задач (тут вони подані в главі 3) підставити функції, які описують температурне поле тіла на інерційному етапі.

Отже, згідно моделі термічного шару, при дослідженні термонапруженого стану тіл температурну функцію будемо приймати у вигляді (рис. 9.1).

$$\theta(\rho, \tau) = \begin{cases} 0, & k \leq \rho \leq \beta(\tau) \\ \theta_1(\rho, \tau), & \beta(\tau) \leq \rho \leq 1 \\ \theta_2(\rho, \tau), & k \leq \rho \leq 1, \tau \leq \tau_0 \leq \infty \end{cases} \quad (9.1)$$

де для пластини та суцільних циліндра і кулі (а) $k = 0$, а для порожнистих циліндра та кулі (б) $k = \frac{R_1}{R}$.

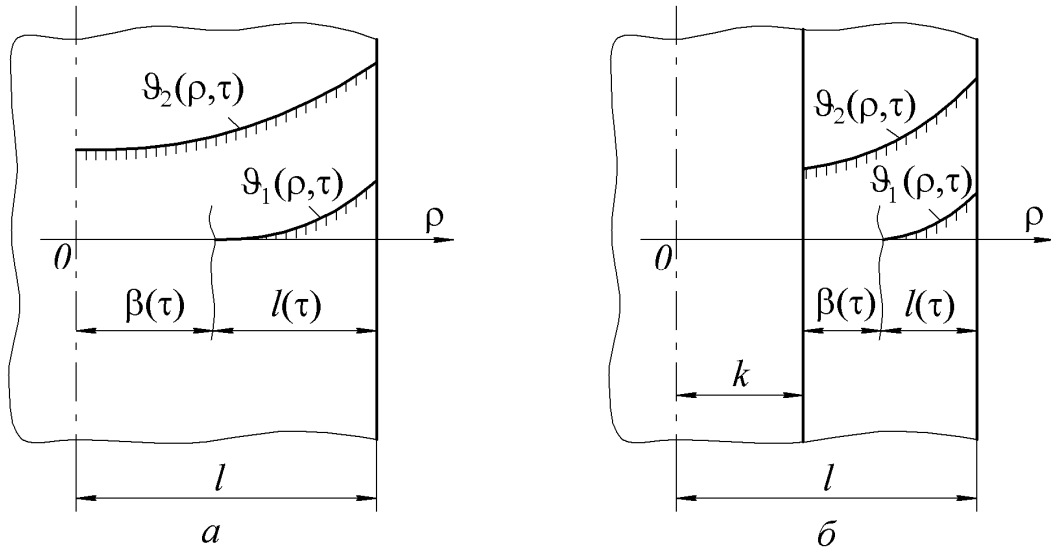


Рис 9.1. Модель термічного шару для надлишкового відносного температурного поля.

Нагадаємо, що в розв'язки задач термопружності входить надлишкова (перевищення над початковою T_0) температура. Тому в (9.1) (ρ, τ) відповідає безрозмірній функції (4.16).

Для зручності подальшого використання розв'язків задач теплопровідності, одержаних у розділі 7 в безрозмірних величинах, введемо і безрозмірне напруження (8.1). В такому разі будемо мати:

для вільної пластини (3.7)

$$\bar{\sigma}(\rho, \tau) = \int_0^1 \theta(\rho, \tau) d\rho - \theta(\rho, \tau) \quad (9.2)$$

для довгого порожнистого циліндра (3.12), (3.13), (3.17),
(3.18)

$$\bar{\sigma}_r(\rho, \tau) = \frac{1 - k^2 / \rho^2}{1 - k^2} \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_k^\rho \theta(\rho, \tau) \rho d\rho; \quad (9.3)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho, \tau) = \frac{1-k^2/\rho^2}{1-k^2} \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_k^\rho \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta(\rho, \tau); \quad (9.4)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho, \tau) = \frac{2j}{1-k^2} \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta(\rho, \tau) \quad (9.5)$$

для суцільного циліндра ($k = 0$) (3.19)...(3.22)

$$\bar{\sigma}_r(\rho, \tau) = \int_0^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \theta(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (9.6)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho, \tau) = \int_0^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta(\rho, \tau) \quad (9.7)$$

$$\bar{\sigma}_z(\rho, \tau) = 2j \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta(\rho, \tau), \quad (9.8)$$

де для вільного циліндра $j = 1$, а для закріпленого $j = \mathcal{G}$.

Для порожнистої кулі (3.33), (3.34)

$$\bar{\sigma}_r(\rho, \tau) = 2 \left[\frac{1-k^3/\rho^3}{1-k^3} \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \frac{1}{\rho^3} \int_k^\rho \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \right]; \quad (9.9)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho, \tau) =$$

$$= \frac{2+k^3/\rho^3}{1-k^3} \int_k^1 \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho + \frac{1}{\rho^3} \int_k^\rho \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \theta(\rho, \tau); \quad (9.10)$$

при $k = 0$ (суцільна куля) (3.35), (3.36)

$$\bar{\sigma}_r(\rho, \tau) = 2 \left[\int_0^1 \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \frac{1}{\rho^3} \int_0^\rho \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \right]; \quad (9.11)$$

$$\bar{\sigma}_g(\rho, \tau) = 2 \int_0^1 \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho + \frac{1}{\rho^3} \int_0^\rho \theta(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \theta(\rho, \tau); \quad (9.12)$$

Підставляючи в ці вирази функцію температури (9.1), яка відповідає інерційному етапові ($0 \leq \tau \leq \tau_0$) нагрівання (або охолодження) тіла, маємо:

для пластини

$$\bar{\sigma}^{(0)}(\rho, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) d\rho, \quad 0 \leq \rho \leq \beta(\tau); \quad (9.13)$$

$$\bar{\sigma}^{(t)}(\rho, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) d\rho - \theta_1(\rho, \tau), \quad \beta(\tau) \leq \rho \leq 1; \quad (9.14)$$

для трубчастого циліндру

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(\rho, \tau) = \frac{1 - k^2 / \rho^2}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho; \quad (9.15)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(0)}(\rho, \tau) = \frac{1 + k^2 / \rho^2}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho; \quad (9.16)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(0)}(\rho, \tau) = \frac{2j}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho; \quad (9.17)$$

$$k \leq \rho \leq k + \beta(\tau)$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{1 - k^2 / \rho^2}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_{k+\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (9.18)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(1)}(\rho, \tau) =$$

$$= \frac{1 + k^2 / \rho^2}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_{k+\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta_1(\rho, \tau) \quad (9.19)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{2j}{1 - k^2} \int_{k+\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta_1(\rho, \tau); \quad (9.20)$$

$$k + \beta(\tau) \leq \rho \leq 1;$$

для суцільного циліндра ($k = 0$)

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(\rho, \tau) = \bar{\sigma}_g^{(0)}(\rho, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (9.21)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(0)}(\rho, \tau) = 2j \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho; \quad (9.22)$$

$$0 \leq \rho \leq \beta(\tau);$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\rho, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_{\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho \quad (9.23)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(1)}(\rho, \tau) = \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho + \frac{1}{\rho^2} \int_{\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta_1(\rho, \tau); \quad (9.24)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(1)}(\rho, \tau) = 2j \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho d\rho - \theta_1(\rho, \tau); \quad (9.25)$$

$$\beta(\tau) \leq \rho \leq 1;$$

для порожнистої кулі

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(\rho, \tau) = 2 \frac{1 - k^3 / \rho^3}{1 - k^3} \int_{k + \beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho; \quad (9.26)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(0)}(\rho, \tau) = \frac{2 + k^3 / \rho^3}{1 - k^3} \int_{k + \beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho; \quad (9.27)$$

$$k \leq \rho \leq k + \beta(\tau);$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\rho, \tau) =$$

$$= 2 \left[\frac{1 - k^3 / \rho^3}{1 - k^3} \int_{k + \beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \frac{1}{\rho^3} \int_{k + \beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \right] \quad (9.28)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(1)}(\rho, \tau) =$$

$$= \frac{2 + k^3 / \rho^3}{1 - k^3} \int_{k + \beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho + \frac{1}{\rho^3} \int_{k + \beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \theta_1(\rho, \tau) \quad (9.29)$$

$$k + \beta(\tau) \leq \rho \leq 1$$

для суцільної кулі ($k = 0$)

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(\rho, \tau) = \bar{\sigma}_g^{(0)}(\rho, \tau) = 2 \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \quad (9.30)$$

$$0 \leq \rho \leq \beta(\tau);$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\rho, \tau) = 2 \left[\int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \frac{1}{\rho^3} \int_{\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho \right] \quad (9.31)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(1)}(\rho, \tau) = 2 \int_{\beta(\tau)}^1 \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho + \frac{1}{\rho^3} \int_{\beta(\tau)}^{\rho} \theta_1(\rho, \tau) \rho^2 d\rho - \theta_1(\rho, \tau); (9.32)$$

$$\beta(\tau) \leq \rho \leq 1;$$

Якщо в (9.14); (9.18)...(9.20); (9.23)...(9.25); (9.28), (9.29), (9.31), (9.33) покласти $\beta = 0$, а замість $\theta_1(\rho, \tau)$ підставити (9.1), то одержимо вирази, аналогічні точним розв'язкам відповідних задач квазістатичної теорії термопружності (9.2)...(9.12), записаними для впорядкованого етапу нагрівання.

Отже, якщо не брати до уваги наближеність постулатів Дюамеля - Неймана, тобто квазістатичної постановки задачі термопружності, то точність розрахунків температурних напружень за виразами (9.13)...(9.32), (9.2)...(9.12) (при $\theta = \theta_2$) буде залежати лише від точності "навантажувальної" функції (9.1).

Таким чином вибір того чи іншого методу термічного шару (МТШ) має неабияке значення для забезпечення необхідної точності досліджень термонапруженого стану тіла. Звідси цілком очевидно, що ті МТШ, які ґрунтуються на апріорних визначеннях "рельєфу" температурного поля, не можуть дати гарантовану прийнятну точність розрахунку температурних напружень. Тому в подальших викладках при одержанні необхідних розрахункових формул ми будемо використовувати розв'язки задач теплопровідності, які були отримані в главі 7 методом еквівалентних джерел - одним з найбільш надійних МТШ, про що говорилось в главі 6.

9.2. ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНИХ ЛІНІЙНИХ УМОВАХ ТЕПЛООБМІНУ

В попередньому підрозділі подані загальні розв'язки задач квазістатичної теорії термопружності в рамках моделі термічного шару для пластини, циліндра та кулі. Конкретні ж вирази, описуючі термонапружений стан цих тіл, отримаємо, якщо в загальні

розв'язки для напружень підставимо функції температури, одержані в главі 7 при розв'язанні різних крайових задач теплопровідності методом еквівалентних джерел.

Проілюструємо детально цю процедуру на прикладі визначення термопружного стану довгого вільного суцільного циліндра при симетричному його нагріванні нестационарним тепловим потоком (гранична умова II роду).

Розв'язок відповідної задачі теплопровідності одержано в главі 7. Зазначимо, що там початок координат ($\xi = 0$) було розміщено на поверхні тіла, тоді як у виразах для напружень точка відрахунку ($\rho = 0$) знаходиться в центрі перерізу. Для усунення цієї неузгодженості в температурних функціях (7.38), (7.44) проведемо заміну незалежної змінної за формулою $\xi = 1 - \rho$. Після цього функціям (7.38), (7.44) можна надати наступного вигляду:

$$\theta_1(\rho, \tau) = \frac{\Delta\theta_1(\tau)[\rho - \beta(\tau)]^2}{l^2(\tau)}; \quad (9.33)$$

$$\beta(\tau) = 1 - l(\tau) \leq \rho \leq 1; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0;$$

$$\theta_2(\rho, \tau) = \theta_{2y}(\tau) + \Delta\theta_2(\tau)\rho^2 \quad (9.34)$$

$$0 \leq \rho \leq 1; \quad \tau_0 \leq \tau \leq \infty;$$

де введені температурні перепади $\Delta\theta_2(\tau)$ (7.45) і

$$\Delta\theta_1(\tau) = \theta_{1l}(\tau) = \frac{Ki(\tau)l(\tau)}{2} \quad (9.35)$$

Викладена нижче процедура послідовної підстановки функцій (9.33), (9.34) у відповідні розв'язки (9.21)...(9.25), (9.6)...(9.8) (при $j = 1$) за своєю очевидністю та простотою не потребує будь-яких додаткових пояснень:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^{(0)}(\tau) &= \bar{\sigma}_g^{(0)}(\tau) = \frac{\bar{\sigma}_z^{(0)}(\tau)}{2} = \frac{\Delta\theta_1(\tau)}{l^2(\tau)} \int_{\beta(\tau)}^1 [\rho - \beta(\tau)]^2 \rho d\rho = \\ &= \frac{\Delta\theta_1(\tau)}{l^2(\tau)} \left\{ \frac{[\rho - \beta(\tau)]^3}{3} \rho \Big|_{\beta(\tau)}^1 - \frac{1}{3} \int_{\beta(\tau)}^1 [\rho - \beta(\tau)]^3 d\rho \right\} = \frac{1}{3} \Delta\theta_1(\tau) l(\tau) \left[1 - \frac{l(\tau)}{4} \right]; \\ &0 \leq \rho \leq \beta(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0; \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\tau) = \bar{\sigma}_r^{(0)}(\tau) - \frac{\Delta\theta_1(\tau)}{12l^2(\tau)\rho^2} [\rho - \beta(\tau)]^3 [3\rho + \beta(\tau)]; \quad (9.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_g^{(1)}(\tau) &= \bar{\sigma}_g^{(0)}(\tau) - \frac{\Delta\theta_1(\tau)}{12l^2(\tau)\rho^2} [\rho - \beta(\tau)]^2 \{8\rho^2 + [3\rho + \beta(\tau)]^2\}; \\ &0 \leq \rho \leq \beta(\tau); \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0; \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(1)}(\tau) = \bar{\sigma}_z^{(0)}(\tau) - \frac{\Delta\theta_1(\tau)}{l^2(\tau)\rho^2} [\rho - \beta(\tau)]^2; \quad (9.39)$$

$$\beta(\tau) \leq \rho \leq 1; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0;$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_r^{(2)}(\rho, \tau) &= \int_0^1 [\theta_{2y}(\tau) + \theta_2(\tau)\rho^2] \rho d\rho - \frac{1}{\rho^2} \int_0^\rho [\theta_{2y}(\tau) + \theta_2(\tau)\rho^2] \rho d\rho = \\ &= \frac{1}{4} \Delta\theta(\tau)(1 - \rho^2); \end{aligned} \quad (9.40)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{1}{4} \Delta\theta_2(\tau)(1 - 3\rho^2); \quad (9.41)$$

$$\bar{\sigma}_z^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{1}{2} \Delta\theta_2(\tau)(1 - 2\rho^2); \quad (9.42)$$

$$0 \leq \rho \leq 1; \quad \tau \geq \tau_0.$$

Варто звернути увагу на те, що введенням температурних перепадів $\Delta\theta_1(\tau)$ та $\Delta\theta_2(\tau)$ одержані формули (9.36)...(9.42) розповсюджуються і на інші випадки лінійних граничних умов теплообміну на поверхні тіл. В цьому неважко пересвідчитись, якщо, аналогічно попередньому, у вирази (9.2)...(9.32) підставити функції: (7.15), (7.22) (гранична умова 1-го роду); (7.53), (7.63) (гранична умова II-го роду). Так, у роботі [34] наводяться наступні фо-

формули:

для пластини

$$\bar{\sigma}^{(0)}(\tau) = \frac{1}{3} \Delta\theta_1(\tau) l(\tau); \quad (9.43)$$

$$\bar{\sigma}^{(1)}(\rho, \tau) = \bar{\sigma}^{(0)}(\tau) - \Delta\theta_1(\tau) \frac{[\rho - \beta(\tau)]^2}{l^2(\tau)}; \quad (9.44)$$

$$\bar{\sigma}^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{1}{3} \Delta\theta_2(\tau) (1 - 3\rho^2); \quad (9.45)$$

для суцільного вільного циліндра (9.36)...(9.42);

для суцільної кулі

$$\bar{\sigma}_r^{(0)}(\tau) = \bar{\sigma}_g^{(0)}(\tau) = \frac{2}{3} \Delta\theta_1(\tau) \left[1 - \frac{l(\tau)}{2} + \frac{l^2(\tau)}{10} \right] \quad (9.46)$$

$$\bar{\sigma}_r^{(1)}(\rho, \tau) = \bar{\sigma}_r^{(0)}(\tau) - \Delta\theta_1(\tau) \frac{[\rho - \beta(\tau)] \cdot [6\rho^2 + 3\rho\beta(\tau) + \beta^2(\tau)]}{15\rho^3 l^2(\tau)}; \quad (9.47)$$

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_g^{(1)}(\rho, \tau) = \\ & = \bar{\sigma}_g^{(0)}(\tau) \frac{[\rho - \beta(\tau)]^2 [24\rho^3 + 3\rho^3\beta(\tau) + 2\rho\beta^2(\tau) + \beta^3(\tau)]}{30\rho^3 l^2(\tau)}; \quad (9.48) \end{aligned}$$

$$\bar{\sigma}_r^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{2}{5} \Delta\theta_2(\tau) (1 - 2\rho^2); \quad (9.49)$$

$$\bar{\sigma}_g^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{2}{5} \Delta\theta_2(\tau) (1 - 2\rho^2) \quad (9.50)$$

Формули для температурних перепадів $\Delta\theta_1(\tau)$ та $\Delta\theta_2(\tau)$, які входять до виразів (9.36)...(9.50), були одержані в главі 7:

при граничних умовах 1-го роду $\Delta\theta_1(\tau) = \Delta\theta_c(\tau)$; $\Delta\theta_2(\tau)$ (7.23);

при граничних умовах II-го роду $\Delta\theta_1(\tau)$ (9.35), $\Delta\theta_2(\tau)$ (7.45);

при граничних умовах III-го роду (конвективний теплообмін)

$$\Delta\theta_1(\tau) = \frac{\Delta\theta_c(\tau) Bi(\tau) l(\tau)}{2 + Bi(\tau) l(\tau)}, \quad (9.51)$$

що очевидно із (7.53); $\Delta\theta_2(\tau)$ (7.61).

В роботах [9, 25, 34 та ін.], в яких були одержані ті чи інші із формул (9.36)...(9.50), вміщено багато конкретних прикладів, що ілюструють практичну ефективність цих формул. Наведемо деякі з цих прикладів.

Приклад 9.1. Розглянемо термонапружений стан пластини, температура поверхні якої підтримується рівною температурі гріючого середовища ($T_H = T_C$; $\theta_H = \theta_C = const = 1$ -температурний удар). В цьому випадку, згідно (7.24) ($m = 0$) і (9.43)...(9.45), маємо:

$$\bar{\sigma}^{(0)}(\tau) = \frac{2}{3}\sqrt{3\tau}; \quad 0 \leq \rho \leq \beta(\tau) = 1 - 2\sqrt{3\tau};$$

$$\bar{\sigma}^{(1)}(\rho, \tau) = \frac{2}{3}\sqrt{3\tau} \left(1 - \frac{1 - \rho - 2\sqrt{3\tau}}{8\tau\sqrt{3\tau}} \right);$$

$$\beta(\tau) \leq \rho \leq 1; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_0 = 0,0833;$$

$$\bar{\sigma}^{(2)}(\rho, \tau) = \frac{1}{3}(1 - 3\rho^2) \exp[-3(\tau - 0,0833)];$$

$$0 \leq \rho \leq 0; \quad \tau \geq 0,0833.$$

Аналізуючи ці досить прості функції, відзначаємо, що на інерційному етапі ($0 \leq \tau \leq \tau_0$)

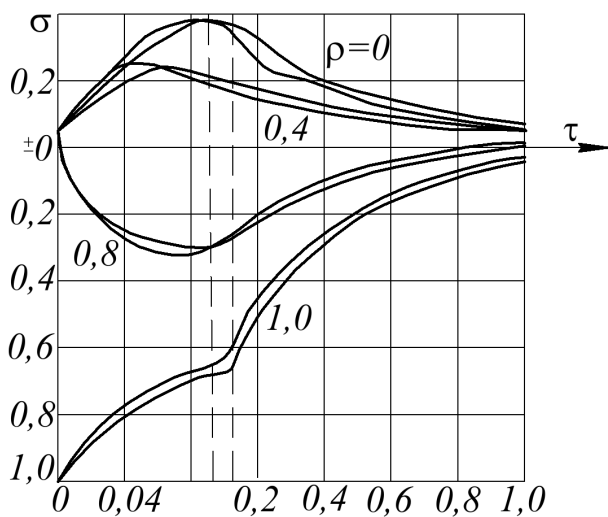


Рис. 9.2. Залежність температурних напружень σ в плиті від часу τ

в непрогрітій зоні ($0 \leq \rho \leq \beta(\tau)$) діють розтягуючі напруження $\bar{\sigma}_t^{(0)}$, які не залежать від координати ρ , а змінюються лише за часом, досягаючи найбільшого значення в кінці прогрівання ($\tau = \tau_0$) [$\max \bar{\sigma}_t^{(0)} = 0,333$]. Максимальні стискуючі напруження появляються в початковий момент часу ($\tau = 0$)

на поверхні пластини $\max \bar{\sigma}_c = \bar{\sigma}^{(1)}(1;0) = -1$. Зауважимо, що тут і надалі у позначених напружень індекс “*t*” означає “tension” – розтяг, а “*c*” – “compression” – стиск. На впорядкованому етапі на-

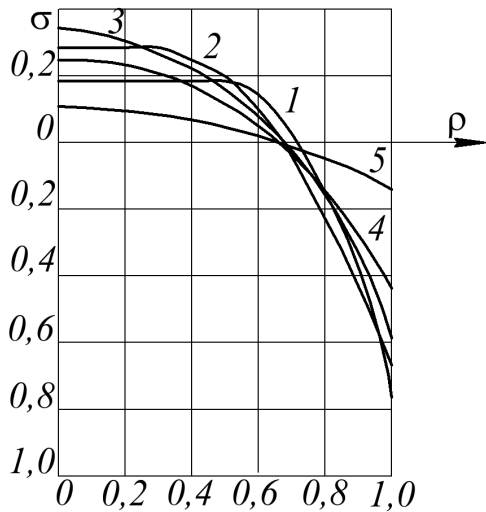


Рис. 9.3. Розподіл температурних напружень σ по перерізу плити.

грівання напруження $\bar{\sigma}^{(2)}(\rho, \tau)$ зменшуються, що зумовлено вирівнюванням температурного поля по товщині пластини. В цей період розподіл напружень по перерізу параболічний (див. рис. 3.2.); нейтральні шари ($\sigma = 0$) розміщені на відстанях $\rho_0 = \pm \sqrt{3}/3 = \pm 0,577$ від середньої площини пластини.

Аналогічні висновки на основі точного розв'язку цієї задачі термомеханіки робить Н.Ю. Тайц [43] та ін. На рис. 9.2, 9.3 наведені у графічній формі результати розрахунку температурних напружень в залежності від просторової (ρ) та часової (τ) координат. Співставлення показує, що наближений розв'язок (9.50) (суцільні лінії) не лише в якісному, але і в кількісному відношенні добре узгоджується з точним [43]. Крім цього, цінною для практичного використання особливістю формул (9.52) є їх виключна простота.

Приклад 9.2. Тепер розглянемо термонапружений стан суцільного циліндра, що знаходиться в умовах конвективного нагрівання при $Bi = const$ і $\theta_c(\tau)$:

$$\theta_c(\tau) = \frac{T_c(\tau) - T_0}{T_c^{\max} - T_0} = 1 - q \cdot \exp(-\rho\tau); \quad (9.53)$$

$$q = 0,9; \rho = 53,6; Bi = 15.$$

Підставляючи функцію $\theta_c(\tau)$ (9.53) в розв'язок (7.65), (7.66) відповідної задачі теплопровідності, неважко визначити:

$$\Delta\theta_1(\tau) = \frac{Bi \cdot l(\tau)\theta_c(\tau)}{2 + Bi \cdot l(\tau)};$$

$$\Delta\theta_2(\tau) = \frac{\{\theta_c^0 \Phi_{\mu_1}(\tau - \tau_0) + (1 - \theta_c^0)B[\Phi_{\mu_1}(\tau - \tau_0) - \Phi_p(\tau - \tau_0)]\}Bi}{2 + Bi}, \quad (9.54)$$

де

$$\theta_c^0 = \theta_c(\tau_0); \quad B = \frac{3p(2 + Bi)}{2 - (p - \mu_1)(3 + Bi)};$$

$$\Phi_i(\tau - \tau_0) = \exp[-i(\tau - \tau_0)], \quad (i = \mu_1; p); \quad \mu_1 = \frac{6Bi}{3 + Bi}.$$

Підстановкою цих функцій у формули (9.36)...(9.41) і визначається напружений стан циліндра. Конкретний числовий приклад при вихідних даних (9.53) розглядався в роботі А.Д.Коваленка [18], де наведені дані розрахунків за точними роз-

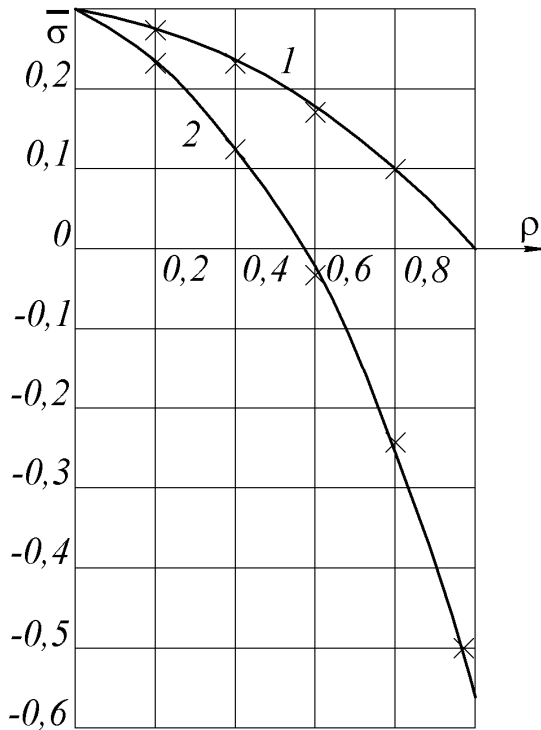


Рис. 9.4. Розподіл температурних напружень $\bar{\sigma}_r$ (1) та $\bar{\sigma}_\theta$ (2) по перерізу циліндра в момент $\tau = 0,1175$.

в'язками (з утриманням 6 членів нескінченних рядів). В роботі [32] цей же приклад розраховано за наближеними розв'язками (9.36)...(9.41), (9.54).

На рис. 9.4 подані графіки розподілу радіальних $\bar{\sigma}_r$ (крива 1) та колових $\bar{\sigma}_\theta$ (крива 2) напружень вздовж радіуса циліндра в момент $\tau = 0,1175$, а на рис. 9.5 показана залежність екстремальних напружень $\max \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_r(0, \tau) > 0$ і $\max \bar{\sigma}_\theta = \bar{\sigma}_\theta(1, \tau) < 0$ від часу. Крапки на рисунках відпові-

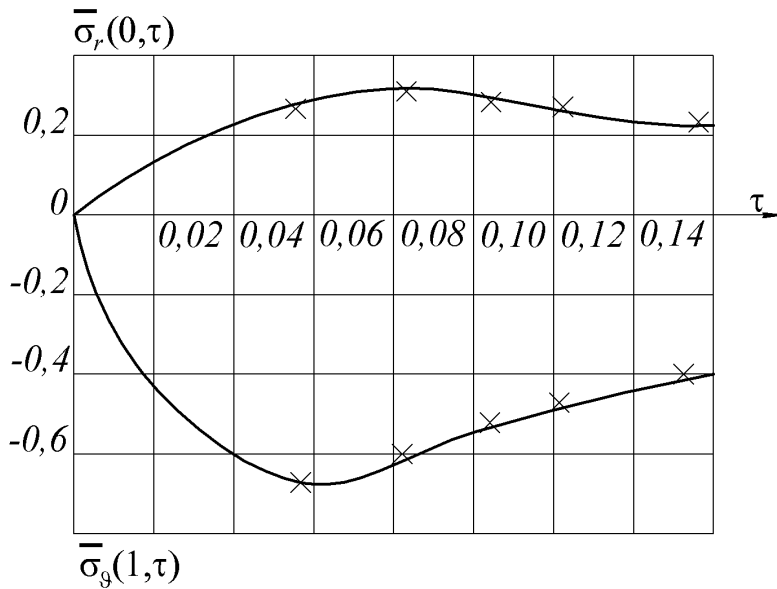


Рис. 9.5. Зміна в часі екстремальних радіальних ($\bar{\sigma}_r$) та колових ($\bar{\sigma}_\theta$) напружень в циліндрі (× дані точного розв'язку).

дають розрахункам [18] за точними розв'язками. Порівнюючи ці результати, бачимо, що одержані наближені формули мають достатню практичну збіжність з точними. Із цих графіків також видно, що максимальної величини розтягуючі напруження дося-

гають в центрі перерізу циліндра в кінці інерційного етапу ($\tau_0 \approx 0,09$), а стискуючі - на поверхні в момент $\tau^* \approx 0,05 < \tau_0$. При цьому слід нагадати, що, згідно (9.6)...(9.8), найбільші розтягуючі напруження в центрі циліндра будуть осьові при $j=1$ $\max \bar{\sigma}_z = \max(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta)$. Отже, із наведених прикладів бачимо, що простота наближених розв'язків прикладних задач термомеханіки, одержаних на основі використання моделі термічного шару, дозволяє без істотної втрати точності проводити як числові розрахунки, так і якісний аналіз термонапруженого стану тіл.

9.3. РОЗРАХУНКОВІ ФОРМУЛИ ДЛЯ МАКСИМАЛЬНИХ НАПРУЖЕНЬ

З практичної точки зору при дослідженні термонапруженого стану тіл найбільш важливими є величина, місце та час виникнення максимальних напружень.

Розглянемо спочатку температурні напруження у суцільних тілах при їх симетричному нагріванні (чи охолодженні) В цьому випадку найбільші розтягуючі напруження діють в центрі перерізу тіла, а найбільші стискуючі - на його поверхні. При охолодженні знаки напружень змінюються на зворотні.

Аналіз наближених розрахункових формул, одержаних, подібно (9.52), при конкретних граничних умовах теплообміну, дозволив зробити ряд висновків [9, 25, 32, 34].

Для конкретності в подальших викладках обмежимося наступними граничними умовами:

стала температура поверхні (4.24)

$$T(R, \tau) = T_C = const; \quad \theta(\rho, \tau) = \theta_0(\tau) = 1 \quad (9.56)$$

лінійна зміна температури поверхні (4.22), (4.23)

$$T(R, \tau) = T_C + \nu_T t \quad \theta(\rho, \tau)|_{\rho=1} = \theta_{II}(\tau) = 1 \quad (9.57)$$

сталий поверхневий тепловий потік (4.25), (4.27)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = q_{II} \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = Ki \quad (9.58)$$

конвективний теплообмін зі сталими α_k та T_C (4.29), (4.30)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha_k [T_C - T_{II}(t)]; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = Bi[1 - \theta_{II}(t)]; \quad (9.59)$$

радіаційний теплообмін при $T_c = const$ (4.32), (4.33)

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = \sigma_B [T_C^4 - T_{II}^4(t)]; \quad \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = Sk[1 - \Theta_{II}^4(t)]. \quad (9.60)$$

При граничних умовах нагрівання (9.56), (9.58)...(9.60) найбільші розтягуючі напруження $\max \bar{\sigma}_\rho$ виникають в момент закінчення інерційного етапу, тобто при $\tau^* = \tau_0$. В цей же час досягають найбільшого значення і стискуючі напруження $\max \bar{\sigma}_c$ при умовах (9.58) і (9.60). При умові (9.56) $\max \bar{\sigma}_c$ проявляються в початковий момент $\tau^* = +0$. При умові (9.57) обидва

екстремальні напруження виникають в упорядкований період в момент $\tau^* = (1 + m)^{-1}$, тобто в той же час, що і максимальний температурний перепад.

При нагріванні в умовах конвективного теплообміну (9.59) найбільші стискуючі напруження виникають в інерційний період $0 \leq \tau \leq \tau_0$ і визначаються формулами для пластини ($m = 0$), циліндра ($m = 1$) та кулі ($m = 2$)

$$\bar{\sigma}_{cm}^{(1)}(\tau) = -\frac{Bi[3 - l(\tau)]l(\tau)}{3[2 + Bil(\tau)]}, \quad m = 0 \quad (9.61)$$

$$\bar{\sigma}_{cm}^{(1)}(\tau) = -\frac{Bi[6 - 4l(\tau) + l^2(\tau)]l(\tau)}{6[2 + Bil(\tau)]} \quad m = 1 \quad (9.62)$$

$$\bar{\sigma}_{cm}^{(1)}(\tau) = -\frac{Bi[10 - 10l(\tau) + 5l^2(\tau) - l^3(\tau)]l(\tau)}{10[2 + Bil(\tau)]} \quad m = 2 \quad (9.63)$$

Для визначення величини максимальних стискуючих напружень в роботі [9] були проведені дослідження на максимум функцій напружень (9.61)...(9.63). В результаті одержано наступні рівняння

$$Bil^{*2} + 4l^* - 6 = 0; \quad m = 0; \quad (9.64)$$

$$Bil^{*3} + (3 - 2Bi)l^{*2} - 8l^* + 6 = 0; \quad m = 1; \quad (9.65)$$

$$3Bil^{*4} + 2(4 - 5Bi)l^{*3} - 10(3 - 2Bi)l^{*2} + 40l^* - 20 = 0; \quad m = 2, \quad (9.66)$$

для визначення відносної глибини $l(\tau^*) = l^*$ прогрівання, що відповідає моментові виникнення $\max \bar{\sigma}_c$. Із цих рівнянь для заданого значення критерію Bi знаходимо величину $l^* = l(\tau^*) = 1 - \beta(\tau^*)$. Потім за формулами (9.61)...(9.63) обчислюємо $\max \sigma_{cm} = \sigma_{cm}(l^*)$, а за виразом (7.55) визначаємо час його досягнення:

$$\tau^* = \frac{\frac{l^{*2} + 4}{Bi} - \frac{8}{Bi^2} \ln\left(1 + Bi \frac{l^*}{2}\right)}{12(1 + m)}. \quad (9.67)$$

Якщо загальні розв'язки алгебраїчних рівнянь (9.65), (9.66) одержати досить складно (хоча і можливо), то рівняння (9.64) для пластини легко розв'язується:

$$l^* = \frac{\sqrt{4 + 6Bi} - 2}{Bi} \quad (9.68)$$

Після цього одержуємо формулу для часу τ^* (9.67) ($m = 0$):

$$\tau^* = \frac{3Bi - 4 \ln \sqrt{1 + 3Bi}}{6Bi}; \quad (9.69)$$

при якому досягається

$$\max \bar{\sigma}_{cm} = - \left[1 + \frac{4}{3Bi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3Bi}{2}} \right) \right] \quad (9.70)$$

Зазначимо, що формули (9.68)...(9.70) і рівняння (9.64) справедливі при $Bi \geq 1$ ($m = 1$) та $Bi \geq \frac{2}{3}$ ($m = 2$). В противному разі позитивні корені цих рівнянь стають більшими одиниці, що суперечить суті $l(\tau) \leq 1$. При значеннях критерію $Bi < \frac{2}{1+m}$

$\max \bar{\sigma}_{cm} = - \left[1 + \frac{4}{3Bi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{3Bi}{2}} \right) \right]$ досягається в момент τ_0 закінчення інерційного періоду нагрівання:

$$\tau^* = \tau_0 = \frac{1 + \frac{4}{Bi} - \frac{8}{Bi^2} \ln \left(1 + \frac{Bi}{2} \right)}{12(1+m)}, \quad (9.71)$$

а при $Bi \leq 0,1$

$$\tau^* = [6(1+m)]^{-1}.$$

В останньому випадку стискуючі напруження на поверхні пластини будуть вдвічі більші розтягуючих напружень в центрі. Таке ж співвідношення і в суцільному циліндрі для $\bar{\sigma}_g(\rho, \tau)$, тобто $|\bar{\sigma}_g(1, \tau)| = 2\bar{\sigma}_g(0, \tau)$.

Але не слід забувати, що там ще існують і $\bar{\sigma}_r(0, \tau) = \bar{\sigma}_g(0, \tau)$

та $\bar{\sigma}_z(0, \tau) = \bar{\sigma}_r(0, \tau) + \bar{\sigma}_g(0, \tau)$; $\bar{\sigma}_z(1, \tau) = \bar{\sigma}_g(1, \tau)$. Тому в циліндрі найбільші розтягуючі напруження (в центрі) та стискуючі (на поверхні) за величиною однакові: $\bar{\sigma}_z(0, \tau) = |\bar{\sigma}_z(1, \tau)|$. У суцільної кулі також $\max \bar{\sigma}_p(\tau) = \bar{\sigma}_r(0, \tau) = \bar{\sigma}_g(0, \tau) = \max |\bar{\sigma}_{cm}(\tau)| = |\bar{\sigma}_g(1, \tau)|$

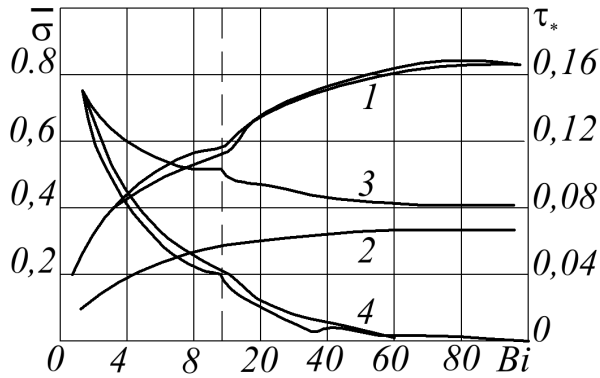


Рис. 9.6. Залежність максимальних напружень на поверхні (1) та в центрі (2). пластини.

На рис. 9.6 наведені результати розрахунку для пластини $\max \bar{\sigma}_p(\tau)$ - (крива 2), $\max |\bar{\sigma}_{cm}(\tau)|$ (1) і відповідного часу їх появи (3) та (4) в залежності від величини критерію Bi . Графіки побудовані [9] за наближеними формулами (9.69)...(9.71). Для порівняння штриховими лініями відображені результати розрахунків

за точними розв'язками [5]. Як бачимо, узгодженість наближеного з точним розв'язком цілком задовільна.

Значення максимальних напружень для суцільних тіл при різних умовах їх нагрівання подані в табл. 9.1 [9, 36].

Таблиця 9.1. Максимальні напруження при нагріванні суцільних тіл

Граничні умови	пластина		циліндр		куля	
	середина	поверхня	вісь	поверхня	центр	поверхня
(9.56)	1/3	-1	1/4	-1	2/5	-1
(9.57)	$Pd/6$	$-Pd/3$	$Pd/16$	$-Pd/8$	$Pd/15$	$-Pd/15$
(9.58)	$Ki/6$	$-Ki/3$	$Ki/8$	$-Ki/4$	$Ki/5$	$-Ki/5$
(9.59)	$\frac{Bi}{3(2+Bi)}$	$\frac{Bi}{3(2+Bi)}$	$\frac{Bi}{4(2+Bi)}$	$\frac{-Bi}{2(2+Bi)}$	$\frac{2Bi}{5+(2+Bi)}$	$\frac{-2Bi}{5+(2+Bi)}$
(9.60)	$Sk/6$	$-Sk/3$	$Sk/8$	$-Sk/4$	$Sk/5$	$-Sk/5$

При нагріванні порожнистих тіл збоку зовнішньої поверхні (§7.9) найбільшими розтягуючими напруженнями будуть колові напруження $\max \bar{\sigma}_\rho(\tau) = \bar{\sigma}_g(k, \tau)$ на внутрішній поверхні ($\rho = k$). Як у випадку суцільного тіла, це напруження, а також найбільше радіальне напруження $\max \bar{\sigma}_r(\tau)$, місце дії якого визначається із загальних розв'язків задачі термопружності циліндра (9.15), (9.18), (9.3) та кулі (9.26), (9.28), (9.9) після підстановки в них відповідних функцій температури, досягаються в момент виникнення найбільшого температурного перепаду. При умовах (9.56), (9.58)...(9.60) цей момент часу співпадає із закінченням етапу прогрівання ($\tau^* = \tau_0$). У випадку лінійної зміни температури поверхні (9.57) найбільша різниця температур по товщині стінки порожнистого тіла досягається в упорядкований період ($\tau^* = \tau_0$), і під час стабілізації температурного перепаду та напружень залежить від відношення $k = R_1/R$ радіусів.

Стискуючі напруження на зовнішній поверхні при умовах (9.58) та (9.60) набувають найбільшої величини по закінченню інерційного етапу ($\tau^* \geq \tau_0$). При конвективному нагріванні необхідно спочатку розв'язати рівняння, подібні (9.65), (9.66), які для порожнистих тіл мають вигляд

$$Bi l^{*3} + (3 - 2Bi)l^{*2} - 8l^* + 6(1 - k^2) = 0, \quad (m = 1); \quad (9.72)$$

$$3Bi l^{*4} + 2(4 - 5Bi)l^{*3} - 10(3 - Bi)l^{*2} + 40l^* - 20(1 - k^2) = 0, \quad (m = 2), \quad (9.73)$$

а вже потім за відповідними виразами (9.19) ($m = 1$) і (9.29) ($m = 2$) розраховувати $\max \bar{\sigma}_{cm}(\tau) = \bar{\sigma}_g(1, \tau)$. Час τ^* їх виникнення визначається формулою (9.67).

Рівняння (9.72), (9.73) втрачають силу при

$$Bi < \frac{1 + 3k}{1 - k^2}, \quad (m = 1);$$

$$Bi < \frac{2(1 - k)^2 + 10k(1 + k)}{3(1 - k)^3 + 10(1 - k)}, \quad (m = 2).$$

У цьому випадку $\max \bar{\sigma}_{cm}(\tau)$ досягається в момент закінчення інерційного етапу:

$$\tau^* = \tau_0 = \frac{(1-k)^2 + \frac{4(1-k)}{Bi} - \frac{8}{Bi^2} \ln \left[1 + Bi \left(\frac{1-k}{2} \right) \right]}{12(1+m)}.$$

Величина $\max \bar{\sigma}_{cm}(\tau) = \bar{\sigma}_g(1, \tau_0)$ визначається за формулами:

$$\bar{\sigma}_g(1, \tau_0) = -\frac{Bi(1-k)(3+5k)}{6(1+k)[2+Bi(1-k)]}, \quad (m=1);$$

$$\bar{\sigma}_g(1, \tau_0) = -\frac{Bi(1-k)(4+3k+2k^2-9k^3)}{10(1-k^3)[2+Bi(1-k)]} \quad (m=2).$$

В табл. 9.2 вміщені значення максимальних колових напружень у порожнистих тілах, а на рис. 9.7 наведені графіки для практичних розрахунків $\max \bar{\sigma}_g(\tau)$ в залежності від $k = R_1/R$.

Рис. 9.7, а - $\max \bar{\sigma}_g(\tau)$ на внутрішній ($\rho = k$) поверхні циліндра (1), кулі (2) та τ^* відповідного, (3) і (4) при умові (9.56).

Рис. 9.7, б - $\frac{\max \bar{\sigma}_g(\tau)}{Ki}$ на зовнішній (1) і внутрішній (2) поверхнях циліндра, а також $\frac{\max \bar{\sigma}_r(\tau)}{Ki}$ (3) та τ^* (4) при умовах (9.58) і (9.60) ($Sk = Ki$).

Рис. 9.7, в - $\frac{\max \bar{\sigma}_g(\tau)}{Pd}$ на зовнішній (1) і внутрішній (2) поверхнях циліндра та τ^* (3) при умові (9.57).

Рис. 9.7, г - $\frac{\max \bar{\sigma}_g(\tau)}{Ki}$ на зовнішній (1) і внутрішній (2) поверхнях кулі та τ^* (3) при умовах (9.58), (9.60) ($Sk = Ki$).

Рис. 9.7, д, е - $\max \bar{\sigma}_g(\tau)$ (д) і τ^* (е) для зовнішньої поверхні циліндра при умові (9.59).

Рис. 9.7, ж, з - $\max \bar{\sigma}_g(\tau)$ (ж) і τ^* (з) для внутрішньої поверхні циліндра при (9.59).

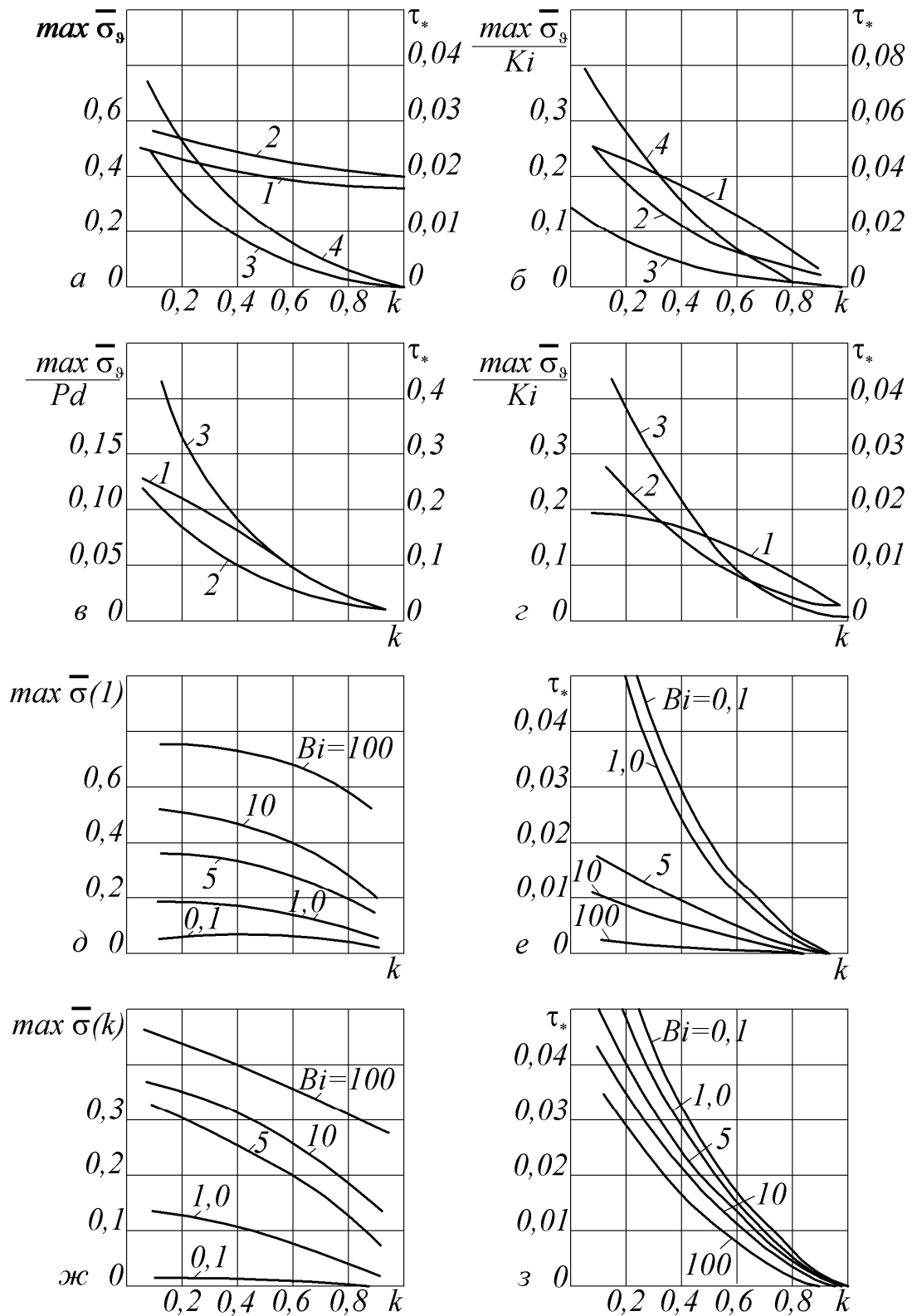


Рис. 9.7. Залежність максимальних напружень $\bar{\sigma}_g$ та часу τ_* їх виникнення в порожнистих тілах.

Наведені тут формули й графіки відповідають випадку, коли внутрішня поверхня ($\rho = k$) теплоізолювана. Однак вони будуть справедливі і для випадку нагрівання, коли після закінчення інерційного періоду від "пасивної" поверхні ($\rho = k$) тепло відводиться в навколишнє середовище. Виняток складає тільки нагрівання при граничній умові (9.57).

Таблиця 9.2. Максимальні колові напруження при нагріванні порожнистих циліндра ($m = 1$) та кулі ($m = 2$).

τ	Граничні умови	Внутрішня поверхня ($\rho = k$)	Зовнішня поверхня ($\rho = 1$)
1	(9.56)	$\frac{3}{6(1+k)}$	-1
	(9.57)	$Pd \frac{(1-k)^3(3+k)}{12(1+k)[2(1-k)+k \ln k]}$	$Pd \frac{-(1-k)^3(3+5k)}{12(1+k)[2(1-k)+k \ln k]}$
	(9.58)	$Ki \frac{(1-k)(3+k)}{12(1+k)}$	$-Ki \frac{(1-k)(3+5k)}{12(1+k)}$
	(9.59)	$Bi \frac{(1-k)(3+k)}{6(1+k)[2+Bi(1-k)]}$	$-Bi \frac{(1-k)(3+5k)}{6(1+k)[2+Bi(1-k)]}$
	(9.60)	$Sk \frac{(1-k)(3+k)}{12(1+k)}$	$-Sk \frac{(1-k)(3+5k)}{12(1+k)}$
2	(9.56)	$\frac{(1-k)(6+3k+k^2)}{10(1-k^3)}$	-1
	(9.57)	$Pd \frac{(1-k)^4(6+3k+k^2)}{10(1-k^3)}$	$Pd \frac{(1-k)^3(4+3k+2k^2-9k^3)}{20(1-k^3)[3(1-k)+2k \ln k]}$
	(9.58)	$Ki \frac{(1-k)^2(6+3k+k^2)}{20(1-k^3)}$	$Ki \frac{(1-k)^2(4+3k+2k^2-9k^3)}{20(1-k^3)}$
	(9.59)	$Bi \frac{(1-k)^2(6+3k+k^2)}{10(1-k^3)[2+Bi(1-k)]}$	$Bi \frac{(1-k)^2(4+7k+9k^2)}{10(1-k^3)[2+Bi(1-k)]}$
	(9.60)	$Sk \frac{(1-k)^2(6+3k+k^2)}{20(1-k^3)}$	$-Sk \frac{(1-k)^2(4+3k+2k^2-9k^3)}{20(1-k^3)}$

Дослідження показали, результати розрахунків за формулами табл. 9.2 досить близькі відповідним даним Б.Болі, Дж.Уейнера [5], Б.Гейтвуда [6], Н.Ю. Тайца [44] та ін.

Відхилення наближених результатів від точних не перевищують 5%, що досить часто може задовольнити вимоги практики.

Тепер перейдемо до визначення максимальних температурних напружень, виникаючих в плиті, що однобічно нагрівається (§§ 3.2, 7.10) [9, 36].

Цілком зрозуміло, що в закріпленій плиті товщиною R , одна із поверхонь якої теплоізолювана, термонапружений стан ідентичний випадку симетрично нагріваної плити товщиною $2R$. Цей висновок розповсюджується і на розрахункові формули для максимальних напружень.

Якщо ж в закріпленій плиті на одній із поверхонь підтримується початкова температура, то розтягуючі напруження на цій поверхні будуть зростати, досягаючи найбільшої величини при встановленні стаціонарного температурного розподілу. Таким чином ведуть себе напруження і на нагріваємії поверхні при умовах (9.57), (9.58), (9.60), а при умові (9.56) (температурний удар) σ_{\max} досягається в початковий момент ($\tau^* = +0$). При конвективному нагріванні (9.59) $\sigma_{\text{ст}}$ досягають найбільшого значення в інерційний період, а розрахунок величини і часу появи цих напружень виконується так, як і в плиті з теплоізолюваною поверхнею [див. (9.69), (9.70)].

У вільній плиті максимальні розтягуючі напруження діють в середній площині, а стискуючі - на поверхні плити. При цьому рівень напружень нижчий, ніж в закріпленій плиті.

Значення максимальних напружень, виникаючих у плиті при однобічному нагріванні, подані у табл. 9.3.

Таблиця 9.3. Максимальні напруження при однобічному нагріванні плити

Умови кріплення	Граничні умови на нагріває мій поверхні	Протилежна поверхня теплоізолювана ($q = 0$)		Протилежна поверхня підтримується при початковій температурі ($T_{II} = T_0$)	
		Серединна площина	Нагріваема поверхня	Серединна площина	Нагріваема поверхня
Плита вільна	(9.56)	$\frac{1}{12}$	-1	$\frac{1}{12}$	-1
	(9.57)	$\frac{Pd}{24}$	$-\frac{Pd}{12}$	$\frac{Pd}{48}$	$-\frac{Pd}{24}$
	(9.58)	$\frac{Ki}{24}$	$-\frac{Ki}{12}$	$\frac{Ki}{24}$	$-\frac{Ki}{12}$
	(9.59)	$\frac{Bi}{12(2+Bi)}$	$-\frac{Bi}{6(2+Bi)}$	$\frac{Bi}{12(2+Bi)}$	$-\frac{Bi}{6(2+Bi)}$
	(9.60)	$\frac{Sk}{24}$	$-\frac{Sk}{12}$	$\frac{Sk}{24}$	$-\frac{Sk}{12}$
Плита закріплена	(9.56)	$\frac{1}{3}$	-1	$\frac{1}{2}$	-1
	(9.57)	$\frac{Pd}{6}$	$-\frac{Pd}{3}$	$\frac{Pd}{2} \left(\tau - \frac{1}{12} \right)$	$-\frac{Pd}{2} \left(\tau - \frac{1}{12} \right)$
	(9.58)	$\frac{Ki}{6}$	$-\frac{Ki}{3}$	$\frac{Ki}{2}$	$-\frac{Ki}{2}$
	(9.59)	$\frac{Bi}{3(2+Bi)}$	$-\frac{2Bi}{3(2+Bi)}$	$\frac{Bi}{2(2+Bi)}$	$-\frac{2Bi}{3(2+Bi)}$
	(9.60)	$\frac{Sk}{6}$	$-\frac{Sk}{3}$	$\pm \frac{Sk}{2+Sk} \left\{ 1 \pm \frac{Sk}{6} \left[1 - 2 \left(\frac{1Sk}{2+Sk} \right)^3 \right] \right\}$	

На закінчення підрозділу декілька зауважень щодо розрахунку напружень в тілах при ступінчатому нагріванні [9, 32, 34]. У §7.3 формулами (7.30), (7.31) визначається температурний перепад, що виникає в тілі на i -му ступені нагрівання. З цих виразів видно, що в загальному випадку найбільший перепад температур може виникнути на будь-якому ступені. Отже, на цій ступені будуть діяти і максимальні температурні напруження. Все це буде залежати від швидкості нагрівання та тривалості того чи іншо-

го ступеня. При довготривалому нагріванні в якомусь ступені рівень температурних напружень буде визначатись лише швидкістю нагрівання на цій ступені. В даному випадку σ_{\max} можна розрахувати за формулами табл. 9.1 при умовах (9.57).

9.4. ГРАНИЧНІ ДОПУСТИМІ ВЕЛИЧИНИ ТЕПЛОТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

Як відомо, температурні напруження відносяться до основних чинників, з якими необхідно рахуватися при виборі режимів нагрівання (охолодження) тіл. При нагріванні зливків чи заготовок під прокатку або різних виробів під термічне загартування із матеріалів, схильних до крихкого руйнування (високовуглецевих та високолегованих сталей), надмірні розтягуючі напруження можуть зумовити появу тріщин, що призведе до браку матеріалу чи виробу. Подібне може статися і при досить інтенсивному охолодженні під час гартування. Більш того, у зв'язку з тим, що в багатьох випадках термонапружений стан тіла носить об'ємний характер, навіть пластичні матеріали можуть вести себе як крихкі.

Отже, щоб гарантувати відсутність тріщиноутворень, необхідно відповідні теплотехнологічні параметри (різницю між температурами середовища та тіла, швидкість зміни температури поверхні, питомий поверхневий тепловий потік та ін.) назначати, виходячи з умов забезпечення термічної міцності матеріалу чи виробу.

Для визначення допустимих значень цих режимних факторів у металургійній теплотехніці за критерій термоміцності звичайно береться границя міцності (тимчасовий опір) σ_{ut} матеріалу на розрив. При цьому небезпечною вважається точка, в якій діє найбільше розтягуюче напруження $\max \sigma_p$ [44]. Інколи при розрахунках

на термоміцність за руйнівне напруження пропонується брати границю міцності на згин σ_u , про що відзначається в роботі [28].

Такий підхід до розрахунків на термоміцність має ряд недоліків. Дійсно, при цьому не враховуються особливості термічного навантаження, пов'язані з умовами нагрівання, вид напруженого стану, температурна залежність теплофізичних та механічних властивостей матеріалу та ін. А так як всі ці особливості одночасно врахувати майже неможливо, то деякі дослідники для оцінки термоміцності пропонують користуватись тими чи іншими критеріями міцності, які визначаються експериментально.

Так, на погляд В.Д.Кінджері [17], критерій термоміцності повинен прийматися у відповідності з режимом температурного навантаження. Запропоновані ним критерії для крихких матеріалів утримують механічні та теплофізичні параметри у різних сполученнях.

Перший критерій Кінджері

$$R_T = \frac{\sigma_{ut}(1-\nu)}{\alpha_T E} \quad (9.74)$$

використовується для оцінки міцності матеріалу, вироби з якого знаходяться в умовах температурного удару (миттєвого нагрівання чи охолодження) (9.56).

Другий критерій

$$R_T = \frac{\sigma_{ut}(1-\nu)}{\alpha_T E} \lambda$$

може бути застосований при тепловому ударі (9.58).

Третій критерій

$$R_T = \frac{\sigma_{ut}(1-\nu)}{\alpha_T E} \alpha$$

пропонується для розрахунків об'єктів, що нагріваються чи охолоджуються зі сталою швидкістю (9.57).

Очевидно, що ці критерії можуть знайти конкретне застосування лише тоді, коли деталь сприймає один і той же вид термічного навантаження. В протилежному випадку необхідно мати декілька таких характеристик, що помітно ускладнює і збільшує об'єм експериментів для їх визначення.

Враховуючи ці обставини, Г.С. Писаренко та ін. [28] запропонували узагальнений критерій термоміцності у вигляді

$$R_T = \frac{\sigma_T^0(1-\nu)}{\alpha_T E}, \quad (9.75)$$

де σ_T^0 - температурне напруження, що призводить до руйнування.

Вираз (9.75) має той же вигляд, що і перший критерій Кінджері (9.74). При цьому загальна термостійкість деталі визначається за формулою

$$D = R_T Q_T,$$

де Q_T - режимний фактор, який враховує і особливість температурного навантаження і форму; критерій термостійкості деталі D - це максимальна різниця температур, при якій починається руйнування.

Якщо величина D відома з досліду, то, знаючи її аналітичний вираз, а з цим і значення режимного фактору Q_T , можна розрахувати критерій термоміцності матеріалу R_T (9.75).

Автори роботи [28] вважають, що величина критерія термоміцності R_T повинна виступати в якості певної характеристики матеріалу. Передбачається вносити величини R_T в довідкові таблиці механічних та теплофізичних характеристик матеріалів, вказуючи при цьому інтервал температур, при яких ця величина визначалась.

Цілком доцільно використати критерій термоміцності R_T (9.75) для розрахунку граничних режимних параметрів нагрівання чи охолодження. Чинниками, спричиняючими терморуйнування (за

аналогією з механічним навантаженням) будемо вважати: при конвективному теплообміну (9.59) - різницю температур навколишнього середовища T_c і початкової T_0 тіла; при сталому поверхневому тепловому потоці (9.58) - питомий потік q_n ; при радіаційному нагріванні (9.60) - температуру T_c гріючого середовища; при лінійній зміні температури поверхні (9.57) - швидкість v_T зміни.

Для одержання розрахункових формул вказаних граничних режимних параметрів досить зручними виявились розв'язки відповідних задач термомеханіки (глави 7 та 9) та впливаючи з них вирази для максимальних температурних напружень (табл. 9.1...9.3).

У таблицях 9.4 та 9.5 подані розрахункові формули граничних параметрів нагрівання чи охолодження суцільних та порожнистих тіл [9, 25, 36].

Зазначимо, що наведені в цих таблицях формули для випадку конвективного теплообміну (9.59) дійсно лише при малих значеннях критерію теплообміну ($Bi \ll 2/(1+m)$), коли напруження на поверхні досягають найбільшого значення в момент $\tau^* = \tau_0$. При великих значеннях Bi розрахункове напруження на поверхні можна визначити за графіками (рис. 9.6 та рис. 9.7, ж, з).

Таким чином, якщо величина критерію термостійкості R_T матеріалу відома, то розрахунок параметрів, необхідних при визначенні допустимих режимів термообробки, не викличе ніяких утруднень. Але треба зазначити, що широке використання узагальнених критеріїв термостійкості в розрахунковій практиці стане можливим лише після накопичення необхідної кількості експериментальних даних. І ця нагальна проблема повинна стояти перед відповідними інститутами та заводськими лабораторіями.

ГЛАВА 10 ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ (ТНС)

10.1. ТНС ТРУБЧАСТИХ ПЕТЛЬОВИХ РЕКУПЕРАТОРІВ РТ

Печі металургійної та машинобудівної промисловості - це основні споживачі палива. При цьому промисловим печам властивий досить низький (30...40%) термічний ККД. В таких умовах кращим способом економії палива є відбір теплоти, що відходить із печі високотемпературних димових газів і повернення цієї теплоти в піч. Апаратами для забезпечення цього процесу і є рекуператори.

На протязі багатьох років велика увага приділялась і продовжує приділятись удосконаленню металевих рекуператорів, які у порівнянні з керамічними мають ряд відомих переваг.

На Дніпропетровському заводі металургійного устаткування (ДЗМУ) у свій час було здійснено проектування та серійне виробництво металевих трубчастих петльових рекуператорів серії РТ, призначених для експлуатації в високотемпературному середовищі (проектна температура продуктів згорання до 1300...1400 К).

Існуючі методики розрахунку металевих рекуператорів передбачають визначення або необхідної поверхні нагрівання при заданій температурі підігріву повітря, або кінцевої температури повітря при заданій температурі поверхні нагрівання. При цьому визначення максимальної температури стінки труб, є обов'язковою часткою розрахунку рекуператора. І визначається звичайно ця температура як усереднена по товщині стінки, чого цілком достатньо для вибору марки сталі з умов її жаростійкості.

Говорячи, про загально прийняті методики потрібно відзначити, що вони ґрунтуються, по-перше, на нехтуванні тепловим опором стінки труби ($\delta_{cm} / \lambda_{cm} \approx 0$), а, по-друге, на лінеаризації граничної умови (7.10) складного теплообміну, який має місце з боку зовнішньої поверхні труб.

У роботі Н.Ю.Тайца та ін. була запропонована методика розрахунку температури стінки і без лінеаризації умови Стефана-Больцмана. Але і в цій методиці тепловий опір стінки було вилучено із розрахунків. Крім того нагрівання зовнішньої поверхні розглядалось чисто променисте (без впливу конвективної складової теплового потоку), що можливе для радіаційних і неприйнятне для петльових рекуператорів.

Слід звернути увагу ще на одну немаловажну обставину. Однією з основних позитивних якостей металевих петльових рекуператорів є здатність трубчатки вільно видовжуватись під дією температури. Враховуючи це, при розрахунках матеріал труб петльових рекуператорів звичайно пропонується вибирати лише за умовою забезпечення жаростійкості, тобто спроможності протистояти хімічному руйнуванню поверхні в газовому середовищі при температурах вищих $550^{\circ}C$ у ненапруженому стані.

Однак властивість самокомпенсації температурних переміщень у поздовжньому напрямку не виключає можливість появи напружень за рахунок обмеження температурних переміщень у радіальному напрямку. І хоча ці напруження при малій товщині стінки вважаються малими, але не треба забувати, що і міцнісні властивості металу при високих температурах суттєво знижуються. Ці властивості, що характеризують жароміцність матеріалу, мають наступні позначення та механічну суть:

$\sigma_{mm} = \sigma_{\tau}^t$ - границя тривалої міцності - напруження, яке призводить до руйнування при температурі t ($^{\circ}C$) за повний відтинок часу τ (год.);

$\sigma_{повз} = \sigma_{\delta/\tau}^t$ - границя повзучості - напруження, викликаюче деформацію δ (%) за певний відтинок часу τ (год.) при температурі t ($^{\circ}C$).

Таким чином, для забезпечення гарантованої роботи петльових металевих рекуператорів на протязі тривалого терміну служби матеріал трубчатки повинен мати крім жаростійкості достатню і жароміцність.

У табл. 10.1 наведені дані, що характеризують жароміцність деяких сталей, які використовуються для виготовлення трубчастих рекуператорів.

Таблиця 10.1. Значення границі тривалої міцності деяких марок сталей.

Характеристика	Марка сталей		
	20X23H18	12X18H10T	40X10C2M
σ_{TM}, MPa	$\sigma_{10^4}^{700} = 60$	$\sigma_{10^4}^{600} = 130...160$	$\sigma_{10^4}^{550} = 130$
	$\sigma_{10^4}^{800} = 21$	$\sigma_{10^4}^{700} = 50...70$	
	$\sigma_{2800}^{800} = 20$	$\sigma_{10^5}^{600} = 110$	$\sigma_{10^5}^{550} = 90$
$\sigma_{повз}, MPa$	$\sigma_{1/10^4}^{700} = 35...40$	$\sigma_{1/10^5}^{600} = 75$	$\sigma_{1/10^5}^{550} = 130$
		$\sigma_{1/10^5}^{650} = 30...40$	$\sigma_{1/10^5}^{550} = 40$
	$\sigma_{1/10^5}^{800} = 12$	$\sigma_{1/10^4}^{700} = 17$	$\sigma_{1/10^5}^{600} = 20$

Із усього вище сказаного впливає необхідність дослідження ТНС стінок труб петльових рекуператорів. Але для цього не досить мати температуру, усереднену по товщині стінки. Уже

необхідно знати розподіл температури по перерізу труби, тобто температуру як координатну функцію $T(r)$.

Труби металевих рекуператорів знаходяться в умовах складного теплообміну: з боку зовнішньої поверхні здійснюється радіаційно - конвективне нагрівання продуктами згорання, а з боку внутрішньої поверхні - конвективне охолодження повітрям, що підлягає нагріванню. При цьому у процесі проходження через рекуператор гріюче середовище (димові гази) знижує свою температуру T_c , а температура $T_{нов}$ повітря зростає. Однак, дякуючи досить значній довжині труб відносна зміна (поздовжні градієнти) цих температур настільки малі ($0,05 \text{ град} / \text{мм}$), що при усталеному режимі роботи рекуператора аксіальною теплопровідністю можна знехтувати.

У такому випадку температурне поле $\bar{\theta}(\rho)$ стінки в пересічному перерізі будь-якої труби рекуператора визначиться розв'язком стаціонарної ($\partial T / \partial t = 0$) задачі теплопровідності, розглянутої у § 5.3. Там були одержані температурна функція $\bar{\theta}(\rho)$ (5.32) та температури внутрішньої $\bar{\theta}_{II1}$ (5.40) і зовнішньої $\bar{\theta}_{II2}$ (5.26), (5.39) поверхонь труби.

Підставляючи функцію розподілу температури $\bar{\theta}(\rho)$ (5.32) у розв'язок (8.12) задачі термопружності довгого порожнистого циліндра, приходимо до виразу для колових температурних напружень (8.15), (8.17), (8.18).

Повертаючись до розмірних величин (10.1), одержимо формули для максимальних розтягуючих та стискуючих напружень [36]

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \frac{\Delta T}{2 \ln k} \left(1 + \frac{\ln k^2}{1-k^2} \right); \\ \sigma_{cm} &= \frac{E\alpha_T}{1-\nu} \frac{\Delta T}{2 \ln k} \left(1 + \frac{k^2 \ln k^2}{1-k^2} \right), \end{aligned} \quad (10.1)$$

де $\Delta T = T_{п2} - T_{п1}$.

Вирази (5.26), (5.32), (5.39), (10.1) і складають основу запропонованої методики розрахунку температурного та термонапруженого стану труб петльових рекуператорів. Отримані розрахункові формули ґрунтуються на точних розв'язках задач стаціонарної теплопровідності та термопружності і враховують конвективну та радіаційну складові теплообміну між продуктами згорання і зовнішньою поверхнею труб, а також тепловий опір металевій стінки.

Так як температурні напруження (10.1) пропорційні перепадам температур ΔT , то найбільш напруженими повинні бути початкові ділянки труб, куди надходить ще холодне повітря. Тому при розрахунках екстремальних напружень за формулами (10.1) необхідно брати початкову температуру повітря $T_{c1} = T_{нов}$, а температуру гріючого середовища T_{c2} приймати температуру диму T_{δ} : на вході (T'_{δ}) - при прямотечії, або на виході (T''_{δ}) - при протитечії.

Розрахунки ТНС рекуператорів типу РТ було виконано у роботі [36], проведеної за завданням ПКТИ МУ ДЗМУ.

Для прикладу розрахуємо ТНС рекуператора РТ-250-І при наступних основних вихідних даних: Ст. 12Х18Н10Т

$$R_1 = 0,032 \text{ м}; \quad R_2 = 0,038 \text{ м}; \quad T'_{\delta} = 1373 \text{ К}; \quad T'_{нов} = 293 \text{ К}.$$

Повний перелік характеристик РТ-250 ми тут не надаємо, лиш наведемо кінцеві результати теплотехнічних розрахунків, наведених у роботі [36]:

коефіцієнти теплообміну:

$$\alpha_1 = 56,4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К}); \quad \alpha_2 = 60,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К});$$

$$\alpha_{\delta} = 1,483 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К});$$

температури:

а) при прямотечії

$$T''_{нов} = 790K; \quad T'_\delta = 1012K; \quad \bar{T}_{cm} = 1143K;$$

б) при протитечії

$$T''_{нов} = 831K; \quad T''_\delta = 1012K; \quad \bar{T}_{cm} = 1226K;$$

характеристики ст.12Х18Н10Т при одержаних середніх температурах \bar{T}_c стінки [36]:

$$\lambda = 27,5 \text{ Вт/(мК)}; \quad E = 1,28 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \alpha_T = 1,99 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}; \quad \nu = 0,3;$$

$$\lambda = 29,3 \text{ Вт/(мК)}; \quad E = 1,02 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \alpha_T = 2,01 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}; \quad \nu = 0,3.$$

Послідовність розрахунків наступна:

$$\text{а) } Bi_1 = \frac{\alpha_1 R_1}{\lambda} = \frac{56,4 \cdot 0,032}{27,5} = 0,066; \quad Bi_2 = \frac{\alpha_2 R_2}{\lambda} = \frac{60,6 \cdot 0,038}{27,5} = 0,084;$$

$$Sk = \frac{\sigma_B T_C^3 R_2}{\lambda} = \frac{1,483 \cdot 10^{-8} \cdot 1373^3 \cdot 0,038}{27,5} = 0,053;$$

$$\bar{\theta}'_{нов} = \frac{293}{1373} = 0,213; \quad k = \frac{0,032}{0,038} = 0,842; \quad k^2 = 0,709;$$

$$\alpha_1 = \frac{0,066 + 0,064 + 0,066 \cdot 0,084 \cdot 0,1719}{0,053(1 + 0,066 \cdot 0,1719)} = 2,816; \quad \alpha_1^2 = 7,93;$$

$$\alpha_0 = 1 + \frac{0,084}{0,053} + \frac{0,066 \cdot 0,213}{0,053(1 + 0,066 \cdot 0,1719)} = 2,847; \quad \frac{4}{3} \alpha_0 = 3,796;$$

$$\Delta = \left(\frac{4\alpha_0}{3} \right)^3 + \left(\frac{\alpha_1^2}{2} \right)^2 = 3,796^3 + \left(\frac{7,93}{2} \right)^2 = 70,42; \quad \sqrt{\Delta} = 8,392;$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{\alpha_1^2}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{7,93}{2} + 8,392} = 2,312;$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{\alpha_1^2}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{7,93}{2} - 8,392} = -1,642;$$

$$b_1 = \sqrt{u + v} = \sqrt{2,312 - 1,642} = 0,819; \quad b_1^2 = 0,67;$$

$$\bar{\theta}_{II2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2\alpha_1}{b_1} - b_1^2} - b_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 2,816}{0,819} - 0,67 - 0,819} \right) = 0,836;$$

$$A = Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2}) + Sk(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) = \\ = 0,084(1 - 0,836) + 0,053(1 - 0,489) = 0,0379;$$

$$\bar{\theta}_{II1} = \bar{\theta}_{II2} + A \ln k = 0,836 - 0,0379 \cdot 0,1719 = 0,829;$$

$$T_{II1} = \bar{\theta}_{II1} T_c = 0,829 \cdot 1373 = 1138K;$$

$$T_{II2} = \bar{\theta}_{II2} T_c = 0,836 \cdot 1373 = 1148K;$$

$$\Delta\theta = 0,007; \quad \Delta T = 10^0 C.$$

$$\sigma_t = \frac{1,28 \cdot 10^5 \cdot 1,99 \cdot 10^{-5}}{1 - 0,3} \cdot \frac{10}{2(-0,1719)} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,1719}{1 - 0,709} \right) = 19,2 \text{ МПа};$$

$$\sigma_c = \frac{1,28 \cdot 10^5 \cdot 1,99 \cdot 10^{-5}}{1 - 0,3} \cdot \frac{10}{2(-0,1719)} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,1719 \cdot 0,709}{1 - 0,709} \right) = -17,2 \text{ МПа}.$$

б) аналогічно розрахуємо для випадку протитечії теплоносіїв

$$\left(\bar{\theta}_{нов}'' = \frac{831}{1373} = 0,605 \right):$$

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 R_1}{\lambda} = \frac{56,4 \cdot 0,032}{29,3} = 0,062;$$

$$Bi_2 = \frac{\alpha_2 R_2}{\lambda} = \frac{60,6 \cdot 0,038}{29,3} = 0,079;$$

$$Sk = \frac{\sigma_6^{\delta} T_c^3 R_2}{\lambda} = \frac{1,483 \cdot 10^{-8} \cdot 1373^3 \cdot 0,038}{29,3} = 0,050;$$

$$\alpha_1 = \frac{0,062 + 0,079 + 0,062 \cdot 0,084 \cdot 0,1719}{0,05(1 + 0,062 \cdot 0,1719)} = 2,807; \quad \alpha_1^2 = 7,88;$$

$$\alpha_0 = 1 + \frac{0,079}{0,05} + \frac{0,062 \cdot 0,605}{0,05(1 + 0,062 \cdot 0,1719)} = 3,322; \quad \frac{4}{3} \alpha_0 = 4,429;$$

$$\Delta = \left(\frac{4\alpha_0}{3} \right)^3 + \left(\frac{\alpha_1^2}{2} \right)^2 = 3,429^3 + \left(\frac{7,88}{2} \right)^2 = 108,42; \quad \sqrt{\Delta} = 10,120;$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{\alpha_1^2}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{7,88}{2} + 10,12} = 2,414;$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{a_1^2}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{\frac{7,88}{2} - 10,12} = -1,835;$$

$$b_1 = \sqrt{u + v} = \sqrt{2,414 - 1,835} = 0,761; \quad b_1^2 = 0,579;$$

$$\bar{\theta}_{II2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2a_1}{b_1} - b_1^2} - b_1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2 \cdot 2,807}{0,761} - 0,579 - 0,761} \right) = 0,923;$$

$$A = Bi_2(1 - \bar{\theta}_{II2}) + Sk(1 - \bar{\theta}_{II2}^4) = \\ = 0,079(1 - 0,923) + 0,05(1 - 0,726) = 0,0185;$$

$$\bar{\theta}_{II1} = \bar{\theta}_{II2} + A \ln k = 0,923 - 0,0185 \cdot 0,1719 = 0,920;$$

$$T_{II1} = \bar{\theta}_{II1} T_c = 0,920 \cdot 1373 = 1263K;$$

$$T_{II2} = \bar{\theta}_{II2} T_c = 0,923 \cdot 1373 = 1267K;$$

$$\Delta\theta = 0,003; \quad \Delta T = 4^{\circ}C.$$

$$\sigma_t = \frac{1,02 \cdot 10^5 \cdot 2,01 \cdot 10^{-5}}{4(1 - 0,3)2(-0,1719)} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,1719}{1 - 0,709} \right) = 6,2MPa;$$

$$\sigma_c = \frac{1,02 \cdot 10^5 \cdot 2,01 \cdot 10^{-5}}{4(1 - 0,3)2(-0,1719)} \left(1 - \frac{2 \cdot 0,1719 \cdot 0,709}{1 - 0,709} \right) = -5,6MPa.$$

Із табл. 10.1 визначаємо термоміцності характеристики сталі 12Х18Н10Т:

$$\sigma_{mm} = \sigma_{10^4}^{700} = 50 \dots 70MPa; \quad \sigma_{новз} = \sigma_{10^{-4}}^{700} = 17MPa.$$

Порівнюючи розрахункові напруження з цими характеристиками бачимо, що у прямоточному режимі даний рекуператор РТ-250-1 не зможе безвідказно працювати проектний термін. Якщо прийняти річний фонд часу роботи рекуператора 8750 год./рік, то при прийнятих вихідних даних він вийде з ладу приблизно через 16...18 місяців, а то ще й раніше, так як дані табл. 10.1 обмежені температурою експлуатації 700°C, тоді як даний рекуператор буде мати її значно вищою.

У випадку протитечного режиму напруження суттєво (у 3 рази) знижуються, що пояснюється зменшенням як температурного перепаду, так і добутку $E\alpha_T$ для більш високої температури стінки.

Отже протитечному режиму треба надати перевагу: при ньому і термопружний стан нижчий, і утилізація теплоти більш ефективна.

Для зниження ТНС було запропоновано і інший підхід: зменшення товщини стінки труб за рахунок збільшення внутрішнього діаметра.

Проведені аналогічні попереднім розрахунки рекуператора РТ-250 ($R = 0,038 \text{ м}$; $R_1 = 0,0335 \text{ м}$; $\delta_{ct} = 0,0045 \text{ м}$) дали результати, подані в табл. 10.2.

Таблиця 10.2. Залежність термомеханічного стану рекуператора РТ-250 від режиму теплообміну

Режим ТО	$T_{п1}, K$	$T_{п2}, K$	$\Delta T, K$	σ_t, MPa	σ_c, MPa
а	1150	1156	6	11,4	-10,6
б	1268	1271	3	4,7	-4,3

Співставляючи результати розрахунків рекуператорів РТ-250-1 ($\delta_{ct} = 6 \text{ мм}$) та РТ-250 ($\delta_{ct} = 4,5 \text{ мм}$), бачимо, що перепади температур по товщині стінки і екстремальні температурні напруження у другому варіанті зменшились на

$$\delta\Delta T = \frac{(10 - 6)100}{10} = 40\% \text{ і } \delta\sigma_t = \frac{(19,2 - 11,4)100}{19,2} = 53\% \text{ - при}$$

$$\text{прямотечі; на } \delta\Delta T = \frac{(4 - 3)100}{4} = 20\% \text{ і } \delta\sigma_t = \frac{(6,2 - 4,7)100}{6,2} = 24\% \text{ -}$$

при протитечі.

Так як, згідно довідковим даним, тривалість роботи металу без руйнування суттєво залежить від його ТНС, то зниження напру-

жень на 25...50% безумовно значно подовжить час їх надійної експлуатації.

Основним висновком цих досліджень є те, що в трубах петльових рекуператорів діють температурні напруження, які треба брати до уваги як при проектних розрахунках, так і при виборі матеріалу. Тому сталі, які ідуть на виготовлення рекуператорів, повинні мати окрім високої жаростійкості ще й достатню термоміцність.

10.2. ТНС ВОДООХОЛОДЖУВАНИХ ВАЛІВ РОЛИКІВ ПІЧНИХ РОЛЬГАНГІВ

Ролики пічних рольгангів використовуються переважно в нагрівальних та термічних агрегатах прокатного виробництва. Найбільш розповсюдженою є конструкція пічних роликів виконана у вигляді бочки (порожнистого циліндра), яка через опірні втулки спряжена з водоохолоджуванім валом. Цей вал являє собою досить довгий ($L/D = 15 \dots 20$) теж трубчастий циліндр. Між валом і бочкою існує зазор, заповнений гарячим повітрям (гріючим середовищем), а через внутрішню порожнину вала протікає охолоджуюча рідина (вода).

Розрахунок на міцність пічних роликів звичайно ведуть лише на дію сил ваги самого ролика та транспортуючого ним вантажу. Однак, через нерівномірність нагрівання стінок, у несучих оболонках ролика (бочці та охолоджуваному валі) виникають, температурні напруження, у ряді випадків перевищуючи напруження від сил ваги.

Сумісна дія та циклічний характер цих напружень стають причиною передчасного виходу роликів із строю. Таким чином надійність роботи пічних рольгангів у великій мірі залежить від рівняння діючих у роликах температур і термічних напружень. Розглянемо ролик з повітряним прошарком між бочкою і водоохолоджуванім валом. У зв'язку з високою температурою

гріючого середовища ($T_{c2} = 1300 \dots 1400K$) з боку зовнішньої поверхні ($r = R_2$) вал нагрівається тепловою радіацією; з боку внутрішньої поверхні ($r = R_1$) здійснюється конвективне охолодження водою ($T_B = 290 \dots 310K$). Дослідження показали [36], що в процесі розігріву холодних роликів основні параметри температурного стану вала (температури $T_{П1}$, $T_{П2}$ поверхонь і температурний перепад $\Delta T = T_{П2} - T_{П1}$) інтенсивно зростають і досить швидко ($t \approx 10xв.$) досягають екстремальних величин, відповідаючих усталеному (стаціонарному) полю $T(r)$. При цих умовах визначення функції $T(r)$ зводиться до розв'язання нелінійної стаціонарної задачі теплопровідності порожнистого циліндра

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{\rho d\bar{\theta}}{d\rho} \right) = 0; \quad (10.2)$$

$$\left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=1} = Sk(1 - \bar{\theta}_{П2}^4); \quad \left. \frac{d\bar{\theta}}{d\rho} \right|_{\rho=k} = Bi(\bar{\theta}_{П2} - \bar{\theta}_B) \quad (10.3)$$

де прийняті уже звичні нам позначення.

Очевидно, що ця задача від попередньої (§ 10.1) відрізняється лише відсутністю конвективної складової теплообміну на зовнішній поверхні.

Отже і розв'язок задачі (10.2), (10.3) має той же вигляд (8.15), (8.17), (8.18), де $Bi_2 = 0$; $Bi_1 = Bi$:

$$A = Sk(1 - \bar{\theta}_{П2}^4) = \frac{kBi(\bar{\theta}_{П2} - \bar{\theta}_B)}{1 - kBi \ln k}, \quad (10.4)$$

а $\bar{\theta}_{П2}$ визначається формулою ((5.26) з коефіцієнтами

$$a_1 = \frac{kBi}{Sk(1 - kBi \ln k)}; \quad (10.5)$$

$$a_2 = 1 + \frac{kBi\bar{\theta}_B}{Sk(1 - kBi \ln k)}.$$

Формулами (10.1) розраховуються і екстремальні напруження. Враховуючи (10.4), їх можна записати так:

$$\sigma_t = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)} \cdot \frac{kBi \left[1 + \frac{\ln k^2}{1-k^2} \right]}{1 - Bi k \ln k} \cdot (T_{п2} - T_{п1});$$

$$\sigma_c = \frac{E\alpha_T}{2(1-\nu)} \cdot \frac{kBi \left[1 + \frac{k^2 \ln k^2}{1-k^2} \right]}{1 - Bi k \ln k} \cdot (T_{п2} - T_{п1}).$$
(10.6)

Аналогічні формули були використані при розрахунку термонапруженого стану пічного ролика для двох варіантів його розмірів: 1

- $R_1 = 0,054 \text{ м}; R_2 = 0,076 \text{ м}; 2 - R_1 = 0,06 \text{ м}; R_2 = 0,09 \text{ м}$. Інші вихідні дані для обох валів брались

однаковими: Ст.20; $\lambda = 45 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$;

$\alpha = 0,044 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}$; $\alpha_k = 2 \cdot 10^3 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$;

$\sigma_B^{(c)} = 5,4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$;

$\alpha_T = 1,12 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$;

$\nu = 0,3$; $T_{c1} = T_B = 300 \text{ К}$;

$T_{c2} = 1350 \text{ К}$.

Результати розрахунків зображені графічній формі на рис 10.1 та 10.2.

Звертаємо увагу, що при дослідженнях з ДЗМУ [36] аналогічна задача квазістатичної

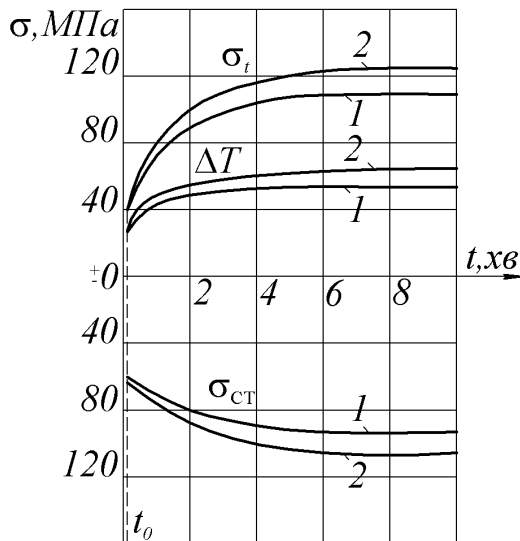


Рис. 10.1. Зростання температурного перепаду (ΔT) і максимальних розтягуючих (σ_t) та стискуючих

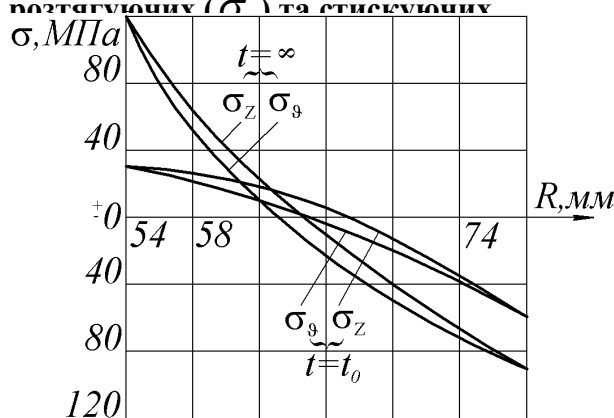


Рис. 10.2. Розподіл колових (σ_g) та осьових (σ_z) напружень по товщині стінки ролика 2 в момент $t = t_0$ та $t \rightarrow \infty$.

термопружності розв'язувалась з урахуванням початкового етапу розігріву. З наведених рис. 10.1 та 10.2 видно, що при умовах теплообміну (10.3) температурні напруження у валах пічних роликів зростають, досягаючи найбільшого значення в усталеному температурному стані.

Слід також звернути увагу і на вплив розмірів вала на його ТНС. Із збільшенням діаметра $D = 2R_2$ максимальні температурні напруження (при усіх інших незмінних параметрах) зростають. Однак напруження згину $\sigma_3 = M/W$ від дії зовнішнього силового навантаження із зростом діаметра зменшуються. Легко підрахувати моменти розглянутих вище двох варіантів валів:

$$W_1 = \frac{\pi D_1^3}{32} (1 - k_1^4) = \frac{3,14 \cdot 0,152^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{0,054}{0,076} \right)^4 \right] = 2,57 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3;$$

$$W_2 = \frac{\pi D_2^3}{32} (1 - k_1^4) = \frac{3,14 \cdot 0,18^3}{32} \cdot \left[1 - \left(\frac{0,06}{0,09} \right)^4 \right] = 4,17 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Звідси видно, що розрахункові згинальні напруження у валі 2 менші, ніж у валі 1 на 38,4%, у той час як температурні напруження σ_c (рис.10.1) вищі у валі 2 лише на 17,8%. Так як постійно діюче температурне напруження σ_c є середнім напруженням σ_m несиметричного циклу, а згинальні напруження σ_3 - його амплітудою σ_a , то коефіцієнт асиметрії циклу буде більшим у вала 2, що позитивно відіб'ється на його втомній міцності. Але, з іншого боку, збільшення розміру знижує границю втомленості, що вже йде не на користь його довговічності.

Все це говорить за те, що оцінку міцності необхідно давати для конкретного вала з урахуванням усіх факторів температурного та силового навантаження. В деяких роботах відзначається, що похибка у визначенні екстремальних напружень на $\pm 30\%$ може при-

звести до завищення або заниження в оцінці довговічності у 30 разів!

Отже, при проектуванні валів пічних роликів недостатньо вести розрахунки на міцність лише під силову дію транспортованого вантажу та ваги ролика; необхідно також урахування і температурних напружень, обумовлених нерівномірністю температурного поля стінки вала. Для розрахунку максимальних температурних напружень, діючих у водоохолоджуваному валі пічного ролика, і пропонуються формули (10.6).

10.3. ТНС НАСКРІЗНИХ ВИЛИВНИЦЬ

Виливниця під час експлуатації підлягає циклічній дії тимчасових температурним напружень, дослідженню яких "присвячено ряд робіт проф. В. В. Абрамова [1]. Запропоновані в цих працях методики розрахунку циліндричних виливниць дозволяють визначити напруження при змінній по висоті середній температурі та перепадах температури по товщині стіни. При цьому останні вважаються сталими. Але температура виливниці змінюється і по товщині, і по висоті, і в часі. Максимальний перепад температур по товщині стінки прямокутної виливниці припадає на середину широкої грані, а за часом - на кінець початкового (інерційного) етапу прогрівання. Тому доцільно було б дослідити температурні напруження саме в тому місці і в той момент, де і коли вони досягають екстремальних значень. Такі дослідження і були проведені в роботі [8].

Попередньо підігріта до температури T_0 стінка виливниці товщиною δ після заливки металу одночасно підпадає під дію двох процесів теплообміну: з внутрішнього боку - нагрівання; із зовнішнього - охолодження. Так як товщина стінки значно менша

двох інших розмірів грані виливниці, то можна виключити наявність торцевих теплових ефектів і розглядати грань, як пластину, температурне поле якої змінюється лише по товщині і за часом, отже описується одномірним рівнянням теплопровідності. В якості граничних умов були прийняті умови III-го роду (конвективний теплообмін) з нестационарною температурою $T_{ce}(t)$ середовища з боку металу і постійною температурою $T_{cz}(t)$ повітря з боку зовнішньої поверхні. У відповідності з цим визначення температурної функції звелось до розв'язання краєвої задачі теплопровідності виду (7.143)...(7.146), тобто

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} &= \frac{\partial \theta}{\partial \tau}; \quad \theta(\xi, 0) = 0; \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} &= -Bi_6 [\theta_{ce}(\tau) - \theta_{ne}(\tau)]; \\ \left. \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} &= -Bi_3 [\theta_{nz}(\tau) - \theta_{cz}(\tau)], \end{aligned} \quad (10.7)$$

де

$$\theta(\xi, \tau) = \frac{T(\xi, \tau) - T_0}{T_{ce} - T_0}; \quad \xi = \frac{x}{\delta}; \quad \tau = \frac{at}{\delta^2}; \quad Bi_6 = \frac{\alpha_6 \delta}{\lambda}; \quad Bi_3 = \frac{\alpha_3 \delta}{\lambda};$$

T_{ce} - температура заливки рідкої сталі; x - координата, що відраховується від внутрішньої поверхні стінки; α_6, α_3 - приведені коефіцієнти теплообміну відповідно з боку внутрішньої ($\xi = 0$) та зовнішньої ($\xi = 1$) поверхонь плити.

Для отримання наближеного розв'язку задачі (10.7) в роботі [6] була використана модель термічного шару з трьома послідовними етапами температурного стану плити (рис. 10.3) (на відміну від § 7.7, де спрощено розглядались лише два етапи, див. рис. 7.8)

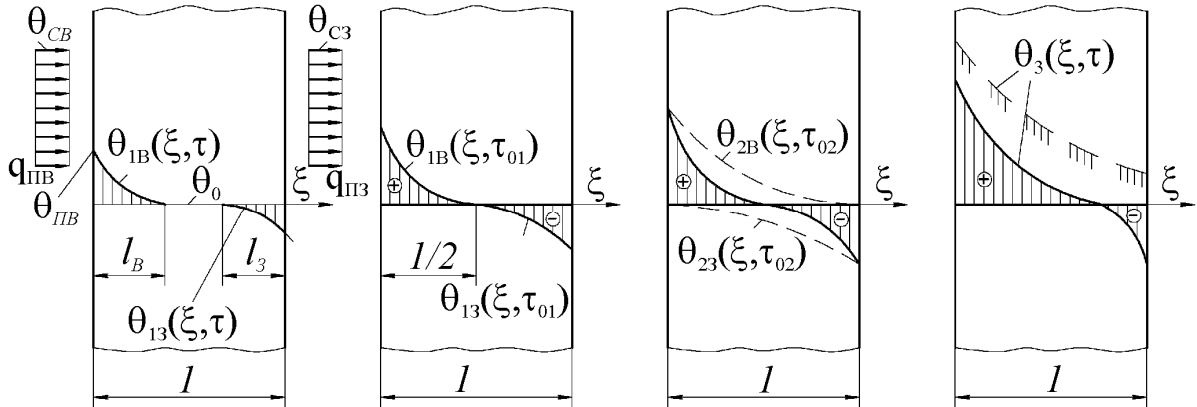


Рис. 10.3. Трьохетапна модель термічного шару плити.

Перший (інерційний) етап ($\tau \leq \tau_{01}$) характеризується наявністю внутрішнього шару $l_3(\tau) \leq \xi \leq l - l_3(\tau)$ з початковою температурою $\theta_0 = 0$ (рис. 10.3, а). Закінчується цей етап (як і в §7.7) у момент $\tau = \tau_0$, коли теплові збурення з боків нагріваючої та охолоджуваної поверхонь зустрінуться, а внутрішня ділянка з початковою температурою T_0 зникне (рис. 10.3, б). Другий (перехідний) етап ($\tau_{01} \leq \tau \leq \tau_{02}$): в цей період на температуру кожної поверхні умови теплообміну на протилежній поверхні ще не впливають. Закінчується цей етап тоді, коли теплові ("парціальні") збурення нагрівання та охолодження досягнуть протилежних поверхонь (рис. 10.3, в). Третій (упорядкований) етап ($\tau \geq \tau_{02}$): процес з сумісною дією обох видів теплообміну іде по всій товщині плити (рис. 10.3, г).

Для дослідження температурного поля на перших двох етапах можна використати готовий розв'язок (7.53), який у даному випадку має вигляд

$$\theta_{1B}(\xi, \tau) = \frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau)}{[2 + Bi_B l_B(\tau)] l_B(\tau)} [\xi - l_B(\tau)]^2; \quad (10.8)$$

$$0 \leq \xi \leq l_B(\tau);$$

$$\theta_{13}(\xi, \tau) = \frac{Bi_3 \theta_{C3}(\tau)}{[2 + Bi_3 l_3(\tau)] l_3(\tau)} \{ \xi - [1 - l_3(\tau)] \}^2; \quad (10.9)$$

$$1 - l_3(\tau) \leq \xi \leq 1$$

Не дивлячись на те, що на внутрішній поверхні температура гріючого середовища нестационарна, з достатньою мірою точності можна покласти, що фронти прогрівання та охолодження однаково просуваються з обох боків і визначаються за формулою $l_B(\tau) = l_3(\tau) = \sqrt{6\tau}$. У такому разі $l_1 = \frac{1}{2}$ ($\tau = \tau_0 = \frac{1}{24}$) настає кінець першого (інерційного) етапу. У цей момент

$$\theta_1(\xi, \tau_{01}) = \begin{cases} \frac{4Bi_B \theta_{CB}(\tau_{01})}{4 + Bi_B} \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2, & 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{4Bi_3 \theta_{C3}(\tau_{01})}{4 + Bi_3} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2, & \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (10.10)$$

Загальний вираз функції температури на другому (перехідному) етапі було одержано користуючись принципом суперпозиції, тобто накладанням одна на одну функцій однобічного нагрівання (10.8) та однобічності охолодження (10.9). У кінці другого етапу (при $l(\tau_{02}) = 1$; $\tau_{02} = 1/6$) ця функція має вигляд:

$$\theta_2(\xi) = \frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau_{02})}{2 + Bi_B} (1 - \xi)^2 + \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + Bi_3} \xi^2. \quad (10.11)$$

Температури на внутрішній та зовнішній поверхнях в цей час визначаються відповідно виразів

$$\theta_{2ПВ} = \frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau_{02})}{2 + Bi_B};$$

$$\theta_{2ПЗ} = \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + Bi_3}. \quad (10.12)$$

На третьому (впорядкованому) етапі ($\tau \geq \tau_{02}$) необхідно розв'язати крайову задачу теплопровідності (10.7), де замість початкової умови $\theta(\xi, \tau) = 0$ слід прийняти $\theta_3(\xi, \tau_{02}) = \theta_2(\xi, \tau_{02})$. В роботі [8,36] наводиться розв'язок, одержаний методом еквівалентних джерел:

$$\theta_3(\xi, \tau) = \frac{Bi_3(1 + Bi_3)[\theta_{CB}(\tau) - \theta_{ПВ}(\tau)] - Bi_3[\theta_{ПЗ}(\tau) - \theta_{CV}]}{2 + Bi_3} \xi^2 - Bi_B[\theta_{CB}(\tau) - \theta_{ПВ}(\tau)]\xi + \theta_{ПВ}(\tau), \quad (10.13)$$

де

$$\theta_{ПВ}(\tau) = \left\{ \theta_{2ПВ}(\tau_{02}) + \int_{\tau_{02}}^{\tau} h_1(\eta) \exp[g_1(\eta - \tau_{02})] d\eta \right\} \exp[-g_1(\tau - \tau_{02})]; \quad (10.14)$$

$$h_1(\tau) = 12[d_1\theta_{CB}(\tau) + Bi_3\theta_{C3}] + c_1 \frac{\theta_{CB}(\tau)}{a_1}; \quad g_1 = 12 \frac{b_1}{a_1};$$

$$a_1 = 12 + 4Bi_3 + 4Bi_B + 4Bi_3Bi_B;$$

$$d_1 = Bi_B(1 + Bi_3); \quad b_1 = Bi_B + Bi_3 + Bi_BBi_3; \quad c_1 = Bi_B(4 + Bi_3).$$

У формулу (10.13) входить невідомий закон зміни за часом температури $\theta_{CB}(\tau)$ гріючого середовища. Ґрунтуючись на проведеному аналізі багатьох експериментальних та теоретичних даних, запропонована наступна апроксимація температури $T_{CB}(t)$:

$$T_{CB}(t) = \begin{cases} \bar{T}_{CB} - V_T t; & 0 \leq t \leq t_{02}; \\ T_{CB}(t_3) + [T_{CB}(t_{02}) - T_{CB}(t_3)] \exp[-k(t - t_{02})]; & t_{02} \leq t \leq t_3; \\ T_{CB}(t_3) = const; & t \geq t_3. \end{cases} \quad (10.15)$$

$$\text{де } V_T = \frac{\bar{T}_{CB} - T_{CB}(t_{01})}{t}; \quad k = \frac{a}{\delta^2(t_3 - t_{02})} \ln \frac{T_{CB}(t_{02}) - T_{CB}(t_3)}{T_{CB}(t_3)\Delta}; \quad \Delta = \frac{T_{CB} - T}{\bar{T}_{CB}}$$

- відносна похибка.

На рис. 10.4 наведені зміни температур поверхні 8-т зливка (1) і внутрішньої (2) та зовнішньої (3) поверхонь виливниці К6. Ці

криві побудовані наближеним розв'язком (10.10)...(10.15) при наступних вихідних даних: $T_{CB} = 1843 \text{ K}$; $T_{CB}(t_{01}) = 1776 \text{ K}$;

$$T_{CB}(t_{02}) = 1423 \text{ K}; T_{CB}(t_3) = 1073 \text{ K}; \delta = 0,14 \text{ м}; \lambda = 37 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}};$$

$$\alpha_B = 240 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}; \alpha_3 = 23 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}; a = 0,03 \frac{\text{м}^2}{\text{год}}; \tau_{01} = \frac{1}{24}; \tau_{02} = \frac{1}{6};$$

$$0 \leq \tau \leq \tau_3 = 4,6; \Delta = 0,05.$$

З цих графіків видно, що на початковій стадії нагрівання мають місце значні температурні перепади по товщині стінки. Це, як відомо, викликає великі температурні напруження, які важко замірити експериментально, особливо з боку зливка. Тому для дослідження ТНС виливниці можна піти аналітичним шляхом, використавши одержані температурні функції, добре узгоджені з ек-

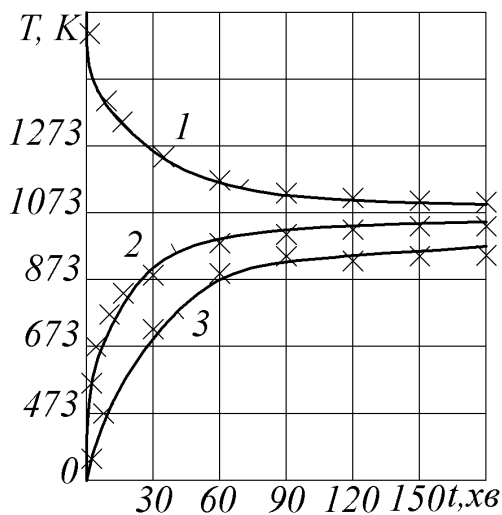


Рис. 10.4. Температурний стан поверхонь зливка.

спериментальними даними (на рис. 10.4 - результати експерименту зображені крапками). Такий шлях і було обрано в роботі [8].

Для дослідження ТНС стінки виливниці розглянемо її як плиту з жорстко закріпленими торцями. У такому разі температурні напруження визначаються виразом (9.2), куди треба підставити відповідні функції температури.

В момент τ_{01} зникає непрогріта зона, а температурне поле описується двома різними виразами (10.10). Так як функції $\theta_{1B}(\xi, \tau_{01})$ та $\theta_{13}(\xi, \tau_{01})$ спряжені між собою на межі їх стику ($\xi = 1/2$), то функція $\theta_1(\xi, \tau_{01})$ (10.10) описує неперервне температурне поле. Тому напруження визначаються шляхом підстановки цих температурних функцій у загальний

розв'язок (9.2) задачі термопружності пластини. При цьому розв'язок треба роз'єднати на дві області, тобто

$$\sigma_{(1)}(\xi) = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{1 - \nu} \left[\int_0^{0,5} \theta_{1B}(\xi) d\xi + \int_{0,5}^{1,0} \theta_{13}(\xi) d\xi + \theta_1(\xi) \right]. \quad (10.17)$$

Підставляючи функції (10.10) в (10.17), а (10.11), (10.13) - в (9.2), одержуємо вирази для напружень:

у кінці першого етапу ($\tau = \tau_{01}$; $l(\tau_{01}) = 0,5$):

$$\sigma_{(1)} = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{12(1 - \nu)} \left[\frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau_{01})}{2 + 0,5 Bi_B} - \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + 0,5 Bi_3} - 12 \theta_1(\xi, \tau_{01}) \right]; \quad (10.18)$$

у кінці другого етапу ($\tau = \tau_{02}$):

$$\sigma_{(2)} = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{3(1 - \nu)} \{ W_1(\tau) + W_2(\tau) - 3 [W_1(\tau)(1 - \xi)^2 + W_2(\tau)\xi^2] \}, \quad (10.19)$$

де

$$W_1(\tau) = \frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau_{02})}{2 + Bi_B}; \quad W_2(\tau) = \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + Bi_3};$$

на третьому етапі

$$\sigma_{(3)} = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{(1 - \nu)} \left[-\frac{V_1(\tau)}{2} (1 - 2\xi) + \frac{V_2(\tau)}{3} (1 - 3\xi^2) \right] \quad (10.20)$$

де

$$V_1(\tau) = Bi_B [\theta_{3ПВ}(\tau) - \theta_{CB}(\tau)];$$

$$V_2(\tau) = \frac{Bi_B (1 + Bi_3) [\theta_{CB}(\tau) - \theta_{3ПВ}(\tau)] - Bi_3 [\theta_{3ПВ}(\tau) - \theta_{C3}]}{2 + Bi_3}.$$

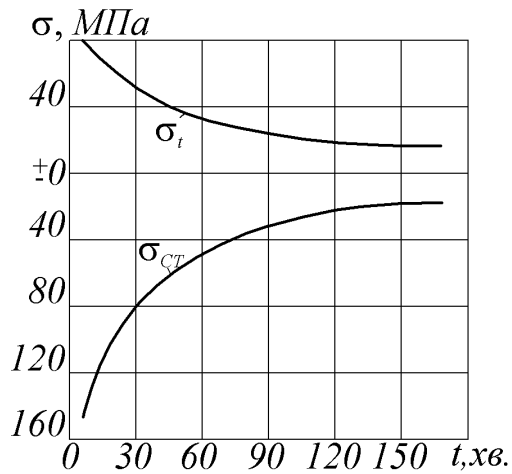


Рис. 10.5. Зміна в часі максимальних розтягуючих (σ_t) та стискуючих (σ_c) напружень.

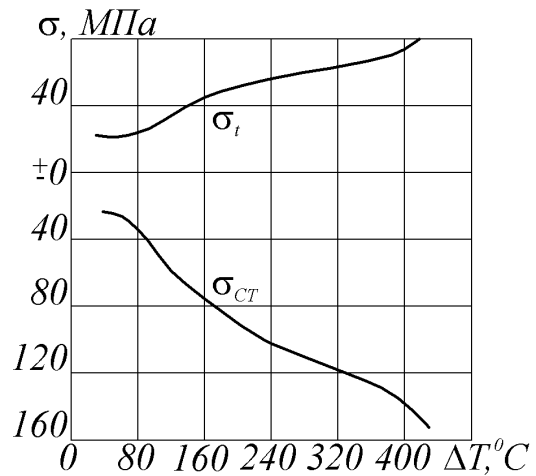


Рис. 10.6. Залежність від температурного перепаду ΔT ТНС виливниці.

На рис. 10.5, 10.6 подані розрахункові криві напружень, діючих за один цикл заливки у стінці наскрізної чавунної виливниці при вихідних даних (10.16) з доповненням:

$$T_0 = 373 \text{ K}; E = 42 \cdot 10^3 \text{ МПа}; \alpha_T = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}; \nu = 0,25.$$

Відомо, що чавун має межу міцності на стиск ($\sigma_{uc} = 470 \dots 540 \text{ МПа}$) у 3...4 рази більшу, ніж на розтяг ($\sigma_{ut} = 125 \dots 140 \text{ МПа}$). Тому небезпечними для виливниці будуть саме розтягуючі напруження.

Розрахунки показують, що в стінці при нагріванні з одного боку та охолодження - з протилежного найбільші температурні напруження будуть у кінці другого етапу.

При цьому діючі на охолоджуваній поверхні напруження розтягу більш чим два рази нижчі напружень стиску на нагріваній поверхні. Як і слід було чекати, величина цих напружень суттєво залежить від температурного перепаду (рис. 10.6). При незначних перепадах вони стабілізуються і повністю зникають в охолодженій виливниці.

У зв'язку з тим, що термічні напруження залежать від температурного перепаду, важливе значення має початкова температура T_0 виливниці перед заливкою. Як показали дослідження, найбільш оптимальна температура підігріву $T_0 = 373 \dots 423 \text{ K}$. При нижчих температурах виникають значні температурні градієнти, які призводять до надмірних напружень і утворенню наскрізних тріщин. При початковій температурі, перевищуючій указаний оптимальний інтеграл, зливки приварюються до виливниці.

Чавунна наскрізна виливниця - це крупногабаритна деталь корпусної форми, яка працює в пружно - пластичному режимі, підпадаючи під високотемпературну і феростатичну дії рідкого металу.

В екстремальних умовах експлуатації, коли діючі напруження перевищують границі міцності чавуну, виливниця може зруйнуватись шляхом наскрізних тріщин.

У роботі [8] Для орієнтовної оцінки глибини тріщин, виникаючих у тих екстремальних умовах, коли виливниця заповнюється рідким металом без підігріву, був використаний підхід, запозичений з роботи [25], в якій були досліджені розміри тріщин в кусках коксу.

Для цього напруження σ_2 (10.19) прирівнюємо границі міцності чавуну на розтяг - з боку зовнішньої і на стиск - з боку внутрішньої поверхонь. Враховуючи малість складових, утримуючих Bi_3 , відкинемо їх. У такому випадку маємо

$$\sigma(\xi) = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{3(1-\nu)} \cdot \frac{Bi_B \theta_{CB}(\tau_{02})}{2 + Bi_B} [1 - 3(1 - \xi)^2] = \sigma_B.$$

З боку зовнішньої поверхні, де діють розтягуючі напруження (рис. 10.7),

$$\begin{aligned}\sigma(\xi_{mp.}^t) &= \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0) Bi_B \theta_{CB}(\tau_{01})}{3(1-\nu) 2 + Bi_B} \left[1 - 3(1 - \xi_{mp.}^t)^2 \right] = \\ &= \sigma_{max}^t \left[1 - 3(1 - \xi_{mp.}^t)^2 \right] = \sigma_{ut}\end{aligned}$$

Тоді глибина $h_{mp.}^t$ тріщини на зовнішній поверхні визначиться формулою

$$h_{mp.}^t = \delta_{CT} (1 - \xi_{mp.}^t) = \delta_{CT} \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{\sigma_{ut}}{\sigma_{max}^t} \right)}. \quad (10.21)$$

Напруження з боку внутрішньої поверхні стискуючі.

Отже

$$\begin{aligned}\sigma(\xi_{mp.}^{cm}) &= \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0) Bi_B \theta_{CB}(\tau_{02})}{3(1-\nu) 2 + Bi_B} \left[1 - 3(1 - \xi_{mp.}^{cm})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sigma_{max}^{cm} \left[1 - 3(1 - \xi_{mp.}^{cm})^2 \right] = \sigma_{Bcm}\end{aligned}$$

і глибина тріщини на внутрішній поверхні від дії напружень сти-ску визначиться виразом

$$h_{mp.}^{cm} = \delta_{CT} \xi_{mp.}^{cm} = \delta \left[1 - \sqrt{\frac{1}{3} \left(1 - 2 \frac{\sigma_{Bcm}}{\sigma_{max}^{cm}} \right)} \right] \quad (10.22)$$

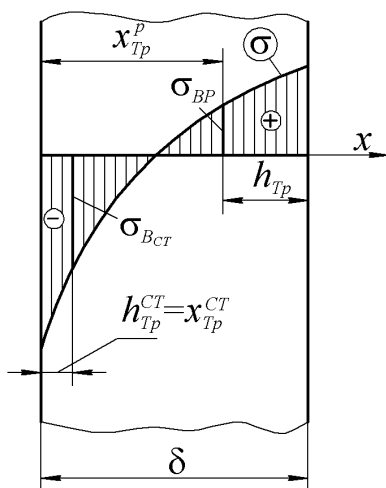


Рис. 10.7. До розрахунку глибини тріщини у виливниці.

Розрахунки за формулами (10.21), (10.22) правомірні лише при визначенні розмірів тріщин, які можуть виникнути в екстремальних умовах. Такі умови мають місце при дії температурного удару, що можливо при заповнюванні рідким металом виливниці без попереднього підігріву. Відповідаючи цим екстремальним умовам теплообміну ($Bi_B \rightarrow \infty$) напруження на внутрішній та зовнішній поверхнях визначаються формулами (з урахуванням Bi_3)

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{3(1-\nu)} \left[2\theta_{CB}(\tau_{02}) - \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + Bi_3} \right];$$

$$\sigma_{\max}^p = -\frac{\alpha_T E (\bar{T}_{CB} - T_0)}{3(1-\nu)} \left[\theta_{CB}(\tau_{02}) - 2 \frac{Bi_3 \theta_{C3}}{2 + Bi_3} \right].$$

Виконанні [35] для наскрізної виливниці К6 розрахунки показали, що стискуючі термічні напруження у виливницях в екстремальних умовах температурної служби досягають 470...500 МПа, тобто наближаються до межі міцності чавуну на стиск. Якщо врахувати ще дію механічних напружень від феростатичного тиску рідкого металу на початковій стадії його охолодження, а також крихкість чавуну, то руйнування поверхневого шару виливниць шляхом розтріскування стає цілком зрозумілим. Щоб запобігти цьому перш за все треба не допускати експлуатацію виливниць в екстремальних температурних умовах. Впровадження запропонованих у роботі [8] рекомендацій у виробництво в умовах ДМК дало позитивні результати щодо подовження терміну служби виливниць.

10.4. ВПЛИВ УМОВ ЗАКРІПЛЕННЯ ПЛИТИ НА ЇЇ ТНС

Як ми вже впевнились, величина температурних напружень залежить від багатьох факторів. Один з них – це умови закріплення об'єкту, сприймаючого дію якогось теплового чинника. У спеціальній літературі (наприклад [5,6,34,45] та ін.) звичайно розглядаються два випадки: пластина або цілком вільна, або жорстко закріплена. Таким умовам відповідають §§ 3.2; 10.1 даної роботи. Між тим більшість в'язей має пружний характер. В роботі [36] наведено розв'язок задачі термопружності несиметрично нагріваємої плити з урахуванням довільної жорсткості в'язей, що відповідає розрахунковій схемі, зображеній на рис. 10.8.

Якщо загальний розв'язок (3.4) рівняння термопружності (3.2) підставити в умови силового балансу

$$\sum F_y = \int_0^H \sigma dx - R = 0;$$

$$\sum M_0 = -\int_0^H \sigma x dx + M + \frac{RH}{2} = 0,$$

відповідаючи розрахунковій схемі (рис. 10.8), то одержимо сталі інтегрування D і C у наступній формі:

$$D = \frac{4}{H} \psi - \frac{6}{H^2} \varphi; \quad C = \frac{12}{H^3} \varphi - \frac{6}{H^2} \psi,$$

де

$$\psi = R + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \int_0^H T(x) dx; \quad \varphi = M + \frac{RH}{2} + \frac{\alpha_T E}{1-\nu} \int_0^H T(x) x dx.$$

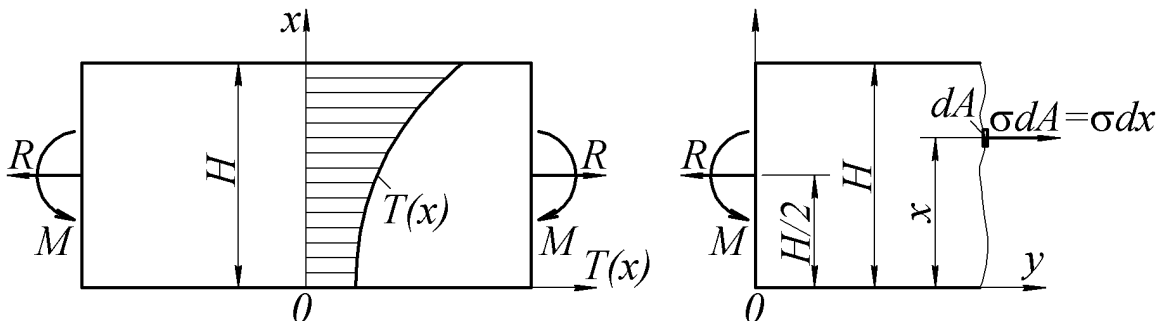


Рис. 10.8. Умови нагрівання довільно нагріваємої плити.

Після цього розв'язок (3.4) запишеться так [36]:

$$\sigma = \frac{\alpha_T E}{(1-\nu)H} \left\{ \int_0^H T(x) dx + \frac{(1-\nu)R}{\alpha_T E} + \right. \quad (10.23)$$

$$\left. + 12 \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right) \left[\int_0^H \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right) T(x) dx + \frac{(1-\nu)M}{\alpha_T E H} \right] - HT(x) \right\}.$$

Величини реактивної сили R і реактивного моменту M в залежності від поздовжньої та згинальної жорсткостей в'язей змінюються у межах

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha_T E}{1-\nu} \int_0^H T(x) dx &\leq R \leq 0; \\
-\frac{\alpha_T E H}{1-\nu} \int_0^H T(x) \left(\frac{x}{H} - \frac{1}{2} \right) dx &\leq M \leq 0.
\end{aligned}
\tag{10.24}$$

Враховуючи (10.24) і вводячи безрозмірні величини $\theta(\xi) = \frac{T(x)}{T^*}$;

$\xi = \frac{x}{H}$; $\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{K_\sigma}$; $K_\sigma = \frac{\alpha_T E T^*}{1-\nu}$, розв'язку (10.23) можна надати наступного вигляду:

$$\begin{aligned}
\sigma(\xi) &= (1-\eta_N) \int_0^1 \theta(\xi) d\xi + \\
&+ 12(\xi - 0,5)(1-\eta_M) \int_0^1 (\xi - 0,5)\theta(\xi) d\xi - \theta(\xi),
\end{aligned}
\tag{10.25}$$

де η_N , η_M - параметри, якими враховуються умови закріплення торців плити.

На рис. 10.9 зображені можливі варіанти закріплення плити.

У відповідності з рис. 10.9 розв'язок (10.25) для кожного конкретного виду закріплення має вигляд:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{(a)} &= \int_0^1 \theta(\xi) d\xi + 12(\xi - 0,5) \int_0^1 \theta(\xi - 0,5) d\xi - \theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(b)} &= -\theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(c)} &= 12(\xi - 0,5) \int_0^1 \theta(\xi - 0,5) d\xi - \theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(z)} &= \int_0^1 \theta(\xi) d\xi - \theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(d)} &= (1 - \eta_N) \int_0^1 \theta(\xi) d\xi - \theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(e)} &= 12(\xi - 0,5)(1 - \eta_M) \int_0^1 \theta(\xi - 0,5) d\xi - \theta(\xi); \\
 \bar{\sigma}_{(ж)} & \quad (10.25)
 \end{aligned} \right\} (10.26).$$

Одержаний раніш розв'язок (3.6) відповідає випадку вільної плити (рис. 10.9, *a*). Різні варіанти напруженого закріплення плити були розглянуті в §7.1 (див. рис. 7.1). При відомій функції температури і умовах закріплення вирази (10.26) дозволяють проводити дослідження та розрахунки ТНС плити.

Для конкретності в роботі [29] було розглянуто однобічне радіаційне нагрівання плити при тепловій ізоляції протилежної поверхні. Відповідна задача теплопровідності нелінійна і точного аналітичного розв'язку в замкнутому вигляді не має. Існують

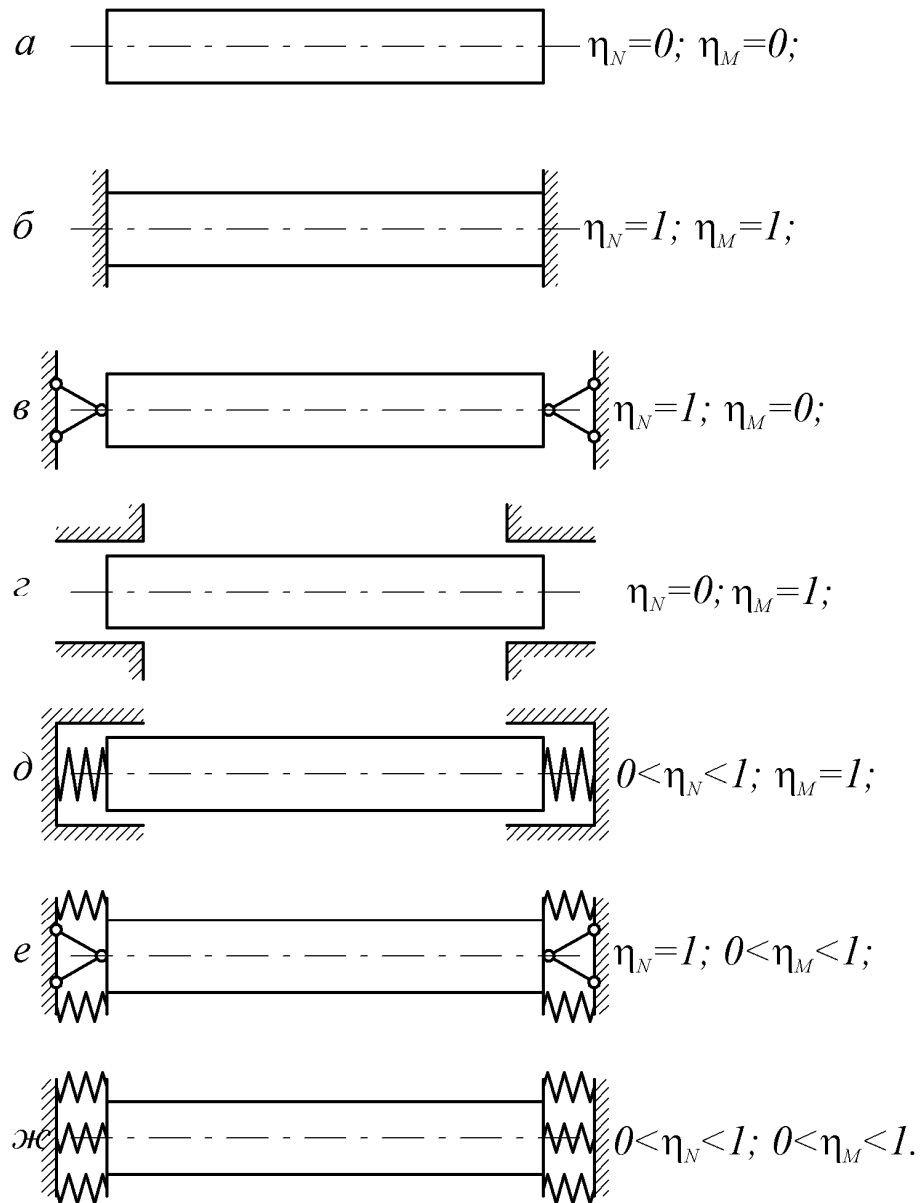


Рис. 10.9. Варіанти закріплення торців плити.

різні наближені аналітичні розв'язки, більшість яких відноситься до термічно тонких тіл і з точки зору термоміцності особливого зацікавлення не викликає.

Для розрахунку температурного поля масивної плити було використано [36] уточнений розв'язок одержаний [32] у другому наближенні МЕД:

$$\bar{\theta}(\xi, \tau) = \bar{\theta}_H(\tau) - Sk[1 - \bar{\theta}_H^4(\tau)] [1 + W(\tau)(1 - \xi^2)] \frac{1 - \xi^2}{2}, \quad (10.27)$$

де $W(\tau) = W(\bar{\theta}_H)$.

В роботі [36] для ілюстрації був взятий конкретний приклад з даними

$$\bar{\theta}_H = 0,933; \quad \bar{\theta}_0 = 0,2; \quad Sk = 1.$$

при яких розв'язок (10.27) набуває наступного вигляду:

$$\Theta(\xi) = \bar{\theta}(\xi) - \bar{\theta}_0 = 0,596 + 0,153\xi^2 - 0,016\xi^4. \quad (10.28)$$

Підставляючи (10.28) у (10.25), маємо

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\xi) = & 0,644(1 - \eta_N) + 0,14(\xi - 0,5)(1 - \eta_M) - \\ & - 0,596 - 0,153\xi^2 + 0,016\xi^4 \end{aligned} \quad (10.29)$$

Дослідимо цю функцію на екстремум. Беручи похідну $\frac{d\bar{\sigma}}{d\xi}$ і

прирівнюючи її нулеві, одержуємо рівняння

$$\xi^{*3} - 4,781\xi^* + 2,188(1 - \eta_M) = 0,$$

розв'язок якого визначає координату ξ^*

$$\xi^* \approx 0,481(1 - \eta_M),$$

де $\bar{\sigma}$ досягає екстремуму

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}(\xi^*) = & 0,644(1 - \eta_N) - 0,14(1 - \eta_M)(0,019 + 0,481\eta_M) - \\ & - 0,0354(1 - \eta_M)^2 + 0,00086(1 - \eta_M)^4 - 0,596. \end{aligned}$$

Покладаючи в (10.29) $\xi = 0$ та $\xi = 1$ одержуємо формули для напружень на відповідних поверхнях

$$\bar{\sigma}_{H0} = 0,644(1 - \eta_N) - 0,07(1 - \eta_M) - 0,596;$$

$$\bar{\sigma}_{H1} = 0,644(1 - \eta_N) - 0,07(1 - \eta_M) - 0,733.$$

На рис. 10.10 зображені епюри напружень в залежності від різних комбінацій поздовжньої та згинальної жорсткостей в'язей, закріплюючих плиту. З цих графіків видно, що при одному і тому ж температурному стані ТНС плити суттєво залежить від умов її закріплення. Це треба враховувати при конструюванні опор, фіксуючих деталей в конструкції. Вводячи пружні в'язі, можна суттєво зменшити температурні напруження в плиті.

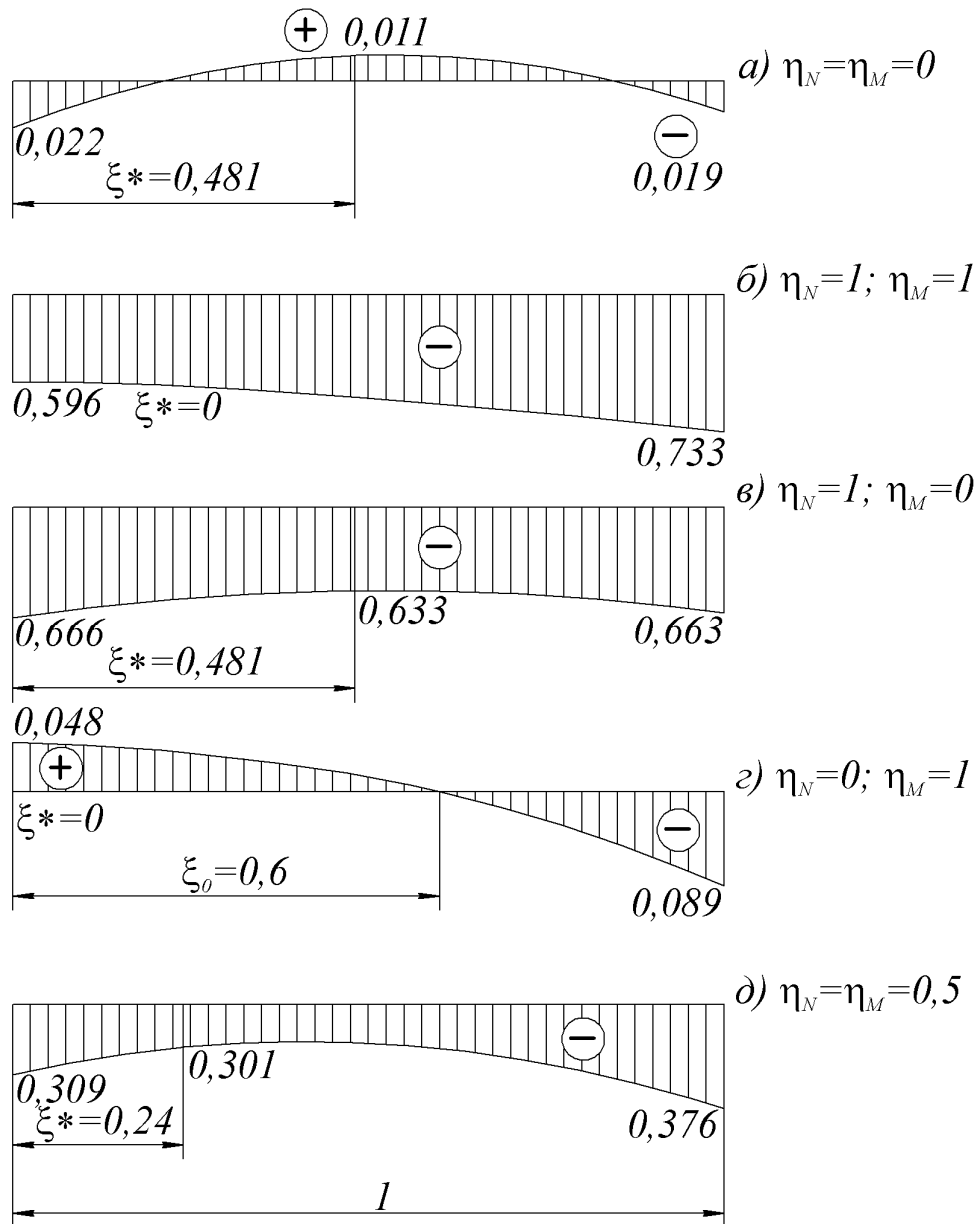


Рис. 10.10. Розподіл температурних напружень в залежності від варіанту закріплення однобічно нагріваємої плити.

10.5. ТНС ФУТЕРОВАНОГО ДИСКА КЛАПАНА ГАРЯЧОГО ДУТТЯ

У металургії, теплоенергетиці та деяких інших галузях промисловості широко використовуються теплозахисні покриття (футерівки). Однією з головних вимог, що пред'являються до них, - це здатність тривалий час без руйнування протистояти дії високих температур. Термоміцність футерівки буде забезпечена, якщо максимальні температурні напруження не будуть перевищувати допустимих величин. У свою чергу рівень цих напружень залежить від величини температурного перепаду по перерізу тіла. Максимальні ж температурні перепади здебільшого виникають на початковій стадії нагрівання. Між тим, існуючі в теплотехніці методики інженерних розрахунків температурного стану футерованих об'єктів відносяться до усталених режимів і не можуть бути використані для визначення екстремальних температурних напружень.

Усе вище сказане показує, що для правильного вибору основних параметрів футерівки необхідно знати и температурний стан на протязі всього процесу нагрівання. Для цього повинна бути розв'язана відповідна крайова задача теплопровідності.

Для прикладу розглянемо диск клапана гарячого дуття повітрянагрівачів, застосування яких позитивно впливає на підвищення продуктивності печі та зниження витрат палива за рахунок подачі назад у піч повітря, нагрітого відходячими продуктами згорання.

Конструктивно диск клапана являє собою порожнистий циліндр, закритий з обох торців. Довжина цього циліндра (товщина диска) значно менша його діаметра. Тому торцеві стінки футерованого диска можна розглядати, як необмежені двошарові пластини.

Оскільки температурний перепад на різних стадіях нагрівання різний, то необхідно знати температурне поле стінки в динаміці,

особливо в початковий момент, коли великі перепади можуть викликати великі температурні напруження.

Прагнучи одержати достатньо прості формули для орієнтовних розрахунків, введемо наступні спрощуючі припущення: по площі стикування ($x = 0$) футерівки та несучої (металевої) пластини виконується ідеальний тепловий контакт (умови спряження (4.15)); температура T_{c_2} охолоджуючого середовища (з боку $x_2 = \delta_2$) дорівнює початковій температурі T_0 пластини; теплообмін на обох поверхнях здійснюється за законами конвекції з різними величинами КТО.

У такому випадку крайова задача теплопровідності двошарової стінки має наступний вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \xi_1^2} &= \frac{K_\delta^2}{K_a} \frac{\partial \theta_1}{\partial \tau}; & \theta_1(\xi_1, 0) &= 0; \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=1} &= Bi_1 [1 - \theta_{II}(\tau)]; & \theta_1(\xi_1, 0) \Big|_{\xi_1=0} &= \theta_{II0}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \xi_2^2} &= \frac{\partial \theta_2}{\partial \tau}; & \theta_2(\xi_2, 0) &= 0; \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=1} &= -Bi_2 \theta_{II2}(\tau); & \theta_2(\xi_2, 0) \Big|_{\xi_2=0} &= \theta_{II0}(\tau); \\ \frac{K_\lambda}{K_\delta} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi_1} \Big|_{\xi_1=0} &= - \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi_2=0}, \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

де

$$\begin{aligned} \theta_i(\xi_i, \tau) &= \frac{T_i(\xi_i, \tau) - T_0}{T_{c1} - T_0}; \quad i = 1, 2; \\ \xi_i &= \frac{x_i}{\delta_i}; \quad \tau = \frac{a_2 t}{\delta_2^2}; \quad Bi_i = \frac{\alpha_i \delta_i}{\lambda_i}; \\ K_\delta &= \frac{\delta_1}{\delta_2}; \quad K_\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}; \quad K_a = \frac{a_1}{a_2}. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Розв'язання задачі (10.30)...(10.32) було проведено з допомогою МЕД у рамках МТШ в роботі [36]. При цьому процес нагрівання двохшарової пластини розбивається на чотири етапи, рис. 10.11: I -ий етап - інерційне прогрівання першого шару ($0 \leq \tau \leq \tau_1$); темпе-

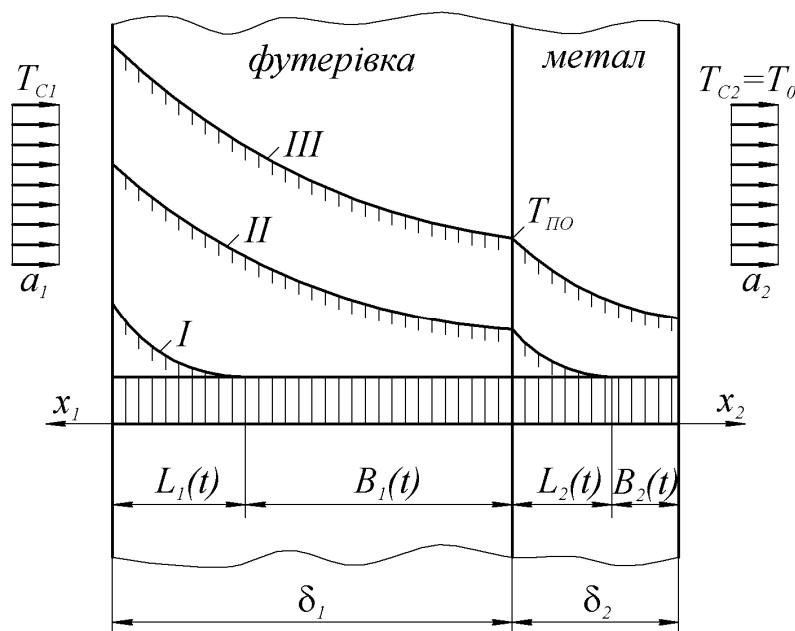


Рис. 10.11. Модель термічного шару для футерованої плити.

ратура другого шару початкова ($T_2^I = T_0$); II -ий етап - інерційне прогрівання другого шару $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ і упорядковане нагрівання першого шару; III -ій та IV -ий етапи - упорядковане нагрівання усієї пластини ($\tau_2 \leq \tau \leq \infty$).

У цій послідовності і була розв'язана задача (10.30) ... (10.32). Враховуючи уже достатню обізнаність читача з процедурою застосування МЕД, а також те, що на всіх етапах подібні розв'язки для кожної окремої пластини були одержані у §§7.2;7.5, ми обмежимося тут поданням уже кінцевих результатів, наведених в роботі [36]

I -ий етап ($0 \leq \tau \leq \tau_{10}$; $\beta_1(\tau) \leq \xi_1 \leq 1$):

$$\theta_1'(\xi_1, \tau) = \frac{Bi_1 [\xi_1 - \beta_1(\tau)]^2}{[2 + Bi_1 l_1(\tau)] l_1(\tau)}; \quad (10.33)$$

$$l_1^2(\tau) + \frac{4l_1(\tau)}{Bi_1} - \frac{8}{Bi_1^2} \ln \left[1 + \frac{Bi_1 l_1(\tau)}{2} \right] = 12 \frac{K_a}{K_\delta^2} \tau;$$

$$\tau_{10} = \frac{K_\delta^2}{12K_a} \left[1 + \frac{4}{Bi_1} - \frac{8}{Bi_1^2} \ln \left(1 + \frac{Bi_1}{2} \right) \right].$$

II – ий этап ($\tau_{10} \leq \tau \leq \tau_{20}$; $0 \leq \xi_1 \leq 1$; $0 \leq \xi_2 \leq l_2(\tau)$):

$$\theta_1''(\xi_1, \tau) = \theta_{II1}''(\tau) - Bi_1 [1 - \theta_{II1}''(\tau)] (1 - \xi_1) \xi_1 - [\theta_{II1}''(\tau) - \theta_{II0}''(\tau)] (1 - \xi_1)^2;$$

$$\theta_2''(\xi_2, \tau) = \frac{\theta_{II0}''(\tau) [l_2(\tau) - \xi_2]^2}{l_2^2(\tau)};$$

$$l_2(\tau) = \sqrt{\frac{12}{\theta_{II0}''(\tau)} \int_{\tau_{10}}^{\tau} \theta_{II0}''(\eta) d\eta};$$

$$\theta_{II1}''(\tau) = \frac{Bi_1 \left[1 - 2\varphi(\tau) + \frac{2\varphi(\tau)}{2 + Bi_1} \Phi_{21}(\tau) \right]}{(2 + Bi_1) - (1 + Bi_1) 2\varphi(\tau)};$$

$$\theta_{II0}''(\tau) = \frac{Bi_1 [1 - \Phi_{21}(\tau)]}{(1 + Bi_1) 2\varphi(\tau) - (2 + Bi_1)};$$

$$\Phi_{21}(\tau) = \exp[-C_2(\tau - \tau_{10})];$$

$$\varphi(\tau) = 1 + \frac{K_\delta}{K_\lambda l_2(\tau)};$$

$$\bar{\varphi} = 1 + \frac{K_\delta}{K_\lambda};$$

$$C_2 = \frac{6K_a (1 + Bi_1) 2\bar{\varphi} - (2 + Bi_1)}{K_\delta^2 (4 + Bi_1) \bar{\varphi} + (2 + Bi_1)};$$

$$\tau_{20} \cong \tau_{10} + \frac{1}{3(4 + C_2)} + U + V;$$

де

$$\left. \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right\} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}}; \quad \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0;$$

$$p = -\frac{1}{3(4 + C_2)^2}; \quad q = -2 \left\{ \frac{1}{[3(4 + l_2)]^3} + \frac{3}{C_2^3(4 + C_2)} \right\}.$$

III –ий этап ($\tau_{2_0} \leq \tau \leq \infty$; $0 \leq \xi_1 \leq 1$; $0 \leq \xi_2 \leq 1$):

$$\theta_1^{\text{III}}(\xi_1, \tau) = \theta_{\text{II1}}^{\text{III}}(\tau) - Bi_1 [1 - \theta_{\text{II1}}^{\text{II}}(\tau)] (1 - \xi_1) \xi_1 - [\theta_{\text{II1}}^{\text{III}}(\tau) - \theta_{\text{II0}}^{\text{III}}(\tau)] (1 - \xi_1)^2;$$

$$\theta_2^{\text{III}}(\xi_2, \tau) = [(2 + Bi_2) - (1 + Bi_2) \xi_2] \theta_{\text{II2}}^{\text{III}}(\tau) \xi_2 + \theta_{\text{II0}}^{\text{III}}(\tau) (1 - \xi_2)^2;$$

$$\theta_{\text{II0}}^{\text{III}}(\tau) = \theta_{\text{II0}}^{\infty} + [\theta_{\text{II0}}^{\text{II}}(\tau_{2_0}) - \theta_{\text{II0}}^{\infty}] \Phi_{32}^{\circ}(\tau);$$

$$\theta_{\text{II1}}^{\text{III}}(\tau) = \frac{Bi_1 + \theta_{\text{II0}}^{\infty}}{1 + Bi_1} + \left[\theta_{\text{II1}}^{\text{II}}(\tau_{2_0}) - \frac{Bi_1 + \theta_{\text{II0}}^{\infty}}{1 + Bi_1} \right] \Phi_{32}(\tau) -$$

$$- \frac{[\theta_{\text{II0}}^{\text{II}}(\tau_{2_0}) - \theta_{\text{II0}}^{\infty}] \left[1 + \frac{C_0 K_{\delta}^2}{6K_a} \right]}{(1 + Bi_1) \left(1 - \frac{C_0}{C_3} \right)} [\Phi_{32}(\tau) - \Phi_{32}^{\circ}(\tau)];$$

$$\theta_{\text{II2}}^{\text{III}}(\tau) = \frac{\theta_{\text{II0}}^{\infty}}{1 + Bi_2} \frac{1 + \frac{C_0}{6}}{1 - \frac{C_0}{C_{32}}} \frac{\theta_{\text{II0}}^{\text{II}}(\tau_{2_0}) - \theta_{\text{II0}}^{\infty}}{\theta_{\text{II0}}^{\infty}} [\tilde{\Phi}_{32}(\tau) + \Phi_{32}^{\circ}(\tau)];$$

$$\theta_{\text{II0}}^{\infty} = \frac{Bi_1(1 + Bi_2)}{Bi_1(1 + Bi_2) + Bi_2(1 + Bi_1) \frac{K_{\delta}}{K_{\lambda}}}; \quad (10.34)$$

$$\Phi_{32}^{\circ}(\tau) = \exp[-C_0(\tau - \tau_{2_0})];$$

$$\Phi_{32}(\tau) = \exp[-C_3(\tau - \tau_{2_0})];$$

$$\tilde{\Phi}_{32}(\tau) = \exp[-\tilde{C}_3(\tau - \tau_{2_0})];$$

де

$$C_0 = 6 \frac{Bi_1(1 + Bi_2) + Bi_2(1 + Bi_1) \frac{K_{\delta}}{K_{\lambda}}}{(1 + Bi_1)(4 + Bi_2) + 2(3 + Bi_2)(1 + Bi_1) \frac{K_{\delta}}{K_{\lambda}} + (2 + Bi_1)(1 + Bi_2) \frac{K_{\delta}^2}{K_a}};$$

$$C_3 = 12 \frac{K_a}{K_{\delta}^2} \frac{1 + Bi_1}{4 + Bi_1}; \quad \tilde{C}_3 = 12 \frac{1 + Bi_2}{4 + Bi_2}.$$

IV –ий етап – усталений температурний режим ($\tau \rightarrow \infty$): точний розв'язок стаціонарної $\left(\frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} = 0\right)$ задачі (10.30) ... (10.32):

$$\theta_1^\infty(\xi_1) = \theta_{\Pi 0}^\infty + Bi_1(1 - \theta_{\Pi 1}^\infty)\xi_1; \quad (10.35)$$

$$\theta_2^\infty(\xi_2) = \theta_{\Pi 0}^\infty + Bi_2\theta_{\Pi 2}^\infty\xi_2; \quad (10.36)$$

$$\theta_{\Pi 1}^\infty = \theta_{\Pi 0}^\infty \left(1 + \frac{Bi_2}{1 + Bi_2} \frac{K_\delta}{K_\lambda}\right) = \frac{Bi_1 + \theta_{\Pi 0}^\infty}{1 + Bi_1}; \quad (10.37)$$

$$\theta_{\Pi 2}^\infty = \frac{\theta_{\Pi 0}^\infty}{1 + Bi_2}. \quad (10.38)$$

Для ілюстрації був проведений розрахунок температурного стану диска клапана гарячого дуття $\varnothing 1300$ при наступних основних вихідних даних:

$$T_{c_1} = 1873K; T_{c_2} = 309K; \delta_1 = 0,025m; \delta_2 = 0,025m;$$

метал диска - сталь Ст.20; футерівка муліто-корундова;

$$\lambda_1 = 1,06 \frac{Вт}{мК}; \alpha_1 = 1020 \frac{Вт}{м^2К}; \lambda_2 = 51,8 \frac{Вт}{мК}; \alpha_2 = 2180 \frac{Вт}{м^2К};$$

$$a_2 = 4,7 \cdot 10^{-2} \frac{м^2}{год}.$$

Розрахунки дали такі результати:

$$\tau_{1_0} = 3,12 (t_{1_0} = 2,5хв.); \tau_{2_0} = 6,88 (t_{2_0} = 5,5хв.); \tau_\infty \approx 13,0 \\ (t_\infty = 10,4хв.);$$

$$\theta_{\Pi 1}^\infty = 0,964 (T_{\Pi 1}^\infty = 1817K); \theta_{\Pi 2}^\infty = 0,028 (T_{\Pi 2}^\infty = 337K);$$

$$\theta_{\Pi 0}^\infty = 0,037 (T_{\Pi 0}^\infty = 367K).$$

Розподіл температури по товщині пластини зображено на рис. 10.12.

З цих розрахунків видно, що, по-перше, усталений режим $\theta^\infty(\xi)$ практично досягається вже через $t = 10,4хв.$, а, по-друге,

найбільші температурні перепади по товщині стінки спостерігаються саме в усталений період:

$$\Delta T_1 = T_{\Pi 1}^{\infty} - T_{\Pi 0}^{\infty} = 1817 - 367 = 1450^{\circ} \text{C};$$

$$\Delta T_2 = T_{\Pi 0}^{\infty} - T_{\Pi 2}^{\infty} = 367 - 337 = 30^{\circ} \text{C}.$$

Остання обставина негативно впливає на термоміцність диска, так як рівень температурних напружень здебільшого визначається температурним перепадом.

У § 3.2 одержано розв'язок (3.6) задачі термопружності необмеженої пластини, повністю вільної від зовнішніх в'язей. Так як товщина стінки диска значно менша діаметра ($D/\delta > 30$) то її можна розглядати як необмежену пластину, і для дослідження ТНС користуватись виразом (3.6). Такі дослідження були проведені за завданням ДЗМУ.

Якщо виходити з того, що рівень температурних напружень характеризується величиною температурного перепаду, то, згідно

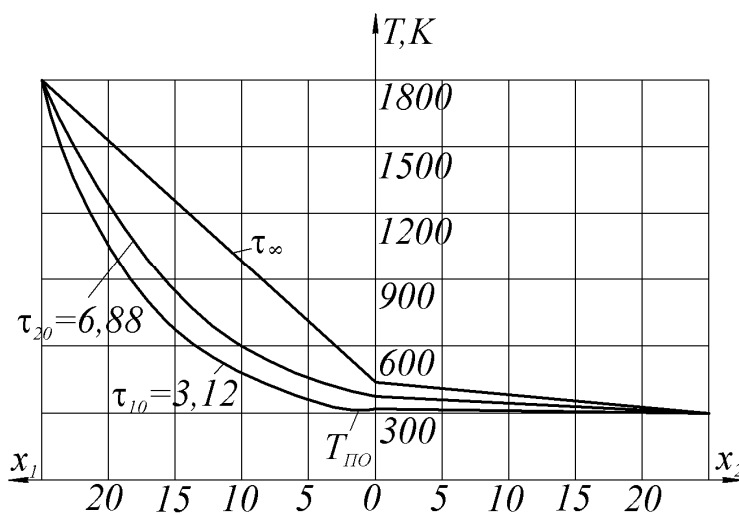


Рис. 10.12. Розвиток в часі (τ) температурного поля футерованої плити.

рис. 10.12, перш за все треба дослідити ТНС стінки диску в усталений період, коли ΔT досягає найбільшого значення. У цей період температурні поля у футерівці і металевій пластині визначаються лінійними функціями (10.35), (10.36), яким можна надати наступного вигляду:

$$\theta_i^{\infty}(\xi) = \theta_{\Pi i}^{\infty} - \Delta \theta_{\Pi i}^{\infty}(1 - \xi) \quad (i = 1; 2), \quad (10.39)$$

де $\Delta \theta_{\Pi i}^{\infty} = \theta_{\Pi i}^{\infty} - \theta_{\Pi 0}^{\infty}$.

Підставляючи функцію (10.39) у загальний розв'язок (3.6) задачі термопружності, розглянемо окремо кожен його складову:

$$\bar{\sigma}'_{\infty} = \int_0^1 \theta_i^{\infty}(\xi) d\xi = \int_0^1 [\theta_{\Pi i}^{\infty} - \Delta\theta_{\Pi i}^{\infty}(1-\xi)] d\xi = \theta_{\Pi i}^{\infty} - \frac{\Delta\theta_{\Pi i}^{\infty}}{2}; \quad (10.40)$$

$$\bar{\sigma}''_{\infty} = 12 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \left(\xi - \frac{1}{2} \right) \theta_i^{\infty}(\xi) d\xi = \Delta\theta_{\Pi i}^{\infty} \left(\xi - \frac{1}{2} \right); \quad (10.41)$$

$$\bar{\sigma}'''_{\infty} = -\theta(\xi) = -\theta_{\Pi i}^{\infty} + \Delta\theta_i^{\infty}(1-\xi); \quad (10.42)$$

Якщо тепер ці вирази підставити у формулу (3.6), або (10.26), то одержимо

$$\bar{\sigma}_{\infty} = \bar{\sigma}'_{\infty} + \bar{\sigma}''_{\infty} + \bar{\sigma}'''_{\infty} = \theta_{\Pi i}^{\infty} - \frac{\Delta\theta_i^{\infty}}{2} + \Delta\theta_i^{\infty} \left(\xi - \frac{1}{2} \right) - \theta_{\Pi i}^{\infty} + \Delta\theta_i^{\infty}(1-\xi) \equiv 0.$$

Цей добре відомий в теорії термопружності результат говорить про те, що у випадку лінійного профілю температурного поля у вільній пластині температурні напруження виникнути не можуть. Наголосимо на двох необхідних для цього умовах: лінійність температурного розподілу та повна свобода переміщень торців пластини. Цілком зрозуміло, що повністю задовольнити таким вимогам на практиці майже нереально. Тому розглянемо різні варіанти можливого відхилення від цих умов.

У §§ 8.1; 10.4 ми вже досліджували вплив умов закріплення пластини на її ТНС. Якщо знехтувати пружністю наявних в'язей, то можливі наступні випадки (див. рис. 10.9):

б) якщо торці пластини повністю позбавлені усіх степенів вільності ($\eta_N = \eta_M = 1$) то напруження в ній визначається останньою складовою (10.26, б), а у нашому випадку це $\bar{\sigma}'''_{\infty}$ (10.42);

в) якщо ж торці не можуть рухатись уздовж пластини ($\eta_N = 1$), але мають можливість вільного кутового руху ($\eta_M = 0$), то ТНС буде відповідати формулі (10.26, в) або сумі $\bar{\sigma}''_{\infty}$ (10.41) та $\bar{\sigma}'''_{\infty}$ (10.42)

$$\bar{\sigma}_{\infty}^{(\epsilon)} = -\frac{\theta_{\text{III}} + \theta_{\text{II0}}}{2} = \text{const}; \quad (10.43)$$

г) якщо навпаки: торці позбавлені можливості обертання ($\eta_M = 1$), але можуть вільно рухатись уздовж пластини ($\eta_N = 0$), тоді ТНС визначається формулою (10.26, з). або сумою $\bar{\sigma}'_{\infty}$ (10.40) та $\bar{\sigma}'''_{\infty}$ (10.42), тобто

$$\bar{\sigma}_{\infty}^{(\epsilon)} = -\Delta\theta_{\text{III}} \left(\xi - \frac{1}{2} \right). \quad (10.44)$$

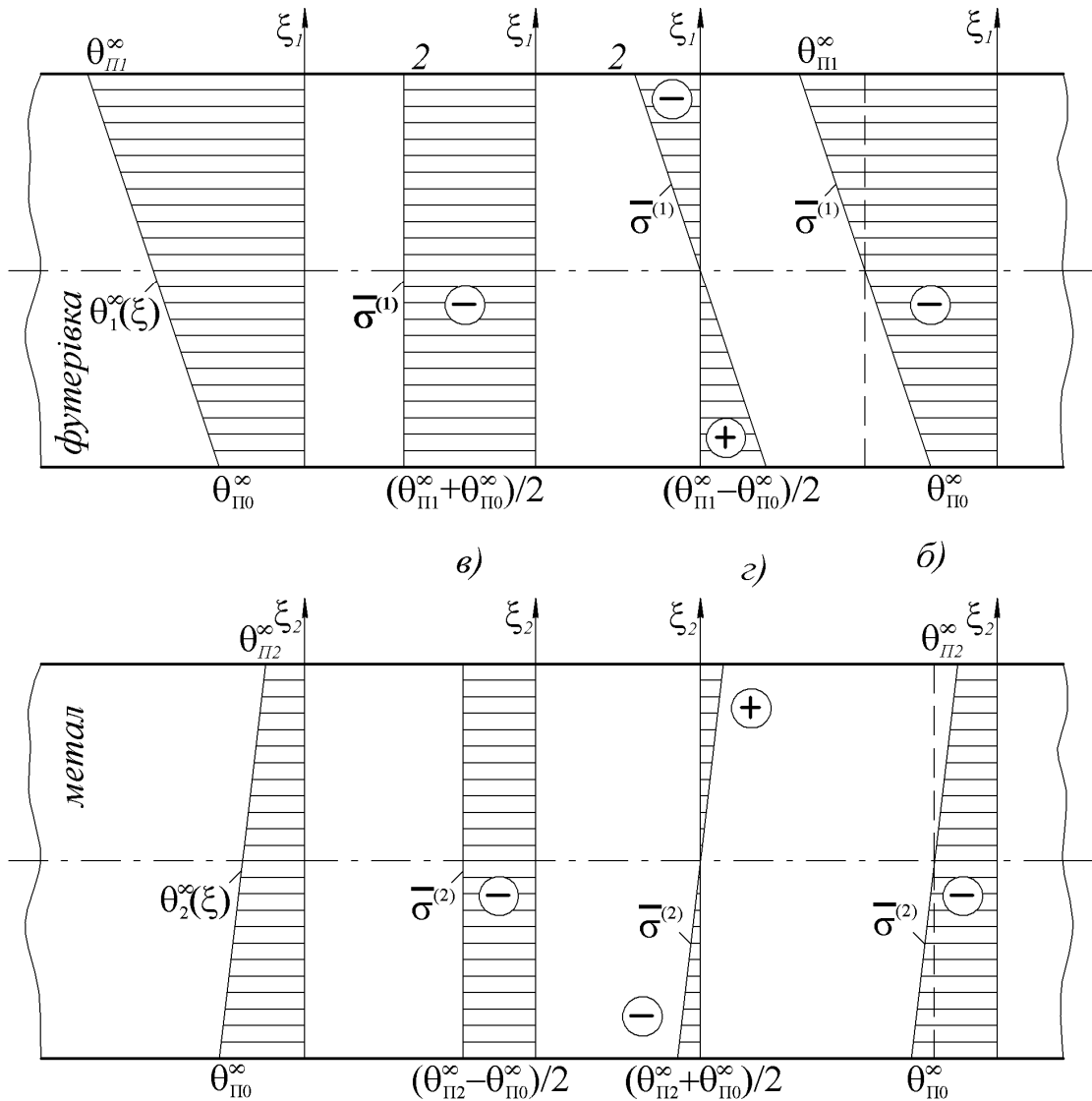


Рис. 10.13. Розподіл температурних напружень по товщині футерівки і металу при різних умовах закріплення плити

На рис. 10.13 зображені графіки розподілення напружень (10.42), (10.43), (10.44) при різних умовах закріплення для випадків $\bar{\sigma}_1^\infty = \theta_{II1}^\infty - \theta_{II0}^\infty > 0$ (футерівка) та $\Delta\theta_{II2}^\infty = \theta_{II2}^\infty - \theta_{II0}^\infty < 0$ (металева пластина).

Із цих графіків видно, що закріплена пластина найменш напружена у випадку рухомого затиснення (торці пластики вставлені в жорсткі пази без зазору, див. рис. 10.9, з). Найбільші ж напруження виникають при повному закріпленні торців і пропорційні максимальній відносній температурі, тобто

$$\bar{\sigma}_{\max} = \theta_{\max}.$$

У нашому випадку, згідно рис. 10.12, для футерівки

$$\bar{\sigma}_{\max,1} = \theta_{II1}^\infty$$

і металевої стінки

$$\bar{\sigma}_{\max,2} = \theta_{II0}^\infty$$

де θ_{II1}^∞ (10.37), θ_{II0}^∞ (10.38).

Тепер розглянемо нелінійний розподіл температури по перерізу стінки. Для конкретності візьмемо кінець ($\tau = \tau_{10}$) етапу прогрівання футерівки, коли, температурне поле визначається функцією (10.33) при ($l(\tau_{10}) = 1; \beta(\tau_{10}) = 0$), тобто

$$\theta_1^I(\xi_1) = \frac{Bi_1 \xi_1^2}{2 + Bi_1} = \Delta\theta_1 \xi_1^2.$$

У цьому випадку одержуємо

$$\bar{\sigma}_1' = \int_0^1 \theta_1^I(\xi_1) d\xi = \frac{1}{3} \Delta\theta_1,$$

$$\bar{\sigma}_1'' = 12 \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \int_0^1 \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) \theta_1^I(\xi) d\xi = \Delta\theta_1 \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right);$$

$$\bar{\sigma}_1''' = -\theta_1^I(\xi_1) = -\Delta\theta_1 \xi_1^2,$$

де

$$\Delta\theta_1 = \theta_{III}(\tau_1) = \frac{Bi_1}{2 + Bi_1}.$$

Тоді в розглянутих вище варіантах закріплення пластини її ТНС буде визначатись формулами:

$$\bar{\sigma}_1^{(e)} = \bar{\sigma}_1'' + \bar{\sigma}_1''' = -\frac{1}{2} \Delta\theta_1 (1 - 2\xi_1 + 2\xi_1^2); \quad (10.45)$$

$$\bar{\sigma}_1^{(z)} = \bar{\sigma}_1' + \bar{\sigma}_1''' = -\frac{1}{3} \Delta\theta_1 (1 - 3\xi_1^2); \quad (10.46)$$

$$\bar{\sigma}_1^{(o)} = \bar{\sigma}_1''' = -\Delta\theta_1 \xi_1^2. \quad (10.47)$$

У вільній пластині тепер напруження уже будуть існувати, і її ТНС відображається формулою (10.26)

$$\bar{\sigma}_1^{(a)} = \bar{\sigma}_1' + \bar{\sigma}_1'' + \bar{\sigma}_1''' = -\frac{1}{6} \Delta\theta_1 (1 - 6\xi_1 - 6\xi_1^2). \quad (10.48)$$

Розподіл, напружень по перерізу футерівки у випадках (10.48) ... (10.51) зображений на рис. 10.14.

Тут також найбільші напруження в пластині виникнуть при повному закріпленні її торців (варіант б) і будуть дорівнювати

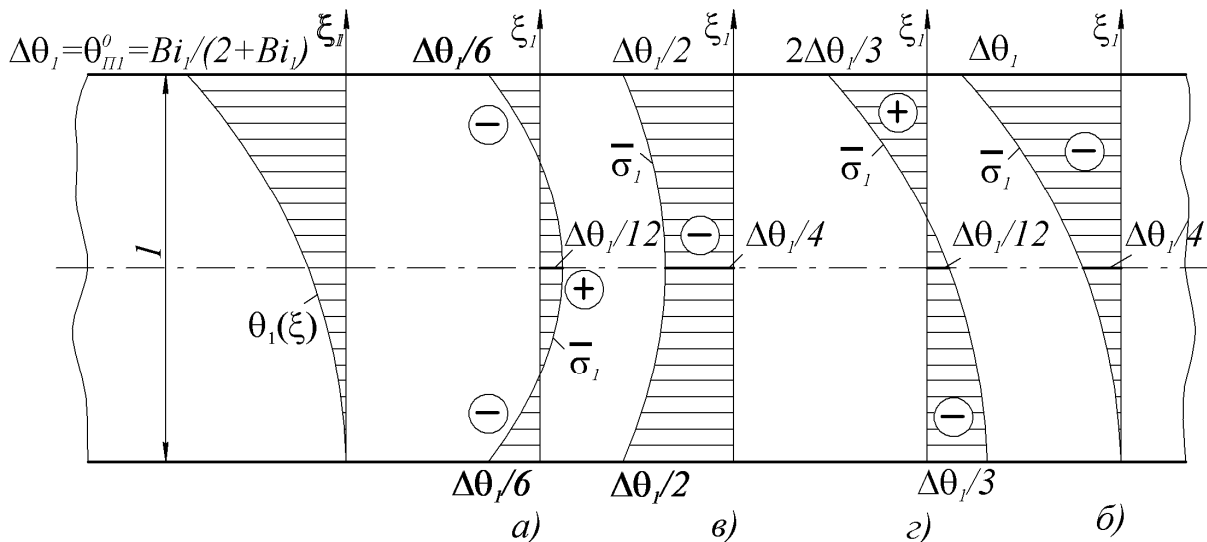


Рис. 10.14. Термонапружений стан футерівки в період прогрівання.

$$\max \bar{\sigma}_1^{(\delta)} = -\Delta\theta_1 = -\frac{Bi_1}{2 + Bi_1}.$$

В залежності від величини критерію Bi_1 вони змінюються у межах $-1 \leq \max \bar{\sigma}_1^{(\delta)} < 0$ при $0 \leq Bi_1 \leq \infty$. Зображений на рис. 10.15 графік цієї залежності показує, що $\max \bar{\sigma}_1^{(\delta)}$ суттєво залежить від критерію теплообміну Bi_1 .

Якщо врахувати, що для стінки диска клапана $Bi_1 < 2$, а при таких величинах критерію теплообміну, згідно рис. 10.15, напруження особливо відчутно залежать від його величини, то навіть незначним зменшенням Bi_1 можна досягти істотного зменшення температурних напружень.

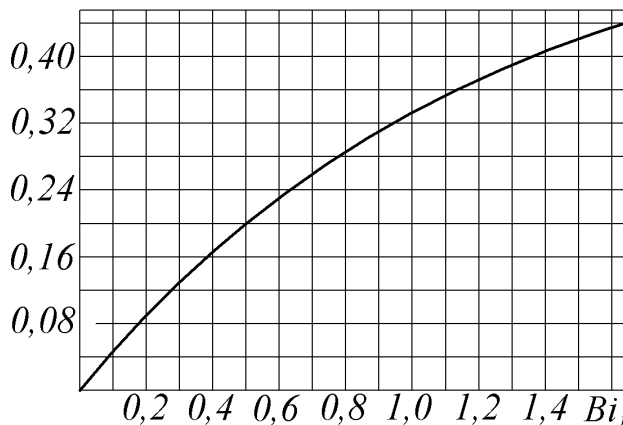
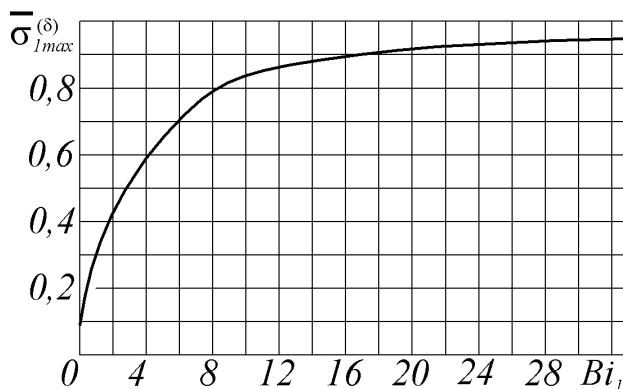


Рис. 10.15. Залежність максимальних напружень в закріпленій плиті.

Так як $Bi_1 = \frac{\alpha_1 \delta_1}{\lambda_1}$, то

звідси видно, що зменшення цього критерію можна досягти або зниженням КТО α_1 , або зменшенням товщини футерівки δ_1 , або вибором матеріалу з більшим коефіцієнтом теплопровідності λ_1 . Це один шлях.

Другий шлях зниження температурних напружень - це зменшення температурного перепаду $\Delta\theta$.

Для цього нами запропоновано між основною

футерівкою та металевою стінкою ввести допоміжний прошарок зі слабкотеплопровідного матеріалу. Тоді стінка диску клапана набуває вигляду тришарової пластини. Було взято для прошарку азбестодіатомовий бетон з вихідними даними [37]:

$$\delta_3 = 0,005 \text{ м}; \quad \lambda_3 = 0,12 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

У такому випадку при дещо зменшеній товщині основної футерівки ($\delta_1 = 0,02 \text{ м}$) та усіх інших попередніх даних одержано

$$T_{П1}^{\infty} = 1842 \text{ К}; \quad T_{П1}'^{\infty} = 1196 \text{ К}; \quad T_{П0}''^{\infty} = 340 \text{ К}; \quad T_{П2}^{\infty} = 325 \text{ К};$$

$$\Delta T_1 = T_{П1}^{\infty} - T_{П0}'^{\infty} = 646^{\circ} \text{ С}; \quad \Delta T_2 = T_{П0}''^{\infty} - T_{П2}^{\infty} = 15^{\circ} \text{ С};$$

$$\Delta T_0' = T_{П0}'^{\infty} - T_{П0}''^{\infty} = 856^{\circ} \text{ С}.$$

Із порівняння результатів бачимо, що введенням азбестодіатомового прошарку товщиною $\delta_3 = 0,005 \text{ м}$ і зменшенням товщини основної футерівки на 5 мм удалось знизити температурні перепади на $45 \dots 50\%$.

Температурне поле футерівки та металу в усталеному режимі описується тими ж лінійними функціями (10.39), де

$$\theta_{П1}^{\infty} = \frac{T_{П1}^{\infty} - T_0}{T_{С1} - T_0} = \frac{1842 - 293}{1873 - 293} = 0,98;$$

$$\theta_{П2}^{\infty} = \frac{T_{П2}^{\infty} - T_0}{T_{С1} - T_0} = \frac{325 - 293}{1873 - 293} = 0,02;$$

$$\theta_{П0}''^{\infty} = \frac{T_{П0}''^{\infty} - T_0}{T_{С1} - T_0} = \frac{340 - 293}{1873 - 293} = 0,03.$$

Приймаємо для мулітокорундової масонабивної футерівки МКБП-442

$$E_1 = 2,7 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad \alpha_{Т1} = 7 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}; \quad \nu_1 = 0,17; \quad \lambda_1 = 1,06 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

У такому разі для футерівки

$$K_{\sigma_1} = \frac{\alpha_{T1} E_1 (T_{C1} - T_0)}{1 - \nu_1} = \frac{7 \cdot 10^{-6} \cdot 2,7 \cdot 10^4 \cdot 1580}{1 - 0,17} = 360 \text{ МПа};$$

$$\max \sigma_1^{\infty} = -\theta_{II1}^{\infty} K_{\sigma_1} = -0,98 \cdot 360 = -353 \text{ МПа}; \quad (10.50)$$

для металу(Ст.20)

$$E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \alpha_{T2} = 1,24 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}; \quad \nu_2 = 0,3;$$

$$\lambda_2 = 51,8 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

$$K_{\sigma_2} = \frac{\alpha_{T2} E_2 (T_{C1} - T_0)}{1 - \nu_2} = \frac{1,24 \cdot 10^{-5} \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1573}{1 - 0,3} = 5573 \text{ МПа};$$

$$\max \sigma_2^{\infty} = -\theta_{II0}^{\infty} K_{\sigma_2} = -0,03 \cdot 5573 = -166 \text{ МПа} \quad (10.51)$$

що значно (у 2,2 рази) менше границі міцності, яка для Ст.20 при $T \leq 100 \text{ }^{\circ}\text{C}$ рівна $\sigma_u = 370 \text{ МПа}$.

Для порівняння підрахуємо ці ж напруження при конструкції стінки диска без додаткового прошарку. За одержаними раніш даними (10.39) маємо

$$\max \sigma_1^{\infty} = -\theta_{II1}^{\infty} K_{\sigma_1} = -0,964 \cdot 360 = -346 \text{ МПа}$$

$$\max \sigma_2^{\infty} = -\theta_{II0}^{\infty} K_{\sigma_2} = -0,037 \cdot 5573 = -207 \text{ МПа} \quad (10.52)$$

Порівнюючи результати (10.52) та (10.50), (10.51), бачимо, що введення прошарку несуттєво (на 3%) підвищило напруження у футерівці, але значно (на 20%) знизило у головному металі. Ми розглянули найбільш не вигідний варіант конструкції диска клапана, коли і футерівка і металева пластина жорстко закріплені (відсутні будь які переміщення). Реальні ж умови фіксації елементів стінки дещо м'якші. Дійсно, так як коефіцієнт лінійного температурного розширення футерівки значно менший, чим сталі, то торці футерівки будуть мати певну можливість лінійного і обертового переміщення. Це безумовно суттєво позначиться на температурних напруженнях у бік їх зниження.

Що стосується металевієї пластини, то її з'єднання з обичайкою також не можна вважати абсолютно жорстким. Так як відношення поздовжніх і поперечних розмірів досить велике ($D/\delta_2 = 1300/25 = 52$), то (аналогічно фермам) зварне з'єднання тут досить близьке до шарнірного. Більш того, так як обичайка теж сталева і теж нагрівається то і закріплення пластини має деяку вільність лінійних переміщень. Усе це підтверджує те, що рівень температурних напружень у металевій пластині диска клапана в реальних умовах може бути нижчий, чим (10.51).

Але це ніяк не говорить про повну надійність спроектованого так об'єкта. Річ у тім, що він повинен бути розрахований не на одноразову короткочасну дію температури, а на тривалу міцність.

Границя ж тривалої міцності суттєво знижується із збільшенням терміну експлуатації. Тому для забезпечення надійної роботи диска клапана в умовах тривалої дії високих температур ($T_c = 1873K$) можливо слід запропонувати замість, Ст.20 іншу сталь, яка має вищу термостійкість.

Наприклад, сталь ЕМ 696 має границю міцності $\sigma_u = 1000 \text{ МПа}$, границю текучості $\sigma_y = 600 \text{ МПа}$, тривалу міцність

$\sigma_{TM} = \sigma_{2000}^{900} = 700 \text{ МПа}$ і добрі пластичні властивості ($\delta_{10} = 15 \dots 30\%$; $\psi = 15 \dots 30\%$).

Футерівку також можна запропонувати іншу, з більшою теплопровідністю і високими міцнішими якостями. Наприклад, полікристалічні карборундові матеріали мають границю міцності на стиск $\sigma_u^{CT} = 1000 \text{ МПа}$ і коефіцієнт теплопровідності

$$\lambda = 58 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}.$$

ПІСЛЯМОВА

Закінчена подача запланованого даною книгою матеріалу. Нагадаємо, що метою цієї праці було, по-перше, розкриття основ теорії термомеханіки; по-друге, розробка і викладення наближених методів розв'язання крайових задач теорій теплопровідності та термопружності; по-третє, одержання наближених загальних розв'язків задач термомеханіки; по-четверте, розробка методик розрахунку температурного та термонапруженого стану тіл основної геометрії; по-п'яте, ілюстрація практичного використання запропонованих формул та методик до розрахунку деяких технічних об'єктів; по-шосте, на конкретних числових результатах показ того, що в наш час цілком ігнорувати досягненнями високорозвиненої теорії термомеханіки безграмотно, а нехтувати температурними напруженнями у ряді випадків просто недопустимо.

Отже, уміння розраховувати і враховувати температурні напруження в практиці машинобудування чи металургійного виробництва стає нагальною необхідністю. І в цьому плані подані тут матеріали можуть бути досить доцільними. Тут доречно зауважити, що призначення вміщених у главі 10 прикладів полягає не стільки в дослідженні та розрахунках розглянутих там конкретних об'єктів, скільки саме в ілюстрації можливостей, способів і техніки використання матеріалів посібника до аналогічного аналізу термомеханічних процесів у будь-яких об'єктах, які підпадають під вимоги інженерної термомеханіки (див. глава. І якщо це допоможе зацікавленому читачеві знайти відповідь на ті чи інші питання (загальнопізнавального, наукового, конструкторського чи інженерного плану), то це буде найвищим доказом корисності даної книги.

Але треба наголосити на тому, що тут були викладені лише основи прикладної термомеханіки. Практичні ж проблеми нерідко можуть виходити за межі цих основ. Це буде тоді, коли

необхідна точність розрахунків або дослідження певних особливостей об'єкта не можуть бути забезпечені у рамках прийнятих спрощуючих гіпотез (див. гл.І).

Розберемо найбільш суттєві з цих випадків.

1. Нелінійності. Ми припускали, що теплофізичні (λ , c , a) та механічні (a_T , E , ν) характеристики матеріалів є сталими величинами. У дійсності ж вони залежать від температури. І якщо інтервал зміни температури тіла незначний, то використанням у розрахунках значень характеристик, відповідаючих середній температурі, можна певною мірою урахувати цю залежність. Але точність та надійність таких розрахунків буде тим менша, чим ширший діапазон зміни температури тіла. Загальне ж введення залежностей у висхідну математичну модель перетворює диференціальні рівняння термомеханіки у нелінійні (нелінійність 1-го роду).

Якщо коефіцієнти зовнішнього теплообміну теж залежать від температури, то нелінійність з'являється в граничних умовах (нелінійність II-го роду).

У металургійному і машинобудівному (ливарному, зварювальному) виробництві одними із основних технологічних процесів є процеси, супроводжувані зміною агрегатного стану речовини. Це кристалізація і плавлення металу. Математичне моделювання у цьому випадку досить і часто зводиться до рівняння теплопереносу з нелінійно залежними від температури джерелами тепла (нелінійність III-го (роду)).

Усе це нелінійності фізичні, але ще існують і геометричні, які обумовлені нелінійною формою граничних поверхонь тіла, а також значними деформаціями, коли принципом “заморожування” користуватись не можна.

Точних загальних роз'язків нелінійних задач термомеханіки доки що не існує. Використовуються наближені методи, частіш усього різні чисельні (сіток, скінчених різниць, скінченого елемента, граничного елемента, елементарного теплового балан-

су). Поширені також і різні аналогові методи. Для одновимірних об'єктів застосовують і деякі аналітичні методи [3, 12, 16, 24, 21], які можна розбити на дві категорії. До першої належать добре відомі точні класичні методи розв'язання лінійних задач математичної фізики. Використанню цих методів повинна передувати лінеаризація вихідної моделі. До другої відносяться ті малочисельні методи (наприклад, збурення або малого параметра), які дозволяють одержувати розв'язки задач без їх попередньої лінеаризації. До останніх відноситься і метод еквівалентних джерел, який виявився досить ефективним у розв'язанні нелінійних задач [22, 34, 35 та ін.].

Отже, маючи на увазі те, що в умовах багатьох виробництв температура об'єктів дослідження змінюється в досить широких інтервалах, врахування нелінійностей стає вже не стільки бажаним, скільки необхідним. І тут безперечно на перший план виступають чисельні методи, яким (при дослідженні багатовимірних об'єктів з урахуванням нелінійностей) альтернативи немає.

2. Відхилення від лінійного закону Гука. Викладені в книзі методики розрахунку термонапруженого стану тіл основані виключно на розв'язках задач термонапружності. Але при широкій зміні температур характер деформування матеріалів змінюється. Зокрема, у сталі при температурі 800К починає розвиватись термопластичний напружено-деформований стан. У такому випадку закон Гука втрачає силу. Потрібні вже дослідження з позицій теорії термопластичності. Нами (див. літературу [36]) з використанням МТШ та МЕД було проведено дослідження термопружно-пластичного стану в перехідний період, коли тіло розділено на пружну та пластичну зони, з яких перша зменшується, а друга поширюється врешті на все тіло.

Поряд з термопластичністю спостерігаються і явища в'язкості, повзучості, релаксації. Усе це термомеханічні процеси, інженерне врахування яких ще досить проблематичне і за точністю фізичного та математичного моделювання, і за

відсутністю надійної інформації про відповідні механічні характеристики більшості матеріалів.

3. Питання надійності та довговічності. В цій роботі при розрахунках на термоміцність ми обмежились відомими із опору матеріалів умовами міцності. Лише відзначили (§9.2), що існують поняття тривалої міцності (δ_{TM}) та границі повзучості ($\delta_{повз}$). Але ж це дуже важливі характеристики для вибору конструкційних сталей, призначених для виготовлення механічного обладнання [37, 44, 51].

Крім цього, в умовах циклічної зміни високих температур в металі накопичуються пластичні деформації, що в решті решт при тривалій роботі призведе до втомного руйнування деталі. Отже, необхідно володіти методами розрахунку і на термовтомність (наприклад, [28]).

Існують й інші питання термомеханіки: проблема термотріщиностійкості (має значення, наприклад, при прогнозуванні строків служіння виливниць); взаємовплив полів температур та деформацій (ефект зв'язаності суттєво проявляється у процесі холодної прокатки металу, який у наслідок швидких великих пластичних деформацій нагрівається, що призводить до появи додаткових (температурних) напружень. Врахування другого ефекту (динамічного), яким нехтує термомеханічна модель Дюгамеля-Нейманна, було б корисне при дослідженні початкової стадії формування кірки твердого зливка.

Отже проблем, які потребують як використання самих новітніх досягнень сучасної термомеханіки, так і опанування математичним забезпеченням (включаючи і ЕОМ) для їх реалізації, дуже багато. Більшість з них доки що відносяться до науково-дослідницької діяльності відповідних фахівців високого рівня.

Ця ж книга призначена бути читачеві першим кроком на шляху оволодіння багатогранними проблемами прикладної термомеханіки.

ЛІТЕРАТУРА

1. Абрамов В.В. Напряжения и деформации при термической обработке стали. – К.-Донецк: Вища школа, 1985. – 133 с.
2. Антикайн П.А. Металлы и расчет на прочность котлов и трубопроводов. – М.: Энергия, 1980. – 424 с.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности: в 2-х частях. – М.: Высш. Школа, 1982. – 630 с.
4. Блехман Н.К., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – К.: Наук. думка, 1976. – 270с.
5. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 517 с.
6. Гейтвуд Б. Температурные напряжения применительно к самолетам, турбинам и ядерным реакторам. – М.: ИЛ. 1959. – 249 с.
7. Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. Расчет температурных напряжений в ядерных реакторах. – М.: Госатомиздат, 1962. – 159 с.
8. Гречаник Э.Н., Постольник Ю.С. Термонапряженное состояние сквозных изложниц. // «Изв. вуз. Машиностроение», 1984, №9. – С. 104-108.
9. Губа В.М. Приближенный расчет температурных напряжений на базе инженерной модели процесса теплопроводности и метода эквивалентных источников. // Автореф. Канд. дисс. Днепропетровск, ДИИТ, 1973. – 20 с.
10. Динник А.Н. Избранные труды. Т. 2. Приложение функции Бесселя к задачам теории упругости. – К.: Изд. АН УССР, 1955. – 223 с.
11. Зарубин В.С. Инженерные методы решения задач теплопроводности. – М.: Энергоиздат, 1983. – 328 с.

12. Зарубин В.С. Прикладные задачи термостойкости элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1985. – 296 с.
13. Исаченко А.П., Осипова В.А., Сукомел А.С. Теплопередача. – М.: Энергоиздат, 1981. – 416 с.
14. Історія світової науки та техніки: Навчальний посібник // Під заг. ред. А.П. Огурцова. – К.: ІСДО МОУ, 1995. – 510 с.
15. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. – М.: Мир, 1964. – 487 с.
16. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высш. школа, 1985. – 480 с.
17. Кинджери В.Д. Измерения при высоких температурах. – М.: Metallurgizdat, 1963. – 466 с.
18. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – К.: Наук. думка, 1970. – 307 с.
19. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975. – 226 с.
20. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
21. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1967. – 599 с.
22. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности. // «Изв. АН СССР. Энергет. и трансп.», 1970, №5. – С. 109-150.
23. Львовский В.М. Развитие научных основ повышения прочности элементов металлургических машин и агрегатов при температурных воздействиях // Автореферат дисс. докт. техн. наук. – Днепропетровск, ДМеТИ, 1990. – 29 с.
24. Михайлов М.Д. Нестационарный тепло- и массоперенос в одномерных телах. – Минск: АН БССР, 1969. – 182 с.
25. Мучник Д.А., Постольник Ю.С. Теория и техника охлаждения кокса. – К.-Донецк: Выщ. шк., 1979. – 160 с.

26. Паркус Г.С. Неустановившиеся температурные напряжения. – М.: Физматгиз, 1963. – 251 с.
27. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища школа, 1993. – 655 с.
28. Писаренко Г.С., Руденко В.Н., Третьяченко Г.Н., Трощенко В.Т. Прочность материалов при высоких температурах. – К.: Наук. думка, 1966. – 795 с.
29. А.Н. Подгорный, Г.А. Марченко, В.И. Пустынников. Основы и методы прикладной теории упругости. – Киев: Вища школа, 1981. – 328 с.
30. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
31. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984. – 386 с.
32. Постольник Ю.С. Вопросы нелинейной теории нагрева и охлаждения металла. // Автореф. Дисс. д-ра техн. наук. – Днепропетровск, ДМеТИ, 1980. – 48 с.
33. Постольник Ю.С. Обобщение и дальнейшее развитие методов теплового пограничного слоя. // «Изв. вуз. Черн. мет.», 1982, №2. – С. 99-103.
34. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике. – К.: Вища школа, 1984. – 158 с.
35. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Нелінійна прикладна термомеханіка. – К.: НМЦ ВО МОНУ, 2000. – 280 с.
36. Постольник Ю.С., Огурцов А.П., Решетняк І.С. Основи металургійної термомеханіки. – Дніпродзержинськ. Вид-во ДДТУ, 1998. – 360 с.
37. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях. Т.1 // Под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Наук. думка, 1980. – 535 с.

38. Расчет конструкций на тепловые воздействия. // Бажанов В.Д., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А. и др. – М.: Машиностроение, 1969. – 599 с.
39. Расчет нагревательных и термических печей. Справочник. // Под ред. Тымчака В.М., Гусовского В.Л. – М.: Metallurgy, 1983. – 481 с.
40. Семикин И.Д. Теоретические основы нагревательных печей и колодцев. // «Сталь», 1937, №11-12. – С. 29-42.
41. Сеницын А.П. Расчет конструкций на тепловой удар. – М.: Стройиздат, 1971. – 231 с.
42. Сорокин Л.А. Работа конструкций доменных печей. – М.: Metallurgy, 1976. – 325 с.
43. Тайц Н.Ю. Технология нагрева стали. – М.: Metallurgizdat, 1962. – 567 с.
44. Термопрочность деталей машин. // И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, И.В. Демянушко и др. – М.: Машиностроение, 1975. – 455 с.
45. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наук. думка, 1972. – 507 с.
46. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
47. Тимошпольский В.И., Трусова И.А., Пекарский М.Я. Кольцевые печи. – Минск: Вышейш. шк., 1993. – 248 с.
48. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
49. Тылкин М.А., Яловой Н.И., Полухин П.И. Температуры и напряжения в деталях металлургического оборудования. – М.: Высш. школа, 1970. – 418 с.
50. Феодосьев В.И. Прочность теплонапряженных узлов жидкостных ракетных двигателей. – М.: Оборонгиз, 1963. – 209 с.

51. Химушкин Ф.Ф. Жаропрочные стали и сплавы. – М.: Металлургия, 1969. – 752 с.
52. Швец М.Е. приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. // «ПММ», 1949, т.13, №3. – С. 257-266.
53. Шнейдер П.Дж. Инженерные проблемы теплопроводности. – М.: ИЛ, 1960. – 478 с.
54. Юдаев Б.Н. Теплопередача. – М.: Высш. школа, 1973. – 360 с.
55. Duhamel J.M.C. Second memoire sur les phenomenes thermo mechaniques. // «Journal de l'ecole Polytechnique» - 1837.v.15, Nr25-P.3-53.
56. Fouriel J.B.J. Theorie analytique de la chaleur. – Paris. 1822.
57. Neumann F.E. Die Gesetze Doppelbrechung des Lichts in komprimierten oder ungleichformig er warmten unkrystallisihen Korper. // «Abhand der Koniglich Acad. Der Wiss, zw. Teill – Berlin. 1841.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ВСТУП.....	5
ГЛАВА 1. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ З ТЕРМОМЕХАНІКИ.....	9
1.1. Прикладне значення термомеханіки.....	9
1.2. Роль наближених методів механіки та математики.....	10
1.3. Предмет і завдання інженерної термомеханіки.....	14
1.4. Основні гіпотези. Реальний об'єкт і розрахункова модель.....	17
ГЛАВА 2. ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ В СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧЕНИХ СТЕРЖНЬОВИХ СИСТЕМАХ.....	25
2.1. Переміщення від дії температури.....	25
2.2. Короткі відомості про статично невизначені стержньові системи.....	34
2.3. Розкриття статичної невизначеності систем методом порівняння деформацій.....	39
2.4. Метод сил.....	54
ГЛАВА 3. ПОСТАНОВКА ТА ЗАГАЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ.....	68
3.1. Попередні відомості.....	68
3.2. Термопружні напруження в необмеженій пластині.....	69
3.3. Термопружні напруження в необмеженому циліндрі.....	72
3.4. Термопружні напруження в кулі.....	77
ГЛАВА 4. КОРОТКІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	81
4.1. Рівняння теплопровідності.....	81
4.2. Крайові умови задач теплопровідності.....	85
4.3. Критерії та числа подібності.....	89
ГЛАВА 5. ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ	

ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	95
5.1. Попередні зауваження.....	95
5.2. Стационарна задача теплопровідності необмеженої пластини.....	96
5.3. Стационарна задача теплопровідності необмеженого циліндра.....	100
5.4. Стационарна задача теплопровідності кулі.....	102
5.5. Деякі зауваження щодо точних розв'язків деяких нестационарних задач теплопровідності.....	106
ГЛАВА 6. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ	
ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.....	110
6.1. Попередні зауваження.....	110
6.2. Поняття термічного шару.....	112
6.3. Основи методу еквівалентних джерел.....	116
ГЛАВА 7. НАБЛИЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ НЕСТАЦІОНАРНИХ	
ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТІЛ ОСНОВНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	122
7.1. Загальне наближене розв'язання одновимірного рівняння теплопровідності.....	122
7.2. Розв'язок задачі теплопровідності з граничною умовою I-го роду.....	124
7.3. Розв'язок задачі теплопровідності при ступінчатому нагріванні тіла.....	129
7.4. Розв'язок задачі теплопровідності з граничною умовою II-го роду.....	133
7.5. Розв'язок задачі теплопровідності з лінійними граничними умовами III-го роду.....	138
7.6. Розв'язки задач теплопровідності порожнистих тіл.....	143
7.6.1. Загальний розв'язок.....	143
7.6.2. Гранична умова I-го роду.....	145
7.6.3. Гранична умова II-го роду.....	146
7.6.4. Гранична умова III-го роду.....	148

7.7. Розв'язок задачі теплопровідності плити при несиметричному нагріванні.....	149
ГЛАВА 8. ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН (ТНС) ТІЛ ПРИ СТАЦІОНАРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ.....	154
8.1. Попередні зауваження. ТНС необмеженої пластини при стаціонарній температурі.....	154
8.2. ТНС необмеженого циліндра при стаціонарній температурі.....	157
8.3. ТНС кулі при стаціонарній температурі.....	161
ГЛАВА 9. ВИЗНАЧЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ ПРИ РІЗНИХ УМОВАХ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕПЛОВОГО «НАВАНТАЖЕННЯ».....	164
9.1. Модель термічного шару в прикладній теорії термопружності.....	164
9.2. Температурні напруження при нестационарних лінійних умовах теплообміну.....	169
9.3. Розрахункові формули для максимальних напружень.....	176
9.4. Гранично допустимі величини теплотехнологічних параметрів.....	187
ГЛАВА 10. ПРИКЛАДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ (ТНС).....	191
10.1. ТНС трубчастих петльових рекуператорів РТ.....	191
10.2. ТНС водоохолоджуваних валів роликів пічних рольгангів.....	200
10.3. ТНС наскрізних виливниць.....	204
10.4. Вплив умов закріплення плити на її ТНС.....	214
10.5. ТНС футерованого диску клапана гарячого дуття.....	220
ПІСЛЯМОВА.....	235
ЛІТЕРАТУРА.....	239

Навчальне видання

Постольник Юрій Степанович

Солод Володимир Юрійович

ІНЖЕНЕРНА ТЕРМОМЕХАНІКА

Посібник

Підписано до друку 18.03.06. Формат 60?84 1/16
Папір друк. Друк – різнограф. Ум.-друк. арк. 14,35
Тираж – 300. Зам. №

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавництв серія ДК №1944

Друкарня
51918, Дніпродзержинськ
ДДТУ, вул. Дніпробудівська, 2